

# Kapitel 3

## Verzweigungen nahe homokliner Lösungen

### 3.1 Einleitung

Wir wollen in diesem Kapitel der Frage nachgehen, ob Lösungen einer (allgemeinen) Forward-Backward-Delay Gleichung existieren, die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen eine periodische Lösung konvergieren. Das Profil einer solchen Lösung kann man sich als Überlagerung einer periodischen und einer speziellen Lösung  $h(\cdot)$  vorstellen, die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen einen homogenen Zustand  $h_{\pm\infty}$  konvergiert. Besitzt die periodische Lösung eine kleine Amplitude und befindet sich nahe einer Gleichgewichtslösung  $h_{\pm\infty}$ , so liegt es nahe, die gesuchten Funktionen als abzweigende Lösungen der „primären“ Lösung  $h(\cdot)$  zu konstruieren. Wir wollen uns in diesem Abschnitt zunächst auf den Fall einer homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  beschränken, also gilt  $h_{\infty} = h_{-\infty}$ , und betrachten mögliche Verallgemeinerungen bezüglich heterokliner Lösungen in Kapitel 4.

Um vorerst die Existenz periodischer Lösungen der Forward-Backward-Delay Gleichung sicherzustellen, wollen wir annehmen, dass im Gleichgewicht  $h_{\infty}$  eine Hopfverzweigung auftritt. Diese Annahme impliziert, dass die Linearisierung entlang der primären Lösung  $h(\cdot)$  kein Fredholmoperator ist. Also ist die Null im essentiellen Spektrum dieses Operators und wir erwarten, dass in Abhängigkeit eines Parametervektors tatsächlich Lösungen von  $h(\cdot)$  abzweigen. Wir zeigen in diesem Kapitel, dass diese Intuition richtig ist und das Profil abzweigender Lösungen einer Überlagerung der periodischen und homoklinen Lösung gleicht.

Wir wollen bemerken, dass das Auftreten komplizierterer Phänomene nahe der homoklinen Lösung vorstellbar ist. Man beachte nämlich, dass allein das Auftreten komplex konjugierter Eigenwerte nahe der imaginären Achse im Gleichgewicht  $h_{\infty}$  zumindest bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bewirkt, dass unendlich viele periodische Orbits nahe der primären Lösung  $h$  auftreten können (siehe dazu die Bemerkungen in Abschnitt 3.8).

Das gesamte Kapitel ist nun wie folgt aufgebaut: Im nächsten Abschnitt formulieren wir die wesentlichen Annahmen und Resultate dieses Kapitels. In Abschnitt 3.3 beschäftigen wir uns dann mit der Konstruktion von Zentrumsdichotomien einer linearen, nichtautonomen Forward-Backward-Delay Gleichung. Der eigentliche Beweis unserer Hauptresultate beginnt dann in Kapitel 3.4. Das Hauptaugenmerk des Kapitels 3.4 liegt auf der Konstruktion verschiedener invarianter Mannigfaltigkeiten, die eine bedeutende Rolle in unserem Beweis spielen. Wir schließen das dritte Kapitel mit einigen Bemerkungen und einer

Beispielgleichung in Abschnitt 3.7 ab, für die wir alle Voraussetzungen unserer Resultate explizit verifizieren können.

## 3.2 Formulierung des Hauptresultates

Wir wollen nun eine allgemeine Forward-Backward Delay-Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c), \quad (3.1)$$

betrachten, wobei  $f(\cdot, \lambda, c) : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine  $C^k$ -Abbildung mit  $k \geq 2$  und  $a, b > 0$  ist und  $f(\varphi, \lambda, c)$  für festes  $\varphi \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  zweimal stetig differenzierbar von zwei reellen Parametern  $\lambda, c$  abhängt. Hierbei ist  $\lambda \in (-\varepsilon + \lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$  und  $c \in (-\delta + c_0, c_0 + \delta)$ . Wir wollen an dieser Stelle schon darauf hinweisen, dass unsere Beweise *nicht* ohne weiteres auf Fall den einer reinen Delaygleichung (also im Fall  $b = 0$ ) übertragen werden können, weswegen die Annahme  $a, b > 0$  in diesem Kapitel von großer Wichtigkeit ist.

