

# Kapitel 1

## Einleitung

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit Verzweigungsphänomenen in *Mixed-Type* Gleichungen, die auch *Forward-Backward-Delay* Gleichungen genannt werden. Um systematisch alle lokalen Verzweigungsphänomene in allgemeinen Mixed-Type Gleichungen analysieren zu können, beweisen wir die Existenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten nahe nichthyperbolischer Gleichgewichte. Anschließend verwenden wir diese Methode, um die dynamische Realisierung kleiner Schockwellen in einer Modellgleichung der Elastizitätstheorie zu untersuchen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit sind wir an *globalen* Verzweigungsphänomenen in Forward-Backward-Delay Gleichungen interessiert. Speziell untersuchen wir ein allgemeines Zwei-Parameter System, das eine homokline Lösung besitzt. Die  $\omega$ -Limesmenge dieser Lösung bestehe dabei aus einem *nichthyperbolischen* Gleichgewicht, in dem unter Variation eines Parameters eine lokale Hopfverzweigung auftritt. Diese Hopfverzweigung bewirkt nun eine Verzweigung nahe der homoklinen Lösung: Wir beweisen, dass das simultane Auftreten des homoklinen Orbits und der Hopfverzweigung zu asymptotisch oszillierenden, nicht lokalisierten Lösungen der Forward-Backward-Delay Gleichung führt. Die Orbits dieser Lösungen kann man sich als Überlagerung des homoklinen Orbits und der durch die Hopfverzweigung entstehenden periodischen Orbits vorstellen. Außerdem können wir die Existenz nicht lokalisierter Lösungen zeigen, die in Rückwärtszeit exponentiell abklingen und in Vorwärtszeit gegen den Orbit einer periodischen Lösung konvergieren. Erste Verallgemeinerungen hinsichtlich heterokliner Lösungen sind möglich und werden im letzten Kapitel diskutiert.

Die Einleitung ist wie folgt aufgebaut. Um in dieses komplizierte und noch nicht allgemein bekannte Gebiet einzuführen, ist die Einleitung recht ausführlich. Auf diese Weise können wir ebenfalls auf einige Komplikationen und qualitative Unterschiede hinweisen, die im direkten Vergleich von Forward-Backward-Delay Gleichungen zu den anscheinend sehr verwandten Delay Gleichungen auftreten. Neben einer ausführlichen Präsentation der Ergebnisse dieser Arbeit, gehen wir zusätzlich auf die Relevanz früherer Veröffentlichungen für diese Arbeit ein.

### 1.1 Forward-Backward-Delay Gleichungen: Beispiele

Mixed-Type Gleichungen haben die Gestalt

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \tag{1.1}$$

wobei  $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine differenzierbare Funktion ist,  $x_t(\cdot) := x(t + \cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  für  $a > 0, b \geq 0$  und  $f(\cdot) : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine stetige Funktion ist. Der Index „ $t$ “ bei  $x_t$  bezeichnet also keine Ableitung!

Forward-Backward-Delay Gleichungen spielen in Modellierungen verschiedener Phänomene der theoretischen Physik, Chemie oder Biologie eine wichtige Rolle. Wir geben drei Beispiele an:

- Das wohl wichtigste Beispiel sind Gitter-Differentialgleichungen, die von der Form

$$\partial_t u^k(t) = \sum_{j=-m}^m f^j(u^{k+j}(t)) \quad (1.2)$$

mit  $k \in \mathbb{Z}$  sind. Gleichungen dieser Gestalt treten sowohl in der Biologie [3, 4], in Materialwissenschaften [5] als auch bei chemischen Reaktionen [10, 11] auf.

Eine Travelling-Wave-Lösung von (1.2) ist eine spezielle Lösung der Gestalt  $u^k(t) = \phi(k + ct)$  für ein Profil  $\phi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , eine Travelling-Wave Geschwindigkeit  $c \in \mathbb{R}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Einsetzen dieses Ansatzes in (1.2) führt auf die Gleichung

$$c\phi'(\xi) = \sum_{j=-m}^m f^j(\phi(\xi + j)), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

wobei wir  $\xi = x + ct$  gesetzt haben. Diese Gleichung ist nun nach Division durch  $c \neq 0$  von der Gestalt obiger Gleichung (1.1).

- Das zweite Beispiel beschreibt die Dynamik von Teilchen in einem elastischen Balken und lautet

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x(\sigma(w(t, x))) &= \mu \varepsilon \partial_x^2 v - \gamma \partial_x((K^\varepsilon * w(t, \cdot))(x) - w(t, x)); \end{aligned}$$

siehe auch [39, 53]. Dieses Modell werden wir genauer in Kapitel 2.5 diskutieren. In dieser Gleichung bezeichnet  $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Position des Teilchens  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  und wir haben  $w(t, x) = \partial_x u(t, x)$ ,  $v(t, x) = \partial_t u(t, x)$  gesetzt. Also ist  $v(t, x)$  die Geschwindigkeit des Teilchens und  $w(t, x)$  bezeichnet den Gradienten der Ortsfunktion.  $\sigma(\cdot)$  ist eine reellwertige Funktion, die im englischen auch oft „stress-strain-relation“ genannt wird. Sie ist als Ableitung einer Balken-spezifischen Energiefunktion definiert und hat die in Abbildung 1.1 a) oder b) skizzierte Form.  $\mu, \gamma$  sind nicht negative Konstanten. Der Term  $(K^\varepsilon * \phi(\cdot))(x)$  bezeichnet die Faltung einer Funktion  $\phi(\cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{R})$  mit einer positiven, achsensymmetrischen Funktion  $K^\varepsilon(\cdot)$ , deren Träger in dem Intervall  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  liegt und deren Integral  $\int_{\mathbb{R}} K^\varepsilon(x) dx$  den Wert eins hat.

Wir werden nun in Kapitel 2.5 zeigen, dass der Travelling-Wave Ansatz  $w(t, x) = W(x - ct)$ ,  $v(t, x) = V(x - ct)$  mit reellwertigen Funktionen  $V(\cdot), W(\cdot)$  und  $c \in \mathbb{R}$ , auf folgende Gleichung führt:

$$c^2 W'(\xi) - \sigma'(W(\xi)) W'(\xi) = -\mu \varepsilon c W''(\xi) - \gamma \left( \int_{-1}^1 K^\varepsilon(\theta) W_\xi(\theta) d\theta - W'(\xi) \right), \quad (1.4)$$

wobei wir  $\xi = x - ct$  gesetzt haben. Diese Gleichung ist eine Forward-Backward-Delay Gleichung zweiter Ordnung, falls  $\mu, c, \varepsilon, \gamma \neq 0$  ist.

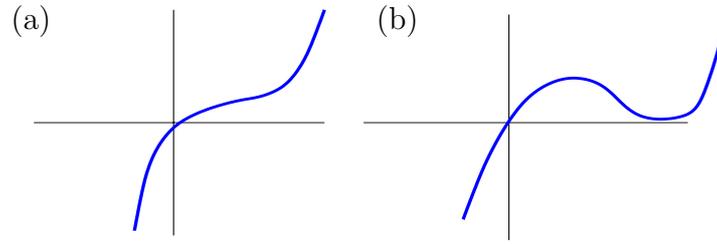


Abbildung 1.1: Zwei verschiedene Funktionen  $\sigma$  mit nicht-konvexen Bereichen. Bild (a): Es existiert je ein Intervall, auf dem  $\sigma$  konkav bzw. konvex ist. Bild (b):  $\sigma$  ist bis auf ein beschränktes Intervall streng monoton steigend.

- Ein weiteres Beispiel sind Semi-Diskretisierungen parabolischer Gleichungen, wie z.B.

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u), \quad u \in \mathbb{R}^N, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

die Travelling-Wave Lösungen besitzen, siehe etwa [13, 14]. Travelling-Wave Lösungen sind Lösungen der Gestalt  $u(t, x) = U(x - ct)$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  und eine differenzierbare Funktion  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = U_{\pm}$  für zwei homogene Zustände  $U_{\pm} \in \mathbb{R}^N$  erfüllt.

Leider scheitern analytische Methoden zur Bestimmung von Travelling-Waves oft an der Komplexität dieser Gleichungen, so dass numerische Methoden herangezogen werden müssen. In dieser Hinsicht liegt es nahe, die Gleichung (1.5) zu diskretisieren. Betrachtet man etwa eine Semi-Diskretisierung, so nimmt (1.5) folgende Form an:

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{j=-m}^m \alpha_j u(x + jh, t) + f(u(x, t)),$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  von der „Gittergröße“  $h$  abhängen dürfen. Setzen wir noch  $\xi := (x - ct)/h$ , dann erfüllen Travelling-Waves  $u(x, t) = \varphi((x - ct)/h)$  die Forward-Backward-Delay Gleichung

$$-\frac{c}{h} \varphi'(\xi) = \sum_{j=-m}^m \alpha_j \varphi(\xi + j) + f(\varphi(\xi)).$$

## 1.2 Rückblick: Delay Gleichungen

Betrachtet man nun den speziellen Fall  $b = 0$ , d.h.  $[-a, b] = [-a, 0]$ , so ist (1.1) eine reine Delay Gleichung. Diese Art von Gleichungen finden spätestens seit den sechziger Jahren reges Interesse, was nicht zuletzt an der Vielzahl ihrer Anwendungen liegt. Ein wahrer Meilenstein im systematischen Studium von Delay Gleichungen ist das Buch [18] von Jack Hale und in etwas neuerer Version [16]. Es ist bekannt, dass (1.1) im Fall einer Delay Gleichung und einer genügend glatten Nichtlinearität  $f$  zu jedem Anfangswert  $\varphi(\cdot) \in C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  auf einem kleinen Existenzintervall  $[0, \delta]$  mit einem kleinen  $\delta > 0$  eine Lösung  $x(\cdot)$  besitzt, die  $x_0 = \varphi$  erfüllt. Wir wollen nun definieren, was wir unter einer Lösung der Gleichung (1.1) auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$  für  $t_1 < t_2$  verstehen:

**Definition 1**

Eine Lösung  $x(\cdot)$  von (1.1) auf  $[t_1, t_2]$  ist eine stetige Funktion  $x : [-a + t_1, b + t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$  absolut stetig ist und Gleichung (1.1) auf  $[t_1, t_2]$  fast überall erfüllt.

Aus dem Blickwinkel dynamischer Systeme empfiehlt es sich oft, eher die Abbildung  $t \rightarrow x_t \in C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  für  $t \in [0, \delta)$  als Lösung zum Anfangswert  $\varphi \in C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  anzusehen. Wir betrachten zur Veranschaulichung den Fall einer linearen Delay Gleichung

$$\dot{x}(t) = Lx_t, \quad (1.6)$$

wobei  $L : C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine beschränkte lineare Abbildung ist. Man kann nun zeigen, dass Lösungen  $x(\cdot)$  zu Anfangswerten  $\varphi$  *global* existieren, d.h. wir können in Definition 1 getrost  $\delta = \infty$  setzen. Wir definieren nun für  $t \geq 0$  einen linearen Lösungsoperator  $T(t) : C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  durch

$$T(t) : \varphi \mapsto x_t. \quad (1.7)$$

Hierbei bezeichnet  $x(\cdot) : [-a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$  die eindeutige Lösung der Delay Gleichung (1.6), die  $x_0 = \varphi$  erfüllt. Der Operator  $T(t)$  ist also ein Shift-Operator auf den Lösungen der linearen Delay Gleichung und man kann zeigen, dass  $T(t)$  für  $t \geq 0$  eine stark stetige Halbgruppe  $T(t)$  auf  $C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  definiert; siehe etwa [16]. Eine lineare, stark stetige Halbgruppe hat die folgenden Eigenschaften: Für alle  $t \geq 0$  ist  $T(t) : C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  ein beschränkter linearer Operator, es gilt  $T(0) = \text{id}$ ,  $T(t)T(s) = T(t+s)$  für alle  $t, s \geq 0$  und  $(T(h)\varphi - \varphi) \rightarrow 0$  für  $h \searrow 0$  und alle  $\varphi \in C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$ . Speziell kann man die Menge  $\mathcal{D}$  aller Anfangswerte  $\varphi \in C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  betrachten, deren Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(T(h)\varphi - \varphi)$$

in  $C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  existiert. Auf dieser Menge  $\mathcal{D}$  können wir nun den *Generator*  $A$  der stark stetigen Halbgruppe  $T(t)$  durch

$$A\varphi := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(T(h)\varphi - \varphi)$$

definieren.  $A$  ist dann ein abgeschlossener, dicht definierter Operator, der von  $C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$  in sich abbildet. In unserem speziellen Fall (1.7) der Halbgruppe  $T(t)$ , ergibt sich für  $A$  der Operator

$$A : \varphi(\cdot) \mapsto \partial_\theta \varphi(\cdot)$$

mit  $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D} = \{\varphi(\cdot) \in C^1([-a, 0], \mathbb{R}^N) : \partial_\theta \varphi(0) = L\varphi(\cdot)\}$ . Wie man nun zeigen kann, induzieren Lösungen  $t \rightarrow x_t$  von (1.6) mit Anfangswert  $x_0 \in \mathcal{D}$  via  $u(t) := x_t$  Lösungen der Gleichung

$$\partial_t u(t) = Au(t). \quad (1.8)$$

Lösungen  $x_t$  von (1.6) mit Anfangswert  $x_0 = \varphi \in \mathcal{D}$  stehen also in direkter Korrespondenz zu Lösungen der abstrakten Gleichung (1.8). Tatsächlich kann man viele Eigenschaften der linearen Halbgruppe  $T(t)$  an dem Operator  $A$  ablesen; z.B. charakterisiert die Lage des Spektrums von  $A$  die asymptotische Wachstumsrate von  $T(t)$ ; siehe [37, 16]. Gerade in Bezug auf allgemeine Forward-Backward-Delay Gleichungen ist nun natürlich die Beantwortung folgender Frage wichtig:

Ist es denn umgekehrt mit Hilfe genügend großer Kenntnisse des Operators  $A$  (wie z.B. die Lage und Art des Spektrums, Resolventenabschätzungen etc.) möglich, auf die Existenz von Lösungen der linearen und später nichtlinearen Gleichung (1.1) zu schließen?

Diese Frage gewinnt an Bedeutung, wenn wir eine allgemeine (d.h. mit nichttrivialem Forward-Delay) Mixed-Type Gleichung (1.1) betrachten, in der  $b > 0$  gilt.

### 1.3 Delay- und Mixed-Type Gleichungen: qualitative Unterschiede

Sind wir nun an Forward-Backward-Delay Gleichungen (1.1) interessiert, die keine Delay-Gleichungen sind (also  $b > 0$  gilt), so stoßen wir auf folgendes Problem. Im allgemeinen existieren Anfangswerte  $\varphi \in C^0 := C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ , zu denen *keine* Lösung existiert. Dies wird bereits an folgendem Beispiel einer skalaren, linearen Forward-Backward-Delay Gleichung klar: Wir betrachten die Gleichung

$$\partial_t x(t) = x(t+1) + x(t-1), \quad (1.9)$$

mit  $x \in \mathbb{R}$ . (1.9) definiert eine Forward-Backward-Delay Gleichung auf  $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ . Betrachten wir speziell den Anfangswert  $\varphi(\cdot) \equiv 1$ , so lesen wir an (1.9) ab, dass jeder Kandidat einer Lösung  $x(t)$  den Wert  $-1$  auf dem Intervall  $(1, 2)$  besitzt und damit an der Stelle  $t = 1$  unstetig ist. Also lässt dieser Anfangswert keine Lösung im Sinne unserer Definition zu.

Einen tieferen Einblick in diese Problematik liefert die abstrakte Formulierung der Gleichung (1.9) analog zu Gleichung (1.8). Dazu betrachten wir den dicht definierten, abgeschlossenen Operator  $B : \mathcal{D}_B \subset C^0([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ , der durch

$$B : \varphi(\cdot) \mapsto \partial_\theta \varphi(\cdot) \quad (1.10)$$

definiert ist, wobei  $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_B := \{\phi(\cdot) \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) : \dot{\phi}(0) = \phi(-1) + \phi(1)\}$ . Eine kurze Rechnung zeigt nun, dass auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösungen  $u(t) = u(t)(\cdot)$  der Gleichung

$$\partial_t u(t) = Bu(t) \quad (1.11)$$

via  $x(t) := u(t)(0)$  eine Lösung der Beispielgleichung (1.9) definieren.

Nach einem Ansatz  $u(t, \cdot) = e^{\lambda(t+\cdot)}$  stellt man fest, dass das Spektrum von  $B$  durch die Nullstellen der charakteristischen Funktion  $\Delta(\lambda) := \lambda - e^{-\lambda} - e^\lambda$  festgelegt ist, d.h. es gilt

$$\lambda \in \text{spec}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(\lambda) = 0. \quad (1.12)$$

Diese Beobachtung führt zu der Schlussfolgerung, dass  $B$  bi-infinites Spektrum besitzt, d.h. es existieren sowohl komplexe Zahlen  $\lambda$  mit beliebig großem als auch kleinem Realteil, die im Spektrum von  $B$  liegen. Tatsächlich sind alle Elemente  $\lambda$  aus dem Spektrum von  $B$  Eigenwerte endlicher Vielfachheit, da die Resolvente von  $B$  kompakt ist (siehe die Argumentation kurz nach Gleichung (2.5)).

