

Kapitel 2

Zentrumsmanifoldigkeiten

2.1 Forward-Backward-Delay Gleichungen, Definitionen

Für eine stetige Abbildung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ führen wir folgende Notation ein:

Notation

Im folgenden bezeichne $x_t \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ diejenige stetige Funktion, die durch $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ für $\theta \in [-a, b]$, $a, b \geq 0$ definiert ist. Alle Ergebnisse in diesem Kapitel gelten also insbesondere auch für den Fall einer Delay Gleichung $a > 0, b = 0$.

Wir interessieren uns nun für Lösungen des Systems

$$\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t). \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnet $L : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine beschränkte lineare Abbildung und $g : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine glatte Funktion mit $Dg(0) = 0$. Wir nennen nun eine Abbildung $\eta : [-a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ von beschränkter Variation, falls

$$\sup_{P(-a, b)} \sum_{i=1}^n |\eta(\sigma_i) - \eta(\sigma_{i+1})| < \infty$$

gilt und $P(-a, b) = \{\sigma_i : i = 1, \dots, n\}$ eine Partition des Intervalls $(-a, b)$ ist (siehe auch den Appendix des Lehrbuches [28]). Es ist bekannt (siehe etwa [28], Theorem 1.1, Seite 12), dass es für jede beschränkte lineare Abbildung $\tilde{L} : C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{C}^N$ eine Abbildung $\eta : [-a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ von beschränkter Variation gibt, so dass

$$\tilde{L}(\varphi) = \int_{-a}^b \varphi(\theta) d\eta(\theta) \quad (2.2)$$

gilt. Wir definieren nun, was wir unter einer Lösung der Gleichung (2.1) verstehen.

Definition 8

Wir nennen eine stetige Funktion $x : [t_1 - a, t_2 + b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine **Lösung von (2.1)** auf dem Intervall $[t_1, t_2]$, falls $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ absolut stetig ist und (2.1) auf $[t_1, t_2]$ fast überall erfüllt ist.

Wir wollen bemerken, dass das Problem (2.1) nicht wohlgestellt ist: selbst im Fall einer linearen Gleichung ($g = 0$) muss nicht zu jedem Anfangswert $\varphi \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ eine Lösung existieren. Dies steht natürlich in scharfem Gegensatz zu Delaygleichungen, für die $b = 0$ gilt und ein lokaler Semifluss $\Psi : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ existiert, der als Shiftabbildung auf den Lösungen der Delaygleichung operiert (siehe etwa [16]).

Wir nehmen nun an, dass $\varphi = 0$ eine Gleichgewichtslösung von (2.1) ist. Unser Ziel ist es, alle beschränkten Lösungen von (2.1) nahe null zu studieren. Um dieses Ziel zu erreichen, werden wir eine Zentrumsmanifold für diese Gleichung konstruieren. Dazu müssen wir (2.1) zunächst in einer anderen Form schreiben.

Wir definieren den Operator

$$\mathcal{A} : X \subset Y \rightarrow Y$$

mit $Y := \mathbb{R}^N \times L^2([-a, b], \mathbb{R}^N)$ und $X := \{(\xi, \varphi) \in Y \mid \varphi \in H^1((-a, b), \mathbb{R}^N) \text{ und } \varphi(0) = \xi\}$ durch

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi) \\ \partial_\theta \varphi \end{pmatrix}$$

für $(\xi, \varphi) \in X$.

Man beachte, dass bei der Definition von X die Bedingung $\varphi(0) = \xi$ wohldefiniert ist, da $H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ stetig einbettet. Desweiteren ist eine Funktion $\varphi \in H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$ fast überall differenzierbar, da sie absolut stetig ist.

Betrachte nun die Gleichung

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{G}(U(t)) \quad (2.3)$$

mit

$$\mathcal{G} : X \rightarrow Y$$

definiert durch

$$\mathcal{G}(\xi, \varphi) = \begin{pmatrix} g(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $(\xi, \varphi) \in X$.

Definition 9

Wir nennen eine stetige Funktion $U(t) : [t_1, t_2) \rightarrow Y$ eine **Lösung von (2.3) auf** (t_1, t_2) für $-\infty < t_1 < t_2 \leq \infty$, falls $t \rightarrow U(t) \in X$ als Abbildung von (t_1, t_2) nach X stetig ist, $t \rightarrow U(t)$ als Abbildung von (t_1, t_2) nach Y differenzierbar und (2.3) in Y auf (t_1, t_2) erfüllt ist.

Wir nennen eine Funktion $U(t) : (-\infty, t_2) \rightarrow Y$ eine **Lösung von (2.3) auf** $(-\infty, t_2)$ für $t_2 \in \mathbb{R}$, falls $t \rightarrow U(t) \in X$ als Abbildung von $(-\infty, t_2)$ nach X stetig ist, $t \rightarrow U(t)$ als Abbildung von $(-\infty, t_2)$ nach Y differenzierbar und (2.3) in Y auf $(-\infty, t_2)$ erfüllt ist.

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung (2.1) und Gleichung (2.3) her, wozu wir folgendes Lemma benötigen (siehe dazu auch [43], Lemma 2.1 und 2.2)

Lemma 2.1

Sei

$$U(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \varphi(t)(\cdot) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (2.3) auf (t_1, t_2) . Dann gilt $\varphi(t)(\theta) = \xi(t + \theta)$ für alle $t \in (t_1, t_2)$ und $\theta \in [-a, b]$ mit $t + \theta \in (t_1, t_2)$

Beweis

Um das Lemma zu beweisen, zeigen wir

$$\varphi(t + \theta)(0) = \varphi(t)(\theta)$$

für alle $t \in (t_1, t_2)$ und $\theta \in [-a, b]$ mit $t + \theta \in (t_1, t_2)$. Denn da $\varphi(t)(0) = \xi(t)$ für alle t aufgrund der Definition von X gilt, folgt die Behauptung des Lemmas.

Es empfiehlt sich nun für $t \in (t_1, t_2)$ die Koordinaten $(\tau, \theta) = (t + \theta, \theta)$ einzuführen, und die Funktion

$$[\tilde{\varphi}(\tau)](\theta) := [\varphi(\tau - \theta)](\theta)$$

zu betrachten. Sei nun $t \in (t_1, t_2)$ und $t + \theta \in (t_1, t_2)$, dann ist auch $\tau \in (t_1, t_2)$ und $\tau - \theta \in (t_1, t_2)$. Da nach Annahme $\partial_t \varphi = \partial_\theta \varphi$ auf (t_1, t_2) bezüglich der ursprünglichen Koordinaten (t, θ) gilt, können wir in den neuen Koordinaten (τ, θ) die Identität $\tilde{\varphi}(\tau, \theta) = \tilde{\varphi}(\tau, 0)$ für fast alle τ schlussfolgern. Da aber $\tilde{\varphi}(\tau, 0) = [\varphi(\tau)](0)$ und $[\varphi(\tau)](0) = \xi(\tau)$ stetig in τ ist, gilt $\tilde{\varphi}(\tau, \zeta) = \tilde{\varphi}(\tau, 0)$ sogar für alle τ . Also haben wir gezeigt: $\varphi(\tau - \theta)(0) = \varphi(\tau)(0)$ für alle τ und θ und daraus folgt $\varphi(t + \theta)(0) = \varphi(t)(\theta)$. \square

Zusammenfassend haben wir also folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 2.2

Sei $U(t)$ eine Lösung von (2.3) auf $(t_1 - a, t_2 + b)$ und bezeichne mit $\xi(t)$ die erste Komponente von $U(t)$. Dann ist $\xi(t)$ gemäß der Definition (8) eine Lösung von (2.1) auf $[t_1, t_2]$.

Außerdem erhalten wir natürlich Lösungen $U(t)$ von (2.3) mittels glatter Lösungen $x(t)$ von (2.1), indem wir

$$U(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x_t \end{pmatrix}$$

setzen.

2.2 Lineare Mixed-Type Gleichungen

2.2.1 Die lineare Mixed-Type Gleichung im abstrakten Setting

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften des linearen Operators \mathcal{A} zusammentragen. Da wir insbesondere das Spektrum $\text{spec}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}$ näher beschreiben wollen, arbeiten wir in diesem Abschnitt mit dem *komplexifizierten* Banachraum $C_{\mathbb{C}}([-a, b], \mathbb{R}^N)$, den wir mit $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ identifizieren, siehe dazu etwa [28] Seite 81.

Wenn man nun Gleichung (2.1) auf $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ studiert, so spielt im linearen Fall ($g = 0$) der Operator

$$B : \mathcal{D}(B) \subset C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow C^0([-a, b], \mathbb{C}^N),$$

definiert durch

$$B\varphi = \partial_\theta \varphi,$$

mit $\varphi \in \mathcal{D}(B) := \{\varphi \in C^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \mid \dot{\varphi}(0) = L(\varphi)\}$ eine wichtige Rolle. Sei etwa $x(t)$ eine Lösung von (2.1) auf \mathbb{R} mit $g = 0$. Dann löst $t \rightarrow x_t$ die Gleichung

$$\partial_t x_t = Bx_t.$$

und es gilt $\dot{x}(t) = Lx_t$, also $x_t \in \mathcal{D}(B)$.

Sei auf der anderen Seite $t \rightarrow \varphi(t) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ eine glatte Lösung von

$$\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t)$$

auf \mathbb{R} . Nach der Methode der Charakteristiken (siehe [52]) existiert dann eine Funktion $x(t)$ mit $\varphi(t)(\theta) = x(t+\theta)$ (genauer ist $x(t) = \varphi(t)(0)$). Außerdem gilt $\dot{x}(t) = \partial_t(\varphi(t))(0) = \partial_\theta(\varphi(t))(0) = L(\varphi(t)) = L(x_t)$, wobei das dritte Gleichheitszeichen wegen $\varphi(t) \in \mathcal{D}(B)$ gilt.

Der Operator B erzeugt im Fall einer Delaygleichung $b = 0$ eine Halbgruppe auf dem Raum $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ und liefert so für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung (2.1). Obwohl nun der Operator B im Fall $b \neq 0$ keine Halbgruppe auf $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ generiert, erweist er sich trotzdem als nützlich.

Man kann nun zeigen, dass B eine kompakte Resolvente hat und nur Punktspektrum besitzt, siehe [40]. Genauer gilt:

$$\lambda \in \text{spec}(B) \Leftrightarrow \det \Delta(\lambda) = 0$$

wobei $\Delta(\lambda)$ wie folgt definiert ist:

$$\Delta(\lambda) = \lambda(\text{id}_{\mathbb{C}^{N \times N}}) - \int_{-a}^b e^{\lambda\theta} (\text{id}_{\mathbb{C}^{N \times N}}) d\eta(\theta)$$

und die Abbildung $\eta(\cdot)$ ist durch die Darstellung $L\varphi = \int_{-a}^b \varphi(\theta) d\eta(\theta)$ charakterisiert. Insbesondere besitzt B nur isoliertes Punktspektrum. Falls $\det \Delta(\lambda_0) = 0$, so definiert $e^{\lambda_0\theta}v$ für einen geeigneten Vektor $v \in \mathbb{C}^N$ eine Eigenfunktion von B . Desweiteren gilt wie im Fall von Delaygleichungen:

Satz 2.1

Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ_0 von B stimmt mit der Vielfachheit von λ_0 als Nullstelle von $\det \Delta(\lambda)$ überein.

Alle diese Resultate sind bekannt (siehe [16] Kapitel 7.3, [31, 32] und [40]). Ebenso kann man den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.2

In jedem vertikalen Streifen $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid -r < \text{Re}\lambda < s\} \subset \mathbb{C}$ für $r, s > 0$ liegen nur endlich viele Eigenwerte von B .

Beweis

Der Beweis folgt analog zu dem in [28] von Theorem 4.1, Seite 28 und wir geben nur die wesentlichen Beweisschritte wieder. Wir zeigen folgendes: Es existieren Konstanten $C_0 > 0$ und $C > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > C_0|e^{z \cdot \max\{a, b\}}|$ und $|z| > C$ die Abschätzung $|\det \Delta(z)| \geq (1/2)|z|^n$ gilt.

Wie wir etwas weiter oben bemerkt haben, kann die lineare Abbildung $L : C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{C}^N$ (die in der Formulierung des Definitionsbereiches der Abbildung B vorkommt) in der Form $L\varphi = \int_{-a}^b \varphi(\theta) d\eta(\theta)$ dargestellt werden kann, wobei $\eta(\theta)$ eine Funktion beschränkter Variation ist (siehe auch Gleichung (2.2)). Wir betrachten nun die Abbildung $\det \Delta(z)$. Diese Abbildung erlaubt die Darstellung

$$\det \Delta(z) = z^n - \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1}^j \int_{-a}^b e^{z\theta} d\eta^{i,j}(\theta) \right) z^{n-j} \quad (2.4)$$

für gewisse Linearkombinationen $\eta^{i,j}$ von η . Sei nun $C_0 > 0$ beliebig. Dann gilt außerdem $|\int_{-a}^b e^{z\theta} d\eta(\theta)| \leq (1/C_0)TV(\eta)|z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung $|z| \geq C_0|e^{z \cdot \max\{a,b\}}|$ für $|z| > C$ und $C > C_0$ erfüllen. Hierbei bezeichnet $TV(\eta)$ die totale Variation von η , d.h. $TV(\eta) := \sup_{-a=\sigma_0 \leq \dots \leq \sigma_n=b} \sum_{j=1}^n |\eta(\sigma_j) - \eta(\sigma_{j-1})|$. Also gilt

$$\begin{aligned} |\det \Delta(z)| &\geq ||z|^n - \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1}^j \int_{-a}^b |e^{z\theta} d\eta^{i,j}(\theta)| \right) |z|^{n-j}| \\ &\geq |z|^n (1 - q(C, \eta)), \end{aligned}$$

wobei $q(C, \eta) := \sum_{j=1}^n C^{-j} \prod_{k=1}^j C_0^{-1} TV(\eta^{i,j})$ gilt. Gilt nun $|z| > C_0|e^{z \cdot \max\{a,b\}}|$, $|z| > C$ und ist C groß genug, so gilt $q(C, \eta) < 1/2$ und wir haben die Behauptung bewiesen. \square

Wir wollen nun den Zusammenhang von B und \mathcal{A} klären. Dazu bestimmen wir die Resolvente von \mathcal{A} . Die Gleichung

$$(\mathcal{A} - \lambda \cdot \text{id}) \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ f \end{pmatrix}$$

hat für gegebenes $\begin{pmatrix} \eta \\ f \end{pmatrix} \in Y$ genau dann eine Lösung, wenn

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ e^{\lambda\theta}\tilde{a} + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} f(s) ds \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

und

$$\tilde{a} = -(\Delta(\lambda))^{-1}(\eta - L(\int_0^\bullet e^{\lambda(\bullet-s)} f(s) ds)) \quad (2.6)$$

gilt. Also existiert $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}$ genau dann, wenn die Inverse $(N \times N)$ -Matrix $(\Delta(\lambda))^{-1}$ existiert. Dies tritt genau dann ein, wenn $\det \Delta(\lambda) \neq 0$. Also gilt

$$\lambda \in \text{spec}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \det \Delta(\lambda) = 0.$$

Außerdem sehen wir an der Darstellung (2.5), dass $(\xi, \varphi) \in X$, falls die Inverse $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}$ existiert. Da $H^1([-a, b], \mathbb{C}^N)$ kompakt in $L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ einbettet (in der H^1 -Norm beschränkte Funktionen sind bereits in $C^{0,\alpha}([-a, b], \mathbb{C}^N)$ für ein $\alpha > 0$ beschränkt und lassen deswegen eine konvergente Teilfolge in $L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ zu), ist $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} : L^2([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ eine kompakte Abbildung. \mathcal{A} besitzt deswegen nur Eigenwerte endlicher Vielfachheit. Es gilt sogar folgender Satz

Satz 2.3

Es gilt $\lambda_0 \in \text{spec}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \det \Delta(\lambda) = 0$. Desweiteren stimmt die algebraische Vielfachheit m eines Eigenwertes λ_0 von \mathcal{A} (d.h. die Dimension des verallgemeinerten Eigenraumes von $\mathcal{A} - \lambda_0$) mit der Vielfachheit von λ_0 als Nullstelle der Abbildung $\det \Delta(\lambda)$ überein. Die Eigenfunktionen von $\mathcal{A} - \lambda_0$ haben die Form $(p(0), e^{\lambda_0\theta} p(\theta))$, wobei $p(\theta) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ komponentenweise ein Polynom vom Grad $< m$ ist.