Wir nehmen nun die Existenz einer homoklinen Lösung  $h(t)$  an, die die Gleichung (3.1) für den Parameterwert  $(\lambda_0, c_0)$  löst. D.h. es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = h_\infty, \quad (3.2)$$

für ein  $h_\infty$ , das notwendigerweise ein Gleichgewicht von (3.1) ist. Wir werden von nun an ohne Einschränkung  $h_\infty = 0$  annehmen. Zusammengefasst wollen wir also folgende Annahme machen:

### Hypothese 1 (Existenz)

*Es existiere eine homokline Lösung  $h(t)$ , die zweimal stetig differenzierbar ist und (3.1) für den Parameterwert  $(\lambda_0, c_0)$  löst. Außerdem erfülle  $h(t)$  für negative  $t < 0$  folgendes asymptotische Verhalten:*

- es gelte  $h(t) \rightarrow 0$  exponentiell schnell für  $t \rightarrow -\infty$ .

Man beachte, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die homokline Lösung  $h(\cdot)$  ein Kodimension-Eins-Phänomen ist.

Setzen wir nun  $L := D_1 f(0, \lambda_0, c_0)$  und  $\tilde{g}(\varphi, \lambda, c) := f(\varphi, \lambda, c) - L$  für  $\varphi \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  und alle  $\lambda, c$ , so wollen wir annehmen, dass im Gleichgewicht null bezüglich  $\lambda$  eine superkritische Hopfverzweigung in dem Parameterwert  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  auftritt. Wir bezeichnen dazu die charakteristische Funktion bezüglich  $D_1 f(0, \lambda, c)$  mit  $\det \Delta(\mu) = \det \Delta(\mu, \lambda, c)$ . Wir wollen annehmen, dass  $\det \Delta(\cdot, \lambda_0, c_0)$  genau zwei einfache, rein imaginäre Nullstellen  $\pm i\omega$  mit  $\omega \neq 0$  besitzt. Als Konsequenz existiert für  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  ein weiteres Gleichgewicht nahe null und wir nehmen an, dieses Gleichgewicht ist stets  $h_\infty = 0$ . Da die Nullstellen  $\pm i\omega$  mit  $\omega \neq 0$  einfach sein, gilt  $\det \Delta(i\omega, \lambda_0, c_0) = 0$  und  $D_\mu \det \Delta(i\omega, \lambda_0, c_0) \neq 0$ . Weiterhin kann man diese Nullstelle in Abhängigkeit von  $(\lambda, c)$  nahe  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  parametrisieren. Also existiert eine  $C^1$ -Abbildung  $\mu(\lambda, c)$  mit  $\mu(\lambda_0, c_0) = i\omega$  und  $\det \Delta(\mu(\lambda, c), \lambda, c) = 0$ .

Wir können nun diejenige Annahme formulieren, die uns eine Hopfverzweigung garantiert.

### Hypothese 2 (Hopf)

*Sei  $\det \Delta(\mu) = a_0 + a_1(\mu - i\omega) + O((\mu - i\omega)^2)$  die Taylorentwicklung der charakteristischen Funktion nahe  $i\omega$ . In dieser Entwicklung hängen die Koeffizienten  $a_0, a_1$  von den*

Parametern  $\lambda, c$  ab und es gilt  $a_0(\lambda_0, c_0) = 0$ . Wir wollen nun  $\partial_\lambda \operatorname{Re}(\mu(\lambda, c))|_{(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)} > 0$  annehmen. Explizit ist dieser Term durch

$$\partial_\lambda \operatorname{Re}(\mu(\lambda_0, c_0)) = -\operatorname{Re} [\partial_\mu \det \Delta (i\omega, \lambda_0, c_0)^{-1} (\partial_\lambda \det \Delta (i\omega, \lambda_0, c_0))]$$

gegeben. Desweiteren gelte  $\det \Delta(ik) \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{R}$  mit  $k \neq \pm\omega$ .

Bevor wir nun zeigen, dass aufgrund dieser Hypothese tatsächlich periodische Lösungen kleiner Amplitude entstehen, gehen wir zunächst zu anderen Parametern  $(\tilde{\lambda}, c)$  über. Mit diesen werden (nichttriviale) periodische Lösungen genau für Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c)$  und  $\tilde{\lambda} > 0$  auftreten.