Nach einem allgemein bekannten Satz von Hille-Yosida (siehe etwa Pazy [37], Korollar 3.8, Seite 12) folgern wir daraus, dass  $B$  nicht der Generator einer stark stetigen Halbgruppe auf  $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$  ist und die Menge der Punkte, zu denen eine Lösung von (1.11) existiert,

nicht dicht liegt. Insbesondere existieren also glatte Anfangswerte, zu denen es *keine* Lösung gibt.

Wie wir später sehen, ist das Spektrum nicht davon abhängig, ob wir den Operator  $B$  auf  $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$  oder dem Raum stetiger Funktionen definieren: Studiert man den Operator  $B$  mit einem geeigneten Definitionsbereich in dem Phasenraum  $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ , so ist das Spektrum das gleiche wie im Fall des Phasenraumes  $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$  (siehe Satz 2.1 und 2.3).

Unser Beispiel macht deutlich, dass nützliche Informationen hinsichtlich der linearen Forward-Backward-Delay Gleichung

$$\partial_t x(t) = Lx_t,$$

mit  $x(t) \in \mathbb{R}^N$  für alle  $t$  und einer beschränkten linearen Abbildung  $L : C^0 \rightarrow \mathbb{R}^N$  an dem dazugehörigen, dicht definierten Operator  $B : \mathcal{D} \subset C^0 \rightarrow C^0$  (definiert in (1.10)) abgelesen werden können, wobei

$$\mathcal{D} := \{\phi(\cdot) \in C^1([-a, b], \mathbb{R}^N) : \dot{\phi}(0) = L\phi(\cdot)\} \quad (1.13)$$

ist. Und wieder kann man zu diesem Operator eine charakteristische Funktion  $\det \Delta(\lambda)$  assoziieren, wobei

$$\Delta(\lambda) = \lambda \cdot id_{N \times N} - L(e^{\lambda \bullet} \cdot id_{N \times N}), \quad (1.14)$$

gilt. Der Punkt „ $\bullet$ “ bezeichnet in dieser Gleichung das Argument derjenigen Funktion, bezüglich derer die Abbildung  $L$  ausgewertet wird. Nullstellen von  $\det \Delta(\cdot)$  legen genau die Elemente im Spektrum von  $B$  fest, d.h. es gilt (1.12). Man beachte bei der Definition von  $\Delta(\lambda)$ , dass die Abbildung  $L$  zunächst nicht für die matrixwertige Funktion  $\theta \mapsto e^{\lambda \theta} \cdot id_{N \times N}$  definiert ist. Allerdings lässt sich jede beschränkte lineare Abbildung  $L : C^0 \rightarrow \mathbb{C}^N$  in der Form  $L\varphi = \int_{-a}^b \varphi(\theta) d\eta(\theta)$  schreiben, wobei  $\eta : [-a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$  eine Abbildung beschränkter Variation ist; siehe dazu [28], Appendix I. In dieser Hinsicht ist nun auch der Ausdruck  $L(e^{\lambda \bullet} \cdot id_{N \times N})$  komponentenweise wohldefiniert.

Lunel und Mallet-Paret konnten nun im hyperbolischen Fall  $\det \Delta(\lambda) \neq 0$  für alle  $\lambda \in \text{spec}(B) \cap i\mathbb{R}$  in der Arbeit [31] zeigen, dass bezüglich  $C^0$  abgeschlossene Unterräume  $P$  und  $Q$  existieren, so dass  $P \oplus Q = C^0$  gilt und Halbgruppen  $T_P(t) : P \rightarrow P$  für  $t \geq 0$  bzw.  $T_Q(-t) : Q \rightarrow Q$  für  $t \geq 0$  existieren, die den Generator  $B|_P$  bzw.  $-B|_Q$  besitzen. Grob gesagt existieren also lineare Unterräume  $P$  und  $Q$  von  $C^0$ , auf denen man die Gleichung

$$\partial_t u(t) = Bu(t) \quad (1.15)$$

in Vorwärts- bzw. Rückwärtszeit lösen kann.

## 1.4 Fredholmoperatoren und Spektrum: Definitionen

Fredholmoperatoren sind für das Verständnis dieser Arbeit von großer Bedeutung. Wir rekapitulieren deswegen die Definition und halten ein paar wichtige Eigenschaften fest (siehe auch [23]):

### Definition 2

Sei  $M : E \rightarrow F$  ein dicht definierter, abgeschlossener Operator zwischen zwei Banachräumen  $E, F$ . Dieser heißt **Fredholmoperator**, falls das Bild von  $M$  in  $F$  abgeschlossen ist und

$$\dim(\text{Kern}(M)) < \infty, \quad \text{kodim}(\text{Bild}(M)) < \infty$$

gilt. Der **Fredholmindex**  $i = i_M$  von  $M$  ist dann durch  $i = \dim(\text{Kern}(M)) - \text{kodim}(\text{Bild}(M))$  gegeben.

Für den Beweis des nächsten Satzes verweisen wir auf [23].

**Satz 1.1 (Störungen eines Fredholmoperators)**

Sei  $M : E \rightarrow F$  ein Fredholmoperator. Dann gilt:

- Sei  $K : E \rightarrow F$  kompakt. Dann ist auch der dicht definierte Operator  $M + K : E \rightarrow F$  ein Fredholmoperator und die Fredholmindizes stimmen überein, d.h.  $i_{M+K} = i_M$ .
- Es existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass folgendes gilt. Ist  $B : E \rightarrow F$  ein beschränkter Operator und erfüllt die Operatornorm die Abschätzung  $\|B\|_{L(E,F)} < \epsilon$ , dann ist auch der dicht definierte Operator  $M + B : E \rightarrow F$  ein Fredholmoperator und die Fredholmindizes stimmen überein, d.h.  $i_{M+B} = i_M$ .

Sei nun  $E = F$ . Als *Punktspektrum*  $\sigma_{\text{punkt}} \subset \mathbb{C}$  des Operators  $M$  verstehen wir alle komplexen Zahlen  $\mu \in \mathbb{C}$ , so dass der dicht definierte Operator  $M - \mu \cdot \text{id}_E : E \rightarrow E$  ein Fredholmoperator vom Index Null mit nichttrivialem Kern ist. Alle anderen Punkte  $\mu \in \mathbb{C}$  mit  $\mu \notin \sigma_{\text{punkt}}$ , für die  $M - \mu \cdot \text{id}_E$  nicht stetig invertierbar ist, gehören zum *essentiellen Spektrum*  $\sigma_{\text{ess}}$  des Operators  $M$ .

## 1.5 Globale Verzweigungen

Wir interessieren uns in diesem Kapitel für eine globale Verzweigung, in der eine heterokline oder homokline Lösung einer allgemeinen Forward-Backward-Delay Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \nu) \tag{1.16}$$

unter Variation eines Parametervektors  $\nu \in \mathbb{R}^n$  beginnt, asymptotisch zu oszillieren. Stellt man sich die Mixed-Type Gleichung (1.16) als modellierende Gleichung eines physikalischen Experimentes vor, so sind entstehende Oszillationen oftmals ein Indiz für unerwünschte Instabilitäten. Um diese Oszillationen unterdrücken oder kontrollieren zu können, ist deswegen zunächst ein besseres Verständnis der Entstehung von hoher Bedeutung. Alle drei einleitenden Beispiele des ersten Abschnittes 1.1 der Einleitung können für dieses Kapitel als relevante Beispielgleichungen angesehen werden: während die ersten beiden Beispiele Modellgleichungen spezieller physikalischer Phänomene sind, ist das dritte Beispiel eine Semi-Diskretisierung einer parabolischen Gleichung. In diesem Fall tritt also die Forward-Backward-Delay Gleichung als approximierende Gleichung der ursprünglichen Travelling-Wave Gleichung auf. Es ist deswegen wichtig, Instabilitäten der approximierenden Forward-Backward-Delay Gleichung (etwa in der Gestalt auftretender Oszillationen) unterscheiden zu können: Werden sie von der ursprünglichen parabolischen Gleichung geerbt oder treten sie „künstlich“ durch die Approximation mittels einer Forward-Backward-Delay Gleichung auf? Auch wenn wir die Frage in dieser Arbeit nicht beantworten können, so dient sie uns dennoch als Motivation.

Wir sind zunächst an einer homoklinen Lösung der Gleichung (1.16) interessiert, in deren Nähe unter Variation eines Parametervektors  $\nu$  asymptotisch oszillierende Lösungen auftreten. Wir würden erwarten, solche Lösungen als Konsequenz des Zusammenspiels zweier Phänomene zu beobachten: Der Existenz einer homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  und periodischer Lösungen kleiner Amplitude nahe dem Gleichgewicht. Der Intuition nach resultiert dann

das simultane Auftreten beider Phänomene in der Existenz von Lösungen der Gleichung (1.16), die asymptotisch beginnen zu oszillieren. Um diese Intuition zu bestätigen, müssen wir uns unter anderem mit folgenden Fragen auseinandersetzen: Wie entstehen überhaupt oszillierende Lösungen kleiner Amplitude nahe dem Gleichgewicht? Wieviele reelle Parameter sind notwendig, um eine solche Verzweigung studieren zu können?

Beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten Frage, so stellen wir fest, dass oszillierende Lösungen kleiner Amplitude immer dann entstehen, wenn in einem Gleichgewicht eine Hopfverzweigung auftritt. Resultate über Hopfverzweigungen sind für gewöhnliche Differentialgleichungen weithin bekannt (siehe etwa [6, 25]), nicht aber für allgemeine Forward-Backward-Delay Gleichungen. Wir beweisen allerdings im Abschnitt „Hopfverzweigung“ des Kapitels 3.4, dass ein analoges Resultat auch im Fall einer Mixed-Type Gleichung (1.16) gilt, man siehe auch die Arbeit [30]. Für das Auftreten einer Hopfverzweigung benötigen wir einen reellen Parameter  $\lambda$  und identifizieren  $\lambda$  mit der ersten Komponente des Parametervektors  $\nu \in \mathbb{R}^n$ , wobei wir die Dimension  $n$  des Parameterraumes noch nicht genau spezifiziert haben. Also schreiben wir  $\nu = (\lambda, \nu^2, \dots, \nu^n)$  und nehmen an, dass die Nullfunktion für alle  $\nu$  eine Gleichgewichtslösung der Gleichung (1.16) ist. Unser Resultat in Abschnitt 3.4 garantiert uns dann die Existenz periodischer Lösungen kleiner Amplitude der Gleichung (1.16), die unter Variation der  $\lambda$ -Komponente des Vektors  $(\lambda, \nu^2, \dots, \nu^n)$  nahe eines geeigneten Wertes  $(\lambda_0, \nu^2, \dots, \nu^n)$  entstehen. Damit solche oszillierenden Lösungen auftreten, muss Gleichung (1.16) für  $\nu = (\lambda_0, \nu^2, \dots, \nu^n)$  einige Spektralannahmen erfüllen und ein bestimmter dritter Ordnungsterm der Nichtlinearität  $f$  muss von null verschieden sein (man siehe Kapitel 3.2 für eine genauere Formulierung der Voraussetzungen).

Ist der homokline Orbit ein Kodimension-Eins-Phänomen, so benötigen wir einen zusätzlichen Parameter  $c := \nu^2$ . Zum Studium der Verzweigung schränken wir uns also auf genau zwei reelle Parameter  $(\nu^1, \nu^2) = (\lambda, c)$  ein und betrachten von nun an die Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c). \quad (1.17)$$

Die homokline Lösung  $h(\cdot)$  und Hopfverzweigung treten in dieser Gleichung für einen Parameterwert  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  auf, wobei  $\lambda$  den „Hopfparameter“ bezeichnet. Satz 1.3, den wir im nächsten Abschnitt formulieren, sichert uns nun unter zusätzlichen Annahmen die Existenz von Lösungen der Gleichung (1.17) für gewisse Parameter  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  zu, die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen eine periodische Lösung konvergieren und wie in Abbildung 1.5 skizziert aussehen. Zusätzlich können wir die Existenz von Lösungen der Gleichung (1.17) für Parameterwerte  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  beweisen, die in Vorwärtszeit gegen eine periodische Lösung und in Rückwärtszeit gegen das Gleichgewicht Null konvergieren (siehe Abbildung 1.4 und Satz 1.2)

Für *gewöhnliche* Differentialgleichung wurden Verzweigungen dieser Art bereits analysiert, siehe etwa [7, 8, 20]. Die Autoren dieser Arbeiten waren allerdings mehr an dem Auftreten chaotischer Dynamik nahe der homoklinen Lösung interessiert. Eine nahezu vollständige Verzweigungsanalyse für den Fall einer homoklinen Lösung, die gegen ein nichthyperbolisches Gleichgewicht mit ein- oder zweidimensionaler Zentrumsmannigfaltigkeit konvergiert, wurde von Lin in [27] bewerkstelligt.

Wir wollen zu bedenken geben, dass im allgemeinen bereits der Beweis der *Existenz* einer homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  einer allgemeinen Forward-Backward-Delay Gleichung (1.17) eine nichttriviale Aufgabe ist. Allerdings konnte Ren in [38] die Existenz homokliner Lösungen für eine Klasse von Gleichungen beweisen, die etwa Gleichung (1.4) aus dem ersten Kapitel mit einschließt.

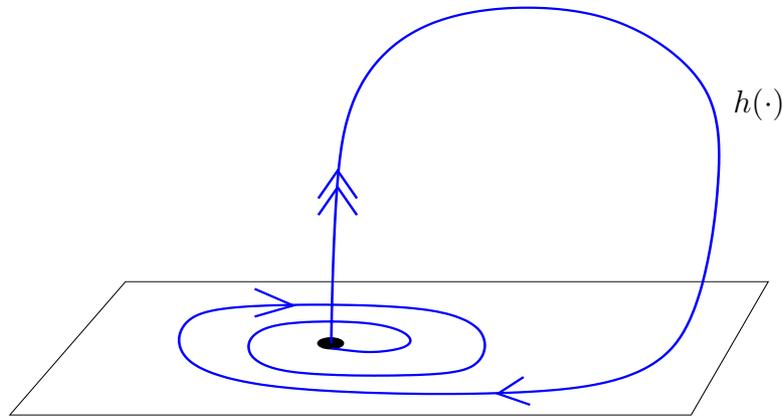


Abbildung 1.2: Die Abbildung zeigt die homokline Lösung  $h(\cdot)$ . Exponentielle Konvergenz wird in der Abbildung mit einem doppelten Pfeil repräsentiert.

Im nächsten Abschnitt formulieren wir unsere Hauptresultate 1.2,1.3 und zeigen im anschließenden Abschnitt 1.5.2, wie man den Sachverhalt auf heterokline Lösungen  $h(\cdot)$  verallgemeinern kann, für die in einem der beiden asymptotischen Gleichgewichte eine Hopfverzweigung auftritt.

### 1.5.1 Abzweigende Lösungen nahe einer homoklinen Lösung

In diesem Abschnitt veranschaulichen wir unsere Hauptresultate für den speziellen Fall einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung (1.17) und betrachten die Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda, c) \quad (1.18)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^N$ . Wir stellen uns dabei vor, dass die Nichtlinearität  $f$  genügend glatt ist, so dass Gleichung (1.18) einen Fluss induziert. In Kapitel 3 zeigen wir dann, dass die gleichen Ergebnisse selbst im Fall einer *allgemeinen* Mixed-Type Gleichung (1.17) gelten (man siehe Abschnitt 3.2 für die genauen Annahmen an die Nichtlinearität  $f$ ). Insbesondere werden wir allen in der folgenden Argumentation verwendeten Begriffen auch im Fall einer Forward-Backward-Delay Gleichung eine Bedeutung geben.

Wir haben angenommen, dass für die Gleichung (1.18) im Gleichgewicht Null eine Hopfverzweigung auftritt. Für die gewöhnliche Differentialgleichung (1.18) bedeutet dies, dass die Linearisierung  $D_1 f(0, \lambda_0, c_0)$  des Vektorfeldes  $f$  im Gleichgewicht Null zwei einfache, rein imaginäre Eigenwerte  $\pm i\omega$  besitzt, die die imaginäre Achse unter Variation von  $\lambda$  mit nichtverschwindender Geschwindigkeit kreuzen. Wir zeigen nun in Abschnitt 3.2, dass eine Kurve im Parameterraum existiert, die folgende Eigenschaften besitzt: Ein Parameterwert  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  liegt genau dann auf der Kurve, wenn  $D_1 f(0, \lambda, c)$  rein imaginäre Eigenwerte nahe  $\pm i\omega$  besitzt. Diese „Hopfkurve“ haben wir in Abbildung 1.3 skizziert. Fixieren wir nun  $c \approx c_0$  und kreuzen die Hopfkurve unter Variation von  $\lambda$  in vertikaler Richtung, so kreuzen die rein imaginären Eigenwerte die imaginäre Achse ebenfalls mit nichtverschwindender Geschwindigkeit. Also repräsentieren alle Punkte auf der Hopfkurve Parameterwerte, für die im Gleichgewicht Null der Gleichung (1.18) eine Hopfverzweigung auftritt. Als Konsequenz entstehen periodische Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  kleiner Amplitude für gewisse  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$ .

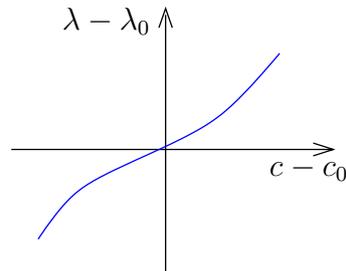


Abbildung 1.3: Die Hopfkurve bezüglich der Parameter  $(\lambda, c)$ .