Beweis

Wir beweisen zunächst die Aussage, dass die Eigenfunktionen von $\mathcal{A} - \lambda_0$ die Form $(p(0), e^{\lambda_0\theta} p(\theta))$ haben, wobei $p(\theta) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ komponentenweise ein Polynom vom Grad $< m$ ist.

Da \mathcal{A} nur isolierte Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit besitzt, können wir die Spektralprojektion $P_\lambda : Y \rightarrow Y$ bezüglich eines Eigenwertes λ durch

$$P_\lambda U = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \mathcal{A})^{-1} U d\lambda$$

definieren, wobei γ eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene um λ bezeichnet (siehe etwa [23]). Also gilt

$$P_\lambda \begin{pmatrix} \eta \\ f(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \begin{pmatrix} \tilde{a}(\lambda) \\ e^{\lambda\theta} \tilde{a}(\lambda) + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} f(s) ds \end{pmatrix} d\lambda \quad (2.7)$$

wobei

$$\tilde{a}(\lambda) = (\Delta(\lambda))^{-1} (\eta - L(\int_0^\bullet e^{\lambda(\bullet-s)} f(s) ds)). \quad (2.8)$$

Betrachten wir zunächst die zweite Komponente von (2.7) und nehmen $N = 1$ an, also $\Delta(\lambda) = \det \Delta(\lambda)$. Wir erhalten also u.a. im Integranden von (2.7) eine meromorphe Funktion $\tilde{a}(\lambda) =: h(\lambda) / \Delta(\lambda)$, die in λ_0 eine Polstelle der Ordnung m besitzt. Die zweite Komponente der Spektralprojektion nimmt also die Gestalt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda\theta} \tilde{a}(\lambda) d\lambda, \quad (2.9)$$

an, denn da der Term $\int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} f(s) ds$ analytisch in λ ist, fällt er in der Berechnung des Kurvenintegrals weg. Es ist nach Annahme

$$\Delta(\lambda) = d \cdot (\lambda - \lambda_0)^m + \mathcal{O}((\lambda - \lambda_0)^{m+1})$$

mit $d \neq 0$. Nach dem Residuensatz der Funktionentheorie lässt sich also die zweite Komponente der Spektralprojektion durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{h}(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^{-m} d\lambda = \tilde{h}^{m-1}(\lambda_0) \quad (2.10)$$

berechnen, wobei wir \tilde{h} durch $(\tilde{h}(\lambda))(\lambda - \lambda_0)^{-m} = e^{\lambda\theta} \tilde{a}(\lambda)$ definieren. Wegen $d \neq 0$ ist dann $\tilde{h}(\lambda)$ analytisch in λ_0 . Mit \tilde{h}^{m-1} bezeichnen wir den $(m-1)$ -ten Koeffizient der Laurentreihenentwicklung im obigen Ausdruck, mit der Konvention $\tilde{h}^0(\lambda) := \tilde{h}(\lambda)$. Bei der Berechnung von $\tilde{h}^{m-1}(\lambda_0)$ müssen wir insbesondere den im Zähler auftretenden Term

$$e^{\lambda\bullet} \cdot L\left(\int_0^\alpha e^{\lambda(\alpha-s)} f(s) ds\right) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}) \quad (2.11)$$

nach λ ableiten. In dieser Gleichung bezeichnet α die Variable derjenigen Funktion, die in $L : C^0([-a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ eingesetzt wird. An dem Ausdruck (2.11) können wir nun unsere oben gestellte Behauptung ablesen: Für $\tilde{h}^{m-1}(\lambda_0)$ erhalten wir

$$\tilde{h}^{m-1}(\lambda_0) \in \text{span} \langle 1, e^{\lambda_0\theta}, e^{\lambda_0\theta}\theta, \dots, e^{\lambda_0\theta}\theta^{m-1} \rangle$$

durch ableiten von (2.11).

Da nach [23] $\text{Bild}(P_{\lambda_0}) = E(\lambda_0)$ ist und $E(\lambda_0) \subset X$ den verallgemeinerten Eigenraum des Operators \mathcal{A} zum Eigenwert λ_0 bezeichnet, haben wir gezeigt

$$E(\lambda_0) \subset \text{span} \langle (1, e^{\lambda_0\theta}), (0, e^{\lambda_0\theta}\theta), \dots, (0, e^{\lambda_0\theta}\theta^{m-1}) \rangle, \quad (2.12)$$

wobei $\text{span}\langle \bullet \rangle$ den durch diese Elemente aufgespannten, linearen Unterraum von Y bezeichnet. Dies zeigt die Behauptung für $N = 1$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, in dem $\Delta(\lambda)^{-1}$ eine $(N \times N)$ -Matrix ist und betrachten die durch die Cramerschen Regel bestimmten Einträge $a_{ij}(\lambda)$ der Matrix $\Delta(\lambda)^{-1}$:

$$a_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j} \cdot \det S_{ij} \cdot (\det \Delta(\lambda))^{-1}.$$

Hierbei bezeichnet S_{ij} die Streichungsmatrix von $\Delta(\lambda)$, in der man die i -te Zeile und j -te Spalte der Matrix $\Delta(\lambda)$ streicht. $a_{ij}(\lambda)$ ist also für alle i, j eine meromorphe Funktion, die in $\lambda = \lambda_0$ eine Polstelle der Ordnung höchstens m hat. Für manche i, j kann $a_{ij}(\lambda)$ sogar analytisch in $\lambda = \lambda_0$ sein (man beachte etwa den Fall $\Delta(\lambda) = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N}$). Führt man nun den oberen Beweis (im Fall $N = 1$) komponentenweise für jedes $a_{ij}(\lambda)$ aus, so haben wir die erste Behauptung bewiesen: alle Eigenfunktionen von $\mathcal{A} - \lambda_0$ besitzen die Form $(p(0), e^{\lambda_0 \theta} p(\theta))$, wobei $p(\theta) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ komponentenweise ein Polynom vom Grad $< m$ ist.

Die Aussage, dass die algebraische Vielfachheit m eines Eigenwertes λ_0 von \mathcal{A} mit der Vielfachheit von λ_0 als Nullstelle von $\det \Delta(\lambda)$ übereinstimmt, folgt nun aus [18], Korollar 3.1, Seite 203. \square

Außerdem können wir folgendes Lemma zeigen:

Lemma 2.3

$e^{\lambda \theta} p(\theta)$ ist genau dann eine (verallgemeinerte) Eigenfunktion von B wenn $(p(0), e^{\lambda \theta} p(\theta)) \in X$ eine (verallgemeinerte) Eigenfunktion von \mathcal{A} ist.

Beweis

Wir zeigen nur eine Richtung; die andere beweist man dann vollständig analog. Sei nun $\phi(\theta) := e^{\lambda \theta} p(\theta)$ für ein $\lambda \in \text{spec}(B)$ eine verallgemeinerte Eigenfunktion von B . Dann existiert eine Funktion $\psi(\cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ mit $B(\phi) = \psi$ und zur Vereinfachung stellen wir uns vor, dass $\psi(\theta) = e^{\lambda \theta}$ gilt. Nun gilt $\partial_\theta \phi(\theta) = e^{\lambda \theta}$. Wegen $\phi \in \mathcal{D}(B)$ gilt weiterhin $\partial_\theta \phi(\theta)|_{\theta=0} = L(\phi)$, also $1 = e^{\lambda 0} = L(\phi)$. Zusammengefasst gilt damit

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\phi) \\ \partial_\theta \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\lambda(\cdot)} \end{pmatrix}$$

und das zeigt die Behauptung. \square

Bezeichne nun mit P_c die Spektralprojektion bezüglich \mathcal{A} auf den Zentrumseigenraum (also den verallgemeinerten Eigenraum aller Eigenwerte mit $\text{Re} \lambda = 0$). Mit Π_Z bezeichnen wir die entsprechende Projektion bezüglich B . Dann gilt sogar folgendes Resultat, das man durch explizites Nachrechnen verifizieren kann.

Lemma 2.4

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ eine glatte Funktion und bezeichne mit \mathcal{J} die Abbildung $\mathcal{J} : \varphi(\cdot) \rightarrow (\varphi(0), \varphi(\cdot)) \in X$. Dann gilt $\mathcal{J} \circ \Pi_Z(\varphi) = P_c \circ \mathcal{J}(\varphi)$.

Wir verzichten auf einen Beweis, da wir diesen Satz im weiteren Verlauf nicht benötigen werden.

2.2.2 Dichotomien autonomer Gleichungen im C^0 -Setting

Wir werden in diesem Abschnitt den Operator B etwas genauer studieren und betrachten

$$B : \mathcal{D}(B) \subset C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow C^0([-a, b], \mathbb{C}^N),$$

definiert durch

$$B\varphi = \partial_\theta \varphi$$

mit $\varphi \in \mathcal{D}(B) := \{\varphi \in C^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \mid \dot{\varphi}(0) = L(\varphi)\}$. Bezeichne mit $\det \Delta(\lambda)$ die charakteristische Funktion von B , wobei

$$\Delta(\lambda) = \lambda - \int_{-a}^b e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)$$

eine $N \times N$ -Matrix ist und $L\varphi = \int_{-a}^b \varphi(\theta) d\eta(\theta)$ gilt. Wir streben eine Zerlegung des Phasenraumes $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ in der Form

$$C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) = Z + P + Q \quad (2.13)$$

mit abgeschlossenen Unterräumen P, Q, Z von $C^0 := C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ an. Desweiteren sind wir an der Existenz von C^0 -Semigruppen $T_P(t) : P \rightarrow P$ für $t \geq 0, T_Q(-t) : Q \rightarrow Q$ für $t \geq 0$ und $T_Z(t) : Z \rightarrow Z$ für $t \in \mathbb{R}$ mit Generatoren $B|_P$ bzw. $-B|_Q$ bzw. $B|_Z$ interessiert, die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{aligned} |T_P(t)|_{L(C^0, C^0)} &\leq M e^{-\beta t} & t \geq 0 \\ |T_Q(-t)|_{L(C^0, C^0)} &\leq M e^{-\beta t} & t \geq 0 \\ |T_Z(t)|_{L(C^0, C^0)} &\leq M e^{\delta t} & t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.14)$$

für ein geeignetes $\beta > 0$, ein beliebiges $\delta > 0$ und ein $M = M(\delta)$. Falls solche Halbgruppen existieren und $Z = \{0\}$ gewählt werden kann, so sagt man, der Operator B besitze *exponentielle Dichotomien*. In diesem Fall kann man also Unterräume P und Q finden, auf denen man die Gleichung

$$\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t) \quad (2.15)$$

für positive Zeiten $t > 0$ bzw. negative Zeiten $t < 0$ lösen kann. Man kann nicht erwarten, (2.15) auf ganz $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ zu lösen, da der Operator B bi-infinites Spektrum besitzt und deswegen keine Halbgruppe auf $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ generiert.

Mallet-Paret und Lunel [31] konnten nun zeigen, dass für einen beliebigen, hyperbolischen Operator B , d.h. für den $\text{spec}(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ gilt, Semigruppen $T_P(t), T_Q(t)$ und ein $\beta > 0$ existieren, so dass (2.16) mit $Z = \{0\}$ gilt. Wir zeigen folgenden Satz:

Satz 2.4 (Dichotomien)

Sei B durch $B\varphi = \partial_\theta \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{D}(B) := \{\varphi \in C^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \mid \dot{\varphi}(0) = L(\varphi)\}$ definiert, $L : C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{C}^N$ linear und stetig. Dann existieren C^0 -Semigruppen $T_P(t), T_Q(t), T_Z(t)$ und ein $\beta > 0$, so dass (2.16) für ein beliebiges $\delta > 0$ erfüllt ist.

Um diesen Satz zu beweisen, benutzen wir einen Satz von Mallet-Paret und Lunel, der im Fall von Hyperbolizität gilt, siehe [31], Theorem 3.1. Dieser lautet (für unsere Zwecke aufgeschrieben):

Satz 2.5 (exponentielle Dichotomien)

Sei B hyperbolisch. Dann existieren abgeschlossene Unterräume \tilde{P}, \tilde{Q} von $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$, mit $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ und Semigruppen $T_{\tilde{P}}(t) : \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$, $T_{\tilde{Q}}(-t) : \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}$, die den Generator $B|_{\tilde{P}}$ bzw. $-B|_{\tilde{Q}}$ besitzen und

$$\begin{aligned} |T_{\tilde{P}}(t)| &\leq M e^{-\beta t} && \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \\ |T_{\tilde{Q}}(-t)| &\leq M e^{-\beta t} && \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit einem geeigneten $\beta > 0$ erfüllen.

Beweis von Satz 2.4

Wir nehmen also ohne Einschränkung an, dass der Operator B Eigenwerte mit Realteil null besitzt, da ansonsten der Satz von Mallet-Paret und Lunel schon die Behauptung liefert.

Sei nun $\varphi(t)$ eine auf \mathbb{R} definierte Lösung der linearen Gleichung

$$\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t). \quad (2.17)$$

Dann gilt (wie schon früher bemerkt) $\varphi(t)(\theta) = \xi(t + \theta)$ für $t + \theta \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\xi(t)$ (genauer ist $\xi(t) := \varphi(t)(0)$). Weiterhin ist $\xi(t)$ eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = Lx_t. \quad (2.18)$$

Setze nun für ein $\mu > 0$

$$y(t) := e^{-\mu t} \xi(t).$$

Dann löst $y(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\dot{y}(t) = L(e^{\mu \bullet} y_t(\bullet)) - \mu \cdot y(t). \quad (2.19)$$

Setzen wir also $L_\mu \varphi := L(e^{\mu \bullet} \varphi(\bullet)) - \mu \cdot \varphi(0)$, so ist L_μ eine beschränkte, lineare Abbildung von $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ nach \mathbb{C}^N . Die lineare Abbildung L_μ definiert nun einen Operator $B_\mu : \mathcal{D}(B_\mu) \subset C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ mittels

$$B_\mu \varphi = \partial_\theta \varphi \quad (2.20)$$

und $\varphi \in \mathcal{D}(B_\mu) := \{\varphi \in C^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \mid \dot{\varphi}(0) = L_\mu(\varphi)\}$. Es ist $\lambda \in \text{spec}(B_\mu)$ genau dann, wenn $\det \Delta_\mu(\lambda) = \det(\lambda(\text{id}_N) - L_\mu(e^{\mu \bullet})) = 0$ ist.

Bezeichne weiterhin mit $\det \Delta(\lambda)$ die charakteristische Funktion bezüglich B . Dann besteht folgender Zusammenhang:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\mu(\lambda - \mu) \quad (2.21)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, was man direkt an den jeweiligen Definitionen ablesen kann. Ist also insbesondere μ klein genug, so ist B_μ hyperbolisch, d.h. es existieren keine Eigenwerte mit Realteil null.

Es bietet sich also folgende Strategie an: Wähle zunächst $\mu > 0$ klein genug, so dass B_μ hyperbolisch ist. Wende dann den Satz von Mallet-Paret an, um die Existenz von Lösungen auf gewissen Unterräumen zu erlangen. Konstruiere aus diesen Funktionen wieder Lösungen des ursprünglichen Problems und definiere dann die gesuchten Unterräume mit Hilfe der Lösungen.