#### Parameterwechsel

Wir wollen nun Parameter  $(\tilde{\lambda}, \tilde{c})$  finden, so dass die charakteristische Funktion  $\det \Delta(\cdot)$  genau für Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c)$  in der Nähe des Verzweigungspunktes mit  $\tilde{\lambda} = 0$  rein imaginäre Nullstellen besitzt.

Die Abbildung  $(\mu, \lambda, c) \rightarrow \det \Delta(\mu, \lambda, c)$  erfüllt nach Annahme

$$\det \Delta(i\omega, \lambda_0, c_0) = 0, \quad D_1(\det \Delta)(i\omega, \lambda_0, c_0) \neq 0.$$

Also ist die Abbildung  $\mu = \mu(\lambda, c)$ , die kurz vor Hypothese 2 definiert wurde, nach dem impliziten Funktionensatz eine glatte Funktion bezüglich  $(\lambda, c)$  nahe  $(\lambda_0, c_0)$ . Betrachte nun die Hilfsfunktion  $l(\lambda, c) := \operatorname{Re} \mu(\lambda, c)$ , dann gilt

$$l(\lambda_0, c_0) = \operatorname{Re}(i\omega) = 0, \quad D_1 l(\lambda_0, c_0) \neq 0$$

nach Hypothese 2. Also existiert eine glatte Funktion  $\lambda_* = \lambda_*(c)$  bezüglich  $c$  nahe  $c_0$  mit  $\operatorname{Re}(\mu(\lambda_*(c), c)) = 0$  für alle zulässigen  $c \approx c_0$ , siehe Abbildung 3.1. Genau für diese  $\mu$  besitzt die Funktion  $\det \Delta(\cdot, \lambda, c)$  rein imaginäre Nullstellen. Man beachte, dass in jedem vertikalen Streifen der komplexen Ebene nur *endlich* viele Nullstellen liegen. Falls also  $(\lambda, c)$  genügend nahe an  $(\lambda_0, c_0)$  liegt, besitzen alle weiteren Nullstellen  $\eta$  mit  $\operatorname{Re}(\eta) \neq 0$  einen positiven Abstand von der imaginären Achse.

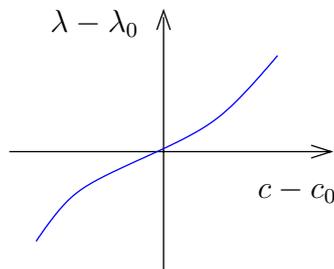


Abbildung 3.1: Die Hopfkurve  $(\lambda, c) = (\lambda_*(c), c)$ .

Wir wollen nun Parameter  $(\tilde{\lambda}, c)$  finden, so dass die Hopfkurve  $\lambda_*(c)$  lokal nahe  $c = c_0$  der  $c$ -Achse entspricht. Dazu definieren wir

$$(\lambda, c) = (\lambda_*(c) + \tilde{\lambda}, c) \tag{3.3}$$

für  $c \approx c_0$  und  $\lambda \approx \lambda_0$ . Dieser Parameterwechsel ist wohldefiniert, da die Ableitung der Abbildung  $(\tilde{\lambda}, c) \rightarrow (\lambda_*(c) + \tilde{\lambda}, c) = (\lambda, c)$  bei  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  invertierbar ist. Wir setzen also  $f_{neu}(\varphi, \tilde{\lambda}, c) := f(\varphi, (\lambda_*(c) + \tilde{\lambda}), c)$ , unterdrücken aber von nun an die Bezeichnung „neu“ und arbeiten ab sofort mit der Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c). \quad (3.4)$$

Man beachte, dass diese Gleichung bezüglich der neuen Parameter  $\tilde{\lambda}, c$  ebenfalls die Hypothese 2 erfüllt: Bezeichnen wir den kritischen Eigenwert bezüglich der neuen Parameter ein letztes Mal mit  $\mu_{neu}(\tilde{\lambda}, c)$  (wobei wir im Anschluss auch hier die Bezeichnung „neu“ unterdrücken), so gilt  $\mu_{neu}(\tilde{\lambda}, c) = \mu(\tilde{\lambda} + \lambda_*(c), c)$  und ebenfalls  $\partial_{\tilde{\lambda}} \operatorname{Re}(\mu_{neu}(\tilde{\lambda}, c_0))|_{\tilde{\lambda}=0} > 0$ .