Da die Dynamik nahe dem Gleichgewicht Null für die Interaktion der homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  und der periodischen Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  eine wichtige Rolle spielt, betrachten wir nun die Dynamik auf der parameterabhängigen *Zentrumsmanifold*  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\lambda,c}$  für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$ . Diese Mannigfaltigkeit zeichnet sich dadurch aus, dass sie alle nahe Null beschränkten Lösungen der Gleichung (1.18) enthält. Insbesondere liegen also die periodische Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  in  $\mathcal{M}$  (für weitere Eigenschaften einer *Zentrumsmanifold* verweisen wir auf den Abschnitt 1.6.3). *Zentrumsmanifolds* sind lokal invariant. Also können wir die Dynamik der Gleichung (1.18) auf diese Mannigfaltigkeit einschränken. Es spielt nun eine wichtige Rolle, ob die nichttrivialen periodischen Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  bezüglich der eingeschränkten Dynamik stabil oder instabil sind. Wir wollen hier den Fall betrachten, dass die periodischen Lösungen *stabil* sind, was wir unter zusätzlichen Spektralannahmen und Vorzeichenbedingungen an höhere Ordnungsterme der Nichtlinearität  $f$  erreichen können (siehe Hypothese 2 und 3 in Kapitel 3.2). Die auftretende Hopfverzweigung heißt in diesem Fall *superkritisch*. Indem wir gegebenenfalls zu neuen Parametern  $(\lambda, c)$  übergehen (wie in Abschnitt 3.2 beschrieben), können wir sogar davon ausgehen, dass die stabilen nichttrivialen periodischen Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}$  genau für  $\lambda > \lambda_0$  und  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  auftreten. Die lokal nahe  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  definierte Hopfkurve entspricht in diesem Fall der  $c$ -Achse. Eine Konsequenz dieser Tatsache ist, dass das Gleichgewicht bereits für den kritischen Parameterwert  $(\lambda_0, c_0)$  stabil bezüglich der Dynamik auf der *Zentrumsmanifold* ist. Die homokline Lösung  $h(\cdot)$  nähert sich deswegen dem Gleichgewicht in Vorwärtszeit generisch entlang der *Zentrumsrichtung*. In Rückwärtszeit konvergiert  $h(t)$  jedoch mit exponentieller Rate gegen das Gleichgewicht, man siehe Abbildung 1.2.

Die Koexistenz der homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  für den Parameterwert  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  und der periodischen Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}$  für  $\lambda > \lambda_0$  legt es nun nahe, dass für gewisse Parameterwerte  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  Lösungen  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  der Gleichung (1.17) nahe der homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  „abzweigen“. Unter abzweigenden Lösungen verstehen wir auf  $\mathbb{R}$  definierten, beschränkten Lösungen, die für alle Zeiten uniform nahe der homoklinen Lösung  $h(\cdot)$  bleiben. Welches asymptotische Verhalten würden wir von solchen Lösungen  $h^{\lambda,c}(t)$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  erwarten? Da sich  $h(\cdot)$  dem Gleichgewicht Null in Vorwärtszeit entlang der *Zentrumsrichtung* nähert, würden wir spekulieren, dass eine nahe  $h(\cdot)$  abzweigende Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  für Parameterwerte  $(\lambda, c)$  mit  $\lambda > \lambda_0$  nun in Vorwärtszeit gegen den Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  konvergiert: die periodische Lösung hat nämlich nun bezüglich der Dynamik auf  $\mathcal{M}$  die Stabilität des Gleichgewichtes Null geerbt. Für  $t \rightarrow -\infty$  nähert sich  $h(t)$  dem Gleichgewicht Null entlang der stark instabilen Richtung (d.h. mit exponentieller Rate).

Man kann sich also sowohl vorstellen, dass eine nahe  $h(\cdot)$  abzweigende Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  für  $t \rightarrow -\infty$  gegen das Gleichgewicht konvergiert (siehe Abbildung 1.4) oder sich dem Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  nähert (siehe Abbildung 1.5).

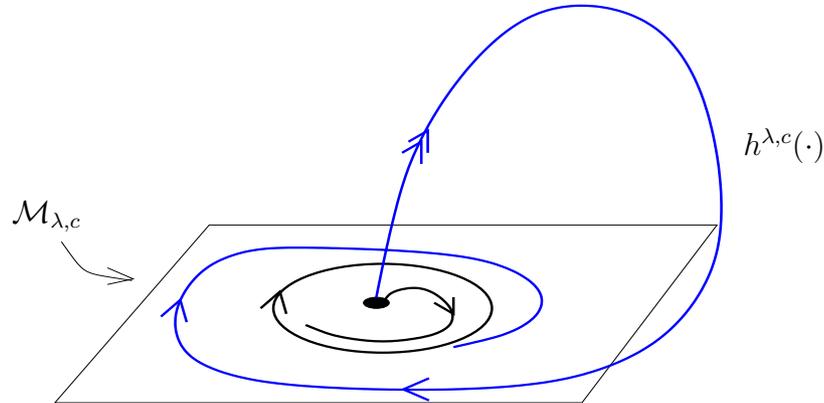


Abbildung 1.4: In der Abbildung sieht man eine Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$ , die sich in Vorwärtszeit dem Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  entlang der Zentrumsrichtung nähert. In Rückwärtszeit konvergiert  $h^{\lambda,c}(t)$  mit exponentieller Rate gegen das Gleichgewicht Null.

Die Existenz einer solchen Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  zu beweisen, ist nicht einfach. Der Versuch,  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  selbst im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung (1.18) mit Hilfe einer Ljapunov-Schmidt Reduktion (siehe etwa Henry [19] für das Prinzip der Ljapunov-Schmidt Reduktion) zu konstruieren, scheitert: Da das Gleichgewicht nicht hyperbolisch ist, induziert die Linearisierung

$$(\mathcal{L}v(\cdot))(t) = D_1f(h(t), \lambda_0, c_0)v(t),$$

der rechten Seite von (1.18) entlang der homoklinen Lösung  $h(t)$  im allgemeinen *keinen* Fredholmoperator, wenn wir  $\mathcal{L}$  etwa als Abbildung von  $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  nach  $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  oder von  $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  nach  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  auffassen (siehe die Arbeit von Palmer [35] für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen). Also schlagen wir einen anderen Weg ein, um die Existenz der gesuchten Lösungen zu beweisen.

Ein wichtiges Hilfsmittel sind *lokal invariante Mannigfaltigkeiten*. „Lokal invariant“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass für jeden Punkt  $x$  auf der Mannigfaltigkeit eine Lösung zum Anfangswert  $x$  existiert, die für alle Zeiten eines gewissen Existenzintervalls auf der Mannigfaltigkeit liegt. Zwei lokal invariante Mannigfaltigkeiten spielen in unserem Fall eine besonders wichtige Rolle: die *instabile* Mannigfaltigkeit  $W^u$  der Null und die *zentrumsstabile* Mannigfaltigkeit  $W^{cs}$  der Null. Die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit  $W^{cs}$  ist dadurch charakterisiert, dass zu Punkten  $x \in W^{cs}$  eine Lösung  $x(\cdot)$  der Gleichung (1.18) mit  $x(0) = x$  in Vorwärtszeit existiert, deren Betrag  $|x(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$  mit einer vorher fest gewählten, kleinen exponentiellen Rate  $\sigma > 0$  wachsen kann. Lösungen mit Anfangswert auf der Mannigfaltigkeit  $W^u$  konvergieren hingegen für  $t \rightarrow -\infty$  mit exponentieller Rate gegen das Gleichgewicht. Beide Mannigfaltigkeiten sind parameterabhängig und schneiden sich für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  entlang der homoklinen Lösung  $h(\cdot)$ .

Für den Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist die Existenz dieser Mannigfal-

tigkeiten bekannt (siehe etwa [17, 6]) und die Konstruktion nutzt stark die Existenz eines Flusses aus. Für *allgemeine* Forward-Backward-Delay Gleichungen (1.17) existiert hingegen nicht mal ein Halbfluss: also existieren Anfangswerte  $u_0 \in H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$  zu denen keine Lösung in Vorwärtzeit existiert. Wir verweisen auf Abschnitt 3.4.1 für die Konstruktion der Mannigfaltigkeiten  $W^{cs}$  und  $W^u$  selbst im Fall einer allgemeinen Forward-Backward-Delay Gleichung.

Kommen wir nun wieder zurück zu unserer gewöhnlichen Differentialgleichung (1.18). Nach unserer Annahme sind nun alle nahe Null auftretenden, nichttrivialen periodischen Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  für  $\lambda > \lambda_0$  bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  stabil. Wir erwarten also, dass alle Lösungen zu Anfangswerten  $x \in W^{cs} = W_{\lambda,c}^{cs}$  mit  $x \approx h(0)$  und  $\lambda > \lambda_0$  in Vorwärtszeit entweder gegen das Gleichgewicht Null oder gegen den Orbit der Funktion  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  konvergieren. Dass diese Intuition stimmt, zeigen wir in Lemma 3.16.

Nun ist es klar, wie wir Lösungen  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  der Gleichung (1.17) konstruieren können, die wie in Abbildung (1.4) aussehen: Dazu müssen wir einen Schnittpunkt der beiden Mannigfaltigkeiten  $W^{cs}$  und  $W^u$  für  $\lambda > \lambda_0$  konstruieren. Schnittpunkte induzieren Lösungen der Gleichung (1.18), die in Rückwärtszeit mit exponentieller Rate gegen das Gleichgewicht Null und in Vorwärtszeit entweder gegen den Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  oder die Gleichgewichtslösung konvergieren. Können wir letztere Möglichkeit ausschließen (nämlich die Konvergenz gegen null für  $t \rightarrow \infty$ ), so haben wir unsere gesuchte Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  gefunden.

Allerdings ist a priori nicht klar, warum die Mannigfaltigkeiten  $W^{cs}$ ,  $W^u$  für  $\lambda > \lambda_0$  einen

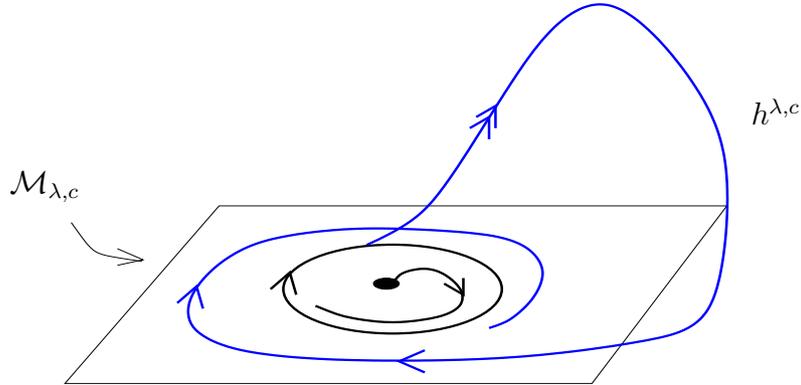


Abbildung 1.5: In der Abbildung ist eine Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  skizziert, die sich in Vorwärts- und Rückwärtszeit dem Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  nähert. Die einfache Pfeile symbolisieren Konvergenz entlang der Zentrumsrichtung.

Schnittpunkt besitzen sollten und tatsächlich schneiden sich  $W^{cs}$  und  $W^u$  im Schnittpunkt  $h(0)$  für die Parameter  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  *nicht* transversal: Die Kodimension des Vektorraumes  $T_{h(0)}W^{cs} + T_{h(0)}W^u \subset \mathbb{R}^N$  für die Parameter  $(\lambda_0, c_0)$  ist nämlich eins, falls sich  $W^{cs}$  und  $W^u$  nur entlang der homoklinen Lösung schneiden (siehe Lemma 3.20). Betrachten wir allerdings die *erweiterten* Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned} \hat{W}_\lambda^{cs} &= \{(x, c) : x \in W_{\lambda,c}^{cs} \text{ und } |c - c_0| \text{ ist klein} \}, \\ \hat{W}_\lambda^u &= \{(x, c) : x \in W_{\lambda,c}^u \text{ und } |c - c_0| \text{ ist klein} \} \end{aligned} \quad (1.19)$$

im erweiterten Phasenraum  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ , so können wir in Lemma 3.21 unter einer zusätzlichen generischen Annahme (die Aussagen hinsichtlich der  $c$ -Richtung der beiden erweiterten Mannigfaltigkeiten macht, siehe Hypothese 5) die Transversalität der Mannigfaltigkeiten  $\hat{W}_\lambda^{cs}$  und  $\hat{W}_\lambda^u$  im Punkt  $(h(0), c_0)$  für  $\lambda = \lambda_0$  zeigen. Transversalität bedeutet, dass die Summe der beiden Tangentialräume der erweiterten Mannigfaltigkeiten im Punkt  $(h(0), c_0)$  für  $\lambda = \lambda_0$  mit dem umgebenden Raum  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  übereinstimmt; siehe Abbildung 1.6. Mit Hilfe des impliziten Funktionensatzes können wir nun beweisen, dass die Mannigfaltigkeiten  $W^{cs} = W_{\lambda,c}^{cs}$  und  $W^u = W_{\lambda,c}^u$  für  $\lambda > \lambda_0$  und gewisse  $c \approx c_0$  einen Schnittpunkt besitzen (siehe Korollar 3.2).

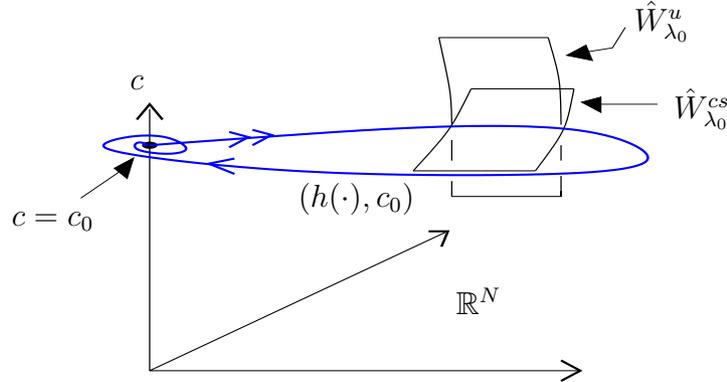


Abbildung 1.6: Die Abbildung zeigt den Schnitt der beiden Mannigfaltigkeiten  $\hat{W}_{\lambda_0}^{cs}$  und  $\hat{W}_{\lambda_0}^u$  entlang der Lösung  $(h(\cdot), c_0)$  im erweiterten Phasenraum  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ .

Wir sind nun in der Lage, unsere Hauptresultate für allgemeine Forward-Backward-Delay Gleichungen

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c) \quad (1.20)$$

zu formulieren, für die  $x_t \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  und  $a, b > 0$  gilt. Den Beweis des folgenden Satzes, der mit Satz 3.1 aus Kapitel 3.2 übereinstimmt, verschieben wir auf Kapitel 3.5.

### Satz 1.2

*Es existiere eine homokline Lösung  $h(t)$  der Gleichung (1.17) für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$ . Die Konvergenz von  $h(t)$  gegen das Gleichgewicht Null für  $t \rightarrow -\infty$  sei exponentiell. Wir nehmen an, dass im Gleichgewicht Null für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  eine superkritische Hopf-Verzweigung auftritt, wobei  $\lambda$  der Verzweigungsparameter ist. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Hypothesen 2 und 3 aus Kapitel 3.2 wahr sind.*

*Es gelte nun zusätzlich eine Annahme, die uns garantiert, dass sich die erweiterten Mannigfaltigkeiten  $\hat{W}_\lambda^{cs}$  und  $\hat{W}_\lambda^u$  (definiert in (1.19)) im Punkt  $(h(0), c_0)$  für den Parameterwert  $\lambda = \lambda_0$  transversal schneiden. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Hypothesen 4 und 5 in Abschnitt 3.2 wahr sind.*

*Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so existiert eine stetige Kurve „Het-I“ im Parameterraum (siehe Abbildung 1.7), die folgende Eigenschaften besitzt:*

- Für jeden Punkt  $(\lambda, c)$  auf der Kurve Het-I mit  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  und  $\lambda \geq \lambda_0$  existiert eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $h^{\lambda,c}(\cdot)$  der Gleichung (1.17), es gilt  $(\lambda_0, c_0) \in \text{Het-I}$  und

$h^{\lambda_0, c_0}(\cdot) = h(\cdot)$ . Ist  $\lambda > \lambda_0$ , so konvergiert die Lösung  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  in Vorwärtszeit gegen den Orbit der (nichttrivialen) periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda, c}(\cdot)$  und in Rückwärtszeit gegen die Gleichgewichtslösung Null, siehe Abbildung 1.4.

- Ist  $s \mapsto (\lambda(s), c(s))$  für  $s \approx 0$  eine stetige Parametrisierung der Kurve Het-I, so ist die Abbildung  $s \mapsto h^{\lambda(s), c(s)}(\cdot)$  mit Werten in dem Raum  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  stetig. Dieser Raum ist mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz versehen (eine Folge  $(g^n)$  in  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  konvergiert also genau dann gegen eine Funktion  $g$ , wenn die Funktionenfolge  $(g^n)$  auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert).