Sei also μ klein genug, so dass B_μ hyperbolisch ist und bezeichne mit $T_{\tilde{P}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $T_{\tilde{Q}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_-$ die nach obigen Satz existierenden C^0 -Semigruppen. Betrachte nun \tilde{P} . Dann besitzt B_μ nur Spektrum in der offenen linken Halbebene der komplexen Ebene. Bezeichne nun mit $r_0 > 0$ den kleinsten positiven Abstand, den ein Eigenwert $\lambda \in \text{spec}(B_\mu)$ mit negativen Realteil zur imaginären Achse hat. Sei weiterhin E_{-r_0} der verallgemeinerte Eigenraum von B_μ zu Eigenwerten mit Realteil $-r_0$. Da B nicht hyperbolisch ist, ist natürlich $r_0 = r_0(\mu) = \mu$. Nach Definition von r_0 ist dann $E_{-r_0} \neq \{0\}$, da wir das Spektrum vom nichthyperbolischen Operator B nach *links* verschoben haben. Wir betrachten nun die Spektralprojektion $\Pi_{E_{-r_0}} : \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$ mit

$$\Pi_{E_{-r_0}} := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} ((B - \lambda)|_{\tilde{P}})^{-1} d\lambda.$$

Hierbei ist γ eine positiv orientierte, geschlossene Jordankurve der komplexen Ebene, die gerade alle Eigenwerte von B_μ mit Realteil $-r_0$ umläuft. Die Abbildung $(B - \lambda)|_{\tilde{P}}$ bezeichnet die Einschränkung der linearen Abbildung $B - \lambda$ auf den invarianten Unterraum \tilde{P} . Man beachte, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, d.h. tatsächlich nach \tilde{P} abbildet, da $T_{\tilde{P}}(t) : \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$ gilt. Mittels $\Pi_{E_{-r_0}}$ kann man mit $\tilde{K} := \text{Kern}(\Pi_{E_{-r_0}})$ einen abgeschlossenen, unter B_μ invarianten Unterraum $\tilde{K} \subset C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ definieren, der $\tilde{K} + E_{-r_0} = \tilde{P}$ erfüllt.

Bezeichne nun mit r_1 den kleinsten positiven Abstand, den ein Eigenwert $\zeta \in \text{spec}((B_\mu)|_{\tilde{K}})$ mit negativen Realteil zur imaginären Achse hat. Dann gilt zunächst $0 < r_0 < r_1$ und es existiert eine Semigruppe $T_{\tilde{K}}(t)$ auf \tilde{K} , nämlich die Einschränkung von $T_{\tilde{P}}(t)$ auf \tilde{K} . Außerdem gilt

$$|T_{\tilde{K}}(t)| \leq M e^{(-r_1 + \varepsilon)t}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und einem $M = M(\varepsilon) > 0$. Abschätzungen der Wachstumsbeschränkung der Halbgruppe $T_{\tilde{K}}(t)$ mit Hilfe des Spektrums des Generators $(B_\mu)|_{\tilde{K}}$ gelten nicht immer; sie sind aber richtig, falls $(B_\mu)|_{\tilde{K}}$ nur *Punktspektrum* besitzt, siehe [16], Kapitel 7.6.

Wir wählen nun ε und μ klein genug, so dass $r_1 + \varepsilon + \mu < 0$ ist. Sei nun etwa $\varphi \in \tilde{K}$. Dann existiert nach Definition von \tilde{K} eine Lösung $x(t)$ von $\dot{x}(t) = L_\mu x_t$ auf \mathbb{R}_+ mit Anfangswert $x_0 = \varphi$, die durch $x_t := T_{\tilde{K}}(t)\varphi$ gegeben ist. Definiere

$$\xi(t) := e^{\mu t} x(t)$$

auf \mathbb{R}_+ . Nach den obigen Überlegungen ist dann $\xi(t)$ eine Lösung unserer ursprünglichen Gleichung $\dot{\xi}(t) = L\xi_t$, die die Abschätzung

$$\|\xi_t\|_\infty \leq M e^{(-r_1 + \varepsilon + \mu)t} \|\varphi\|_\infty \quad (2.22)$$

mit $-\beta := -r_1 + \varepsilon + \mu < 0$ erfüllt.

Wir definieren also den abgeschlossenen Unterraum P durch

$$P := \{e^{\mu\theta} \varphi(\theta) | \varphi(\cdot) \in \tilde{K}\}. \quad (2.23)$$

Für jedes $e^{\mu\theta} \varphi(\theta) \in P$ existiert nun nach Konstruktion eine Lösung $\xi_t \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ von $\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t)$ mit $\xi_0(\theta) = e^{\mu\theta} \varphi(\theta)$. Desweiteren ist wegen der Invarianz von \tilde{K} bezüglich der Semigruppe $T_{\tilde{K}}(t)$ auch $\xi_t \in P$ für alle $t > 0$. Wir definieren die gesuchte Semigruppe $T_P(t)$ durch

$$T_P(t)\tilde{\varphi} := \xi_t \quad (2.24)$$

für $\tilde{\varphi} \in P$, wobei ξ_t die eindeutige konstruierte Lösung mit $\xi_0 = \tilde{\varphi}$ bezeichnet. Wegen Abschätzung (2.22) gilt dann

$$|T_P(t)| \leq Me^{-\beta t}. \quad (2.25)$$

Definiere nun Z durch

$$Z := \{e^{\mu\theta} \varphi(\theta) | \varphi(\cdot) \in E_{-r_0}\}. \quad (2.26)$$

Da E_{-r_0} invariant bezüglich B_μ und endlichdimensional ist, existiert eine Lösungsgruppe $e^{B_\mu^0 t}$ auf \mathbb{R} , wobei hier die Einschränkung $B_\mu^0 := (B_\mu)|_{E_{-r_0}} : E_{-r_0} \rightarrow E_{-r_0}$ gemeint ist. Analog definiert dann $T_Z(t)$

$$(T_Z(t)\tilde{\varphi})(\theta) := e^{\mu(t+\theta)}(e^{B_\mu^0 t}\varphi)(\theta) \quad (2.27)$$

für alle t eine Lösung von $\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t)$ zum Anfangswert $\varphi \in Z$. Nach Definition von E_{-r_0} und insbesondere r_0 existiert für jedes $\delta > 0$ ein $M = M(\delta)$, so dass

$$|T_Z(t)| \leq Me^{\delta|t|} \quad (2.28)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Anders ausgedrückt besitzt die Lösungsgruppe $T_Z(t)$ nur Eigenwerte vom Betrag eins, deren verallgemeinerter Eigenraum aber nicht eindimensional sein muss. Wir setzen nun noch

$$Q := \{e^{\mu\theta} \varphi(\theta) | \varphi(\cdot) \in \tilde{Q}\}. \quad (2.29)$$

Ganz analog kann man nun auf Q eine C^0 -Semigruppe $T_Q(-t)$, für $t \geq 0$, mit den gewünschten Eigenschaften definieren. Da insbesondere $P + Q + Z = C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ gilt (dies galt bereits für \tilde{P} und \tilde{Q}), folgt die Behauptung des Satzes. \square

2.3 Das Hauptresultat

Wir rekapitulieren zunächst die Definition einer Zentrumsmannigfaltigkeit im Sinne von Ios und Vanderbauwhede [54]. Dazu benötigen wir die Spektralprojektion $P_c : Y \rightarrow Y$, die auf den verallgemeinerten Zentrumseigenraum von \mathcal{A} projiziert, siehe Gleichung (1.42) der Einleitung. Die zu P_c komplementäre Projektion $id_Y - P_c$ bezeichnen wir im folgenden mit P_h . Wir setzen nun $E_c := P_c[X]$, $E_h := P_h[X]$ und versehen beide mit der X -Norm. Wir betrachten im folgenden Gleichung (2.3), also

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{G}(U(t)) =: \mathcal{F}(U(t)) \quad (2.30)$$

und wollen annehmen, dass $0 \in X$ eine Gleichgewichtslösung ist.

Definition 10

Wir sagen, dass Gleichung (2.30) eine C^k -**Zentrumsmannigfaltigkeit** besitzt, falls eine für (2.30) lokal invariante, endlichdimensionale C^k -Mannigfaltigkeit \mathcal{M} existiert, die als Graph einer C^k Abbildung $\Psi : E_c \cap \mathcal{O} \rightarrow E_h$ über dem Zentrumseigenraum E_c von \mathcal{A} gegeben ist und \mathcal{O} eine genügend kleine Umgebung der Null bezeichnet. Außerdem soll \mathcal{M} folgende Eigenschaften besitzen:

- An der Stelle $0 \in \mathcal{M}$ ist \mathcal{M} tangential an E_c .
- Es existiert eine Umgebung $\mathcal{U} \subset Y$ der Null, so dass $U(t) \in \mathcal{M}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, falls die Funktion $U(t)$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.30) ist und $U(t) \in \mathcal{U}$ für alle t gilt.

Man beachte, dass diese Definition zu der in der Einleitung äquivalent ist. Wir kommen nun zu unserem Hauptresultat:

Satz 2.6 (Zentrumsmannigfaltigkeit)

Sei $f : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine C^k -Funktion, mit $f(0) = 0$. Setze $L := Df(0)$ mit $L : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$. Definiere $g : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ durch $g(\varphi) = f(\varphi) - L(\varphi)$. Dann besitzt das System

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{G}(U(t)) = \mathcal{F}(U(t))$$

mit

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi(t)) \\ \partial_{\theta}\varphi(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ und $\mathcal{G} : X \rightarrow Y$ eine C^k -Zentrumsmannigfaltigkeit der Dimension m , wobei m die Dimension des (verallgemeinerten) Zentrumseigenraumes E_c von \mathcal{A} ist. Außerdem gilt:

- Hängt $f = f_{\alpha}$ zusätzlich k -mal stetig differenzierbar von einem Parameter $\alpha \in (-\zeta, \zeta)$ ab, d.h. $\alpha \rightarrow f_{\alpha}$ mit $f_{\alpha} \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ ist eine C^k -Abbildung, so ist auch die Zentrumsmannigfaltigkeit k -mal stetig differenzierbar bezüglich α . Dies bedeutet in unserem Fall, dass eine lokal null definierte Abbildung $\Psi(\cdot, \cdot) : (\mathcal{O} \cap E_c) \times (-\zeta, \zeta) \rightarrow E_h$ mit $\text{Graph}(\Psi(\cdot, 0)) = \mathcal{M}$ existiert, die k -mal stetig differenzierbar bezüglich α ist.
- Sei $\Gamma \subset \mathcal{L}(Y, Y) \cap \mathcal{L}(X, X)$ eine Untergruppe aller beschränkten, linearen Abbildungen von Y nach Y bezüglich der Hintereinanderausführung. Gelte $\mathcal{F}(\gamma U) = \gamma \mathcal{F}(U)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und $U \in X$. Dann existiert eine Zentrumsmannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \text{Graph}(\Psi)$ mit $\Psi(\gamma U) = \gamma \Psi(U)$ für alle $U \in E_c$, falls $\langle \gamma U, \gamma U \rangle_X = \langle U, U \rangle_X$ für das Skalarprodukt in X gilt. Ebenso gilt $\Psi(\gamma U) = -\gamma \Psi(U)$ für alle $\gamma \in \Gamma$, falls $\mathcal{F}(\gamma U) = -\gamma \mathcal{F}(U)$ für alle $U \in X$ und $\langle \gamma U, \gamma U \rangle_X = \langle U, U \rangle_X$ für das Skalarprodukt in X gilt.

Notation

Mit Y_h bezeichnen wir im Folgenden das Bild von Y unter der Projektion $P_h = (\text{Id} - P_c) : Y \rightarrow Y$. Wir erinnern, dass P_c die Spektralprojektion auf den verallgemeinerten Zentrumseigenraum E_c von \mathcal{A} bezeichnet. Es sei bemerkt, dass sowohl $P_c : Y \rightarrow Y$ als auch $\tilde{P}_c : Y \rightarrow X$, mit $\tilde{P}_c U := P_c U$, beschränkte Operatoren sind, da $\text{Bild}(P_c[Y]) \subset X$ endlichdimensional ist. Falls keine Mißverständnisse zu erwarten sind, bezeichnen wir im weiteren aber beide Projektionen mit P_c . Wir bezeichnen weiterhin für einen Banachraum Z mit $BC^{\eta}(\mathbb{R}, Z)$ und ein $\eta \in \mathbb{R}$ den Banachraum $BC^{\eta}(\mathbb{R}, Z) = \{w \in C^0(\mathbb{R}, Z) \mid \|w\|_{\eta} < \infty\}$, wobei

$$\|w\|_{\eta} := \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \|w(t)\|_Z \quad (2.31)$$

ist. Die Funktionen $w \in BC^{\eta}$ dürfen also im Fall $\eta > 0$ exponentiell anwachsen (mit Rate $\leq \eta$).

2.4 Beweis der Zentrumsmannigfaltigkeit

Unser Beweis richtet sich nach dem von Ioos und Vanderbauwhede [54], wo Zentrumsmannigfaltigkeiten für eine abstrakte Differentialgleichung

$$\dot{U} = AU(t) + G(U(t)) \quad (2.32)$$

konstruiert werden. In dem abstrakten Setting von [54] existieren nun Banachräume $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, so dass \tilde{X} stetig in \tilde{Y} und \tilde{Y} stetig in \tilde{Z} einbettet. Außerdem ist $A : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$ eine beschränkte Abbildung und die nichtlineare Abbildung $G : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ ist eine C^k -Abbildung für ein $k \geq 1$ und erfüllt $G(0) = DG(0) = 0$. Außerdem besitzt die lineare Abbildung A einen endlichdimensionalen Zentrumseigenraum. Wir wollen nun das Resultat von Vanderbauwhede auf den Fall $A := \mathcal{A}$, $G := \mathcal{G}$, $\tilde{X} := X$ und $\tilde{Y} := \tilde{Z} := Y$ anwenden und müssen folgende Bedingung überprüfen:

Bedingung 2.1

Es existiert ein $\beta > 0$, so dass für alle $H \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y_h)$ ein $U_h \in BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)$ existiert und folgendes gilt: U_h ist die eindeutige Lösung der linearen Gleichung

$$\dot{U}_h(t) = \mathcal{A}U_h(t) + H(t) \quad (2.33)$$

und definiert eine Abbildung K_h durch $U_h = K_h H$, wobei $K_h \in \mathcal{L}(BC^\eta(\mathbb{R}, Y_h), BC^\eta(\mathbb{R}, E_h))$ für alle $\eta \in (0, \eta_0)$ ist. Weiterhin gelte

$$\|K_h\|_\eta \leq \gamma(\eta)$$

für alle $\eta \in (0, \eta_0)$ und eine stetigen Funktion $\gamma : (0, \eta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist dies gezeigt, so folgt nach [54] die Existenz einer C^k -Mannigfaltigkeit der Gleichung (2.30) im Sinne der Definition 10.

Bemerkungen

a) Aufgrund der Tatsache, dass Y, X Hilberträume sind, reicht es in der Bedingung 2.1 die nichtnegative Zahl η in dem *offenen* Intervall $(0, \beta)$ zu betrachten. Dies zeigen die Autoren von [54] im Anschluss an Korollar 2, Seite 135.

b) Weiterhin reicht es, sich bei der Verifizierung der Bedingung 2.1 auf alle $H \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y_h)$ zu beschränken, die von der Form

$$H(t) = P_h \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

für eine stetige Funktion $\alpha \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ sind. Dies kann man wie folgt einsehen: Nach Lemma 2 von [54] ist $U(t)$ genau dann eine Lösung von (2.30), falls $U_c(t) := P_c U(t)$ eine Lösung von

$$\dot{U}_c(t) = \mathcal{A}U_c(t) + P_c \mathcal{G}(U(t))$$

ist und $P_h U(t) = K_h(P_h \mathcal{G}(U(t)))$ gilt. Also ist man nur an allen $H \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y_h)$ interessiert, die $H(t) = P_h \mathcal{G}(U(t))$ für eine Abbildung $U \in BC^\eta(\mathbb{R}, X)$ erfüllen. Wegen unserer speziellen Form von \mathcal{G} , reicht es also H in der Form (2.34) zu wählen.

2.4.1 Eindeutigkeit von Lösungen der hyperbolischen Gleichung

Betrachten wir zunächst die Eindeutigkeit der Lösung U_h von

$$\dot{U}_h(t) = \mathcal{A}U_h(t) + H(t) \quad (2.35)$$

für gegebenes $H \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y)$. Unter Beachtung der Bemerkung ii) des vorigen Abschnitts können wir uns auf Abbildungen $H(t)$ beschränken, die (2.34) erfüllen. Wir halten uns an folgende Konvention:

Notation

Im folgenden fassen wir den verallgemeinerten Zentrumseigenraum $E_c \subset X$ von \mathcal{A} als abgeschlossenen Unterraum von X auf. Analoges gelte für E_h . Also sind beide Vektorräume mit der X -Norm versehen.