Wir zeigen nun im Abschnitt „Hopfverzweigung“ des Kapitels 3.4, dass die abstrakte Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\Phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\Phi(t, \cdot)) \\ \partial_{\theta} \Phi(t, \cdot) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{g}(\Phi(t, \cdot), \tilde{\lambda}, c) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

mit  $(\xi(t), \Phi(t, \cdot)) \in X := \{(\eta, \Psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) : \eta = \Psi(0)\}$  für gewisse Parameterwerte  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  eine nichttriviale periodische Lösung  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  nahe null besitzt, falls Hypothese 2 erfüllt ist. Existiert für ein Parameterwert  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  keine nichttriviale periodische Lösung nahe dem Gleichgewicht, so setzen wir  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \equiv 0$ . Wir können nun nach Lemma 2.2

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot) \end{pmatrix}$$

schreiben und bemerken, dass die Funktionen  $\gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  periodische Lösungen der ursprünglichen Gleichung (3.4) sind. Die periodischen Lösungen liegen auf einer parameterabhängigen Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\tilde{\lambda}, c}$  des Systems (3.5), deren Existenz aus Satz 2.6 folgt. Wie wir in Abschnitt 1.6.3 der Einleitung erklärt haben, lässt sich nun die Dynamik der Gleichung (3.5) in einer Umgebung des Gleichgewichtes null auf  $\mathcal{M}$  einschränken. Die reduzierte Gleichung ist unserem Fall eine zweidimensionale gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f_{red}(y(t), \tilde{\lambda}, c), \quad (3.6)$$

wobei das reduzierte Vektorfeld  $f_{red}$  in einer kleinen Umgebung der Null definiert ist. Um sicherzustellen, dass die periodischen Lösungen  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  stabil bezüglich der reduzierten Gleichung (3.6) sind, wollen wir annehmen, dass die Hopfverzweigung *superkritisch* ist. Dazu stellen wir fest, dass  $\operatorname{spec}(D_1 f_{red}(0, 0, c_0)) = \{\pm i\omega\}$  gilt. Nach Normalformtheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen können wir deswegen annehmen, dass das Taylorpolynom bis zu endlicher Ordnung rotationsäquvariant ist; siehe [25, 6]. Schreiben wir das reduzierte Vektorfeld also in komplexen Koordinaten  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ , so gilt

$$f_{red}(z, \tilde{\lambda}, c_0) = \left( b_1(\tilde{\lambda}, c_0) + i[d_1(\tilde{\lambda}, c_0)] \right) z + d(\tilde{\lambda}, c_0)z|z|^2 + \text{h.o.t} \quad (3.7)$$

mit  $b_1(0, c_0) = 0, d_1(0, c_0) = \omega$ . Wir machen nun folgende Annahme

### Hypothese 3 (Superkritisch)

Betrachten wir die Taylorentwicklung des reduzierten Vektorfeldes  $f_{red}$  in der Darstellung (3.7), so wollen wir  $\operatorname{Re}(d(0, c_0)) < 0$  annehmen.

Diese letzte Hypothese besagt zusammen mit Hypothese 2, dass die durch die Hopfverzweigung entstehende Familie periodischer Orbits für Parameterwerte  $\tilde{\lambda} > 0$  auf der Zentrumsmanifold auftritt. Hypothese 2 impliziert nun, dass der Realteil der kritischen „Hopf-Eigenwerte“  $\mu(\tilde{\lambda})$  die imaginäre Achse von links nach rechts kreuzt, wenn  $\tilde{\lambda}$  anwächst. Also ist das Gleichgewicht null für Parameterwerte  $\tilde{\lambda} > 0$  instabil und die periodischen Lösungen sind deswegen stabil. Unsere Annahmen implizieren daher eine superkritische Hopfverzweigung, in der die periodischen Lösungen bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmanifold stabil sind.