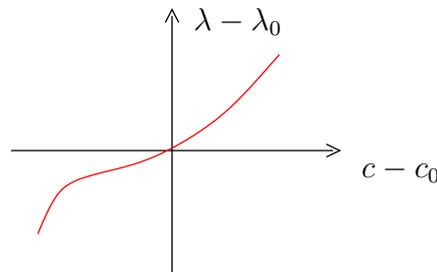


Abbildung 1.7: Die Kurve Het-I. Für alle Parameterwerte  $(\lambda, c)$  mit  $\lambda > \lambda_0$  besitzt Gleichung (1.17) eine nichttriviale periodische Lösung  $\gamma_{\lambda, c}(\cdot)$  nahe 0.

In Kapitel 3.6 können wir dann ebenfalls die Existenz einer Familie von Lösungen  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  der Gleichung (1.17) beweisen, die wie in Abbildung 1.5 skizziert aussehen. Das Hauptresultat lautet dann wie folgt (man siehe auch Satz 3.2):

### Satz 1.3

Es existiere eine homokline Lösung  $h(t)$  der Gleichung (1.17) für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$ . Die Konvergenz von  $h(t)$  gegen das Gleichgewicht Null für  $t \rightarrow -\infty$  sei exponentiell. Wir nehmen an, dass im Gleichgewicht Null für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  eine superkritische Hopfverzweigung auftritt, wobei  $\lambda$  der Verzweigungsparameter ist. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Hypothesen 2 und 3 aus Kapitel 3.2 wahr sind.

Gelte zusätzlich eine Annahme, die uns garantiert, dass sich die erweiterten Mannigfaltigkeiten  $\hat{W}_\lambda^{cs}$  und  $\hat{W}_\lambda^u$  (definiert in (1.19)) im Punkt  $(h(0), c_0)$  für den Parameterwert  $\lambda = \lambda_0$  transversal schneiden. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Hypothesen 4 und 5 in Abschnitt 3.2 wahr sind. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so existiert eine stetige Kurve „Hom-I“ im Parameterraum (siehe Abbildung 1.8), die folgende Eigenschaften besitzt:

- Für jeden Punkt  $(\lambda, c)$  auf der Kurve Hom-I mit  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  existiert eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  der Gleichung (1.17), es ist  $(\lambda_0, c_0) \in \text{Hom-I}$  und  $h^{\lambda_0, c_0}(\cdot) = h(\cdot)$ . Die Lösung  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  konvergiert für den Fall  $\lambda > \lambda_0$  in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen den Orbit der (nichttrivialen) periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda, c}(\cdot)$ , siehe Abbildung 1.5.
- Ist  $s \mapsto (\lambda(s), c(s))$  für  $s \geq 0$  mit  $(\lambda(0), c(0)) = (\lambda_0, c_0)$  eine stetige Parametrisierung der Kurve Hom-I, so ist die Abbildung  $s \mapsto h^{\lambda(s), c(s)}(\cdot)$  stetig mit Werten in dem

Raum  $C^0(\mathbb{R}, \tilde{Y})$ . Dieser ist mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz versehen.

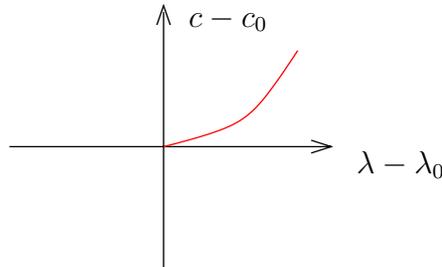


Abbildung 1.8: Die Kurve Hom-I. Für alle Parameterwerte  $(\lambda, c)$  mit  $\lambda > \lambda_0$  besitzt Gleichung (1.17) eine nichttriviale periodische Lösung  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  nahe Null.

Ohne an dieser Stelle auf den Beweis dieser beiden Resultate einzugehen, wollen wir betonen, dass die Annahme  $a, b > 0$  essentiell ist. Dies bedeutet, dass unsere Beweismethoden nicht ohne weiteres auf den Fall einer reinen Delay-Gleichung (1.20) (also  $a > 0, b = 0$ ) übertragen werden können. Auf den Grund hierfür gehen wir in dem Beweis zur Existenz der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W^{cs}$  ein, siehe die Diskussion in Kapitel 3.8.

Wir können ein Modellbeispiel angeben, für das alle unsere Annahmen der beiden Theoreme erfüllt sind und das wir in Kapitel 3.7 diskutieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), c) + \gamma x(t - \chi)z(t) \\ \frac{2}{3}(L(z_t) - z(t)) + g(z(t), \lambda, c) + k(x(t))z(t) \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Hierbei ist  $L : C^0([-2\pi, 2\pi], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte lineare Abbildung und wir wählen  $L$  in der Gestalt  $L\varphi(\cdot) = a\varphi(-1) + b\varphi(0) + d\varphi(1)$  mit  $a, b, d \neq 0$ . Setzen wir in (1.21)  $z, \mu = 0$ , so ist unter der Annahme  $g(0, 0, 1) = 0$  die Menge  $\{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$  eine invariante Menge. Die auf dieser Menge reduzierte Gleichung (1.21) ist dann eine gewöhnliche Differentialgleichung. Wir können etwa den expliziten Fall

$$f(x, c) = x - x^2 + (c - 1)x$$

betrachten: für  $c = c_0 = 1$  besitzt dann (1.21) einen homoklinen Orbit. Die  $\dot{z}$ -Gleichung ist aufgrund unserer Wahl der Abbildung  $L$  eine nichttriviale Forward-Backward-Delay Gleichung (also insbesondere keine Delay-Gleichung). In dieser tritt nach geeigneten Annahmen an  $L, g(\cdot, \cdot, c)$  und  $k(\cdot)$  eine Hopfverzweigung auf. Wie wir in Kapitel 3.7 zeigen, existiert nun eine reelle Zahl  $\chi \in \mathbb{R}$  und Funktionen  $g(\cdot, \cdot, c), k(\cdot)$ , so dass (1.21) alle Voraussetzungen unserer Theoreme 1.2, 1.3 erfüllt.

Wie steht es aber mit dem Auftreten chaotischer Dynamik nahe der Lösungen  $h^{\lambda,c}$  aus Satz 1.3, die wir im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung beobachten würden? Die Beantwortung dieser Frage ist alles andere als trivial, da im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen fast alle Existenzbeweise chaotischer Dynamik die Existenz eines Flusses ausnutzen (siehe etwa [27, 15, 56]). Unsere Mixed-Type Gleichung besitzt allerdings

nicht einmal einen Halbfluss. Wir machen allerdings auf folgendes Resultat von Palmer in [36] aufmerksam. In jener Arbeit betrachtet der Autor eine nichtautonome Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x(t))$ , wobei  $x \in \mathbb{R}^N$  ist und  $f$   $T$ -periodisch bezüglich  $t$  ist. Besitzt diese Gleichung nun eine Lösung  $v(\cdot)$ , die in Vor- und Rückwärtszeit gegen eine  $T$ -periodische Lösung konvergiert und induziert die Linearisierung des Vektorfeldes entlang  $v(\cdot)$  eine exponentielle Dichotomie auf  $\mathbb{R}$ , so kann folgendes bewiesen werden: Es existieren  $m$  verschiedene Zeitintervalle und unendlich viele Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung, die auf einem dieser Zeitintervalle nahe an der Lösung  $v(t)$  liegen. Die Zeitintervalle, auf denen dies eintritt, ändern sich allerdings willkürlich und deswegen kann man von chaotischer Dynamik nahe  $v$  sprechen. Dieses Ergebnis konnten Scheel und Sandstede auf eine große Klasse abstrakter Differentialgleichungen übertragen, die nicht notwendigerweise wohlgestellt sind, siehe [47]. Wir glauben, dass sich dieser Beweis auch auf den Fall allgemeiner Forward-Backward-Delay Gleichungen übertragen lässt, wenn diese *nichttrivial* von der Zeit  $t$  abhängen. Für autonome Mixed-Type Gleichungen sind analoge Resultate anzunehmen, allerdings steht im Moment aus unserer Sicht noch nicht genügend „Maschinerie“ zur Verfügung, um dieses Problem angehen zu können. Für eine Diskussion anderer Phänomene der Gleichung  $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c)$  mit Parameterwerten  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$ , die weder auf der Kurve Het-I (siehe Abbildung 1.7) noch Hom-I (siehe Abbildung 1.8) liegen, verweisen wir auf den Abschnitt 3.8.

Wir bemerken noch, dass unsere Sätze 1.2,1.3 stark an die Resultate der Autoren Scheel und Sandstede [45] im Fall *parabolischer* partieller Differentialgleichungen erinnern. In jener Arbeit nehmen die Autoren die Existenz einer Travelling-Wave Lösung an, die in der Travelling-Wave Gleichung eine homokline Lösung induziert. Diese speziellen Travelling-Wave Lösungen werden auch Pulse genannt. Die Autoren betrachten den Fall, dass die Linearisierung im asymptotischen Gleichgewicht des Pulses kritisches Spektrum besitzt. Für den Puls tritt damit eine *essentielle* Instabilität auf, die im allgemeinen schwierig zu analysieren ist. Scheel und Sandstede konnten aber durch geschickte Anwendung der „Spatial-Dynamics-Methode“ die nahe des Pulses abzweigenden Lösungen analysieren (wir verweisen auf [44] für eine genauere Beschreibung der Spatial-Dynamics-Methode). Ein anderes Resultat, dass unter anderem das Auftreten *periodischer* Lösungen in einer Forward-Backward-Delay Gleichung nahe einer homoklinen Lösung untersucht, befindet sich in der Arbeit von Mallet-Paret [33]. Dort betrachtet der Autor das Phänomen von Travelling-Waves mit verschwindender Geschwindigkeit in zweidimensionalen Gitter-Differentialgleichungen in Abhängigkeit ihrer „Ausbreitungsrichtung“. Mallet-Paret konnte unter anderem zeigen, dass in der Nähe einer homoklinen Lösung einer Forward-Backward-Delay Gleichung in Abhängigkeit eines Parameters generisch periodische Lösungen großer Amplitude auftreten. In dem betrachteten Fall ist aber das Gleichgewicht, das in der  $\omega$ -Limesmenge der homoklinen Lösung liegt, stets hyperbolisch und der Autor konnte die auftretenden periodischen Lösungen mit Hilfe einer Ljapunov-Schmidt-Reduktion aufspüren. Diese Methode steht für den Beweis unserer Theoreme nicht zur Verfügung.

### 1.5.2 Verzweigungen nahe einer heteroklinen Lösung

Eine naheliegende Verallgemeinerung zum vorherigen Kapitel ist der Übergang von homoklinen zu *heteroklinen* Lösungen einer Zwei-Parameter-Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c). \tag{1.22}$$

Heterokline Lösungen  $h(t)$  zeichnen sich dadurch aus, dass sie für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen zwei unterschiedliche Gleichgewichtslösungen  $h_{\pm\infty} \in \mathbb{R}^N$  von (1.22) konvergieren. Unser Anliegen ist es nun, das Zusammenspiel der heteroklinen Lösung  $h(\cdot)$  mit periodischen Lösungen kleiner Amplitude nahe  $h_\infty$  zu studieren. Natürlich ist auch der Fall interessant, für den periodische Lösungen nahe  $h_{-\infty}$  auftauchen. Diesen Fall diskutieren wir kurz in Abschnitt 4.1.3. Sinn dieses Kapitels ist es, die im vorigen Abschnitt besprochenen Ideen und Methoden auch auf den Fall einer heteroklinen Lösung zu übertragen. Daher werden wir nur einen exemplarischen Fall behandeln und verschieben die Diskussion anderer Fälle auf Abschnitt 4.1.3.

Wir wollen bemerken, dass für allgemeine Forward-Backward-Delay Gleichungen bereits der Beweis der Existenz heterokliner Lösungen ein schwieriges Problem ist. Allerdings konnte Mallet-Paret in [34] für eine große Klasse von Mixed-Type Gleichungen (1.22) mit ausschließlich diskretem Forward-Backward-Delay (also wie im ersten Beispiel des Kapitels 1.1) die Existenz heterokliner Lösungen zeigen. Auch für den Fall einer Gleichung der Gestalt (1.4) sind Ergebnisse in dieser Richtung bekannt und finden sich z.B. in der Arbeit [1].

Zum besseren Verständnis erleutern wir nun unsere Ergebnisse wieder für den Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung (1.22). Also kann man sich  $f$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^N$  nach  $\mathbb{R}^N$  vorstellen und Gleichung (1.22) nimmt die Gestalt

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda, c) \quad (1.23)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^N$  an. Wir nehmen nun an, dass  $h_{\pm\infty}$  für alle Parameter  $\lambda, c$  Gleichgewichtslösungen der Gleichung (1.23) sind. Außerdem wollen wir den Fall betrachten, dass in dem Gleichgewicht  $h_\infty$  unter Variation des Parameters  $\lambda \approx \lambda_0$  eine Hopfverzweigung auftritt. Das Gleichgewicht  $h_{-\infty}$  sei hingegen hyperbolisch. Stellen wir uns nun vor, dass die heterokline Lösung  $h(\cdot)$  genau für den Parameterwert  $\lambda = \lambda_0$  auftritt, so sind wir an der Frage interessiert, welche Auswirkungen das Auftreten periodischer Lösungen kleiner Amplitude nahe  $h_\infty$  für die heterokline Lösung  $h(\cdot)$  haben.

Dazu müssen wir uns um die Frage kümmern, ob die in  $h_\infty$  auftretende Hopfverzweigung sub- oder superkritisch ist. Im Gegensatz zum vorigen Kapitel wollen wir den Fall einer *subkritischen* Hopfverzweigung betrachten (für die genauen Annahmen im Fall einer Mixed-Type Gleichung verweisen wir auf die Hypothesen 10 und 11 in Abschnitt 4.1.1). Eine subkritische Verzweigung bedeutet in diesem Fall, dass (gegebenenfalls nach Wahl neuer Parameter  $(\tilde{\lambda}, c)$ ) nichttriviale periodische Lösungen  $\gamma_{\lambda,c}(\cdot)$  von (1.23) für  $\lambda > \lambda_0$  und  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  nahe  $h_\infty$  existieren, die bezüglich der Dynamik auf der parameterabhängigen Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\lambda,c}$  *instabil* sind.

Da die Gleichgewichte  $h_\infty$  und  $h_{-\infty}$  nicht identisch sind, spielt es bei der globalen Verzweigung tatsächlich einen wesentlichen Unterschied, ob die auftretende Hopfverzweigung super- oder subkritisch ist. Wir wollen nun ein formales Argument angeben, das uns einen tieferen Einblick in Problematik verschafft. Dazu betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) &\rightarrow BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \\ (\mathcal{L}v(\cdot))(t) &= D_1 f(h(t), \lambda, c)v(t). \end{aligned}$$

Wir erhalten diese Abbildung, wenn wir die Gleichung (1.23) entlang der heteroklinen Lösung  $h(\cdot)$  linearisieren. Nach einem Resultat von Palmer [35] ist  $\mathcal{L}$  ein Fredholmoperator, wenn  $(\lambda, c)$  nahe genug an  $(\lambda_0, c_0)$  liegt, aber  $\lambda > \lambda_0$  gilt. Man beachte, dass genau für diese Parameterwerte nichttriviale periodische Lösungen existieren. Ist nun der Fredholmindex  $i$  von  $\mathcal{L}$  für ein festes  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  mit  $\lambda > \lambda_0$  positiv, dann ist nach Definition

des Fredholmindex die Dimension des Kerns größer als die Kodimension des Bildes. Also besitzt das System  $\mathcal{L}x = y$  für gegebenes  $y \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  mehr Variable als Gleichungen und wir erwarten, mehrere Lösungen dieser linearen Gleichung zu finden. Ist der Index  $i$  allerdings negativ, so ist das Gleichungssystem  $\mathcal{L}x = y$  überbestimmt. Es ist daher nicht zu erwarten, dass Lösungen dieser linearen Gleichung existieren. Die Methode von Ljapunov-Schmidt besagt nun, dass die Fredholmindizes auch die richtige Intuition für das Lösen der *nichtlinearen* Gleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda, c)$  liefern, wobei hier  $x(\cdot)$  nahe  $h(\cdot)$  gesucht ist. Ist der Index  $i$  also positiv, so erwarten wir beschränkte Lösungen der nichtlinearen Gleichung nahe der heteroklinen Lösung zu finden. Ist  $i$  negativ, so erwarten wir dies nicht. Wir stellen uns nun vor, dass der Index  $i$  für Parameterwerte  $(\lambda, c)$  vor dem Verzweigungspunkt, d.h. für  $\lambda < \lambda_0$ , null ist. Welches Vorzeichen besitzt dann der Index für Parameterwerte  $(\lambda, c)$  mit  $\lambda > \lambda_0$ ? Nach einem Resultat von Palmer [35] lässt sich der Fredholmindex  $i$  des Operators  $\mathcal{L}$  mit Hilfe der Anzahl  $i_{\pm}$  von Eigenwerten der Linearisierung  $Df_1(h_{\pm\infty}, \lambda, c)$  mit positiven Realteil berechnen (diese werden oft auch *Morseindizes* genannt) und es gilt  $i = i_- - i_+$ . Da die Hopfverzweigung *subkritisch* ist, ist das Gleichgewicht  $h_{\infty}$  bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_{\lambda, c}$  für  $\lambda > \lambda_0$  *stabil* und die Hopfeigenwerte kreuzen die imaginäre Achse für wachsendes  $\lambda$  von rechts nach links, wenn  $\lambda$  anwächst. Daher hat sich der Morseindex  $i_+$  für einen Parameterwert  $\lambda > \lambda_0$  im Vergleich zu  $\lambda < \lambda_0$  verringert. Der Index  $i$  von  $\mathcal{L}$  ist für ein festes  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  mit  $\lambda > \lambda_0$  also positiv. Eine Ljapunov-Schmidt-Reduktion liefert deswegen ein unterbestimmtes System und wir erwarten die Existenz nahe  $h(\cdot)$  abzweigender Lösungen. Dies ist auch intuitiv der Grund, warum wir die im Gleichgewicht  $h_{\infty}$  auftretende Hopfverzweigung als subkritisch und nicht als superkritisch annehmen. Leider ist diese gesamte Argumentation nur formal, da der entscheidende Index zum Zeitpunkt der Verzweigung  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  nicht definiert ist.