Seien $U_1(\cdot)$ und $U_2(\cdot)$ zwei Lösungen der Gleichung (2.35) mit $U_1(\cdot), U_2(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)$. Definiere

$$U_*(t) = U_1(t) - U_2(t) \quad (2.36)$$

für alle t . Dann löst U_* die homogene Gleichung

$$\dot{U}_*(t) = \mathcal{A}U_*(t) \quad (2.37)$$

auf \mathbb{R} . Schreiben wir $U_*(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \varphi(t)(\cdot) \end{pmatrix}$ mit $\varphi(t)(\cdot) \in H^1([-a, b], \mathbb{C}^N)$, so folgt aus (2.37)

$$\partial_t \varphi(t)(\cdot) = \partial_\theta \varphi(t)(\cdot).$$

Da U_* als Differenz zweier Lösungen in $C^0(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, Y)$ ist, gilt

$$\varphi(t)(\theta) = \tilde{\varphi}(t + \theta).$$

für alle $t, \theta \in [-a, b]$ und eine H^1 -Funktion $\tilde{\varphi}$. Da weiterhin $\varphi(t)(0) = \xi(t)$ für alle t wegen $U_*(t) \in X$ gilt, ist $\tilde{\varphi} \equiv \xi$ und $\xi(t)$ stetig differenzierbar (ebenfalls wegen $U_* \in C^1(\mathbb{R}, Y)$). $\xi(t)$ löst also

$$\dot{\xi}(t) = L\xi_t \quad (2.38)$$

auf \mathbb{R} .

Wir werden nun zeigen, dass $\xi_t \in \text{Bild}(\Pi_Z)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Wir erinnern daran, dass $\Pi_Z : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ die Projektion auf den Zentrumseigenraum von B bezeichnet, siehe dazu den Abschnitt 2.2.2. In 2.2.1 haben wir gezeigt, dass die Zentrumseigenräume von B und \mathcal{A} mittels der natürlichen Abbildung \mathcal{J} , mit

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : H^1([-a, b], \mathbb{C}^N) &\rightarrow \mathbb{C}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \\ \mathcal{J} : \phi(\cdot) &\mapsto (\phi(0), \phi(\cdot)), \end{aligned}$$

zueinander isomorph sind: Ist etwa $e(\cdot) \in \text{Bild}(\Pi_Z)$ ein Element in dem Zentrumseigenraum von B , so ist $\mathcal{J}(e(\cdot)) = (e(0), e(\cdot))$ ein Element des Zentrumseigenraumes E_c von \mathcal{A} und jedes Element kann in dieser Form dargestellt werden (siehe Lemma 2.3).

Gilt also $\xi_t \in \text{Bild}(\Pi_Z)$, so ist $U_*(t) = (\xi(t), \xi_t) \in (E_c \cap E_h)$ für alle t und deswegen gilt $U_*(t) = 0$ wegen $E_c \cap E_h = \{0\}$.

Da $\xi(t)$ eine Lösung von

$$\dot{\xi}(t) = L\xi_t \quad (2.39)$$

ist, ist $t \mapsto \varphi(t) := \xi_t$ eine Lösung von

$$\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t) \quad (2.40)$$

mit $\varphi(t) \in \mathcal{D}(B)$ für alle t . Bezeichne nun mit P und Q die wegen Satz 2.4 existierenden abgeschlossenen Unterräume mit entsprechenden Projektionen Π_Z, Π_P, Π_Q , die durch die Zerlegung $C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) = P \oplus Q \oplus Z$ induziert werden. Man beachte, dass hier das Bild von Π_Z dem verallgemeinerten Zentrumseigenraum von B entspricht.

Um zu zeigen, dass $\xi_t \in Z$ mit $Z = \text{Bild}(\Pi_Z)$, schreiben wir

$$\xi_t = \Pi_Z \xi_t + \Pi_P \xi_t + \Pi_Q \xi_t$$

und zeigen $\Pi_P \xi_t = \Pi_Q \xi_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir machen die folgende Beobachtung

Lemma 2.5

Die Abbildung $t \mapsto (\Pi_P \xi_t)(0)$ ist eine Lösung der Gleichung $\dot{x}(t) = Lx_t$. Analoges gilt für die Abbildung $t \mapsto (\Pi_Q \xi_t)(0)$.

Beweis

Wir zeigen die Behauptung nur für $\Pi_P \xi_t$. Da der Operator B mit seinen Spektralprojektionen kommutiert, gilt

$$\Pi_P \circ B = B \circ \Pi_P.$$

Da $t \mapsto \xi_t$ eine Lösung von $\partial_t \varphi(t) = B\varphi(t)$ auf \mathbb{R} ist, ist deswegen auch $t \mapsto \Pi_P \xi_t$ eine Lösung von (2.40). Insbesondere erfüllt $t \mapsto \Pi_P \xi_t$ also

$$(\Pi_P \xi_t)(\theta) = (\Pi_P \xi_{t+\theta})(0).$$

Daraus folgt, dass $t \mapsto (\Pi_P \xi_t)(0)$ eine Lösung von $\dot{x}(t) = Lx_t$ ist. \square

Setze zur Vereinfachung $\xi_*(t) := (\Pi_P \xi_t)(0)$. Nach dem eben gezeigten Lemma ist dann $\xi_*(t)$ eine Lösung von $\dot{x}(t) = Lx_t$ auf \mathbb{R} . Nach Definition von $\xi_*(t)$ ist $(\xi_*)_t \in P$ für alle t . Weiterhin erfüllt $\xi_*(t)$ die Abschätzung

$$\|(\xi_*)_t\| \leq M e^{\eta|t|}, \quad (2.41)$$

da nach Annahme $\xi(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ für ein $\eta < \eta_0$ und einem noch zu wählenden $\eta_0 > 0$ gilt.

Wegen $(\xi_*)_0 \in P$ gilt nun weiterhin

$$\|(\xi_*)_t\| \leq M e^{(-\beta+\varepsilon)t} \quad (2.42)$$

nach Satz 2.4 für ein $\varepsilon > 0$. Das β kann dabei so groß gewählt werden, wie der Abstand eines Eigenwertes von B mit negativen oder positiven Realteil von der imaginären Achse ist. Wir definieren nun η_0 durch $\beta = 4\eta_0$ und zeigen, dass $\xi_*(t) = 0$ für alle t gilt: Es gilt nämlich nach (2.41) und (2.42) für $t > 0$

$$\begin{aligned} \|(\xi_*)_0\| &\leq \|T_P(t)(\xi_*)_{-t}\| \\ &\leq \|T_P(t)\|_{\mathcal{L}(P,P)} \|(\xi_*)_{-t}\| \\ &\leq C e^{(-\beta+\varepsilon+\eta)t}, \end{aligned}$$

also ist wegen der Wahl von $\eta_0 > \eta > 0$ gerade $(\xi_*)_0 = 0$. Analog kann man nun zeigen, dass $t \mapsto (\Pi_P \xi_t)(0)$ identisch Null ist; dies zeigt dann $\xi_t \in Z$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Deswegen gilt $\xi(t) \equiv 0$ und wir haben die Eindeutigkeit gezeigt.

2.4.2 Existenz von Lösungen der hyperbolischen Gleichung

Wir kümmern uns nun um die Existenz einer Abbildung $U_h(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)$, die für gegebenes $H(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y_h)$ (mit H in der Form (2.34) und einem $\alpha(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$) die Gleichung (2.33) löst.

Aufgrund unserer Annahmen an \mathcal{A} gibt es nun endlich viele Eigenwerte $\lambda_i \in \text{spec}(\mathcal{A})$ mit $\text{Re}\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und Vielfachheiten k_i , so dass $m = k_1 + \dots + k_n$ die Dimension des verallgemeinerten Zentrumseigenraumes E_c von \mathcal{A} ist. Mit algebraischer Vielfachheit von λ_i meinen wir hierbei die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle der charakteristischen Funktion $\det\Delta(\cdot)$ bezüglich der linearen Abbildung $L = Df(0)$ (man beachte Satz 2.3). Wir betrachten nun die zweite Komponente von (2.33) und erinnern daran, dass P_c auf Y durch

$$P_c \begin{pmatrix} \eta \\ f(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \begin{pmatrix} \tilde{a}(\lambda) \\ e^{\lambda\theta} \tilde{a}(\lambda) + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} f(s) ds \end{pmatrix} d\lambda \quad (2.43)$$

mit

$$\tilde{a}(\lambda) = (\Delta(\lambda))^{-1} \left(\eta - L \left(\int_0^\bullet e^{\lambda(\bullet-s)} f(s) ds \right) \right). \quad (2.44)$$

gegeben ist, wobei $(\eta, f(\theta)) \in Y$ ist. Hierbei bezeichnet γ eine positiv orientierte, geschlossene Jordankurve der komplexen Ebene, die alle λ_i mit $i = 1, \dots, n$, einschliesst. Dann gilt für $H(t) = P_h(\alpha(t), 0)$ aufgrund der Definition von P_h mit $\tilde{K} = 1 + p_1(0) + \dots + p_n(0)$

$$\begin{aligned} P_h \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} - P_c \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(t) \tilde{K} \\ \alpha(t) (e^{\lambda_1 \theta} p_1(\theta) + \dots + e^{\lambda_n \theta} p_n(\theta)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit Polynomen $p_i(\theta) \in H^1([-a, b], \mathbb{C}^N)$, die höchstens vom Grad $k_i - 1$ für $i = 1, \dots, n$ sind. Dies wurde bereits beim Beweis des Satzes 2.3 durch Anwendung des Residuensatzes gezeigt und gilt auch hier (mittels mehrfacher Anwendung des Residuensatzes). Man beachte, dass alle Basisvektoren des verallgemeinerten Zentrumseigenraumes $E_c = \text{Bild}(P_c)$ von der Form

$$(p_1(0) + \dots + p_n(0), e^{\lambda_1 \theta} p_1(\theta) + \dots + e^{\lambda_n \theta} p_n(\theta))$$

sind.

Setzen wir $\tilde{p}(\theta) := e^{\lambda_1 \theta} p_1(\theta) + \dots + e^{\lambda_n \theta} p_n(\theta)$, so nimmt die zweite Komponente von (2.33) folgende Form an:

$$\dot{\varphi}(t)(\theta) = \partial_\theta \varphi(t)(\theta) + \alpha(t) \tilde{p}(\theta), \quad (2.45)$$

falls wir $U_h(t) = (\xi(t), \varphi(t)(\cdot))$ setzen und $\xi(t), \varphi(t)(\cdot)$ zu bestimmen sind. Da $\tilde{p}(\theta) \in C^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$ ist, kann man die Lösung von (2.45) mittels der Methode der Charakteristiken bestimmen (siehe [52] für die Methode der Charakteristiken). Es ist also

$$\varphi(t)(\theta) = \tilde{\varphi}(t + \theta) + \int_0^t \alpha(s) \tilde{p}(\theta + t - s) ds \quad (2.46)$$

für eine differenzierbare Funktion $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Man beachte, dass die Funktion $\tilde{p}(\theta)$ natürlich auch für Werte $\theta \in \mathbb{R}$ Sinn bringt und deswegen der Integralterm in (2.46) für $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Da $\varphi(t)(0) = \xi(t)$ für alle t gelten soll, damit $U_h(t) = (\xi(t), \varphi(t)) \in X$ für festes t , suchen wir $\xi(t)$ in der Form

$$\xi(t) = \varphi(t)(0) = \tilde{\varphi}(t) + \int_0^t \alpha(s) \tilde{p}(t - s) ds. \quad (2.47)$$

Eine leichte Umformung der Gleichung (2.45) liefert unter Beachtung von (2.47) die äquivalente Gleichung

$$\varphi(t)(\theta) = \xi(t + \theta) + \int_t^{t+\theta} \alpha(s) \tilde{p}(t + \theta - s) ds. \quad (2.48)$$

oder

$$\varphi(t)(\theta) = \xi(t + \theta) + \int_0^\theta \alpha(s + t) \tilde{p}(\theta - s) ds. \quad (2.49)$$

Wir setzen nun $\varphi(t)$, gegeben durch die letzte Gleichung, in die erste Komponente von (2.33) ein und erhalten

$$\dot{\xi}(t) = L[\xi(t + \cdot) + \int_0^\bullet \alpha(s + t) \tilde{p}(\cdot - s) ds] + \tilde{K} \alpha(t). \quad (2.50)$$

Gelingt es uns, (2.50) auf \mathbb{R} zu lösen, d.h. eine stetig differenzierbare Abbildung $\xi \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ zu finden, für die (2.50) gilt, so definieren wir $\varphi(t)(\cdot)$ durch die Gleichung (2.49) und setzen $U_h(t) := (\xi(t), \varphi(t)(\cdot))$. Wir benötigen folgendes Lemma.

Lemma 2.6

Sei $\eta > 0$ und $\alpha(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, dann ist für festes θ auch $t \rightarrow \int_0^\theta \alpha(s + t) \tilde{p}(\theta - s) ds$ ein Element von $BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$

Beweis

Der Beweis ergibt sich durch direktes Nachrechnen unter Benutzung der oben definierten Norm $\|\cdot\|_\eta$. Wichtig ist allerdings die Tatsache, dass $\tilde{p}(\theta)$ durch

$$e^{\lambda_1 \theta} p_1(\theta) + \dots + e^{\lambda_n \theta} p_n(\theta)$$

gegeben ist und alle $\lambda_i \in \mathbb{C}$ Realteil null für $i = 1, \dots, n$ haben. Außerdem sind die p_i Polynome, so dass \tilde{p} höchstens polynomielles Wachstum besitzt. \square

Natürlich ist dieses Lemma für $\eta = 0$ nicht richtig; diesen Fall brauchen wir aber nicht zu betrachten. Unter der Benutzung dieses Lemmas können wir (2.50) in der Form

$$\dot{\xi}(t) = L[\xi_t] + \tilde{\alpha}(t). \quad (2.51)$$

mit $\tilde{\alpha}(t) := L[\int_0^\bullet \alpha(s + t) \tilde{p}(\bullet - s) ds] + \tilde{K} \alpha(t)$ schreiben, wobei $\tilde{\alpha} \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ nach dem obigen Lemma gilt. Wir werden nun folgenden Satz beweisen, der uns die Existenz einer eindeutigen Lösung $\xi(\cdot) \in BC^\eta$ von (2.51) garantiert.

Satz 2.7

Es existiert ein $\eta_0 > 0$, so dass für jedes $\tilde{\alpha} \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y)$ eine eindeutige Lösung ξ von

$$\dot{\xi}(t) = L\xi_t + \tilde{\alpha}(t).$$

existiert, falls $\eta_0 > \eta > 0$ gilt.

Bevor wir den Satz beweisen, machen wir eine wichtige Beobachtung, die sich im Beweis als wichtig herausstellen wird:

Sei ξ eine Lösung von $\dot{\xi}(t) = L\xi_t + \tilde{\alpha}(t)$ für ein $\tilde{\alpha} \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y)$. Setze für $\mu > 0$:

$$y(t) := e^{\mu t} \xi(t).$$

Dann löst $y(t)$ die Gleichung

$$\dot{y}(t) = L(e^{-\mu \bullet} y_t(\bullet)) + \mu \cdot y(t) + e^{\mu t} \tilde{\alpha}(t). \quad (2.52)$$

Setzen wir also $L_\mu \varphi := L(e^{-\mu \bullet} \varphi(\bullet)) + \mu \cdot \varphi(0)$, so ist L_μ eine beschränkte, lineare Abbildung von $H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$ nach \mathbb{R}^N . Die lineare Abbildung L_μ definiert nun einen Operator $\mathcal{A}_\mu : X \subset Y \rightarrow Y$ mittels

$$\mathcal{A}_\mu \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\mu(\varphi) \\ \partial_\theta \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

für $(x, \varphi) \in X$. Es ist genau dann $\lambda \in \text{spec}(\mathcal{A}_\mu)$, wenn $\det \Delta_\mu(\lambda) = \det(\lambda(\text{id}_N) - L_\mu(e^{\mu \bullet})) = 0$ ist.