Wir betrachten nun die Linearisierung entlang des homoklinen Orbits  $h(\cdot)$ . Formales ableiten der Gleichung (3.4) entlang der Lösung  $h(\cdot)$  führt dann zu der linearisierten Gleichung

$$\dot{v}(t) = D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)v_t, \quad (3.8)$$

wobei  $v_t \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  ist. Diese Gleichung induziert eine Abbildung  $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}, c} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ , definiert durch

$$(\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}, c} w(\cdot))(t) := \partial_t w(t) - D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)w_t. \quad (3.9)$$

Wir werden weiterhin annehmen, dass der Term  $D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)$  die Form

$$D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)\varphi = \int_{-a}^b p(t, \theta, \tilde{\lambda}, c)\varphi(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^m A_k(t, \tilde{\lambda}, c)\varphi(r_k), \quad (3.10)$$

für  $\varphi(\cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  hat; hierbei ist  $p(\cdot, \cdot, \tilde{\lambda}, c) : \mathbb{R} \times [-a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  eine stetige Funktion, die Funktionen  $A_k(\cdot, \tilde{\lambda}, c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  sind stetig und beschränkt und es gelte  $-a \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m \leq b$ .

Hinsichtlich der Eindeutigkeit der Lösungen von (3.9) machen wir folgende Annahme:

**Hypothese 4 (Eindeutige-Fortsetzungs-Eigenschaft (EFE))**

Das einzige Element  $w$  im Kern von  $\mathcal{L}_{0, c_0}$ , das  $w_t = 0$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt, ist die Nulllösung.

Wir werden im Kapitel 3.3.5 zeigen, dass diese Annahme für eine große Klasse von Abbildungen  $\mathcal{L}$  erfüllt ist. Kurz gesagt ist diese Annahme immer dann erfüllt, wenn in der Darstellung (3.10) für jedes feste  $t$   $\det A_1(t, 0, c_0) \neq 0$  und  $\det A_m(t, 0, c_0) \neq 0$  gilt.

Wir bezeichnen nun mit  $H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  die Menge aller lokal integrierbaren Funktionen, die Elemente in  $H^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  sind und bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)}$  beschränkt sind. Hierbei ist  $\|w\|_{H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)} := \|w\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)} + \|\partial_t w\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)}$  für ein  $\eta \in \mathbb{R}$  und

$$\|w\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\eta t} w(t)|^2 dt.$$

Analog bezeichne  $L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  die Menge aller lokal integrierbaren Funktionen, die bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)}$  beschränkt sind. Wie wir in Abschnitt 3.5 zeigen, ist der Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) &\rightarrow L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \\ \mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : v(\cdot) &\mapsto \mathcal{L}_{0, c_0} v(\cdot) \end{aligned}$$

für  $\eta \in (0, \eta_1)$  ein Fredholmoperator vom Index Null, falls  $\eta_1$  klein genug ist. Man beachte, dass der Operator  $\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta$  für kleine  $\eta > 0$  aufgrund der Hypothese „Existenz“ mindestens einen eindimensionalen Kern besitzt, da  $h'(\cdot) \in H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  ein Kernelement definiert.

Um die adjungierte Gleichung einzuführen, bezeichnen wir nun mit  $p^*(t, \theta, \tilde{\lambda}, c_0)$  die zu  $p(t, \theta, \tilde{\lambda}, c_0)$  adjungierte Matrix. Die bezüglich (3.8) adjungierte Gleichung nimmt dann folgende Form an:

$$\partial_t v(t) = - \int_{-a}^b p^*(t - \theta, \theta, 0, c_0) v(t - \theta) d\theta - \sum_{k=1}^m A_k^*(t - r_k, 0, c_0) v(t - r_k).$$

Außerdem zeigen wir im Beweis des Lemmas 3.21), dass diese Gleichung eine (bis auf eine skalares Vielfaches) eindeutige beschränkte Lösung  $\rho(\cdot)$  besitzt, die folgende Eigenschaft hat: Es gilt

$$|\rho(t)| \leq M e^{-\alpha t} \quad (3.11)$$

für  $t \rightarrow \infty$  und ein  $\alpha > 0$ .

