

# Zentrumsmannigfaltigkeiten und Verzweigungen in Forward-Backward-Delay Gleichungen

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften am Fachbereich Mathematik und  
Informatik an der  
Freien Universität Berlin

vorgelegt von  
Marc Georgi  
am 17. August 2006

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernold Fiedler

Zweitgutachter: Prof. Dr. Sjoerd Verduyn Lunel

Tag des Rigorosums: 26.02.07

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Forward-Backward-Delay Gleichungen: Beispiele . . . . .	5
1.2	Rückblick: Delay Gleichungen . . . . .	7
1.3	Delay- und Mixed-Type Gleichungen: qualitative Unterschiede . . . . .	9
1.4	Fredholmoperatoren und Spektrum: Definitionen . . . . .	10
1.5	Globale Verzweigungen . . . . .	11
1.5.1	Abzweigende Lösungen nahe einer homoklinen Lösung . . . . .	13
1.5.2	Verzweigungen nahe einer heteroklinen Lösung . . . . .	20
1.5.3	Exponentielle Dichotomien: Definition und Resultate . . . . .	24
1.6	Travelling-Wave Lösungen einer Modellgleichung der Elastizitätstheorie . . . . .	26
1.6.1	Schwache Schocks . . . . .	26
1.6.2	Strukturelle Stabilität . . . . .	29
1.6.3	Zentrumsmanifoldigkeiten für Mixed-Type Gleichungen . . . . .	32
1.7	Gliederung der Arbeit . . . . .	38
1.8	Danksagung . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Zentrumsmanifoldigkeiten</b>	<b>39</b>
2.1	Forward-Backward-Delay Gleichungen, Definitionen . . . . .	39
2.2	Lineare Mixed-Type Gleichungen . . . . .	41
2.2.1	Die lineare Mixed-Type Gleichung im abstrakten Setting . . . . .	41
2.2.2	Dichotomien autonomer Gleichungen im $C^0$ -Setting . . . . .	46
2.3	Das Hauptresultat . . . . .	49
2.4	Beweis der Zentrumsmanifoldigkeit . . . . .	51
2.4.1	Eindeutigkeit von Lösungen der hyperbolischen Gleichung . . . . .	52
2.4.2	Existenz von Lösungen der hyperbolischen Gleichung . . . . .	54
2.5	Anwendung auf eine Modellgleichung der Elastizität . . . . .	60
2.5.1	Herleitung der Modellgleichung . . . . .	61
2.5.2	Schockwellen und die Rankine-Hugoniot Bedingung . . . . .	65
2.5.3	Realisierung schwacher Schocks . . . . .	65
2.5.4	Die regularisierte Gleichung ohne Viskosität . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Verzweigungen nahe homokliner Lösungen</b>	<b>75</b>
3.1	Einleitung . . . . .	75
3.2	Formulierung des Hauptresultates . . . . .	76
3.3	Dichotomien nichtautonomer Gleichungen . . . . .	85
3.3.1	Das Set-up und Definitionen . . . . .	85
3.3.2	Exponentielle Dichotomien für autonome Mixed-Type Gleichungen im $L^2$ -Setting . . . . .	94

3.3.3	Fredholmeigenschaften implizieren die Existenz exponentieller Dichotomien . . . . .	102
3.3.4	Zentrumsdichotomien . . . . .	115
3.3.5	Die Eindeutige-Fortsetzungs-Eigenschaft . . . . .	118
3.4	Hopfverzweigung und invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	121
3.4.1	Konstruktion invarianter Mannigfaltigkeiten . . . . .	124
3.5	Lösungen, die ein Gleichgewicht mit einem periodischen Orbit verbinden .	147
3.5.1	Algebraisch abklingende homokline Lösungen . . . . .	153
3.5.2	Exponentiell abklingende homokline Lösungen . . . . .	157
3.6	Lösungen, die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen eine periodische Lösung konvergieren . . . . .	173
3.6.1	Die skalierte Gleichung . . . . .	173
3.6.2	Invariante Mannigfaltigkeiten für die skalierte Gleichung . . . . .	177
3.6.3	Transversalität der skalierten Mannigfaltigkeiten . . . . .	189
3.6.4	Algebraische Konvergenz der homoklinen Lösung . . . . .	192
3.6.5	Exponentielle Konvergenz der homoklinen Lösung . . . . .	193
3.7	Ein Beispiel . . . . .	199
3.8	Diskussion anderer Phänomene und Limitationen . . . . .	211
<b>4</b>	<b>Weiterführende Resultate</b>	<b>215</b>
4.1	Verzweigungen nahe heterokliner Lösungen . . . . .	215
4.1.1	Formulierung des Hauptresultates . . . . .	216
4.1.2	Beweis des Hauptresultates . . . . .	221
4.1.3	Bemerkungen . . . . .	225
4.1.4	Ein Beispiel . . . . .	225
4.2	Strukturelle Stabilität von Schockwellen in einer Modellgleichung der Elastizitätstheorie . . . . .	233
	<b>Bibliographie</b>	<b>241</b>