Bezeichne nun mit $\det \Delta(\lambda)$ die charakteristische Funktion bezüglich L . Dann besteht zwischen den charakteristischen Funktionen $\det \Delta(\cdot)$ bzw. $\det \Delta_\mu(\cdot)$ von L und L_μ folgender Zusammenhang:

$$\det(\Delta(\lambda)) = \det(\Delta_\mu(\lambda + \mu)) \quad (2.54)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, was man direkt an den jeweiligen Definitionen ablesen kann. Ist also insbesondere μ klein genug, so ist \mathcal{A}_μ *hyperbolisch*, d.h. es existieren keine Eigenwerte mit Realteil null. Nun zum Beweis des Satzes:

Beweis von Satz 2.7

Wir zeigen nur die Existenz einer Lösung, da wir die Eindeutigkeit bereits gezeigt haben. Wir schreiben $\tilde{\alpha}(t)$ für ein $t_0 > 0 > t_1$ in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_+(t) &= \tilde{\alpha}(t) & t > t_0 > 0 \\ \tilde{\alpha}_-(t) &= \tilde{\alpha}(t) & t < t_1 < 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

mit beliebigen Funktionen $\tilde{\alpha}_\pm : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, so dass $\tilde{\alpha}_+(t) + \tilde{\alpha}_-(t) = \tilde{\alpha}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Es bezeichnet also etwa $\tilde{\alpha}_+(t)$ den „positiven“ Anteil von $\tilde{\alpha}(t)$, d.h. $\tilde{\alpha}_+ \equiv 0$ auf $(-\infty, t_1)$. Die genaue Definition dieser beiden Funktionen auf den „Reststücken“ ist egal, solange nur $\tilde{\alpha}_+(t) + \tilde{\alpha}_-(t) = \tilde{\alpha}(t)$ auf \mathbb{R} gilt.

Sei nun $\eta_0 > \eta > 0$ und $-\mu < 0$ klein genug, so dass $\eta - \mu > 0$ ist. Betrachte die Gleichung

$$\dot{y}(t) = L_{-\mu}(y_t) + e^{-\mu t} \tilde{\alpha}_+(t). \quad (2.56)$$

wobei $L_{-\mu}$ wie oben durch $L_{-\mu} \varphi := L(e^{\mu \bullet} \varphi(\bullet)) - \mu \cdot \varphi(0)$ definiert ist. Sei weiterhin $\tilde{\alpha}(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Wir zeigen nun, dass eine Lösung $y_+(\cdot) \in BC^{\eta-\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ von (2.56) existiert. Analog kann man dann zeigen, dass für $\mu > 0$ die Gleichung

$$\dot{y}(t) = L_\mu(y_t) + e^{\mu t} \tilde{\alpha}_-(t). \quad (2.57)$$

eine Lösung $y_- \in BC^{\eta-\mu}$ besitzt. Dann ist $\xi_\pm(t) := e^{\mp \mu t} y_\pm(t) \in BC^\eta$ nach der obigen Bemerkung eine Lösung von

$$\dot{\xi}_\pm(t) = L(\xi_\pm)_t + \tilde{\alpha}_\pm(t)$$

und deswegen $\xi := \xi_+ + \xi_-$ eine Lösung von

$$\dot{\xi}(t) = L\xi_t + \tilde{\alpha}(t),$$

wegen $\tilde{\alpha}_+(t) + \tilde{\alpha}_-(t) = \tilde{\alpha}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgrund unserer modifizierten Funktion α_+ , die für genügend kleine Werte identisch verschwindet, ist es uns möglich, eine explizite Lösung $y_+ \in BC^{\eta-\mu}$ von (2.56) direkt anzugeben. Definiere dazu

$$y_+(t) := \int_{-\infty}^{\infty} G_*(t-s)e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s) ds, \quad (2.58)$$

wobei $G_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ die Greensfunktion

$$G_*(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_{-\mu}(ik))^{-1} e^{isk} dk$$

bezeichnet. Damit G_* wohldefiniert ist, sollte $\det \Delta_{-\mu}(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in i\mathbb{R}$ gelten bzw. $A_{-\mu}$ hyperbolisch sein. Wir erinnern daran, dass $\beta = 4\eta_0$ den kleinsten positiven Abstand einer Nullstelle λ_0 von $\det \Delta(\lambda)$ mit $\operatorname{Re} \lambda_0 \neq 0$ zur imaginären Achse bezeichnet. Ist dann $\mu > 0$ so klein, dass $\eta_0 > \mu > 0$ gilt, so ist nach (2.54) gerade

$$\det \Delta_{\mu}(ik) = \det \Delta(ik - \mu) \neq 0$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Also ist G_* nach dieser Wahl von $\eta_0 > \mu > 0$ wohldefiniert. Wir definieren μ für ein festes $\eta < \eta_0$ durch $\mu := 3\eta/4$, und halten uns nun an den Beweis des Theorems 4.1 aus [32]. Dort wird gezeigt, dass die Greensfunktion G_* die Abschätzung

$$|G_*(s)| \leq K_0 e^{-a_0|s|}$$

für gewisse $a_0, K_0 > 0$ und alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt. In unserem Fall kann man $a_0 := \eta - \mu + \varepsilon$ für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ wählen, wobei $K_0 = K_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ beliebig groß werden kann. Man beachte, dass $K_0 \rightarrow \infty$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ auftreten kann.

Diese Wahl von a_0 ist deswegen möglich, da durch unsere Wahl von $\mu = 3\eta/4$ jede komplexe Nullstelle von Δ_{μ} mindestens den Abstand μ zur imaginären Achse hat.

Desweiteren erfüllt $G_*(s)$ die Identität

$$\partial_s G_*(s) = L_{-\mu} G_*(s + \cdot) \quad (2.59)$$

für fast alle $s \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$G_*(0+) - G_*(0-) = \operatorname{id}_{\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N}, \quad (2.60)$$

d.h. G_* ist unstetig an der Stelle Null mit Sprung $\operatorname{id}_{\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N}$. Die Identität (2.59) kann man schnell mit der Fouriertransformation nachrechnen; sie besagt, dass die Matrixwertige Funktion G_* fast überall eine Lösung der linearen Gleichung ist. Insbesondere folgt aus den beiden letzten Gleichungen, dass G_* bis auf die Stelle $s = 0$ absolut stetig ist.

Um zu zeigen, dass der Ausdruck (2.58) wohldefiniert ist, also insbesondere die Funktion $s \mapsto G_*(t-s)e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s)$ integrierbar ist für jedes fest t , reicht es festzustellen, dass $(-\mu + \varepsilon) + (\eta - \mu) = -1/2 \cdot \eta + \varepsilon = -2/3 \cdot \mu + \varepsilon < 0$ für $\varepsilon := \mu/4$. Mit dieser Wahl von ε fällt nun der Integrand von (2.58) exponentiell mit Rate $-\mu/2 + \varepsilon = -\mu/4$. Also ist (2.58) wohldefiniert.

Man kann nun durch eine elementare Rechnung verifizieren, dass die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_*(t-s) \cdot e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s)| ds \leq K_1 \frac{1}{2\mu - \varepsilon - \eta} e^{(\eta-\mu)|t|} + K_2 \frac{1}{2\mu - \varepsilon - \eta} e^{(\varepsilon-\mu)|t|} \quad (2.61)$$

gilt. Also gilt nach Definition $y_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_*(t-s) \cdot e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s) ds \in BC^{\eta-\mu}$.

Analog zu dem Beweis in [32] kann man nun zeigen, dass y_+ tatsächlich eine Lösung von (2.56) definiert. Wir wählen dazu eine Testfunktion $\chi(\cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ und zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_s \chi(s) \cdot y_+(s) ds = - \int_{-\infty}^{\infty} (L_{-\mu}((y_+)_s) + e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s)) \cdot \chi(s) ds.$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) L_{-\mu}(y_+)_s ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) \cdot L_{-\mu} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_*(s-\tau+\bullet) \cdot e^{-\mu\tau} \tilde{\alpha}_+(\tau) d\tau \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) \cdot L_{-\mu} [G_*(s-\tau+\bullet) \cdot e^{-\mu\tau} \tilde{\alpha}_+(\tau)] d\tau ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) \cdot \partial_s G_*(s-\tau) \cdot e^{-\mu\tau} \tilde{\alpha}_+(\tau) ds d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_s \chi(s) \cdot G_*(s-\tau) \cdot e^{-\mu\tau} \tilde{\alpha}_+(\tau) ds d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) \cdot e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s) \cdot (G_*(0-) - G_*(0+)) ds \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_s \chi(s) y_+(s) ds - \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) \cdot e^{-\mu s} \tilde{\alpha}_+(s) ds, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. Beachte, dass wir den Satz von Fubini sowie (2.59) und (2.60) benutzt haben.

Also ist $y_+(\cdot) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ eine Lösung von (2.56). Da aber die rechte Seite von (2.56) sogar stetig in t ist, ist $t \mapsto y_+(t)$ stetig differenzierbar auf \mathbb{R} .

Bestimme nun ganz analog zu dem eben beschriebenen eine Lösung $y_-(\cdot)$ von (2.57). Definiere dann (wie oben beschrieben) $\xi_{\pm}(t) := e^{\mp\mu t} y_{\pm}(t)$ und setze $\xi := \xi_+ + \xi_-$. Dann ist die stetig differenzierbare Funktion ξ nach dem eben gezeigten ein Element in BC^η und löst

$$\dot{\xi}(t) = L\xi_t + \tilde{\alpha}(t).$$

Damit ist unser Satz bewiesen. □

Sei von nun an stets $0 < \eta < \eta_0$, mit dem in Satz 2.7 bestimmten η_0 . Dieser Satz erlaubt es uns nun, für gegebenes

$$H(t) = P_h \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

und $\alpha(\cdot) \in BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ eine eindeutige Lösung $U_h \in BC^\eta$ von

$$\dot{U}_h(t) = \mathcal{A}U_h(t) + H(t) \tag{2.63}$$

wie folgt zu bestimmen. Bezeichne mit $\xi(\cdot) \in BC^\eta$ die durch Satz 2.7 bestimmte Lösung von

$$\dot{\xi}(t) = L\xi_t + \tilde{\alpha}(t),$$

Setze $U_h(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \varphi(t)(\cdot) \end{pmatrix}$ mit $\varphi(t)(\cdot) \in X$ gegeben durch

$$\varphi(t)(\theta) = \xi(t + \theta) + \int_0^\theta \alpha(s + t) \tilde{p}(\theta - s) ds$$

gegeben, siehe (2.49) für die Bezeichnung von \tilde{p} .

Dies definiert eine wohlbestimmte Abbildung K_h via $K_h H = U_h$. Bezeichne nun mit $BC_{spez}^\eta(\mathbb{R}, Y_h)$ den abgeschlossenen Unterraum aller $H \in BC^\eta(\mathbb{R}, Y_h)$, die (2.62) erfüllen. Es bleibt dann zu überprüfen, ob $K_h \in \mathcal{L}(BC_{spez}^\eta(\mathbb{R}, Y_h), BC^\eta(\mathbb{R}, E_h))$ für alle $\eta \in (0, \eta_0)$ ist. Dies geschieht in dem nächsten Satz.

Satz 2.8

Der lineare Operator K_h erfüllt $K_h \in \mathcal{L}(BC_{spez}^\eta(\mathbb{R}, Y_h), BC^\eta(\mathbb{R}, E_h))$ für alle $\eta \in (0, \eta_0)$. Außerdem existiert eine stetige Funktion $\gamma : (0, \eta_0) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\|K_h\|_\eta \leq \gamma(\eta)$$

für alle $\eta \in (0, \eta_0)$ gilt.

Beweis

Wir überprüfen zuerst einmal, dass $t \mapsto U_h(t)$ in $BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)$ liegt. Dazu stellen wir fest, dass $\xi(t)$ wie im Beweis des Satzes 2.7 definiert, die Abschätzung

$$\|\xi\|_\eta \leq K \|\alpha\|_\eta \tag{2.64}$$

erfüllt, wobei $\|\cdot\|_\eta$ die gewichtete Norm bezüglich $BC^\eta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ bezeichnet. Diese Abschätzung ergibt sich unmittelbar aus der Definition von ξ mit $\xi = e^{-\mu t} y_+(t) + e^{+\mu t} y_-(t)$ (in der Notation des Satzes 2.7) zusammen mit der Definition von y_\pm (siehe (2.58)) und der Abschätzung (2.61).

Da $\xi(t)$ stetig differenzierbar auf \mathbb{R} ist und die Gleichung

$$\partial_t \xi(t) = L \xi(t) + \alpha(t)$$

erfüllt, lässt sich daraus schnell die Abschätzung

$$\|\partial_t \xi\|_\eta \leq M \|\alpha\|_\eta$$

ablesen.

Mit Hilfe dieser Zwischenresultate und der expliziten Darstellung von $\varphi(t)(\cdot)$ durch

$$\varphi(t)(\theta) = \xi(t + \theta) + \int_0^\theta \alpha(s + t) \tilde{p}(\theta - s) ds,$$

kann man nun unmittelbar unter Verwendung von Lemma 2.6 die Abschätzung

$$\|\varphi\|_{BC^\eta(\mathbb{R}, L^2)} < \tilde{M} \|\alpha\|_\eta$$

verifizieren, wobei Lemma 2.6 verwendet wurde. Da $t \rightarrow \varphi(t)(\theta)$ für festes $\theta \in [-a, b]$ stetig differenzierbar ist, kann man diese Abbildung differenzieren und erhält

$$\partial_t \varphi(t)(\theta) = \partial_t \xi(t + \theta) - \alpha(t) \tilde{p}(\theta) + \int_t^{t+\theta} \alpha(s) \partial_t \tilde{p}(\theta + t - s) ds. \tag{2.65}$$

Insbesondere ist also

$$\partial_t \varphi(t)(\cdot) = \partial_t \xi(t + \cdot) - \alpha(t) \tilde{p}(\cdot) + \int_t^{t+(\cdot)} \alpha(s) \partial_t \tilde{p}(\cdot + t - s) ds \quad (2.66)$$

in $L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ und stetig in t . Bezeichne diese Abbildung mit $t \mapsto \partial_t \varphi$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|t \mapsto \partial_t \varphi\|_{BC^\eta(\mathbb{R}, L^2)} &< C_1 \|t \mapsto \partial_t \xi_t\|_\eta + C_2 \|\alpha\|_\eta \\ &< C_3 \|\alpha\|_\eta \end{aligned}$$

für gewisse Konstanten C_1, C_2, C_3 . Also ist

$$\|\varphi\|_{BC^\eta(\mathbb{R}, H^1)} < \tilde{C} \|\alpha\|_\eta.$$

Nach Definition der Norm von $\|U_h\|_{BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)}$ haben wir nun

$$\|U_h\|_{BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)} < C \|\alpha\|_\eta.$$

gezeigt. Wegen $\|H\|_{BC_{\text{spez}}^\eta(\mathbb{R}, Y_h)} < C_4 \|\alpha\|_\eta$ (siehe die Definition von H), haben wir $t \mapsto U_h(t) \in BC^\eta(\mathbb{R}, E_h)$ gezeigt.

Den Abschätzungen kann man weiterhin entnehmen, dass eine stetige Funktion $\gamma : (0, \eta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, die $\|K_h\|_\eta \leq \gamma(\eta)$ für alle $\eta \in (0, \eta_0)$ erfüllt. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Dieser Satz zeigt, dass die Bedingung 2.1 erfüllt ist. Wir haben damit die Existenz einer Zentrumsmanifoldigkeit gezeigt. Die Aussage bezüglich der Äquivarianz des auf der Zentrumsmanifoldigkeit reduzierten Vektorfeldes (im Falle, dass die ursprüngliche Gleichung äquivariant ist), sowie die Abhängigkeit bezüglich eines Parameters folgen nun ebenfalls aus dem Theorem von Vanderbauwhede: siehe Seite 137 bzw. Kapitel 2.2, Seite 135 in [54].