Zuletzt betrachten wir die nichtlineare Gleichung

$$\dot{x}(t) = D_1 f(h_t, 0, c_0) x_t + g(t, x_t, \tilde{\lambda}, c), \quad (3.12)$$

wobei wir  $g(t, \varphi, \tilde{\lambda}, c) := f(\varphi, \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(h_t, 0, c_0) \varphi$  für  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  gesetzt haben, und machen folgende Annahme:

### Hypothese 5 (Transversalität)

Es existiere ein  $\eta_1 > 0$ , so dass der Operator  $\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  für alle  $\eta \in (0, \eta_1)$  ein Fredholmoperator vom Index null ist und einen eindimensionalen Kern besitzt. Weiterhin gelte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(s) \partial_c g(s, h_s, 0, c) \Big|_{c=c_0} ds \neq 0 \quad (3.13)$$

für die eindeutige, beschränkte Lösung  $\rho(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  der adjungierten Gleichung

$$\partial_t v(t) = - \int_{-a}^b p^*(t - \theta, \theta, 0, c_0) v(t - \theta) d\theta - \sum_{k=1}^m A_k^*(t - r_k, 0, c_0) v(t - r_k), \quad (3.14)$$

die (3.11) erfüllt.

Man beachte, dass das Integral in (3.13) wohldefiniert ist. Denn wegen der Abschätzung (3.11) klingt der Integrand  $\rho(s) \partial_c g(s, h_s, 0, c_0)$  für  $s \rightarrow \infty$  exponentiell ab. Außerdem haben wir wegen der Annahme, dass  $h(t)$  in Rückwärtszeit exponentiell gegen null konvergiert sichergestellt, dass das gesamte Integral wohldefiniert ist.

Was bedeutet diese Hypothese nun geometrisch? Stellen wir uns dafür den Spezialfall einer gewöhnlichen Differentialgleichung vor. Die Hypothese „Transversalität“ bedeutet dann, dass sich die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit und die instabile Mannigfaltigkeit der Null nur entlang des homoklinen Orbits  $h(\cdot)$  schneiden. Also besitzt die Summe der Tangentialräume dieser Mannigfaltigkeiten in jedem Punkt des Orbits die Kodimension eins. Gilt allerdings Ungleichung (3.13), so sind die um den Parameter  $c$  erweiterten Mannigfaltigkeiten (die wir in Gleichung (1.19) in der Einleitung eingeführt haben) transversal zueinander. Auf diese Implikationen gehen wir allerdings noch genauer in Lemma 3.20 und 3.21 ein.

Bevor wir nun unsere Hauptresultate definieren, sei daran erinnert, dass  $BC^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  für ein  $\beta \in \mathbb{R}$  die Menge aller stetigen Funktionen  $x$  definiert, die bezüglich der Norm  $|x(\cdot)|_\beta = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-\beta|t|} |x(t)|_{\mathbb{R}^N}$  beschränkt sind. Für ein  $r \in \mathbb{R}$  und  $\zeta > 0$  sei weiterhin  $B_\zeta(r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - r| < \zeta\}$ .

**Satz 3.1**

Wir nehmen an, dass die Hypothesen 1-5 erfüllt sind und  $f(\cdot, \tilde{\lambda}, c) : H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  dreimal stetig differenzierbar ist. Dann existiert ein  $\zeta > 0$ , eine differenzierbare Funktion  $\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot) : B_\zeta(0) \times B_\zeta(c_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , eine stetige Funktion  $\hat{c}(\cdot) : B_\zeta(0) \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Familie von Funktionen  $h^\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit den folgenden Eigenschaften:

- **Lösungen:** Alle Abbildungen  $h^\sigma(\cdot)$  sind auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösungen der Gleichung (3.4) für  $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma))$  und erfüllen  $h^\sigma(\cdot) \in H_{loc}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ .
- **Stetige Abhängigkeit:** Es ist  $\hat{c}(0) = c_0$ ,  $\tilde{\lambda}(0, c_0) = 0$ ,  $h^0(t) = h(t)$  und es existiert ein  $\beta_0 > 0$ , so dass  $\sigma \mapsto h^\sigma(\cdot)$  als Abbildung von  $B_\zeta(0)$  nach  $BC^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  für ein beliebiges  $\beta \in (0, \beta_0)$  stetig ist.
- **Konvergenz in Rückwärtszeit:** Es gilt  $|h^\sigma(t) - \gamma_{\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma)}(t + \theta_*)| \leq M e^{-\tilde{a}|t|}$  für  $t \rightarrow -\infty$ , ein  $\tilde{a} > 0$  und ein  $\theta_* \in \mathbb{R}$ .
- **Konvergenz in Vorwärtszeit:** Es gilt  $|h^\sigma(t) - \gamma_{\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma)}(t + \theta_0)| \leq M e^{-\kappa|t|}$  für  $t \rightarrow \infty$ , ein  $\theta_0 = \theta_0(\sigma) \in \mathbb{R}$  und ein  $\kappa > 0$ .
- **Nichttriviale Periodizität:** Die periodischen Lösungen  $t \rightarrow \gamma_{\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma)}(t)$  besitzen zu erster Ordnung in  $\sigma$  die Amplitude  $C\sigma$  für  $\sigma > 0$  und eine reelle Zahl  $C > 0$ . Insbesondere sind diese Lösungen keine Gleichgewichte für  $\sigma > 0$ .
- **Jeder Parameterwert tritt auf:** Für jedes  $\tilde{\lambda} > 0$  klein genug (das sind die  $\tilde{\lambda}$ -Werte, für die nichttriviale periodische Lösungen existieren) und  $c \approx c_0$  existiert ein  $\sigma \in B_\zeta(0)$  mit  $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}(\sigma, c), c)$ .