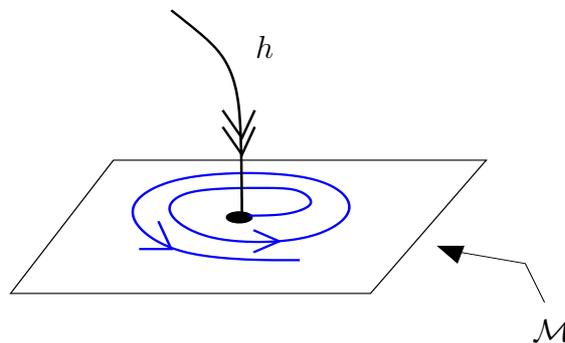


Abbildung 1.9: Dargestellt ist die heterokline Lösung  $h(t)$ . Diese nähert sich dem Gleichgewicht  $h_{\infty}$  entlang einer stark-stabilen Richtung. Das Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$  ist zum Verzweigungszeitpunkt  $(\lambda_0, c_0)$  instabil.

Wie sieht nun das asymptotische Abklingverhalten der Lösung  $h(\cdot)$  aus? Betrachten wir die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  des Gleichgewichtes  $h_{\infty}$  ein wenig genauer, so stellen wir fest, dass  $h_{\infty}$  bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit für den kritischen Parameterwert  $(\lambda_0, c_0)$  *instabil* ist.  $h(t)$  nähert sich dem Gleichgewicht  $h_{\infty}$  also entlang einer stark-stabilen Richtung, siehe Abbildung 1.9. Da das Gleichgewicht

$h_{-\infty}$  zusätzlich hyperbolisch ist, liegt der heterokline Orbit im Schnitt der stark-stabilen Mannigfaltigkeit  $W^{ss}(h_{\infty}) \subset \mathbb{R}^N$  und der instabilen Mannigfaltigkeit  $W^u(h_{-\infty}) \subset \mathbb{R}^N$  (man siehe [6] für die Existenz dieser Mannigfaltigkeiten im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen). Die Voraussetzung, dass  $h(\cdot)$  Kodimension eins besitzt, bedeutet nun, dass die Summe der Tangentialräume dieser Mannigfaltigkeiten Kodimension eins im umgebenden Raum  $\mathbb{R}^N$  besitzt. Insbesondere schneiden sich also  $W^{ss}(h_{\infty})$  und  $W^u(h_{-\infty})$  nicht transversal. Da beide Mannigfaltigkeiten parameterabhängig sind, können wir die um den Parameter  $c$  erweiterten Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\lambda}^{ss} &= \{(x, c) : x \in W_{\lambda, c}^{ss}(h_{\infty}) \text{ und } |c - c_0| \text{ ist klein} \} \\ \hat{W}_{\lambda}^u &= \{(x, c) : x \in W_{\lambda, c}^u(h_{-\infty}) \text{ und } |c - c_0| \text{ ist klein} \}\end{aligned}\quad (1.24)$$

in dem Phasenraum  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  betrachten. Diese schneiden sich für  $\lambda = \lambda_0$  entlang der Lösung  $(h(\cdot), c_0)$ . Unter der zusätzlichen Hypothese „Transversalität“ aus Abschnitt 4.1.1, die Aussagen hinsichtlich der  $c$ -Abhängigkeit der erweiterten Mannigfaltigkeiten macht, können wir Transversalität dieser Mannigfaltigkeiten sicherstellen.

Wir können nun unser Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren (man siehe auch Satz 4.1). Den Beweis verschieben wir auf Kapitel 4.1.2.

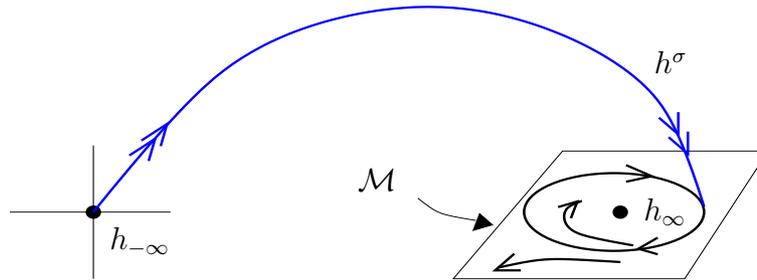


Abbildung 1.10: In der Abbildung ist die Lösung  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  der Gleichung (1.23) skizziert. Diese konvergiert mit exponentieller Rate gegen einen periodischen Orbit.

#### Satz 1.4

*Es existiere eine heterokline Lösung  $h(t)$  der Gleichung (1.23) für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  und es gelte  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = h_{\pm\infty}$ . Die Konvergenz von  $h(t)$  gegen die Gleichgewichte  $h_{\pm\infty}$  für  $|t| \rightarrow \infty$  sei exponentiell. Das Gleichgewicht  $h_{-\infty}$  sei hyperbolisch und wir nehmen an, dass im Gleichgewicht  $h_{\infty}$  für  $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$  eine subkritische Hopfverzweigung auftritt, wobei  $\lambda$  den Verzweigungsparameter bezeichnet. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Hypothesen 10 und 11 aus Kapitel 3.2 wahr sind.*

*Es gelte nun zusätzlich eine Annahme, die uns garantiert, dass sich die beiden in (1.24) definierten, erweiterten Mannigfaltigkeiten im Punkt  $(h(0), c_0)$  für den Parameterwert  $\lambda = \lambda_0$  transversal schneiden. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Hypothesen 13 und 14 aus Abschnitt 3.2 wahr sind.*

*Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so existiert eine stetige Kurve „HET“ im Parameterraum (siehe Abbildung 1.11), die folgende Eigenschaften besitzt:*

- i) Für jeden Punkt  $(\lambda, c)$  auf der Kurve HET mit  $(\lambda, c) \approx (\lambda_0, c_0)$  existiert eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  der Gleichung (1.17), es ist  $(\lambda_0, c_0) \in \text{HET}$  und  $h^{\lambda_0, c_0}(\cdot) = h(\cdot)$ . Die Lösung  $h^{\lambda, c}(\cdot)$  konvergiert für den Fall  $\lambda > \lambda_0$  in Vorwärtszeit gegen den Orbit der (nichttrivialen) periodischen Lösung  $\gamma_{\lambda, c}(\cdot)$  und in Rückwärtszeit gegen das Gleichgewicht  $h_{-\infty}$ , siehe Abbildung 1.10.
- ii) Ist  $s \mapsto (\lambda(s), c(s))$  für  $s \geq 0$  und  $(\lambda(0), c(0)) = (\lambda_0, c_0)$  eine stetige Parametrisierung der Kurve HET, so ist die Abbildung  $s \mapsto h^{\lambda(s), c(s)}(\cdot)$  stetig mit Werten in dem Raum  $BC^0(\mathbb{R}, \tilde{Y})$ .

Ein Modellbeispiel, in dem alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), c) + \gamma\chi(x(t))z(t) \\ \alpha(L(z_t) - z(t)) + g(z(t), \lambda, c) + k(x(t))z(t) \end{pmatrix},$$

siehe auch Kapitel 4.1.4. Wir bemerken, dass diese Gleichung bis auf ein paar kleine Modifikationen mit der Beispielgleichung (1.21) übereinstimmt.

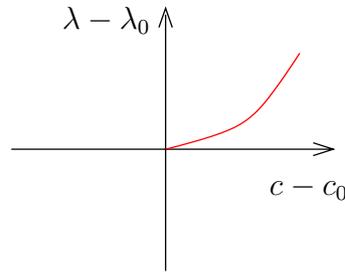


Abbildung 1.11: Die Kurve HET. Für alle Parameterwerte  $(\lambda, c)$  mit  $\lambda > \lambda_0$  besitzt Gleichung (1.17) eine nichttriviale periodische Lösung  $\gamma_{\lambda, c}(\cdot)$  nahe Null.

Wir wollen bemerken, dass im Jahr 2001 ein ganz ähnliches Szenario von Scheel und Sandstede in [46] studiert wurde: Dort wurde die Existenz und Stabilität von Travelling-Wave Lösungen (also Lösungen der Form  $u(t, x) = U(x - ct)$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ ) einer Reaktion-Diffusion-Gleichung  $\partial_t u(t, x) = \partial_{xx}^2 u(t, x) + f(u(t, x), \lambda)$  untersucht. Es wurde speziell der Fall betrachtet, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) =: h_{\pm\infty}$  gilt und in einem der beiden Gleichgewichte  $h_{\pm\infty}$  eine Hopfverzweigung auftritt. Die beiden Autoren konnten dann durch geschickte Anwendung der „Spatial-Dynamics-Methode“ die Existenz von modulierten Travelling-Wave Lösungen der Reaktions-Diffusions Gleichung nahe der Lösung  $u(t, x)$  zeigen. Diese Lösungen besitzen die Gestalt  $\tilde{u}(t, x) = \tilde{U}(x - ct, t)$  für eine geeignete Funktion  $\tilde{U}(\cdot, \cdot)$ , die bezüglich der zweiten Komponente periodisch ist.

### 1.5.3 Exponentielle Dichotomien: Definition und Resultate

Ein wichtiges Hilfsmittel, das zum Beweis der Sätze 1.2, 1.3, 1.4 im nächsten Kapitel herangezogen wird, sind *exponentielle Dichotomien*. Wir betrachten die lineare Gleichung

$$\dot{y}(t) = L(t)y_t, \tag{1.25}$$

wobei  $t \rightarrow L(t) \in L(C^0([-a, b], \mathbb{C}^N), \mathbb{C}^N)$  stetig ist und  $L(t)$  für jedes feste  $t$  eine beschränkte Abbildung ist. Für die genaue Gestalt der Abbildung  $L(t)$  verweisen wir auf Abschnitt 3.3.1, Gleichung (3.66). Wir definieren nun, was wir unter einer exponentiellen Dichotomie der Gleichung (1.25) verstehen:

**Definition 3**

Sei  $J = (c, d)$  entweder  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$  oder  $\mathbb{R}^-$ . Gleichung (1.25) besitzt dann eine exponentielle Dichotomie auf  $J$ , falls positive Konstanten  $K, \kappa_1, \kappa_2$  existieren und eine Familie stark stetiger Projektionen  $\mathcal{P}(t) : L^2([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ , so dass für  $\varphi \in L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$  und  $t \in J$  folgendes gilt:

- Setze  $\phi := \mathcal{P}(t)\varphi$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $x(\cdot)$  der Gleichung (1.25) auf  $[t, d)$  mit  $x_t = \phi$ . Außerdem ist  $x_\tau \in \text{Bild}(\mathcal{P}(\tau))$  und es gilt die Abschätzung  $\|x_\tau\|_{L^2} \leq Ke^{-\kappa_1|t-\tau|}\|\varphi\|_{L^2}$  für alle  $\tau > t$  mit  $\tau \in J$ .
- Setze  $\phi := (id - \mathcal{P}(t))\varphi$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $x(\cdot)$  der Gleichung (1.25) auf  $(c, t]$  mit  $x_t = \phi$ . Außerdem ist  $x_\tau \in \text{Kern}(\mathcal{P}(\tau))$  und es gilt  $\|x_\tau\|_{L^2} \leq Ke^{-\kappa_2|t-\tau|}\|\varphi\|_{L^2}$  für alle  $t > \tau$  mit  $\tau \in J$ .

Grob gesagt existiert also für jeden Punkt  $\varphi \in \text{Bild}(\mathcal{P}(t))$  und  $t \in J$  eine Lösung  $x(\cdot)$  der linearen Gleichung (1.25) in Vorwärtszeit, die  $x_t = \varphi$  erfüllt und exponentiell abklingt. Ist andererseits  $\varphi \in \text{Kern}(\mathcal{P}(t))$ , so existiert eine Lösung  $x(\cdot)$  auf  $(c, t]$ , die zum Zeitpunkt  $t$  den Anfangswert  $\varphi$  besitzt und in Rückwärtszeit exponentiell abklingt. Entscheidend ist bei dieser Definition ebenfalls die implizierte *Existenz* einer Lösung  $x(\cdot)$  für geeignete Startwerte, die im allgemeinen keinesfalls klar ist (siehe Abschnitt 1.3).

Exponentielle Dichotomien sind nützlich, um neue Lösungen nahe homoklinen oder heteroklinen Lösungen zu konstruieren. Dies geschieht ebenfalls in dieser Arbeit; wir verweisen aber zusätzlich auf [26, 42] für den Fall eines anderen Gleichungstyps. Außerdem erlauben exponentielle Dichotomien geeignete Randbedingungen zu wählen, so dass die auf dem Intervall  $(-N, N)$  eingeschränkte Gleichung (1.25) für große  $N \gg 1$  wohlgestellt ist (siehe etwa [48] und die Referenzen darin). Auch in der Konstruktion der sogenannten „Evans Funktion“, die für die Analyse der linearen Stabilität von Travelling-Waves benutzt werden kann, sind exponentielle Dichotomien sehr nützlich (siehe [13, 44]).

Wir wollen bemerken, dass die Existenz exponentieller Dichotomien fast immer an Fredholmigenschaften der linearen Gleichung (1.25) gekoppelt ist. Satz 1.5 unserer Arbeit zeigt, dass dies auch bei uns der Fall ist. Allerdings müssen wir uns in der vorliegenden Arbeit mit vielen linearen Gleichungen (1.25) beschäftigen, die *keinen* Fredholmoperator induzieren. In diesem Fall beweisen wir in Kapitel 3.3 die Existenz von *Zentrumsdichotomien*. Diese unterscheiden sich in der Definition von exponentiellen Dichotomien dadurch, dass die Abklingrate von Lösungen mit Startwert in  $\text{Bild}\mathcal{P}(t)$  oder  $\text{Bild}(id - \mathcal{P}(t))$  nicht exponentiell sein muss. Tatsächlich können Lösungen sogar algebraisch anwachsen. Für eine genauere Definition von Zentrumsdichotomien verweisen wir auf Definition 13.

Eines unser Hauptresultate hinsichtlich der Existenz exponentieller Dichotomien ist nun das folgende Resultat

**Satz 1.5**

Sei  $\mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$  mit

$$(\mathcal{L}v(\cdot))(t) = \dot{v}(t) - L(t)v_t$$

ein Fredholmoperator. Ist dann die Nullabbildung die einzige Abbildung, die  $\mathcal{L}v(\cdot) = 0$  und  $v_\tau = 0$  für ein  $\tau \in \mathbb{R}$  erfüllt, so besitzt (1.25) exponentielle Dichotomien auf  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$ .

Wir betrachten nun den häufig auftretenden Fall, dass  $L(t) \rightarrow L_\pm$  für zwei lineare Abbildungen  $L_\pm$  gilt. Zur Formulierung des nächsten Theorems nennen wir eine lineare Gleichung  $\dot{v}(t) = L(t)v_t$  hyperbolisch, falls die charakteristischen Funktionen  $\det\Delta_\pm(\cdot)$  bezüglich  $L_\pm$  keine rein imaginären Nullstellen besitzen.

### Satz 1.6

Es gelte  $L(t) \rightarrow L_\pm$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  und lineare Abbildungen  $L_\pm : C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , so dass die Gleichungen  $\dot{v}(t) = L_\pm v_t$  hyperbolisch sind. Ist dann die Nullabbildung die einzige Abbildung, die  $\mathcal{L}v(\cdot) = 0$  und  $v_\tau = 0$  für ein  $\tau \in \mathbb{R}$  erfüllt, so besitzt (1.25) exponentielle Dichotomien auf  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$ .

Unsere Resultate sind eine Verallgemeinerung der Resultate von Scheel, Sandstede und Härterich [43], die ihre Theoreme nur für Gleichungen (1.25) beweisen konnten, die äquidistanten und diskreten Vorwärts- und Rückwärtsdelay besitzen. Ist man also unter anderem an Gleichungen der Gestalt (1.4) interessiert, die einen Faltungsterm besitzen oder der Delay nicht äquidistant ist, so kann man die Resultate aus [43] nicht benutzen.

Auch die Autoren Mallet-Paret und Lunel haben in der exzellenten Arbeit [31] exponentielle Dichotomien für die Gleichung (1.25) konstruiert. Neben der Tatsache, dass die beiden Autoren ebenfalls den Fall linearer Gleichungen mit ausschließlich diskretem (aber nicht notwendigerweise äquidistantem) Vor- und Rückwärtsdelay behandelt haben, kommt hinzu, dass dort der „Phasenraum“  $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$  im Gegensatz zu  $L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$  betrachtet wurde.