2.5 Anwendung auf eine Modellgleichung der Elastizität

In diesem Kapitel wollen wir unser Theorem 2.6 auf eine Modellgleichung aus der Elastizität anwenden, die wir als zweites Beispiel in der Einleitung eingeführt haben. Diese lautet

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x (\sigma(w(t, x))) &= \mu \varepsilon \partial_x^2 v - \gamma \partial_x ([K^\varepsilon * w(t, \cdot)](x) - w(t, x)). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Unter Nichtbeachtung regularisierender Terme, d.h. für $\varepsilon = 0$, nimmt die Gleichung die Form einer zweidimensionalen, nichtlinearen Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x (\sigma(w(t, x))) &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

an, wobei $(w(t, x), v(t, x)) \in \mathbb{R}^2$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ist. Entscheidend ist bei dieser Modellgleichung, dass die genaue Form der nichtlinearen Funktion σ zwar abhängig von dem Material des elastischen Balkens ist, die Existenz *nicht konvexer* Bereiche der Abbildung

σ aber eine wichtige Voraussetzung ist (siehe etwa [22]). Bei Gedächtnislegierungen z.B. existiert typischerweise genau ein beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, auf dem σ streng monoton fallend ist. Die beiden so entstehenden Bereiche, auf denen σ monoton wachsend ist, repräsentieren dann verschiedene Phasen-Zustände des elastischen Balkens. Die Tatsache, dass σ nicht überall konvex ist, macht die analytische Handhabung dieser Gleichung (schon im Fall $\varepsilon = 0$) wesentlich schwieriger, da viele in der klassischen Theorie bekannten Resultate nur im Fall konvexer Nichtlinearitäten gelten. Allerdings geben die betrachteten Funktionen σ Anlass zu Schockwellen, die unterkompressiv und somit nicht vom klassischen Lax-Typ sind, siehe [39].

Betrachtet man nun die Gleichung (2.67) mit $\varepsilon \neq 0$, so führt ein Travelling-Wave-Ansatz (wie in der Einleitung beschrieben) auf eine Forward-Backward-Delay Gleichung. Dies ist eine Konsequenz der speziellen Modellierung der Kapillarität in Form eines nichtlokalen Terms ist. Wir sind nun an der Frage interessiert, inwiefern sich Schockwellen der unterliegenden Erhaltungsgleichung durch Profile der Travelling-Wave Gleichung realisieren lassen. Es wird sich herausstellen, dass dies zumindest für kleine Schockwellen mit Geschwindigkeiten nahe den charakteristischen Geschwindigkeiten gilt. Damit beschäftigen wir uns im Abschnitt 2.5.3.

Im letzten Abschnitt betrachten wir die regularisierte Gleichung im Fall verschwindender Viskosität. Wir zeigen, dass nahe einer geeigneten Gleichgewichtslösung eine Familie periodischer Lösungen kleiner Amplitude und eine kleine homokline Lösung existiert.

2.5.1 Herleitung der Modellgleichung

Wir betrachten im folgenden einen elastischen Balken, den wir uns zur Vereinfachung eindimensional vorstellen. Für ein gegebenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir nun mit $u(t, x)$ die skalare Funktion bezüglich $(t, x) \in \mathbb{R} \times I$, die als Funktion von t für festes $x = x_0$ die Position des Teilchens x_0 zum Zeitpunkt t angibt. Das Teilchen x_0 befindet sich also nach der Zeit $t > 0$ am Punkt $x_1 = x_0 + u(t, x_0)$.

Der Balken besitzt nun eine spezielle Energiefunktion $\mathcal{W}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und wir betrachten den Fall einer nichtkonvexen Abbildung $\mathcal{W}(\cdot)$. Diese Abbildung hat dabei typischerweise die in Abbildung 2.1 skizzierte Form; allerdings sind auch Abbildungen $\mathcal{W}(\cdot)$ von Bedeutung, deren Ableitung wie in Abbildung 2.2 (a) aussieht. In Abbildung 2.2 haben wir zwei in der Praxis auftretende Graphen skizziert.

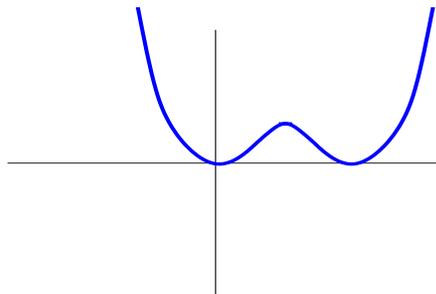


Abbildung 2.1: Der Graph von $\mathcal{W}(\cdot)$

Stellen wir uns zunächst einmal vor, dass die Funktion $u(t, x) = u(x)$ nur von x abhängt,

so lässt sich die Energie des Balkens in der Form

$$\mathbf{E}^0(u) = \int_I \mathcal{W}(\partial_x u(x)) dx \quad (2.69)$$

angeben. Ein größeres Problem ist nun die Tatsache, dass Gleichgewichtslösungen $u(x)$, die dieses Energiefunktional bezüglich geeigneter Randbedingungen minimieren, nicht eindeutig sind (siehe etwa [9]). Um dieses Problem zu vermeiden, kann man etwa Terme höherer Ableitungen bezüglich u in der Definition von \mathbf{E}^0 mit einbeziehen und so das Problem der Nichteindeutigkeit umgehen, siehe etwa [51]. Allerdings besitzen dann Lösungen u , die (2.69) minimieren, automatisch höhere Regularität als man von Lösungen des ursprünglichen Problems i.a. erwartet.

Auch nichtlokale Modelle werden betrachtet, siehe [2]. Für $\varepsilon > 0$ nimmt dann unser Energiefunktional die Form

$$\mathbf{E}^\varepsilon_{global}(u^\varepsilon) = \mathbf{E}^0(u^\varepsilon) + \frac{\gamma}{4} \int_I \int_I K^\varepsilon(x-y) |\partial_x u^\varepsilon(x) - \partial_x u^\varepsilon(y)|^2 dx dy \quad (2.70)$$

an. Hierbei ist $\gamma > 0$ ein Parameter und die mittels $\varepsilon > 0$ skalierte C^1 -Funktion $K^\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ist durch

$$K^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

gegeben. Die Funktion $K(\cdot)$ ist hierbei eine achsensymmetrische, positive C^1 -Funktion, die

$$\int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1$$

erfüllt und einen kompakten Träger, etwa im Intervall $[-1, 1]$, besitzt.

Nach dem Lagrange-Prinzip ist die Dynamik der Abbildung $u(t, x)$ auf $(0, T) \times I$ durch Extremalpunkte des Funktionals

$$\begin{aligned} I^\varepsilon_{global}(u^\varepsilon) &:= \int_0^T \int_I \left(\mathcal{W}(\partial_x u^\varepsilon(t, x)) - \frac{|\partial_t u^\varepsilon(t, x)|^2}{2} \right) dx dt \\ &+ \frac{\gamma}{4} \int_0^T \int_I \int_I K^\varepsilon(x-y) |\partial_x u^\varepsilon(t, x) - \partial_x u^\varepsilon(t, y)|^2 dy dx dt \end{aligned}$$

gegeben, siehe auch [39], Abschnitt 2.2, Seite 5. Extremalpunkte dieses Funktionals sind klassische Lösungen der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung. Eine kurze Rechnung zeigt, dass diese durch

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x(\sigma(\partial_x u(t, x))) = -\gamma \partial_x ([K^\varepsilon * \partial_x u(t, \cdot)](x) - \partial_x u(t, x)) \quad (2.71)$$

gegeben ist. „*“ bezeichnet hier und im folgenden stets die Faltung, d.h.

$$[K^\varepsilon * \partial_x u(t, \cdot)](x) := \int_{\mathbb{R}} K^\varepsilon(x-y) \partial_x u(t, y) dy. \quad (2.72)$$

$\sigma(\cdot)$ bezeichnet in Gleichung (2.71) die Ableitung von $\mathcal{W}(\cdot)$, also $\sigma(x) := \partial_x \mathcal{W}(x)$.

Für eine Herleitung von (2.71) verweisen wir auch auf [39]. Die irreversible Viskosität haben wir allerdings noch nicht in unser Modell mit einbezogen. Wir fügen diesen Term deswegen noch in unsere Gleichung (2.71) ein und erhalten

$$\partial_t^2 u - \partial_x(\sigma(\partial_x u)) = \mu \varepsilon \partial_t \partial_x^2 u(t, x) - \gamma \partial_x ([K^\varepsilon * \partial_x u(t, \cdot)](x) - \partial_x u(t, x)). \quad (2.73)$$

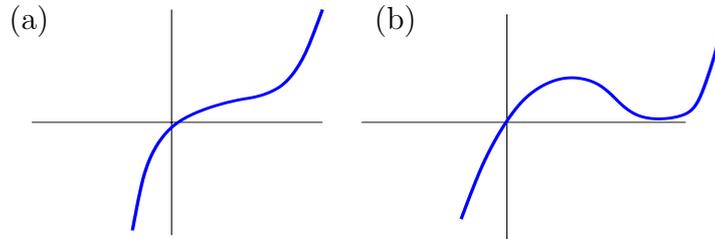


Abbildung 2.2: Zwei verschiedene Funktionen σ mit nicht-konvexen Bereichen ; Abbildung (a): Es existiert je ein Intervall, auf dem σ konkav bzw. konvex ist. Dieser Fall tritt etwa bei gummiartigen Materialien auf; siehe [24]. Abbildung (b): σ ist bis auf ein beschränktes Intervall streng monoton steigend. Dieser Fall tritt bei Gedächtnislegierungen auf, siehe [22]

Wir gehen auf die Skalierung bezüglich ε zwischen dem Viskositätsterm $\mu\varepsilon\partial_t\partial_x^2u(t, x)$ und dem Term $\gamma\partial_x([K^\varepsilon * \partial_xu(t, \cdot)](x) - \partial_xu(t, x))$ später ein (siehe dazu auch [39]).

Wir betrachten nun zur Vereinfachung die Gleichung (2.73) für Funktionen $u(t, \cdot)$, die auf ganz \mathbb{R} definiert sind und erweitern dazu den physikalischen Definitionsbereich $(-1, \infty)$ von $\sigma(\cdot)$ auf ganz \mathbb{R} .

Außerdem definieren wir folgende Größen. Bezeichne mit $w(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen

$$w(t, x) := \partial_xu(t, x) \quad v(t, x) := \partial_tu(t, x).$$

Also bezeichnet etwa v die Geschwindigkeit bezüglich der Längsrichtung des Balkens. Nach Einführung dieser Größen liest sich unsere Gleichung (2.73)

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x(\sigma(w(t, x))) &= \mu\varepsilon\partial_x^2v - \gamma\partial_x([K^\varepsilon * w(t, \cdot)](x) - w(t, x)). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Man beachte, dass (2.74) eine Erhaltungsgleichung für $\varepsilon = 0$ ist. Wir suchen nun „Travelling-Wave“ Lösungen dieser Gleichung, d.h. Lösungen $v(t, x), w(t, x)$ von (2.74), die in der Form $v(t, x) = V(x - ct)$ bzw. $w(t, x) = W(x - ct)$ für geeignete Funktionen $V(\cdot), W(\cdot)$ gegeben sind. Dieser Ansatz führt uns nun auf folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} -cW' - V' &= 0 \\ -cV' - \sigma'(W)W' &= \mu\varepsilon V'' - \gamma([K^\varepsilon * W'] - W'). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Diese lässt sich unter Verwendung der ersten Komponente weiter zu

$$c^2W' - \sigma'(W)W' = -\mu\varepsilon cW'' - \gamma([K^\varepsilon * W'] - W') \quad (2.76)$$

vereinfachen, wobei „ $'$ “ die Ableitung nach dem Argument der Funktionen $V(\cdot), W(\cdot)$

bezeichnet. Wir betrachten nun den Term $K^\varepsilon * W'$, der sich folgenderweise umformen läßt:

$$\begin{aligned} (K^\varepsilon * W')(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} K^\varepsilon(\tau - y)W'(y)dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \partial_y(K^\varepsilon(\tau - y))W(y)dy = \int_{\mathbb{R}} D_1 K^\varepsilon(\tau - y)W(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} D_1 K^\varepsilon(y)W(\tau - y)dy = \int_{\mathbb{R}} D_1 K^\varepsilon(-y)W(\tau + y)dy. \end{aligned}$$

Also gibt $K^\varepsilon * W'$ Anlass zu einem beschränkten linearem Funktional L_ε auf $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$, das durch

$$L_\varepsilon \varphi := \int_{\mathbb{R}} D_1 K^\varepsilon(-y)\varphi(y)dy$$

definiert und wohldefiniert ist, wenn $\text{support}(K^\varepsilon) \subset [-1, 1]$ ist (d.h. K^ε identisch Null außerhalb $[-1, 1]$ ist). Also gilt

$$(K^\varepsilon * W')(\tau) = \int_{-1}^1 D_1 K^\varepsilon(-y)W(\tau + y)dy = L_\varepsilon W_\tau.$$

Damit läßt sich Gleichung (2.76) in der Form

$$\mu \varepsilon c W''(\tau) = W'(\tau)(\gamma - c^2 + \sigma'(W(\tau))) - \gamma L_\varepsilon W_\tau \quad (2.77)$$

schreiben. Wir haben also gezeigt, dass Lösungen $v(t, x), w(t, x)$ von (2.74) in der Form $v(t, x) = V(x - ct)$ bzw. $w(t, x) = W(x - ct)$ für beschränkte Funktionen $V(\cdot), W(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, eine Lösung $W(\tau)$ von (2.77) induzieren. Andererseits definiert eine beschränkte Lösung $W(\tau)$ von (2.77) auf \mathbb{R} mittels Integration der Gleichung $-cW' = V'$ eine Funktion $V(\cdot)$. Setzt man $v(t, x) := V(x - ct)$ und $w(t, x) := W(x - ct)$, so erhält man beschränkte Lösungen von (2.74). In diesem Sinne korrespondieren Travelling-Waves $w(t, x) = W(x - ct)$, die $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w(t, \cdot) = w_\pm$ erfüllen (wobei $w_\pm \in \mathbb{R}$ Konstanten sind), zu heteroklinen Lösungen $W(\tau)$ von (2.77), für die $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W(t) = w_\pm$ gilt.

Wir sammeln noch ein paar spezielle Eigenschaften der Gleichung (2.77).

Lemma 2.7

Sei $W(\tau)$ eine Lösung von (2.77) für $\varepsilon = 1$. Definiere $W^{\varepsilon_0}(\tau) := W(\frac{\tau}{\varepsilon_0})$. Dann ist $W^{\varepsilon_0}(\tau)$ eine Lösung von (2.77) für $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Der Beweis hiervon folgt durch eine kurze, elementare Rechnung.

Wegen dieses Lemmas können wir uns also darauf beschränken, (2.77) für $\varepsilon = 1$ zu studieren. Wir werden dazu die beiden Fälle $\mu = 0$ und $\mu > 0$ betrachten, wobei wir daran erinnern, dass das Modell für $\mu = 0$ direkt als Euler-Lagrange Gleichung aus dem Funktional I_{global}^ε gewonnen wurde.

Bevor wir diese beiden Fälle betrachten, gehen wir im nächsten Abschnitt noch kurz auf eine spezielle Klasse von Lösungen der reinen Erhaltungsgleichung (2.74) für $\varepsilon = 0$ ein, die *Schockwellen* heißen und für unsere Betrachtungen eine wichtige Rolle spielen.