Die Lösungen dieses Theorems sind in Abbildung 3.2 veranschaulicht.

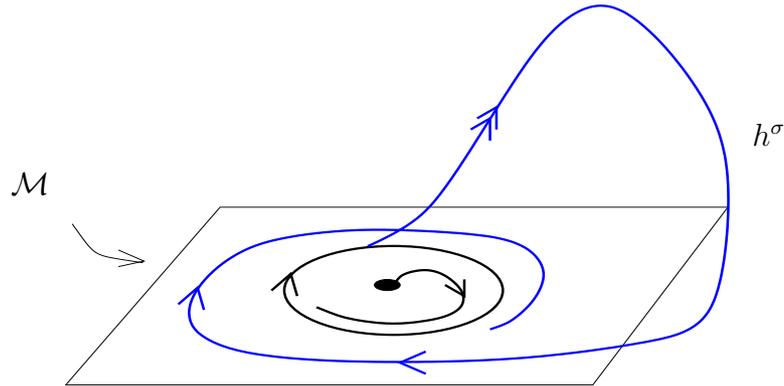


Abbildung 3.2: In der Abbildung ist die Lösung  $h^\sigma$  aus Satz 3.1 dargestellt. Ein einfacher Pfeil repräsentiert Konvergenz entlang der Zentrumsrichtung.

Außerdem können wir die Existenz von Lösungen  $h^\sigma(\cdot)$  zeigen, die in Rückwärtszeit gegen ein Gleichgewicht und in Vorwärtszeit gegen einen periodischen Orbit konvergieren.

**Satz 3.2**

Wir nehmen an, dass die Hypothesen 1-5 erfüllt sind und  $f(\cdot, \tilde{\lambda}, c) : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  zweimal stetig differenzierbar ist. Dann existiert ein  $\zeta > 0$ , eine stetige Funktion

$\tilde{c}(\cdot) : B_\zeta(0) \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Familie von Funktionen  $h^\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit den folgenden Eigenschaften:

- **Lösungen:** Alle Abbildungen  $h^\sigma(\cdot)$  sind auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösungen der Gleichung (3.4) für  $(\tilde{\lambda}, c) = (\sigma, \tilde{c}(\sigma))$  und erfüllen  $h^\sigma(\cdot) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ .
- **Stetige Abhängigkeit:** Es ist  $\tilde{c}(0) = c_0$ ,  $h^0(t) = h(t)$  und es existiert ein  $\beta_0 > 0$ , so dass  $\sigma \mapsto h^\sigma(\cdot)$  als Abbildung von  $B_\zeta(0)$  nach  $BC^\beta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  für ein beliebiges  $\beta \in (0, \beta_0)$  stetig ist.
- **Konvergenz in Rückwärtszeit:** Es gilt  $|h^\sigma(t)| \leq M e^{-\tilde{a}|t|}$  für  $t \rightarrow -\infty$  und ein  $\tilde{a} > 0$
- **Konvergenz in Vorwärtszeit:** Es gilt  $|h^\sigma(t) - \gamma_{\sigma, \tilde{c}(\sigma)}(t + \theta_0)| \leq M e^{-\kappa|t|}$  für  $t \rightarrow \infty$ , ein  $\theta_0 = \theta_0(\sigma) \in \mathbb{R}$  und ein  $\kappa > 0$ .
- **Nichttriviale Periodizität:** Die periodischen Lösungen  $t \rightarrow \gamma_{\sigma, \tilde{c}(\sigma)}(t)$  besitzen zu erster Ordnung die Amplitude  $C\sqrt{\sigma}$  für  $\sigma > 0$  und eine reelle Zahl  $C > 0$ . Insbesondere sind diese Lösungen keine Gleichgewichte für  $\sigma > 0$ .