## 1.6 Travelling-Wave Lösungen einer Modellgleichung der Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel formulieren wir einige Resultate für die im ersten Abschnitt eingeführte Gleichung aus der Elastizität. Diese lautet

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x(\sigma(w(t, x))) &= \mu\varepsilon\partial_x^2 v - \gamma\partial_x([K^\varepsilon * w(t, \cdot)](x) - w(t, x)). \end{aligned} \quad (1.26)$$

und alle auftretenden Größen wurden kurz in Abschnitt 1.1 erklärt, siehe auch [39] für eine Herleitung der Gleichung. Setzt man in dieser Gleichung  $\varepsilon = 0$ , so verschwindet die rechte Seite und wir erhalten eine nichtlineare Erhaltungsgleichung.

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns nun mit der Existenz schwacher Schockwellen der Gleichung (1.26) für  $\varepsilon = 0$ , die im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  von geeigneten Travelling-Wave Lösungen der regularisierten Gleichung (1.26) (d.h.  $\varepsilon \neq 0$ ) auftreten. Das wesentliche Hilfsmittel hierfür sind Zentrumsmanifoldtheorien; diese werden wir im Abschnitt 1.6.3 einführen. In Abschnitt 1.6.2 beschäftigen wir uns dann mit der strukturellen Stabilität von Travelling-Wave Lösungen der Gleichung (1.26) für den Fall  $\varepsilon \neq 0$ .

### 1.6.1 Schwache Schocks

Wir wollen uns nun der Existenzfrage *schwacher Schockwellen* der Gleichung (1.26) für  $\varepsilon = 0$  widmen. Unter Schockwellen  $U(t, x) = (w(t, x), v(t, x))$  verstehen wir schwache

Lösungen der nichtlinearen Erhaltungsgleichung (also der Gleichung (1.26) für  $\varepsilon = 0$ ), die die folgende Form haben:

$$\begin{pmatrix} w(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = \begin{cases} U_- = (W_-, V_-)^T & : x - ct < 0 \\ U_+ = (W_+, V_+)^T & : x - ct > 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

für  $(W_\pm, V_\pm) \in \mathbb{R}^2$  und ein  $c \in \mathbb{R}$ ; siehe dazu auch die Lehrbücher [52, 49]. Schockwellen sind also im wesentlichen konstant und haben entlang der Gerade  $x = ct$  eine Unstetigkeitsstelle. Liegen die beiden Zustände  $(W_\pm, V_\pm)$  zusätzlich nahe beieinander, so sprechen wir von *schwachen* Schocks. Leider sind nicht alle Schockwellen physikalisch relevant (siehe [39]). Um physikalisch relevante Schocks herauszufiltern, kann man deswegen zu gegebenen Zuständen  $(W_+, V_+)$ ,  $(W_-, V_-)$  versuchen, eine Travelling-Wave Lösung der regularisierten Gleichung (1.26) für  $\varepsilon \neq 0$  zu finden, die die Zustände  $(W_\pm, V_\pm)$  miteinander verbindet. Um diesen Ansatz besser zu verstehen, stellen wir uns ein Tripel  $((W_+, V_+), (W_-, V_-), c)$  vor, das via (1.27) eine Schockwelle  $U_{schock}(t, x)$  der Gleichung (1.26) für  $\varepsilon = 0$  definiert. Wir betrachten nun das System (1.26) für  $\varepsilon = 1$  und suchen eine Travelling-Wave Lösung  $(w(t, x), v(t, x)) = (W(x - ct), V(x - ct))$  für differenzierbare Funktionen  $W(\cdot), V(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} W(\xi) = W_\pm, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} V(\xi) = V_\pm$$

erfüllen. Wie wir später zeigen, löst dann  $W(\cdot)$  im Fall  $\mu \neq 0$  die Gleichung

$$c\mu W'(\xi) = \gamma(L_1 W_\xi - W(\xi)) + \sigma(W(\xi)) - c^2 W(\xi) + c^2 W_- - \sigma(W_-) \quad (1.28)$$

und die Gleichung

$$W'(\xi) = \frac{-1}{(\gamma - c^2 + \sigma'(W(\xi)))} \gamma L_1 W_\xi. \quad (1.29)$$

im Fall  $\mu = 0$ .

Haben wir solche Abbildungen  $W(\cdot), V(\cdot)$  gefunden, so können wir  $w^\varepsilon(t, x) := W((x - ct)/\varepsilon)$  und  $v^\varepsilon(t, x) := V((x - ct)/\varepsilon)$  setzen und folgendes beobachten:

- $(w^{\varepsilon_*}(t, x), v^{\varepsilon_*}(t, x))$  ist eine Lösung der Gleichung (1.26) für  $\varepsilon := \varepsilon_*$
- $w^{\varepsilon_*}(x, t)$  bzw.  $v^{\varepsilon_*}(x, t)$  konvergiert für festes  $\pm(x - ct) > 0$  und  $\varepsilon_* \rightarrow 0$  gegen  $W_\pm$  bzw.  $V_\pm$ .

Die Travelling-Wave-Lösung konvergiert also *punktweise* gegen die Schockwelle  $U_{schock}(t, x)$ , falls  $x - ct$  von null verschieden ist. Wir sagen in diesem Fall, dass die Schockwelle  $U_{schock}(t, x)$  *dynamisch realisierbar* ist.

Aber nahe welcher Zustände  $(W, V) \in \mathbb{R}^2$  erwarten wir denn überhaupt die Existenz schwacher Schocks? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die *Rankine-Hugoniot-Gleichungen*

$$-c(W_+ - W_-) = V_+ - V_-, \quad -c(V_+ - V_-) = \sigma(W_+) - \sigma(W_-).$$

Die Gültigkeit der Rankine-Hugoniot Gleichungen sind eine notwendige Bedingung für die Existenz von Schockwellen: ein Tripel  $((W_+, V_+), (W_-, V_-), c)$  kann nur dann eine

Schockwelle induzieren, wenn die Rankine-Hugoniot Gleichungen erfüllt ist (siehe etwa [52]). Setzen wir nun die erste Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir

$$c^2(W_+ - W_-) = \sigma(W_+) - \sigma(W_-). \quad (1.30)$$

Für schwache Schocks sind die Zustände  $W_+, W_-$  nahe beieinander, also ist die Differenz  $|W_+ - W_-|$  klein und wir erhalten mit Hilfe der letzten Gleichung (1.30) die Entwicklung

$$c^2(W_+ - W_-) = \sigma'(W_-)(W_+ - W_-) + \mathcal{O}(|W_+ - W_-|^2).$$

Wir beobachten, dass  $\sigma'(W_-) \approx c^2$  gilt, wenn die Differenz  $|W_+ - W_-|$  genügend klein ist. Also erwarten wir schwache Schocks der Gleichung (1.26) für  $\varepsilon = 0$  in der Nähe von Zuständen  $(W, V) \in \mathbb{R}^2$  zu finden, für die  $\sigma'(W) = c^2$  gilt.

Unser folgendes Theorem besagt nun, dass nahe einem Zustand  $(W_-, V_-) \in \mathbb{R}^2$ , mit  $\sigma'(W_-) = c^2$  für gegebenes  $c \neq 0$ , tatsächlich schwache Schockwellen mit Geschwindigkeiten  $\hat{c} \approx c$  existieren, falls  $\sigma''(W_-) \neq 0$  gilt. Diese Schockwellen lassen sich außerdem entweder für  $c > \hat{c}$  oder  $c < \hat{c}$  dynamisch realisieren. Den Beweis des folgenden Satzes verschieben wir auf Abschnitt 2.5.3.

### Satz 1.7

Sei  $(W_-, V_-) \in \mathbb{R}^2$  gegeben und  $c \neq 0$  mit  $\sigma'(W_-) = c^2$  fest gewählt. Sei weiterhin  $\sigma''(W_-) \neq 0$  und  $\mu, \gamma > 0$ . Dann existiert für  $\hat{c} \approx c$  eine Lösung  $W(\cdot) = W(\cdot, \hat{c})$  der Gleichung (1.28) und ein Zustand  $W_+ = W_+(\hat{c})$ , so dass genau für einen der beiden Fälle  $\pm(\hat{c} - c) > 0$  die Aussage

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi, \hat{c}) = W_+(\hat{c}) \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} W(\xi, \hat{c}) = W_-$$

gilt. Für diesen Fall von  $\hat{c}$  kann man eine Funktion  $V(\cdot) = V(\cdot, \hat{c})$  durch die Gleichung  $\hat{c}W(\xi) + V(\xi) = \hat{c}W_- + V_-$  definieren, die

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi, \hat{c}) = V_+(\hat{c}) \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} V(\xi, \hat{c}) = V_-,$$

für einen Zustand  $V_+ = V_+(\hat{c}) \in \mathbb{R}$  erfüllt. Setzt man schließlich  $(w(x, t), v(x, t)) = (W((x - ct)/\varepsilon), V((x - ct)/\varepsilon))$ , so definiert  $(w(x, t), v(x, t))$  eine Lösung von (1.26), die für festes  $x - ct \neq 0$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  punktweise gegen die durch das Tripel  $((W_+, V_+), (W_-, V_-), \hat{c})$  induzierte Schockwelle konvergiert.

Der Satz besagt also im wesentlichen, dass in der Nähe eines Zustandes  $(W_-, V_-) \in \mathbb{R}^2$  mit  $\sigma'(W_-) = c^2$  generisch kleine Schockwellen mit Geschwindigkeiten  $\hat{c} \approx c$  existieren, die genau für einen der beiden Fälle  $\pm(\hat{c} - c) > 0$  dynamisch realisiert werden können.

Wir wollen noch bemerken, dass die in der Arbeit von Rohde [39] verwendete Methode von [1] für die Existenz von Lösungen  $(w(x, t), v(x, t)) = (W(x - ct), V(x - ct))$  der Gleichung (1.26) im allgemeinen *nicht* funktioniert, wenn die Zustände  $(W_+, V_+)$  und  $(W_-, V_-)$  nahe beieinander liegen. Genauer wird in der Arbeit [1] vorausgesetzt, dass die rechte Seite der Gleichung (1.28) eine Gleichgewichtslösung zwischen  $W_- \in \mathbb{R}$  und  $W_+ \in \mathbb{R}$  besitzt.

Ist in Gleichung (1.26)  $\mu = 0$  und  $\gamma > 0$ , so können wir die Existenz periodischer Lösungen kleiner Amplitude und einer lokalisierten Lösung beweisen, deren Profil dem einer homoklinen Lösung gleicht. Den Beweis verschieben wir auf Kapitel 2.5.4.

**Satz 1.8**

Sei  $W_* \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma'(W_*) = c_*^2$  und  $\sigma''(W_*) < 0$ . Dann existiert eine Familie von Funktionen  $P(\cdot, \delta)$ , die für festes  $\delta$  periodische Lösungen kleiner Amplitude der Gleichung (1.29) sind. Außerdem existiert eine homokline Lösung  $H(\cdot)$  von (1.29) nahe des homogenen Zustandes  $W_*$ . Setzen wir

$$w^\varepsilon(x, t) := P((x - ct)/\varepsilon, \delta), \quad v^\varepsilon(x, t) := V((x - ct)/\varepsilon),$$

wobei  $V(\xi)$  durch die Gleichung  $-cP(\xi, \delta) - V(\xi) = K$  für ein beliebiges  $K \in \mathbb{R}$  bestimmt werden kann, so definieren  $w^\varepsilon, v^\varepsilon$  Lösungen von (1.26) für  $\mu = 0$ . Auf analoge Weise induziert  $H(\cdot)$  eine Lösung von (1.26) für  $\mu = 0$ .

**1.6.2 Strukturelle Stabilität**

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage der strukturellen Stabilität einer Travelling-Wave Lösung der Gleichung (1.26) für den Fall  $\gamma, \mu, \varepsilon \neq 0$ . Um unser Vorhaben etwas präziser zu erläutern und unsere Resultate zu motivieren, betrachten wir eine nichtlineare Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x g(u) = 0 \tag{1.31}$$

mit  $u \in \mathbb{R}^n, g(u) \in \mathbb{R}^n$  (man siehe auch die beiden einführenden Textbücher [49, 52]). Zur Vereinfachung wollen wir uns hierbei auf Nichtlinearitäten  $g$  beschränken, die für  $u \in \mathbb{R}^n$  genau  $n$  reelle, strikt verschiedene Eigenwerte

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$$

besitzen.

Gleichungen dieser Art können Schockwellen besitzen. Wir erinnern daran, dass Schockwellen  $u = u(x, t)$  schwache Lösungen der Form

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & : x - ct < 0 \\ u_+ & : x - ct > 0 \end{cases}$$

sind, wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl ist und  $u_-, u_+ \in \mathbb{R}^n$  gilt. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von Schockwellen ist die *Rankine-Hugoniot-Bedingung*

$$g(u_+) - g(u_-) = c(u_+ - u_-).$$

Um physikalisch relevante Schockwellen herauszufiltern, wird oftmals eine regularisierte Version der Erhaltungsgleichung (1.31) betrachtet, die von der Gestalt

$$\partial_t u + \partial_x g(u) = \varepsilon \partial_x^2 u \tag{1.32}$$

ist, siehe auch [52]. Hierbei ist  $\varepsilon > 0$  eine positive Zahl. Betrachten wir den Fall  $\varepsilon = 1$ , so ist man in dieser Gleichung speziell an der Existenz von Lösungen der Form  $u(t, x) = U(x - ct)$ , für eine geeignete Abbildung  $U(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  interessiert, die die Eigenschaft

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = u_\pm$$

besitzt. Einsetzen des Ansatzes  $u(t, x) = U(x - ct)$  in Gleichung (1.32) für  $\varepsilon = 1$  liefert nach anschließender Integration die Travelling-Wave-Gleichung

$$U'(\xi) = g(U(\xi)) - cU(\xi) + C \tag{1.33}$$

mit  $C = cu_- - g(u_-)$  und  $\xi = x - ct$ . Erfüllt  $(u_+, u_-, c)$  die Rankine-Hugoniot Bedingung, so sind  $u_+$  und  $u_-$  Gleichgewichtslösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.33). Existiert nun für diese Gleichung eine Lösung  $U(\xi)$  mit  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = u_{\pm}$ , die dann notwendigerweise eine heterokline Lösung von (1.33) ist, so kann man  $u^\varepsilon(t, x) := U((x-ct)/\varepsilon)$  setzen und erhält eine Lösung der regularisierten Gleichung (1.32). Außerdem konvergiert  $u(t, x)$  für festes  $\pm(x-ct) > 0$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  punktweise gegen eine Schockwelle. Wir sagen in diesem Fall, die durch das Tripel  $(u_+, u_-, c)$  induzierte Schockwelle sei durch ein *viskoses Profil* oder *dynamisch* realisierbar.

Wir stellen uns nun eine durch ein Tripel  $(u_+, u_-, c)$  induzierte Schockwelle vor, die durch ein viskoses Profil  $U(\cdot)$  realisiert wird. Da in der Realität allerdings niemals die exakte Nichtlinearität  $g$  oder Schock-Geschwindigkeit  $c$  bekannt ist, liegt die Frage nahe, ob das viskose Profil  $U(\cdot)$  als heterokline Lösung der Travelling-Wave-Gleichung (1.33) robust unter kleinen Störungen bezüglich  $g$  und  $c$  ist. Anders ausgedrückt können wir fragen, ob sich die stabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtes  $u_+$  und die instabile Mannigfaltigkeit von  $u_-$  entlang des Profils  $U(\cdot)$  für die ungestörte Gleichung (1.33) transversal schneiden. Dieser transversale Schnitt würde dann auch nach leichter Störung persistieren und Anlass zu einem viskosen Profil der gestörten Gleichung geben.

Im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung (1.33) ist die folgende Definition der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage.

#### Definition 4

Sei  $v = v(t, x)$  eine Schockwelle der Gleichung (1.32) für  $\varepsilon = 0$ , die durch das Tripel  $(u_+, u_-, c)$  induziert wird. Bezeichne weiterhin mit  $i_+^u$  bzw.  $i_-^s$  die Anzahl der nichtnegativen Eigenwerte von  $Dg(u_+)$  bzw. der nicht positiven Eigenwerte von  $Dg(u_-)$ . Dann nennen wir  $v$

- einen Lax-Schock, falls  $(i_+^s + i_-^u) - n = 1$ ,
- unterkompressiv, falls  $(i_+^s + i_-^u) - n < 1$ ,
- überkompressiv, falls  $(i_+^s + i_-^u) - n > 1$  ist.

Ist die Schockwelle ein Lax-Schock oder überkompressiv, so nennen wir die Schockwelle auch kompressiv.