2.5.2 Schockwellen und die Rankine-Hugoniot Bedingung

Wir sammeln nun einige Eigenschaften der reinen Erhaltungsgleichung (2.74) für $\varepsilon = 0$. Diese hat folgende Form:

$$\begin{aligned}\partial_t w - \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v - \partial_x \sigma(w) &= 0.\end{aligned}\tag{2.78}$$

Setzen wir

$$\mathbf{f}(w, v) := \begin{pmatrix} -v \\ -\sigma(w) \end{pmatrix},$$

so kann man (2.78) in der abstrakten Form

$$\begin{pmatrix} \partial_t w \\ \partial_t v \end{pmatrix} + \partial_x \mathbf{f} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = 0$$

schreiben. Die Eigenwerte $\lambda_{\mp} = \lambda_{\mp}(w, v)$ und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{r}_{\mp} = \mathbf{r}_{\mp}(w, v)$ der Jacobimatrix von \mathbf{f} sind durch

$$\lambda_{\mp}(w, v) = \mp \sqrt{\sigma'(w)}, \quad \mathbf{r}_{\mp}(w, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{\sigma'(w)} \end{pmatrix}$$

gegeben. Eine spezielle Klasse von Lösungen $w(t, x), v(t, x)$ der Gleichung (2.78) sind *Schockwellen*. Diese haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} w^0(x, t) \\ v^0(x, t) \end{pmatrix} = \begin{cases} (w_-, v_-)^T & : x - ct < 0 \\ (w_+, v_+)^T & : x - ct > 0 \end{cases}\tag{2.79}$$

für $(w_{\pm}, v_{\pm}) \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$, falls die Zustände (w_{\pm}, v_{\pm}) die Bedingungen

$$-c(w_+ - w_-) = v_+ - v_-, \quad -c(v_+ - v_-) = \sigma(w_+) - \sigma(w_-)\tag{2.80}$$

erfüllen. Diese Bedingungen sind die sogenannten Rankine-Hugoniot-Bedingungen und lassen sich ebenfalls für $U_- = (w_-, v_-)$, $U_+ = (w_+, v_+)$ in der Form

$$\mathbf{f}(U_-) - \mathbf{f}(U_+) = c(U_- - U_+)$$

schreiben. Sie sichern uns zu, dass Schockwellen schwache Lösungen des Anfangswertproblems (2.78) mit $w(\cdot, 0) = w_-, v(\cdot, 0) = v_-$ sind, siehe [49, 52].

2.5.3 Realisierung schwacher Schocks

Mit Hilfe von Zentrumsmannigfaltigkeiten wollen wir in diesem Abschnitt zeigen, dass die Gleichung (2.78) mit $\mu \neq 0$ in der Nähe eines Zustandes $U_- = (w_-, v_-) \in \mathbb{R}^2$ generisch Schockwellen mit Geschwindigkeiten $c \approx c_*$ besitzt, falls $\sigma'(w_-) = c_*^2$ gilt. Die Strategie ist die folgende: wir stellen uns den Zustand $U_- = (w_-, v_-)$ als linken Endzustand der gesuchten Schockwelle vor und suchen für $c \approx c_*$ einen Zustand $U_+(c) = (w_+(c), v_+(c))$, so dass das Tripel $((w_+(c), v_+(c)), (w_-, v_-), c)$ eine Schockwelle induziert. Um sicherzustellen, dass die so erhaltenen Schockwellen physikalisch relevant sind, konstruieren wir die Schockwellen als Limes von Travelling-Wave Lösungen der regularisierten Gleichung

(2.74) für $\varepsilon \neq 0$. Dazu beweisen wir die Existenz von Lösungen $(w(x, t), v(x, t))$ der Gleichung (2.74), die in der Form $v(x, t) = V(\frac{x-ct}{\varepsilon})$, $w(x, t) = W(\frac{x-ct}{\varepsilon})$ geschrieben werden können und

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} V(\tau) = v_{\pm}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} W(\tau) = w_{\pm} \quad (2.81)$$

erfüllt ist. Da wir also insbesondere an der Existenz von Travelling-Wave Lösungen interessiert sind, betrachten wir die Travelling-Wave Gleichung

$$\begin{aligned} -cW' - V' &= 0 \\ -cV' - \sigma'(W)W' &= \mu V'' - \gamma([K^1 * W'] - W'). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Wir stellen uns nun vor, dass es bereits eine Lösung $(W(\cdot), V(\cdot))$ dieser Gleichung gibt, die (2.81) erfüllt. Integration der ersten Gleichung über das Intervall (a, τ) liefert dann

$$-cW(\tau) - V(\tau) = -cw_- - v_- := c_1 \quad (2.83)$$

für $a \rightarrow -\infty$ und $v_- := \lim_{a \rightarrow -\infty} V(a)$. Integration der zweiten Gleichung ergibt

$$-\gamma(L_1 W_\tau - W(\tau)) + \mu c W'(\tau) = -\sigma(W(\tau)) - c(-cW(\tau) - c_1) + (-\sigma(w_-) - cv_-),$$

wobei wir $c_2 := (-\sigma(w_-) - cv_-)$ setzen. Man beachte dabei, dass bei dieser Berechnung der Term $\lim_{a \rightarrow -\infty} (L_1 W_a - W(a)) = 0$ verschwindet. Wir erhalten also aus (2.82) nach Integration die Gleichung

$$\mu c W'(\tau) = \gamma(L_1 W_\tau - W(\tau)) + \sigma(W(\tau)) - c^2 W(\tau) + c^2 w_- - (\sigma(w_-)) =: \mathcal{F}(W_\tau, w_-, v_-, c). \quad (2.84)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung definiert damit eine glatte Abbildung \mathcal{F} von $H^1 := H^1([-1, 1], \mathbb{R})$ nach \mathbb{R} . Wir können nun das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

Satz 2.9 (Realisierung schwacher Schocks)

Sei (w_-, v_-) und c_* mit $\sigma'(w_-) = c_*^2$ und $\sigma''(w_-) \neq 0$ fest gewählt. Betrachten wir nun die Gleichung (2.74) mit $\mu, \gamma > 0$, dann existiert eine Lösung $W(\cdot) = W(\cdot, \hat{c})$ von (2.84) und ein Zustand $w_+ = w_+(\hat{c})$, so dass genau für einen der beiden Fälle $\pm(\hat{c} - c) > 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi, \hat{c}) = w_+(\hat{c}), \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} W(\xi, \hat{c}) = w_-$$

gilt. Für diesen Fall von \hat{c} kann man eine Funktion $V(\cdot) = V(\cdot, \hat{c})$ durch die Gleichung $\hat{c}W(\xi) + V(\xi) = \hat{c}w_- + v_-$ definieren, die

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi, \hat{c}) = v_+(\hat{c}), \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} V(\xi, \hat{c}) = v_-,$$

für einen Zustand $v_+ = v_+(\hat{c}) \in \mathbb{R}$ erfüllt. Setzt man schließlich $(w(x, t), v(x, t)) = (W((x - \hat{c}t)/\varepsilon), V((x - \hat{c}t)/\varepsilon))$, so definiert $(w(x, t), v(x, t))$ eine Lösung von (2.74), die für festes $x - \hat{c}t \neq 0$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ punktweise gegen die durch das Tripel $((w_+, v_+), (w_-, v_-), \hat{c})$ induzierte Schockwelle konvergiert.

Wir beweisen diesen Satz mit einer Zentrumsmannigfaltigkeitenreduktion und zeigen, dass in dem reduzierten Vektorfeld eine transkritische Verzweigung auftritt. Die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit nimmt dann etwa die in Abbildung 2.3 skizzierte Form an. Für festes $\hat{c} \approx c_*$ erhalten wir dann einen heteroklinen Orbit $W(\xi, \hat{c})$, der genau für $\hat{c} < c_*$

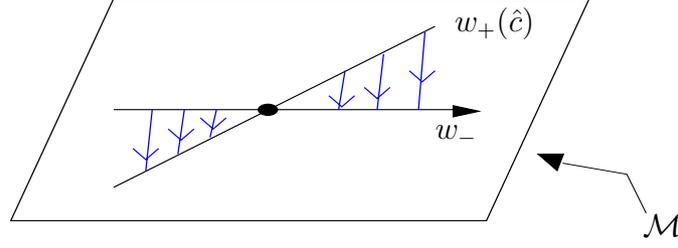


Abbildung 2.3: Dargestellt ist das auf der Zentrumsmanifold \mathcal{M} reduzierte Vektorfeld.

in Vorwärtszeit gegen $w_+(\hat{c})$ und in Rückwärtszeit gegen w_- konvergiert. Abhängig von dem Vorzeichen der Terme c_* und $\sigma''(c_*)$ kann dann das reduzierte Vektorfeld auch wie in Abbildung 2.3 aussehen, wobei nun alle Pfeile in die *andere* Richtung zeigen: In diesem Fall existieren die gesuchten Lösungen $W(\xi, \hat{c})$ genau für alle $\hat{c} \approx c_*$ und $\hat{c} > c_*$.

Beweis

Wir kümmern uns zunächst um Gleichgewichtslösungen. Eine konstante Funktion $\phi(\cdot) \equiv C$ ist für ein $C \in \mathbb{R}$ genau dann eine Gleichgewichtslösung von $\mathcal{F}(\cdot, w_-, v_-, c)$, wenn

$$\sigma(C) - c^2 C = -c^2 w_- + \sigma(w_-)$$

gilt. Erfüllen also die Zustände (w_+, v_+) und (w_-, v_-) die Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\begin{aligned} -c(w_+ - w_-) &= v_+ - v_- \\ -c(v_+ - v_-) &= \sigma(w_+) - \sigma(w_-), \end{aligned}$$

so ist $\phi(\cdot) := w_+$ eine Gleichgewichtslösung von $\mathcal{F}(\cdot, w_-, v_-, c)$. Wir stellen uns nun c als Verzweigungsparameter vor, fixieren w_-, v_- und schreiben die Gleichung $W'(\tau) = \mathcal{F}(W_\tau, c)$ in der Form (2.30), die in unserem Fall mit $\varphi(t, \cdot)$ die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}(t) \\ \dot{\phi}(t, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu c} (\gamma(L_1 \phi(t, \cdot) - \eta(t)) + \sigma(\eta(t)) - c^2(\eta(t)) + \beta(c)) \\ \partial_\theta \phi(t, \theta) \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

mit $\beta(c) := c^2 w_- - \sigma(w_-)$ annimmt. Desweiteren ist $(\eta(t), \phi(t, \cdot)) \in X$ für festes t . Der Raum X ist in unserem Fall durch $X := \{(\eta, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R} \times H^1([-1, 1], \mathbb{R}) : \phi(0) = \eta\}$ gegeben.

Wie wir bereits festgestellt haben, ist w_- trivialerweise ein Gleichgewicht für alle $c \in \mathbb{R}$. Fügen wir nun $\dot{c} = 0$ hinzu und linearisieren dann diese Gleichung im Gleichgewicht (w_-, c_*) , so erhalten wir mit $\varphi(t, \cdot) = (\varphi^1(t, \cdot), \varphi^2(t, \cdot))$

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}(t) \\ \dot{c}(t) \\ \dot{\phi}(t, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(\eta(t), c(t), \varphi^1(t, \cdot)) \\ 0 \\ \partial_\theta \varphi(t, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(\eta(t), c(t), \varphi^1(t, \cdot)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Hierbei ist $\Gamma(\eta, c, \phi^1(\cdot)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^0 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Gamma(\eta, c, \phi^1(\cdot)) := \frac{(\gamma(L_1\phi^1(\cdot) - \eta) + \sigma'(w_-)\eta - 2c_*w_-c) - c_*^2\eta + \beta'(c_*)c}{\mu c_*},$$

wobei $\beta'(c_*) = 2c_*w_-$ ist und

$$r(\eta, c, \phi^1(\cdot)) := \frac{1}{\mu c} (\gamma(L_1\phi^1(t, \cdot) - \eta(t)) + \sigma(\eta(t)) - c^2(\eta(t)) + \beta(c)) - \Gamma(\eta, c, \phi^1(\cdot)).$$

Man beachte, dass $(\eta, c, \phi(\cdot)) \mapsto \Gamma(\eta, c, \phi^1(\cdot))$ linear ist. Der erste Term der linken Seite von (2.82) definiert also eine lineare Abbildung $\mathcal{A}_- : X \subset Y \rightarrow Y$, mit

$$X := \{(\eta, c, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R}^2 \times H^1([-1, 1], \mathbb{R}^2) : \phi(0) = (\eta, c)\} \quad Y := \mathbb{R}^2 \times L^2([-1, 1], \mathbb{R}^2).$$

Wir können deswegen auf Gleichung (2.82) den Satz 2.6 anwenden, wenn wir noch zeigen, dass \mathcal{A}_- rein imaginäre Eigenwerte besitzt. Eigenwerte λ von \mathcal{A}_- sind durch Nullstellen der Determinante der charakteristischen Gleichung

$$\Delta(\lambda) = \lambda - \mathcal{L}(e^{\lambda \bullet})$$

gegeben, wobei $\mathcal{L} : C^0([-1, 1], \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ durch

$$\mathcal{L}(\varphi(\cdot), \psi(\cdot)) := \begin{pmatrix} \Gamma(\varphi(0), \psi(0), \phi(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Die Determinante von $\Delta(\lambda)$ berechnet sich also durch

$$\det \Delta(\lambda) = \lambda \left(\lambda - \frac{1}{\mu c_*} (\gamma(L_1 e^{\lambda \bullet} - 1) + \sigma'(w_-) - c_*^2) \right).$$

Wir beobachten, dass $\lambda = 0$ stets ein Eigenwert ist. Dieser ist genau dann algebraisch doppelt, wenn

$$\sigma'(w_-) = c_*^2,$$

also wenn $\pm \sqrt{\sigma'(w_-)} = c_*$ gilt (im Fall, dass die Wurzel definiert ist). Um eventuell andere rein imaginäre Nullstellen $i\kappa$ der charakteristischen Gleichung aufzuspüren, setzen wir $\lambda = i\kappa$ in $\det \Delta(\cdot)$ ein und erhalten

$$0 = i\kappa \left(i\kappa - \frac{1}{\mu c_*} (\gamma(L_1 e^{i\kappa \bullet} - 1) + \sigma'(w_-) - c_*^2) \right). \quad (2.87)$$

Wegen $L_1(\sin(\cdot \kappa)) = 0$, ist der Realteil der letzten Gleichung $-\kappa^2$. Also ist (2.87) genau dann erfüllt, wenn $\kappa = 0$ ist.

Nach Satz 2.6 besitzt die Gleichung (2.82) eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit. Bevor wir nun die reduzierte Gleichung bestimmen, berechnen wir die (gegebenfalls auch verallgemeinerten) Eigenvektoren zum Eigenwert 0 von \mathcal{A}_- . Man beachte, dass ein Eigenvektor stets durch

$$\mathbf{U}_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (1, 0) \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wenn $\sigma'(w_-) = c_*^2$ erfüllt ist. Der zweite Eigenvektor ist durch

$$\mathbf{U}_{**} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ (1, 1) \end{pmatrix}.$$

gegeben. Wir sehen also, dass 0 ist ein algebraisch und geometrisch doppelter Eigenwert ist. Das auf der Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierte Vektorfeld hat dann in den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (wobei x die Koordinate bezüglich U_* und y die bezüglich U_{**} ist) die folgende Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - x_-)(a_1 y + a_2(x - x_-) + a_3(x - x_-)y + \text{h.o.t.}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

In dieser Gleichung identifizieren wir y als Parameter, der Wert $y = 0$ korrespondiert zu $c = c_*$. Die Stelle $x = x_-$ spiegelt in dieser Gleichung die triviale Lösung w_- wieder. Wir bestimmen nun die Konstante a_2 . Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$a_2 = \frac{1}{\mu c_*} \sigma''(w_-)$$

gilt. Nach unserer Annahme ist nun $a_2 \neq 0$ und für die reduzierte Gleichung tritt eine transkritische Verzweigung auf. Außer der trivialen Linie von Gleichgewichten $x = x_-$ für alle y alias c , erhalten wir einen weiteren Zweig $x = (a_1/a_2)y + x_- =: z(y)$, wenn die höheren Ordnungsterme in (2.88) vernachlässigt werden. Um zu zeigen, dass das Gleichgewicht nichttrivial ist (d.h. $z(y) = x_-$), müssen wir noch den Koeffizienten a_1 berechnen und $a_1 \neq 0$ sicherstellen. Dazu müssen wir den Vektor

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta} \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} (\gamma(L_1(e^{\lambda \bullet}) - 1) - \lambda + \sigma'w_- - c_*^2)^{-1} \\ 0 \\ (e^{\lambda \bullet} \cdot [\gamma(L_1(e^{\lambda \bullet}) - 1) - \lambda + \sigma'w_- - c_*^2]^{-1}, 0) \end{pmatrix} d\lambda \quad (2.89)$$

berechnen, wobei ϑ eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene um den Ursprung bezeichnet. Bezeichnen wir die Nichtlinearität der Gleichung (2.86) für $((\eta, c), \varphi) \in X$ mit $\mathcal{G}((\eta, c), \varphi)$, so entspricht der Vektor in (2.89) genau dem Term

$$D^2(P_c \mathcal{G}((\eta, c), \varphi)) \Big|_{(\eta, c, \varphi) = (w_-, c_*, (w_-, c_*))} [\mathbf{U}_*, \mathbf{U}_{**}],$$

wobei $P_c : Y \rightarrow Y$ die Spektralprojektion auf den Zentrumseigenraum bezeichnet, siehe Gleichung (1.42) oder [23]. Stellt man dann den Vektor aus Gleichung 2.89 als Linearkombination der Vektoren \mathbf{U}_* und \mathbf{U}_{**} dar, so ist der Koeffizient des Vektors U_* der Linearkombination gerade die gesuchte Zahl a_1 . Eine Berechnung des Vektors (2.89) führt nun auf

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta} \frac{2}{\mu \cdot \lambda} \begin{pmatrix} (\gamma L_1(\bullet) - 1 + \mathcal{O}(\lambda))^{-1} \\ 0 \\ (e^{\lambda \bullet} \cdot (\gamma L_1(\bullet) - 1 + \mathcal{O}(\lambda))^{-1}, 0) \end{pmatrix} d\lambda = \frac{2}{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (1, 0) \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

Insbesondere ist also $a_1 = \frac{2}{\mu} \neq 0$.