Die Lösungen dieses Theorems sind in Abbildung 3.3 veranschaulicht.

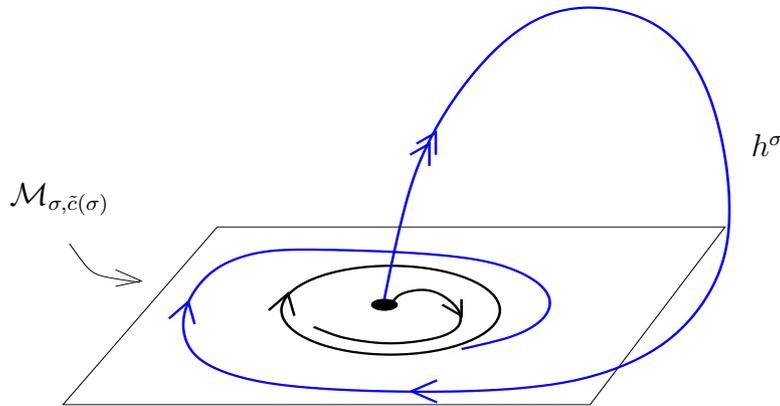


Abbildung 3.3: In der Abbildung ist die Lösung  $h^\sigma$  aus Satz 3.2 dargestellt. Ein einfacher Pfeil repräsentiert Konvergenz entlang der Zentrumsrichtung.

### Bemerkungen

- Wir wollen noch bemerken, dass die in den beiden Theoremen nahe  $h(t)$  existierenden Lösungen  $h^\sigma(t)$  bis auf einen Shift bezüglich  $t$  zusammen mit dem asymptotischen Verhalten für  $|t| \rightarrow \infty$  *eindeutig* in einer kleinen Tubenumgebung von  $h(\cdot)$  sind, wie durch den Beweis ersichtlich wird (siehe Korollar 3.2). D.h. alle Lösungen  $w(\cdot)$  der Gleichung (3.4) für  $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$ , die punktweise genügend nahe an  $h(\cdot)$  liegen, in Vorwärtszeit gegen einen durch die Hopfverzweigung entstehenden periodischen Orbit konvergieren und in Rückwärtszeit exponentiell schnell gegen das Gleichgewicht Null, erfüllen  $w(\cdot) = h^\sigma(\cdot + t_*)$  für ein  $\sigma \in B_\zeta(0)$  und ein  $t_* \in \mathbb{R}$ .
- Gilt  $\partial_c \det \Delta(i\omega, \lambda_0, c)|_{c=c_0} = 0$ , wobei  $\det \Delta(i\omega, \lambda_0, c)$  die charakteristische Funktion bezüglich der Linearisierung  $D_1 f(0, \lambda_0, c_0)$  der ursprünglichen Gleichung (3.1)

bezeichnet, so können alle formulierten Hypothesen auch für die Gleichung (3.1) bezüglich der *ursprünglichen* Parameter formuliert werden. In diesem Fall gilt nämlich  $\partial_c \lambda_*(c)|_{c=c_0} = 0$  (wobei die Funktion  $\lambda_*(\cdot)$  in (4.3) definiert ist). In der Berechnung des Melnikovterms (3.13) gilt dann:

$$\begin{aligned}
 \partial_c g(h_t, \lambda, c)|_{c=c_0} &= \partial_c g(h_t, \tilde{\lambda} + \lambda_*(c), c)|_{c=c_0} \\
 &= \partial_2 g(h_t, \tilde{\lambda} + \lambda_*(c_0), c_0) \cdot \partial_c \lambda_*(c)|_{c=c_0} + \partial_c g(h_t, \tilde{\lambda} + \lambda_*(c), c)|_{c=c_0} \\
 &= \partial_c g(h_t, \tilde{\lambda}, c)|_{c=c_0}.
 \end{aligned}$$