Sei nun  $U(\cdot)$  ein viskoses Profil von (1.33), d.h.  $U(\cdot)$  ist eine heterokline Lösung der ODE (1.33), die  $u_-$  mit  $u_+$  verbindet. Wie wir bereits beobachtet haben, sind  $u_+$  und  $u_-$  Gleichgewichte der Travelling-Wave Gleichung (1.33). Die Einteilung einer Schockwelle in Lax-Schock, über- oder unterkompressiv gibt nun Information über die Transversalität der stabilen Mannigfaltigkeit von  $u_+$  und instabilen Mannigfaltigkeit von  $u_-$ . Im Fall eines Lax-Schocks besitzt nämlich die Summe der Tangentialräume der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit in einem Schnittpunkt die Dimension  $n$ ; die Mannigfaltigkeiten schneiden sich also transversal entlang  $U(\cdot)$  und wir erwarten nach leichter Störung der Nichtlinearität  $g$  oder  $c$  einen eindeutigen Schnittpunkt  $\tilde{u}$  dieser Mannigfaltigkeiten. Dieser induziert dann eine heterokline Lösung der gestörten Gleichung (1.33). Betrachten wir den Fall einer unterkompressiven Schockwelle, so schneiden sich die stabile und instabile Mannigfaltigkeit entlang  $U(\cdot)$  nicht transversal. Eine leichte Störung von  $g$  oder  $c$  resultiert also im allgemeinen im „Verschwinden“ der heteroklinen Lösung für die gestörte Gleichung (1.33). Im Fall einer überkompressiven Schockwelle ist die Summe der Dimensionen der Tangentialräume der entsprechenden Mannigfaltigkeiten *größer* als  $n$ , wir erwarten also

nach Störung von  $g$  und  $c$  eine Familie heterokliner Lösungen zu beobachten, die  $u_-$  und  $u_+$  miteinander verbinden.

Wir kommen nun zu unserem Fall und betrachten die spezielle Gleichung (1.26)

$$\begin{aligned}\partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x(\sigma(w(t, x))) &= \mu\varepsilon\partial_x^2 v - \gamma\partial_x([K^\varepsilon * w(t, \cdot)](x) - w(t, x)).\end{aligned}\tag{1.34}$$

Ist  $\varepsilon = 0$ , so reduziert sich diese Gleichung auf eine zweidimensionale Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t w(t, x) - \partial_x v(t, x) &= 0 \\ \partial_t v(t, x) - \partial_x(\sigma(w(t, x))) &= 0.\end{aligned}\tag{1.35}$$

In diesem Sinne kann man (1.34) für  $\varepsilon \neq 0$  als regularisierte Version der zweidimensionalen Erhaltungsgleichung (1.35) ansehen und die Gleichung (1.35) ist von der Gestalt (1.31) mit  $g(w, v) := (v, \sigma(w))$ .

Nach einem Travelling-Wave Ansatz  $(w(x, t), v(t, x)) = (W(x - ct), V(x - ct))$  und einmaliger Integration erhalten wir die reduzierte Gleichung

$$c\mu W'(\xi) = \gamma(L_1 W_\xi - W(\xi)) + \sigma(W(\xi)) - c^2 W(\xi) + c^2 W_- - \sigma(W_-),\tag{1.36}$$

wobei wir uns wegen einer Skalierungsinvarianz auf den Fall  $\varepsilon = 1$  beschränken, siehe Lemma 2.7. Wir beobachten, dass allein der nichtlokale Integralterm  $[K^\varepsilon * w(t, \cdot)](x)$  in Gleichung (1.35) dafür verantwortlich ist, dass die resultierende Travelling-Wave Gleichung (1.36) eine Forward-Backward-Delay Gleichung und insbesondere *keine* gewöhnliche Differentialgleichung ist.

Analog zum vorigen Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung (1.33) sind wir an heteroklinen Lösungen  $H(\cdot)$  der Gleichung (1.36) interessiert, die  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} H(\xi) =: W_\pm$  für zwei Gleichgewichte  $W_\pm$  von (1.36) erfüllen. Ist  $H(\cdot)$  eine solche Lösung und definieren wir  $V(\cdot)$  durch die Gleichung

$$-cH(\tau) - V(\tau) = -cW_- - V_-$$

für ein  $V_- \in \mathbb{R}$ , so definiert  $(w^\varepsilon(t, x), v^\varepsilon(t, x)) := (H((x - ct)/\varepsilon), V((x - ct)/\varepsilon))$  eine Lösung von (1.34) die im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  punktweise gegen die durch das Tripel  $(U_+, U_-, c) := ((W_+, V_+), (W_-, V_-), c)$  definierte Schockwelle konvergiert. Und wieder stellt sich im Falle der Existenz eines solchen „Profils“  $(H(\cdot), V(\cdot))$  die Frage nach der strukturellen Stabilität, d.h. Persistenz des Profils nach kleiner Störung der Nichtlinearität  $\sigma$  oder der Geschwindigkeit  $c$ . Wir erwarten natürlich, dass ein zum Fall der gewöhnlichen Travelling-Wave-Gleichung (1.33) analoges Resultat gültig ist. Allerdings ist die Travelling-Wave-Gleichung (1.36) nun eine Mixed-Type Gleichung, also vom Wesen her *unendlichdimensional*! Auch stabile und instabile Mannigfaltigkeiten sind selbst im Fall der Existenz unendlichdimensional, so dass man nicht wie im Fall der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.33) erwarten kann, durch „Zählen der Dimensionen“ zum Ziel zu gelangen. Trotzdem können wir folgende Resultate im Falle kompressiver Schockwellen zeigen. Zur Formulierung der entsprechenden Resultate bezeichnen wir mit  $\mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  die lineare Abbildung

$$(\mathcal{L}Y)(\xi) := c\mu\partial_\xi Y(\xi) - \gamma(L_1 Y_\xi - Y(\xi)) - \sigma'(H(\xi))Y(\xi) + c^2 Y(\xi).$$

Sei nun  $c, \mu, \gamma \neq 0$ .

### Satz 1.9 (kompressive Schockwelle)

Seien  $U_+ = (W_+, V_+)$ ,  $U_- = (W_-, V_-)$  zwei Zustände, die nicht notwendigerweise nahe beieinander liegen und  $\sigma'(W_\pm) > 0$ ,  $\sigma'(W_\pm) \neq c^2$  gilt. Wir nehmen an, dass die Zustände  $U_+$ ,  $U_-$  zusammen mit  $c \neq 0$  eine kompressive Schockwelle von (1.35) definieren, die durch eine heterokline Lösung  $(W(\cdot), V(\cdot))$  realisiert wird. Also ist  $W(\cdot)$  eine heterokline Lösung von (1.36) mit  $W(\xi) \rightarrow W_\pm$  für  $\xi \rightarrow \pm\infty$  und  $V(\cdot)$  ist durch die Gleichung  $-cW(\tau) - V(\tau) = -cW_- - V_-$  gegeben.

Ist der Kern von  $\mathcal{L}$  nur eindimensional (man beachte, dass  $Y(\xi) := H'(\xi)$  stets ein nicht-triviales Element im Kern ist), dann sind die Lösungen  $W(\cdot), V(\cdot)$  strukturell stabil: für kleine Störungen der Nichtlinearität  $\sigma(\cdot)$  in der  $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -Norm, der linearen Abbildung  $L_1$  in der  $L(C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \mathbb{R})$ -Norm oder der Travelling-Wave Geschwindigkeit  $c$  in der Betragsnorm besitzt die Gleichung (1.36) weiterhin eine heterokline  $\tilde{W}(\cdot)$  Lösung, die zwei Gleichgewichte  $\tilde{W}_-, \tilde{W}_+$  mit  $\tilde{W}_- \approx W_-$  und  $\tilde{W}_+ \approx W_+$  verbindet.

### 1.6.3 Zentrumsmannigfaltigkeiten für Mixed-Type Gleichungen

Zentrumsmannigfaltigkeiten sind ein nützliches Hilfsmittel zum Studium von Lösungen kleiner Amplitude. Speziell verwenden wir diese Mannigfaltigkeiten, um die Sätze 1.7, 1.8 in den Kapiteln 2.5.3 und 2.5.4 zu beweisen.

Wir erinnern in dem nächsten Abschnitt kurz an die Definition und Eigenschaften von Zentrumsmannigfaltigkeiten für gewöhnliche Differentialgleichungen. Im anschließenden Abschnitt formulieren wir dann unsere Hauptresultate für eine allgemeine Forward-Backward-Delay Gleichung.

#### Zentrumsmannigfaltigkeiten für gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g(x(t)), \quad (1.37)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^N$  und  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine stetig differenzierbare Abbildung ist. Ist speziell null eine Gleichgewichtslösung, d.h. es gilt  $g(0) = 0$ , und besitzt die lineare Abbildung  $Dg(0)$  Eigenwerte mit verschwindendem Realteil, so ist der verallgemeinerte Eigenraum  $E_c$  von  $Dg(0)$  bezüglich aller Eigenwerte mit Realteil null nichttrivial. Die gewöhnliche Differentialgleichung (1.37) besitzt dann nahe dem Gleichgewicht eine lokal invariante Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die an der Stelle  $0 \in \mathcal{M}$  tangential an den Zentrumseigenraum  $E_c$  ist; siehe etwa [25], Kapitel 5. Diese wird *Zentrumsmannigfaltigkeit* genannt. Konstruiert wird sie als Graph einer differenzierbaren Abbildung  $\Psi : E_c \cap \mathcal{U} \rightarrow E_h$ , wobei  $\mathcal{U}$  eine genügend kleine Umgebung der Null ist und  $E_h$  den verallgemeinerten Eigenraum von  $Dg(0)$  bezüglich aller Eigenwerte bezeichnet, deren Realteil von null verschieden ist. Außerdem enthält  $\mathcal{M}$  alle Lösungen  $x(t)$  von (1.37), die für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  in einer genügend kleinen Umgebung  $\mathcal{U}$  des Ursprungs bleiben.

Ist man also speziell an der Existenz beschränkter Lösungen, wie Gleichgewichten, kleinen homoklinen oder periodischen Lösungen interessiert, so erlaubt die Einschränkung des Systems (1.37) auf die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  eine Dimensionsreduktion von  $N$  auf die Dimension des verallgemeinerten Eigenraumes  $E_c$ . Ist die Dimension von  $E_c$  etwa zwei, so ist die auf  $\mathcal{M}$  reduzierte Gleichung eine zweidimensionale, gewöhnliche Differentialgleichung und Maschinerie wie das Theorem von Poincaré-Bendixson stehen zur Verfügung.

## Zentrumsmanifoldigkeiten für Mixed-Type Gleichungen

Wir betrachten nun den Fall einer Forward-Backward-Delay Gleichung (1.1) mit  $b > 0$  und nehmen an, die konstante Lösung  $\varphi(\cdot) \equiv 0$  sei eine Lösung dieser Gleichung, d.h. es gilt  $f(0) = 0$ . Bezeichne nun mit  $L := Df(0)$  die Linearisierung der rechten Seite von (1.1) in dem Gleichgewicht null. Zu  $L$  können wir dann via (1.10) und (1.13) den zugehörigen Operator  $B$  assoziieren. Es stellt sich heraus, dass nur endlich viele Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $B$  der Bedingung  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  für  $\lambda \in \operatorname{spec}(B)$  genügen (siehe etwa [31]). Also kann man den verallgemeinerten Eigenraum bezüglich aller Eigenwerte von  $B$ , die einen verschwindenden Realteil haben, mit Hilfe der Spektralprojektion definieren (siehe dazu etwa das Lehrbuch von Kato [23]). Dieser Eigenraum ist endlichdimensional, da wir bereits bemerkt haben, dass alle Eigenwerte von  $B$  endliche Vielfachheit haben und wir bezeichnen diesen Eigenraum in der Folge mit  $E_c^B$ .

Diese Beobachtung zieht bereits eine interessante Konsequenz nach sich: Ist es uns auf die eine oder andere Weise möglich, eine invariante Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  der Mixed-Type Gleichung über dem Zentrumseigenraum zu konstruieren, so ist die auf dieser Mannigfaltigkeit reduzierte Gleichung eine *gewöhnliche* Differentialgleichung. Insbesondere existiert dann für alle Anfangswerte  $\varphi \in \mathcal{M}$  zumindest für kurze Zeiten  $t$  eine Lösung. Allerdings drängt sich folgendes Problem auf: für welche Gleichung können wir überhaupt eine Zentrumsmannigfaltigkeit konstruieren?

Zwar scheint der dicht definierte Operator  $B : C^0([-a, b], \mathbb{C}^N) \rightarrow C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$  gut dazu geeignet zu sein, Informationen hinsichtlich der linearen Gleichung

$$\dot{y}(t) = Df(0)y_t = Ly_t \quad (1.38)$$

zu liefern, aber es ist nicht offensichtlich, wie sich dieses „Setting“ auf die nichtlineare Gleichung (1.1) übertragen soll.

Wir schlagen daher eine etwas andere Richtung ein, die ganz im Sinne des Lehrbuches von Lunel, Walther, van Gils, Diekmann [28] ist und es vorsieht, die „Translationskomponente“ von der ursprünglichen Gleichung abzukoppeln. Bezeichne dazu mit  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  den beschränkten Operator

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\varphi(\cdot) \\ \partial_\theta \varphi(\cdot) \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

für  $(\xi, \varphi(\cdot)) \in X := \{(\eta, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) : \psi(0) = \eta\}$ . Den Vektorraum  $Y$  definieren wir durch  $Y := \mathbb{R}^N \times L^2([-a, b], \mathbb{R}^N)$ . Man beachte zunächst, dass  $H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^0$  stetig einbettet, also der Wert  $\psi(0)$  wohldefiniert ist. Wir studieren nun die lineare Gleichung

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\varphi}(t)(\cdot) \end{pmatrix} = \mathcal{A}U(t). \quad (1.40)$$

### Definition 5

Wir nennen eine stetige Funktion  $U(t) : [0, \delta) \rightarrow Y$  für ein  $\delta > 0$  eine Lösung von (1.40) zum Anfangswert  $U^*$ , wenn  $U(t) : (0, \delta) \rightarrow X$  stetig,  $U(t) : (0, \delta) \rightarrow Y$  differenzierbar ist,  $U(0) = U^*$  gilt und Gleichung (1.40) auf dem Intervall  $(0, \delta)$  erfüllt ist.

Aber wie ist der Zusammenhang zwischen der Gleichung  $\dot{U}(t) = \mathcal{A}U(t)$  und der linearen Gleichung (1.38)? Und was ist der Vorteil des Operators  $\mathcal{A}$  im Vergleich zu  $B$ ?

Um diese Fragen zu beantworten, betrachten wir zunächst eine Lösung  $y(t)$  von (1.38) und nehmen zur Vereinfachung an, diese sei auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Dann gilt  $y_t \in H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und die Funktion

$$U(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t \end{pmatrix}$$

ist eine Lösung von (1.40) auf ganz  $\mathbb{R}$ . Wir zeigen außerdem in Lemma 2.1, dass auch die umgekehrte Richtung gilt: Ist  $U(t) = (\xi(t), \varphi(t)(\cdot))$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung der Gleichung (1.40), so ist  $\xi(t)$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung der Gleichung (1.38).

Ein weiterer Vorzug des Operators  $\mathcal{A}$  gegenüber dem Operator  $B$  ist der Definitionsbereich  $X$ ; dieser ist jetzt unabhängig von der ursprünglichen Gleichung (1.38). Außerdem kann man zeigen (siehe Satz 2.3), dass das Spektrum von  $\mathcal{A}$  und  $B$  übereinstimmt und der verallgemeinerte Zentrumseigenraum  $E_c$  von  $\mathcal{A}$  zu dem von  $B$  isomorph ist. Wir versehen  $E_c$  mit der  $X$ -Norm: dann ist  $E_c$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ .

Wir sind nun in der Lage, diejenige Gleichung zu formulieren, für die wir die Existenz einer Zentrumsmannigfaltigkeit beweisen wollen. Sie lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\varphi}(t)(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\varphi(t)(\cdot) \\ \partial_\theta \varphi(t)(\cdot) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\varphi(t)(\cdot)) - L(\varphi(t)(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

die wir auch in der kürzeren Form  $\dot{U}(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{G}(U(t))$  schreiben wollen. Wir definieren nun, was wir unter einer Zentrumsmannigfaltigkeit der Gleichung (1.41) verstehen.

### Definition 6

Wir sagen, dass Gleichung (1.41) eine  $C^k$ -Zentrumsmannigfaltigkeit besitzt, falls eine für (1.41) lokal invariante, endlichdimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \subset X$  existiert, die als Graph einer  $C^k$  Abbildung  $\Psi : E_c \cap \mathcal{U} \rightarrow H$  über dem Zentrumseigenraum  $E_c$  von  $\mathcal{A}$  gegeben ist und  $\mathcal{U}$  eine genügend kleine Umgebung der Null bezeichnet. Hierbei ist  $H \subset X$  ein bezüglich  $X$  abgeschlossenes Komplement zu  $E_c \subset X$ , d.h. es gilt  $H \oplus E_c = X$ . Außerdem soll  $\mathcal{M}$  folgende Eigenschaften besitzen:

- An der Stelle  $0 \in \mathcal{M}$  ist  $\mathcal{M}$  tangential an  $E_c$ .
- Ist eine Lösung auf  $\mathbb{R}$  definiert und liegt sie für alle Zeiten genügend nahe an der Gleichgewichtslösung Null, so ist sie ganz in  $\mathcal{M}$  enthalten.