Bezeichnen wir nun mit $\Psi(\cdot)$ eine Funktion, deren Graph lokal nahe w_- die Zentrumsmannigfaltigkeit darstellt, so ist die gesuchte Familie w_+^c durch $w_+^c := z(c + c_*) + \Psi(z(c + c_*))$ gegeben.

Für festes y ist die reduzierte Gleichung (2.88) eine eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung (hier benutzen wir u.a. die Tatsache, dass die charakteristische Funktion keine weiteren rein imaginären Nullstellen hat, die die Dimension der reduzierten Gleichung vergrößern würden). Für Parameterwerte $y \approx 0$ alias $c \approx c_*$ besitzt diese eindimensionale Gleichung dann zwei Gleichgewichte, die trivialerweise durch eine heterokline Lösung verbunden werden. Diese heterokline Lösung definiert uns die gesuchte Funktionen $W(\cdot, c) := W^c$. Die Funktion $V(\cdot, c) = V^c$ ist nun durch die Identität (2.83)

$$-cW(\tau, c) - V(\tau, c) = -cw_- - v_-$$

gegeben und es gilt $V^c = -cW^c + cw_- + v_-$. Damit sind alle Behauptungen gezeigt. \square

2.5.4 Die regularisierte Gleichung ohne Viskosität

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das System (2.91) eine Familie periodischer Orbits und einen homoklinen Orbit nahe einem geeigneten Gleichgewicht W_* besitzt.

Dazu betrachten wir das System (2.77) für $\mu = 0$, also

$$0 = W'(\tau)(\gamma - c^2 + \sigma'(W(\tau))) - \gamma L_1 W_\tau.$$

Ist der Faktor $(\gamma - c^2 + \sigma'(W)) \neq 0$ (falls etwa $\gamma > 0$ groß genug ist), so kann man letztere Gleichung in folgender Form schreiben:

$$W'(\tau) = \frac{-1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(W(\tau)))} \gamma L_1 W_\tau. \quad (2.91)$$

Man beachte, dass mit $W(\tau)$ auch $W(-\tau)$ eine Lösung ist. Es gilt nämlich für $Z(\tau) := W(-\tau)$:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(\tau) = -\dot{W}(-\tau) &= \frac{1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(W(-\tau)))} \gamma L_1 W_{-\tau} \\ &= \frac{1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(W(-\tau)))} \gamma \int_{-1}^1 (K^1)'(-\theta) W(\theta - \tau) d\theta \\ &= \frac{1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(W(-\tau)))} \gamma \int_{-1}^1 (K^1)'(\theta) W(-\theta - \tau) d\theta \\ &= \frac{-1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(Z(\tau)))} \gamma \int_{-1}^1 (K^1)'(-\theta) Z(\theta + \tau) d\theta \\ &= \frac{-1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(Z(\tau)))} \gamma L_1 Z_\tau. \end{aligned}$$

Man beachte im vorletzten Schritt, dass $(K^1)'(\cdot)$ aufgrund der Symmetrie-Annahmen an $K^1(\cdot)$ punktsymmetrisch ist.

Wir bemerken, dass jeder konstante Zustand $\phi(\cdot) \equiv k \in C^0([-a, b], \mathbb{R})$ eine Gleichgewichtslösung von (2.91) ist. Wir können nun (2.91) in unserem abstrakten Setting schreiben, um unter geeigneten Voraussetzungen eine Zentrumsmannigfaltigkeiten-Reduktion zu vollziehen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(k))} \gamma L_1 \phi(t, \cdot) \\ \partial_\theta \phi(t, \cdot) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(k))} - \frac{1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(\xi(t)))} \right) \gamma L_1 \phi(t, \cdot) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Der Term der rechten Seite definiert nun für ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$ eine beschränkte lineare Abbildung A von X nach Y . Und wieder gilt

$$X = \{(\xi, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R} \times H^1([-a, b], \mathbb{R}) : \phi(0) = \xi\}, \quad Y = \mathbb{R} \times L^2([-a, b], \mathbb{R}).$$

Wir beobachten eine Reversibilität in Gleichung (2.92): Bezeichne dazu mit $S : H^1([-a, b], \mathbb{R}) \rightarrow H^1([-a, b], \mathbb{R})$ die lineare Abbildung $(S\phi(\cdot))(\theta) := \phi(-\theta)$ und mit $F(\xi, \phi(\cdot))$ die rechte Seite von (2.92), so gilt $F(\xi, S\phi(\cdot)) = -(id_{\mathbb{R}} \times S)F(\xi, \phi(\cdot))$.

Wir untersuchen nun das Spektrum von A . Dazu betrachten wir die charakteristische Funktion $\Delta(\lambda)$ von A . Für diese gilt

$$\Delta(\lambda) = \lambda - \frac{\gamma}{(\gamma - c^2 + \sigma'(k))} \int_{-1}^1 (K^1)(-\theta) \lambda e^{\lambda \theta} d\theta$$

Speziell für $\lambda = 0$ gilt $\Delta(0) = \Delta'(0) = \Delta''(0) = 0$ und $\Delta'''(0) \neq 0$, falls $\sigma'(k) = c^2$ ist. Wegen der Achsensymmetrie von K^1 kann es keine weiteren rein imaginären Eigenwerte von A geben. Also existiert eine dreidimensionale Zentrumsmanifold \mathcal{M} nahe eines geeigneten Gleichgewichtes $(W_*, W_*) \in X$, falls die traveling wave Geschwindigkeit c_* die Bedingung

$$\sigma'(W_*) = c_*^2$$

erfüllt.

Wir können das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren

Satz 2.10

Sei W_* eine Gleichgewichtslösung von (2.91), so dass die Bedingungen $\sigma'(W_*) = c_*^2$ und $\sigma''(W_*) < 0$ erfüllt sind. Dann existiert nahe dem Gleichgewicht (W_*, W_*) von (2.92) eine dreidimensionale, invariante Mannigfaltigkeit. Das reduzierte Vektorfeld $\mathcal{F}_{red}(x, y, z)$ erfüllt die Reversibilität $\tilde{S}\mathcal{F}_{red}(x, y, z) = -\mathcal{F}_{red}(\tilde{S}(x, y, z))$ mit $\tilde{S}(x, y, z) := (x, -y, z)$ und lässt sich als beliebig kleine, \tilde{S} -reversible Störung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -xy \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

auffassen: Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existieren nahe null definierte Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ und eine Zeittransformation, so dass die reduzierte Gleichung die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ -\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.94)$$

annimmt.

Korollar 2.1

Die Gleichung (2.91) besitzt eine Familie kleiner periodischer Lösungen $P(\cdot, \delta)$ und eine homokline Lösung $H(\cdot)$ nahe W_* . Setzt man nun

$$w^\varepsilon(x, t) := P((x - ct)/\varepsilon, \delta), \quad v^\varepsilon(x, t) := V((x - ct)/\varepsilon, \delta),$$

wobei $V(\tau)$ durch die Gleichung $-cP(\tau, \delta) - V(\tau, \delta) = K$ für ein beliebiges $K \in \mathbb{R}$ bestimmt werden kann, so definiert $(w^\varepsilon, v^\varepsilon)$ eine Lösung von (2.74) für $\mu = 0$. Analog definiert auch $H(\cdot)$ eine Lösung von (2.74).

Beweis des Korollars

Die Aussagen des Korollars ergeben sich sofort aus der Analyse der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.94), siehe etwa [12], Kapitel 6. Schreiben wir (2.94) als eine Gleichung dritter Ordnung, so erhalten wir

$$0 = \partial_t(\ddot{x} + \frac{1}{2}x^2)$$

und wir können ein erstes Integral angeben:

$$\Theta = \dot{x} + \frac{1}{2}x^2 = z + \frac{1}{2}x^2. \quad (2.95)$$

Betrachtet man (2.95) als Differentialgleichung zweiter Ordnung in x , so können wir ein weiteres erstes Integral angeben:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{6}x^3 - \Theta x = \frac{1}{2}y^2 - zx - \frac{1}{3}x^3.$$

Mit diesen beiden ersten Integralen kann man nun alle beschränkten Lösungen nahe Null beschreiben (siehe auch [12], Kapitel 6). \square

Bevor wir den Satz 2.10 beweisen, machen wir einige Bemerkungen. Zunächst einmal ist die in dem Satz auftretende Reversibilität lediglich die Einschränkung der Reversibilität $id \times S$ auf die invariante Zentrumsmannigfaltigkeit. Man beachte nämlich, dass der Zentrumseigenraum durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \theta^2 \end{pmatrix},$$

aufgespannt wird. Insbesondere ist also der Fixpunktraum der linearen Abbildung \tilde{S} als Einschränkung der Abbildung S auf die invariante Mannigfaltigkeit zweidimensional.

Der Satz erlaubt uns nun, das reduzierte Vektorfeld \mathcal{F}_{red} als kleine (\tilde{S} -reversible) Störung der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.94) aufzufassen, die ebenfalls \tilde{S} -reversibel ist. Also sind „vom Wesen her“ im wesentlichen alle Lösungen dieser Gleichung, deren Orbit in zwei Punkten transversal zum Fixpunktraum $\text{Fix}(\tilde{S})$ ist, auch Lösungen der reduzierten Gleichung.

Beweis des Satzes 2.10

Um den Satz zu beweisen, bestimmen wir das auf die Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierte System. Da der Eigenwert 0 algebraisch dreifach ist (und es keine weiteren rein imaginären Eigenwerte gibt), ist die Zentrumsmannigfaltigkeit ebenfalls dreidimensional. O.E. nehmen wir von nun $W_* = 0$ an.

Wir bestimmen zunächst die Projektion auf den Zentrumseigenraum von A . Dazu benötigen wir die Resolvente von A , die für ein $\eta \notin \text{spec}(A)$ durch

$$(A - \eta)^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \Delta(\eta)^{-1} \\ -e^{\eta \bullet} \xi \Delta(\eta)^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $(\xi, 0) \in Y$ gegeben ist. Man beachte, dass wir aufgrund der speziellen Struktur unserer Nichtlinearität nur die Aktion der Zentrumsprojektion P_c auf Elementen $(\xi, 0)$ kennen müssen. Es gilt also

$$P_c \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = -1/2i\pi \int_{\gamma} (A - \eta)^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} d\eta,$$

wobei γ eine geschlossene Kurve um den Ursprung der komplexen Ebene darstellt. Wir benötigen nun die Taylorentwicklung von $\Delta(\eta) = \eta^3(a^3 + a_4\eta + a_5\eta^2 + (O)(\eta^3))$ nahe $\eta = 0$ und es gilt etwa $a_3 3! = -\int_{-1}^1 K^1(\theta) 3\theta^2 d\theta$. Man kann nun ausrechnen, dass

$$\begin{aligned} \left(P_c \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right)_1 &= (1/2i\pi) \int_{\gamma} \xi \Delta(\eta)^{-1} d\eta \\ &= -a_5 \frac{\xi}{a_3^2} \end{aligned}$$

für die erste Komponente der Projektion P_c gilt. Wir bestimmen nun die zweite Komponente und erhalten

$$\begin{aligned} \left(P_c \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right)_2 &= (1/2i\pi) \int_{\gamma} \xi \Delta(\eta)^{-1} e^{\eta\theta} d\eta \\ &= \frac{1}{2!} \theta^2 \frac{\xi}{a_3} - a_5 \frac{\xi}{a_3^2} \end{aligned}$$

und man beachte, dass insbesondere $a_3, a_5 \neq 0$.

Der zweite Klammerterm der rechten Seite von (2.92) definiert eine differenzierbare Abbildung G von X nach Y . Die zweite Ableitung dieser Funktion im Gleichgewicht $(W_*, W_*) = (0, 0)$ ist gegeben durch

$$D^2G(0) [(y, \Phi(\cdot)), (x, \Psi(\cdot))] = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma\sigma''(0)x}{(c^2-\gamma-\sigma'(0))^2} L_1(\Phi(\cdot)) + \frac{-\gamma y\sigma''(0)}{(c^2-\gamma-\sigma'(0))^2} L_1(\Psi(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} D^2G(0) [(1, 1), (1, 1)] &= 0 & D^2G(0) [(0, \theta), (0, \theta)] &= 0 \\ D^2G(0) [(0, \theta^2), (0, \theta^2)] &= 0 & D^2G(0) [(0, \theta), (0, \theta^2)] &= 0 \\ D^2G(0) [(1, 1), (0, \theta^2)] &= 0 \end{aligned}$$

und

$$D^2G(0) [(1, 1), (0, \theta)] = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma\sigma''(0)}{(c^2-\gamma-\sigma'(0))^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen zur Abkürzung $\zeta := \frac{-\gamma\sigma''(0)}{(c^2-\gamma-\sigma'(0))^2}$ und bestimmen die Projektion des letzten Terms, nämlich

$$P_c D^2G(0) [(1, 1), (0, \theta)] = \begin{pmatrix} -\frac{a_5}{a_3} \zeta \\ \zeta \theta^2 - \frac{a_5}{a_3} \zeta \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir also mit x bzw. y bzw. z die Koordinate bezüglich des Basisvektors $(1, 1)$ bzw. $(0, \theta)$ bzw. $(0, \theta^2)$, so nimmt das auf den Zentrumseigenraum reduzierte Vektorfeld folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \frac{a_5}{2a_3} \zeta xy \\ z \\ -\frac{1}{2a_3} \zeta xy \end{pmatrix} + \text{h.o.t.} \quad (2.96)$$

Wir führen nun mit den neuen Koordinaten $x = \epsilon^2 \tilde{x}, y = \epsilon^3 \tilde{y}, z = \epsilon^4 \tilde{z}$ eine Blow-up Skalierung durch und wählen $t = \epsilon^{-1} \tilde{t}$ als neue Zeit. In diesen Koordinaten erhalten wir nach differenzieren nach der neuen Zeit \tilde{t}

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ -\frac{1}{2a_3} \zeta \tilde{x} \tilde{y} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.97)$$

und das mit ϵ^2 beginnende Vektorfeld ist eine \tilde{S} -reversible Störung des ersten Klammerterms der rechten Seite von (2.97). Wir haben damit den Satz gezeigt. Es sei bemerkt, dass der Koeffizient $-\frac{1}{2a_3} \zeta$ negativ ist, falls $\sigma''(0)$ (alias $\sigma''(W_*)$) negativ ist. \square