Um diese Definition besser zu verstehen, nehmen wir die Existenz einer solchen  $C^k$ -Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  der Gleichung (1.41) an. Wir wollen zeigen, wie man das auf die Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierte Vektorfeld bestimmen kann. Bezeichne dazu mit  $P_c : Y \rightarrow X$

$$P_c V := -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (A - \lambda)^{-1} d\lambda V, \quad (1.42)$$

die Spektralprojektion von  $\mathcal{A}$  bezüglich des verallgemeinerten Eigenraumes  $E_c$  für  $V \in Y$ . Hierbei bezeichnet  $\gamma$  eine positiv orientierte, geschlossene Kurve, die genau alle Eigenwerte von  $\mathcal{A}$  mit Realteil null einmal umläuft und keine weiteren, siehe auch [23]. Wir betrachten nun zur Veranschaulichung den speziellen Fall  $H := \text{Bild}(id - P_c)$  gilt. Dann existiert eine glatte Abbildung  $\Psi : E_c \cap \mathcal{U} \rightarrow H$  für eine geeignet kleine Umgebung  $\mathcal{U}$ , deren Graph eine lokal invariante Mannigfaltigkeit bezüglich (1.41) ist. Diese ist in der Null tangential an den bezüglich  $X$  abgeschlossenen Unterraum  $E_c$ , also gilt  $\Psi(0) = 0$  und

$D\Psi(0) = 0$ . Bezeichne nun  $U(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X$  eine Lösung von (1.41), die für alle Zeiten in einer genügend kleinen Umgebung  $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$  enthalten ist. Dann gilt nach Definition einer Zentrumsmannigfaltigkeit  $U(t) \in \mathcal{M}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Also gilt

$$U(t) = U_c(t) + \Psi(U_c(t)),$$

wenn wir  $U_c(t) := P_c U(t)$  für alle  $t$  definieren. Weiterhin löst  $U_c(t)$  die *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$\dot{U}_c(t) = \mathcal{A}U_c(t) + P_c \mathcal{G}(U_c(t) + \Psi(U_c(t))) \quad (1.43)$$

auf dem endlichdimensionalen Vektorraum  $E_c$ . Ist umgekehrt  $U_c(t) : I \rightarrow E_c$  eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.43) für ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , so definiert

$$U(t) := U_c(t) + \Psi(U_c(t))$$

eine Lösung der Gleichung (1.41) für  $t \in I$ , falls  $|U_c(t)|_X$  für alle  $t \in I$  genügend klein ist.

Um auch Aussagen hinsichtlich Symmetrie-Eigenschaften der Gleichung (1.1) mit in unser Theorem einzubeziehen, machen wir folgende Definition. Dazu schreiben wir das zu der Gleichung (1.1) assoziierte, abstrakte System (1.41) in der Form  $\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U)$ .

### Definition 7

Sei  $\Gamma \subset \mathcal{L}(X, X) \cap \mathcal{L}(Y, Y)$  eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung. Gilt dann  $\mathcal{F}(\gamma U) = \gamma \mathcal{F}(U)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  und  $U \in X$ , so nennen wir die Gleichung (1.1) äquivariant bezüglich  $\Gamma$ . Gilt  $\mathcal{F}(\gamma U) = -\gamma \mathcal{F}(U)$  für alle  $U \in X$  und  $\gamma \in \Gamma$ , so nennen wir (1.1) reversibel.

Unser Resultat hinsichtlich der Existenz einer Zentrumsmannigfaltigkeit nahe des Gleichgewichtes  $0 \in X$  lautet nun wie folgt:

### Satz 1.10 (Zentrumsmannigfaltigkeit)

Sei  $f : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine  $C^k$ -Funktion, mit  $f(0) = 0$ . Setze  $L := Df(0)$  mit  $L : C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Dann besitzt das System

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{G}(U(t)) = \mathcal{F}(U(t))$$

mit

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\varphi}(t)(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi(t)(\cdot)) \\ \partial_\theta \varphi(t)(\cdot) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\varphi(t)(\cdot)) - L\varphi(t)(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  und  $\mathcal{G} : X \rightarrow Y$  eine  $C^k$ -Zentrumsmannigfaltigkeit der Dimension  $m$ , wobei  $m$  die Dimension des Zentrumseigenraumes  $E_c$  von  $\mathcal{A}$  bezeichnet. Außerdem gilt:

- Hängt  $f = f_\alpha$  zusätzlich  $k$ -mal stetig differenzierbar von einem Parameter  $\alpha \in (-\zeta, \zeta)$  ab, d.h.  $\alpha \rightarrow f_\alpha$  mit  $f_\alpha \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  ist eine  $C^k$ -Abbildung, so ist auch die Zentrumsmannigfaltigkeit  $k$ -mal stetig differenzierbar bezüglich  $\alpha$ . Dies bedeutet in unserem Fall, dass eine lokal Null definierte Abbildung  $\Psi(\cdot, \cdot) : (\mathcal{U} \cap E_c) \times (-\zeta, \zeta) \rightarrow H$  mit  $\text{Graph}(\Psi(\cdot, 0)) = \mathcal{M}$  existiert, die  $k$ -mal stetig differenzierbar bezüglich  $\alpha$  ist.

- Sei  $\Gamma \subset \mathcal{L}(Y, Y) \cap \mathcal{L}(X, X)$  eine Untergruppe aller beschränkten, linearen Abbildungen von  $Y$  nach  $Y$  bezüglich der Hintereinanderausführung. Gelte  $\mathcal{F}(\gamma U) = \gamma \mathcal{F}(U)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  und  $U \in X$ . Dann existiert eine Zentrumsmannigfaltigkeit, die durch den Graphen einer Funktion  $\Psi$  dargestellt wird und  $\Psi(\gamma U) = \gamma \Psi(U)$  für alle  $U \in E_c$  gilt, falls  $\langle \gamma U, \gamma U \rangle_X = \langle U, U \rangle_X$  für das Skalarprodukt in  $X$  erfüllt ist. Ebenso gilt  $\Psi(\gamma U) = -\gamma \Psi(U)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ , falls  $\mathcal{F}(\gamma U) = -\gamma \mathcal{F}(U)$  für alle  $U \in X$  und  $\langle \gamma U, \gamma U \rangle_X = \langle U, U \rangle_X$  für das Skalarprodukt in  $X$  gilt.

Die letzte Aussage besagt, dass das auf die Zentrumsmannigfaltigkeit existiert, so dass das reduzierte Vektorfeld *äquivariant* bezüglich der Untergruppe  $\Gamma$  ist, wenn  $\langle \gamma U, \gamma U \rangle_X = \langle U, U \rangle_X$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  erfüllt ist und das ursprüngliche Vektorfeld äquivariant bezüglich  $\Gamma$  ist (also  $\mathcal{F}(\gamma U) = \gamma \mathcal{F}(U)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  gilt).

Ein kurzer Blick in die Literatur zeigt, dass bereits einige Resultate hinsichtlich der Existenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten von in Forward-Backward-Delay Gleichungen existieren.

*Rustichini, 1989:*

Das wohl erste Ergebnis erzielte Rustichini [41] im Jahr 89. Seine Strategie bestand darin, Lösungen der Gleichung (1.1) als Nullstellen der Funktion  $\Gamma : BC^{1,\gamma}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow BC^{0,\gamma}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ , mit

$$(\Gamma x(\cdot))(t) := \dot{x}(t) - f(x_t), \quad (1.44)$$

zu konstruieren. Der Raum  $BC^{1,\gamma}$  bezeichnet dabei für ein  $\gamma > 0$  den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die bezüglich der Norm

$$\|x\|_{1,\gamma} := \sup_{t \in \mathbb{R}} (e^{-\gamma|t|} |x(t)| + e^{-\gamma|t|} |\dot{x}(t)|)$$

beschränkt sind. Analog ist der Raum  $BC^{0,\gamma}$  definiert, der nur stetige Funktionen enthält. Elemente in diesen Räumen dürfen also mit exponentieller Rate wachsen, solange diese Rate kleiner oder gleich  $\gamma$  ist. Ist nun null eine Gleichgewichtslösung von (1.1), so ist die Nullfunktion eine Nullstelle von  $\Gamma$ . Es ist also naheliegend, nach Identifikation des Kerns der Abbildung  $D\Gamma(0)$  mit dem Zentrumseigenraum den impliziten Funktionensatz anzuwenden. Leider ist  $\Gamma$  in den betrachteten Räumen nicht differenzierbar. Diese Schwierigkeit wurde in der Arbeit [41] übergangen und auch an anderen Stellen des Beweises scheint es unüberbrückbare Schwierigkeiten zu geben.

*Kirchgaessner und Ioos, 2001:*

Ein anderes Resultat stammt von Kirchgaessner und Ioos, siehe [21]. Die Autoren konnten in dieser Arbeit mit Hilfe geeigneter Distributionenräume und Fouriertransformationen explizit alle nötigen Voraussetzungen der Arbeit von Vanderbauwhede [54] für eine spezielle Mixed-Type Gleichung überprüfen, um die Existenz einer endlichdimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit in ihrem System zu zeigen. Allerdings ist es nicht klar, ob sich ihre Methode auf *allgemeine* Forward-Backward-Delay Gleichung beliebig hoher Dimension übertragen lässt. Die Tatsache, dass der „Delay“ ihrer Modellgleichung diskret, d.h. von der Gestalt (1.3) ist, könnte zusätzliche Probleme verursachen, wenn man unter anderem an einer Gleichung (1.1) interessiert ist, in der ein Term der Form  $\int_{-a}^b x_t(\theta) k(\theta) d\theta$  mit einer stetigen Funktion  $k(\cdot)$  auftritt.

*Lunel und Hupkes, 2005:*

Etwa zeitgleich mit dieser Arbeit haben Lunel und Hupkes ebenfalls ein allgemeines Resultat hinsichtlich der Existenz von Zentrumsmannigfaltigkeiten in allgemeinen Mixed-Type Gleichungen bewiesen, siehe [30]. Die Autoren konnten die Existenz einer lokal invarianten Mannigfaltigkeit in dem Phasenraum  $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$  zeigen, die alle auf  $\mathbb{R}$  definierten Lösungen der Gleichung  $\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t)$  mit  $g(0) = g'(0) = 0$  enthält, die betragsmäßig uniform genügend klein sind. Um die Unterschiede zu unserem Ansatz herauszufiltern, gehen wir etwas genauer auf ihre Konstruktion ein. Dazu bezeichnen wir mit  $BC^\gamma := BC^\gamma(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$  den Raum aller stetigen Funktionen  $x(\cdot)$ , die der Abschätzung  $\sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-\gamma|t|} |x(t)| < \infty$  genügen. Die Autoren konnten nun die Existenz einer Abbildung  $u^*$  beweisen, die auf dem Zentrumseigenraum  $E_c^B$  bezüglich  $B$  definiert ist, Werte in  $BC^\gamma$  annimmt und folgende Eigenschaften besitzt: Jede auf  $\mathbb{R}$  definierte, betragsmäßig uniform kleine Lösung  $x(\cdot)$  der Gleichung  $\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t)$  liegt im Wertebereich der Abbildung  $u^*$ . Projiziert man die Lösung  $x(\cdot)$  mittels einer Projektion  $\Pi_c$  auf den Zentrumseigenraum  $E_c^B$  von  $B$  und betrachtet die Abbildung  $\Phi(\xi) = \Pi_c x_\xi$ , so erfüllt  $\Phi(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow E_c^B$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}(\xi) = B\Phi(\xi) + \tilde{f}(\Phi(\xi)) \quad (1.45)$$

in dem Raum  $E_c^B$ , wobei  $\tilde{f}$  von  $E_c^B$  nach  $E_c^B$  abbildet. Die Gleichung (1.45) kann man sich hierbei als die auf der Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierte Gleichung vorstellen. Also induzieren global definierte, uniform kleine Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.45) Lösungen der ursprünglichen Mixed-Type Gleichung  $\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t)$ . Die exakte Definition des Wertes  $\tilde{f}(\phi)$  für ein  $\phi \in E_c^B$  beinhaltet allerdings den Term  $L[(u^*(\phi))_\xi]$ , wobei  $\xi \in [-a, b]$  ist. Um die Taylorentwicklung der reduzierten Gleichung (1.45) zu bestimmen, muss man die (unbekannte) Funktion  $u^*(\phi)$  also auf dem *größeren* Intervall  $[-2a, 2b]$  (anstatt  $[-a, b]$ ) kennen. Diese Tatsache gestaltet die Berechnung der Taylorentwicklung kompliziert.

Im Gegensatz dazu tritt diese Problematik bei der Taylorentwicklung des reduzierten Vektorfeldes in unserem Fall nicht auf: betrachten wir nämlich unsere reduzierte Gleichung (1.43)

$$\dot{U}_c(t) = \mathcal{A}U_c(t) + P_c \mathcal{G}(U_c(t) + \Psi(U_c(t))),$$

so müssen wir zur Bestimmung des reduzierten Vektorfeldes an einer Stelle  $U_c \in E_c$  den Wert  $\Psi(U_c)$  bestimmen. Hierbei ist  $\Psi$  diejenige Funktion, deren Graph eine Zentrumsmannigfaltigkeit darstellt. Insbesondere besitzt der Punkt  $\Psi(U_c) = (\xi, \psi(\cdot)) \in X$  eine Funktionskomponente  $\psi(\cdot)$ , die auf dem Intervall  $[-a, b]$  (anstatt auf  $[-2a, 2b]$ ) definiert ist. In unserem Fall tritt der „Informationsverlust“ erst dann auf, wenn wir eine Lösung  $U(t)$  der abstrakten Gleichung (1.41) in eine Lösung  $x(t)$  der ursprünglichen Gleichung  $\dot{x}(t) = Lx_t + g(x_t)$  zurückübersetzen wollen: Lemma 2.2 besagt nämlich, dass eine auf dem Intervall  $[t_1 - a, t_2 + b]$  definierte Lösung  $U(t)$  der abstrakten Gleichung (1.41) nur eine Lösung  $x(t)$  der ursprünglichen Gleichung auf dem kleineren Intervall  $[t_1, t_2]$  induziert. Wir sind aber im wesentlichen an *global* definierten Lösungen (wie periodischen, hetero- oder homoklinen Lösungen) auf der Zentrumsmannigfaltigkeit interessiert und eine global definierte Lösung  $U(t)$  der abstrakten Gleichung (1.41) induziert (nach Lemma 2.2) ebenfalls eine globale Lösung  $x(t)$  der ursprünglichen Mixed-Type Gleichung.

Ein weiterer wichtiger Unterschied ist die Wahl des Phasenraumes. Im Gegensatz zu Lunel und Hupkes, die in dem Raum  $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$  arbeiten, sind unsere Räume  $X, Y$  Hilberträume. Diese Tatsache wird für viele unserer weiteren Anwendungen (wie etwa die Existenz glatter Abschneidefunktionen, die Existenz in  $X, Y$  abgeschlossener Komplemente zu einem beliebigen abgeschlossenen Unterraum usw.) wichtig sein. Außerdem

bezieht unsere Formulierung auf direkte Weise Symmetrie-Eigenschaften der unterliegenden Gleichung mit ein (siehe Definition 7).

## 1.7 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im ersten Teil dieser Arbeit gehen wir auf die Konstruktion der Zentrums Mannigfaltigkeit für allgemeine Forward-Backward-Delay Gleichungen ein. Wir verzichten dabei auf die Konstruktion von Halbgruppen, um die beim Beweis auftretenden inhomogenen linearen Gleichungen mit einer Variation-der-Konstanten Formel zu lösen, sondern ziehen eine direkte Methode vor. Im anschließenden Kapitel diskutieren wir einige lokale Verzweigungen für die in Abschnitt 1.1 eingeführte Gleichung aus der Elastizität. Diese Kapitel zusammen liefern einen abgeschlossenen und von dem Rest unabhängigen Teil dieser Arbeit.

In dem dritten Kapitel beschäftigen wir uns dann mit Verzweigungen nahe einer homoklinen Lösung einer allgemeinen Forward-Backward-Delay Gleichung. Wir formulieren in Abschnitt 3.2 die wesentlichen Hypothesen und halten unsere Hauptresultate des dritten Kapitels fest. Die anschließenden Abschnitte widmen sich dann dem Beweis dieser Theoreme. Im Gegensatz zum ersten Teil dieser Arbeit machen wir hier starken Gebrauch von Halbgruppen. Auf diese Weise stellen wir eine (im Bezug zum ersten Teil dieser Arbeit) weitere Methode vor, mit der man erfolgreich die Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten beweisen kann. In Abschnitt 3.7 diskutieren wir ein Beispiel, für das alle Voraussetzungen der Theoreme explizit verifiziert werden können.

Im vierten und letzten Kapitel gehen wir auf einige weiterführende Anwendungen unserer bereitgestellten Methoden ein. So diskutieren wir beispielsweise in Abschnitt 4.1 den Fall einer heteroklinen Lösung, in dem nahe eines Gleichgewichtes eine Hopfverzweigung auftritt.

## 1.8 Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Professor Bernold Fiedler sowohl für die Einführung in dieses sehr interessante Thema und den großen mathematischen Spielraum danken, den ich in meiner Zeit als Doktorand genossen habe, als auch für die exzellente mathematische Betreuung der letzten Jahre.

Sehr verbunden bin ich auch Stefan Liebscher und Jörg Härterich wegen ausgezeichneter Ratschläge und anregende Diskussionen, sowie Juliette Blanca und Tobias Marxen wegen vieler kritischer und wichtiger Kommentare zu der Einleitung. Auch Nihar Jangle sei wegen vieler wichtiger Gespräche sowohl fachlicher als auch psychologischer Natur gedankt. Sehr dankbar bin ich auch den beiden Professoren Arnd Scheel und Björn Sandstede für die immer schnelle und hochqualifizierte Beantwortung vieler technischer Fragen, auf die ich beim Studium ihrer Arbeiten gestoßen bin.

Nicht zuletzt will ich meiner Familie danken, die mir mit beständiger Unterstützung, Fürsorge und Liebe einen optimalen Rahmen für diese Arbeit geschaffen hat.