Organizing Point Sets:

Space-Filling Curves, Delaunay Tessellations of Random Point Sets, and Flow Complexes

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt am

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

2007

von

Kevin Buchin

Institut für Informatik
Freie Universität Berlin
Takustraße 9
14195 Berlin
`buchin@inf.fu-berlin.de`

gefördert durch die DFG im Rahmen des Europäischen Graduiertenkollegs
Combinatorics, Geometry, and Computation (GRK 588/3)

Betreuer:

Prof. Dr. Günter Rote
Institut für Informatik
Freie Universität Berlin
Takustraße 9
D–14195 Berlin
Germany
rote@inf.fu-berlin.de

Gutachter:

Prof. Dr. Günter Rote
Institut für Informatik
Freie Universität Berlin
Takustraße 9
14195 Berlin
Germany
rote@inf.fu-berlin.de

Prof. Dr. Robert L. (Scot) Drysdale
Department of Computer Science
Dartmouth College
248 Sudikoff
Hanover, NH 03755
U.S.A.
scot@cs.dartmouth.edu

Termin der Disputation: 19. Dezember 2007

Abstract

In this thesis we develop and analyze algorithms for computing space-filling curve orders, Delaunay tessellations and flow complexes of point sets. For space-filling curve orders and Delaunay tessellations the emphasis lies on an average-case analysis of the algorithms. For flow complexes the emphasis lies on their computation in higher dimensions.

In a space-filling curve order of a point set, points which are close in the order are also close in space. We discuss algorithms for computing space-filling curve orders based on radix sort. We give an average-case analysis which shows that these orders can be computed in linear expected time for many point distributions. As discrete counterparts of space-filling curves we consider grid traversals and discuss finding optimal grid traversals for different locality measures using heuristics for the quadratic assignment problem.

The Delaunay tessellation of a point set is a simplicial complex capturing proximity relations of the points. We analyze incremental constructions of Delaunay tessellations along space-filling curve orders. First we give a generalized and refined analysis of incremental constructions con BRIO, i.e., where points are inserted in random rounds. Based on this we analyze incremental constructions along space-filling curve orders for uniformly distributed points from a bounded convex region in the plane, normally distributed points in the plane, and uniformly distributed points from a d-cube in higher dimensions. In the first case we analyze the expected structure of the Delaunay tessellation and in the other cases the structure of the space-filling curve order. We show for these point distributions that incremental constructions con BRIO of Delaunay tessellations run in linear expected time using space-filling curve orders.

The flow complex of a point set is the collection of stable manifolds of the flow induced by the distance function of the point set. We give an algorithm for computing the flow complex in higher dimensions. The algorithm is based on the Delaunay tessellation and Voronoi diagram of the point set and the recursive nature of the flow. Based on this algorithm we give a topological analysis of flow shapes, i.e., the underlying spaces of subcomplexes of the flow complex. In particular we show that flow shapes are homotopy equivalent to the corresponding unions of balls.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Algorithmen zur Berechnung von Ordnungen entlang raumfüllender Kurven, von Delaunay Triangulierungen und von Flusskomplexen entworfen und analysiert. Für Ordnungen entlang raumfüllender Kurven und für Delaunay Triangulierungen liegt der Schwerpunkt auf einer Analyse der Algorithmen im durchschnittlichen Fall. Für Flusskomplexe liegt der Schwerpunkt auf deren Berechnung in höheren Dimensionen.

In einer Ordnung entlang einer raumfüllenden Kurve sind Punkte, die nah in der Ordnung sind, auch nah im Raum. Wir diskutieren Algorithmen zur Berechnung solcher Ordnungen basierend auf Radixsort. Wir geben eine Analyse für den durchschnittlichen Fall, in der wir zeigen, dass diese Ordnungen für viele Punktverteilungen in linearer erwarteter Zeit berechnet werden können. Als diskrete Gegenstücke zu raumfüllenden Kurven betrachten wir Indizierungen von Gitterpunkten. Für verschiedene Lokalitätsmaße berechnen wir Indizierungen basierend auf Heuristiken für das quadratische Zuordnungsproblem.

Die Delaunay Triangulierung einer Punktmenge ist ein simplizialer Komplex auf den Punkten, welcher Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Punkten wiedergibt. Wir analysieren die Laufzeit von inkrementellen Konstruktionen von Delaunay Triangulierungen, bei denen entlang raumfüllender Kurven eingefügt wird. Zunächst geben wir eine verallgemeinerte und verfeinerte Analyse von inkrementellen Konstruktionen con BRIO, also Konstruktionen, bei denen Punkte in zufälligen Runden eingefügt werden. Darauf basierend analysieren wir inkrementelle Konstruktion entlang raumfüllender Kurven für gleichmäßig verteilte Punkte aus einem beschränkten konvexen Gebiet für normalverteilte Punkte in der Ebene und für gleichmäßig verteilte Punkte aus einem d-dimensionalen Würfel in höheren Dimensionen. Im ersten Fall analysieren wir die erwartete Struktur der Delaunay Triangulierung und in den anderen Fällen die Struktur der Ordnung entlang der raumfüllenden Kurve. Wir zeigen für diese Verteilungen, dass inkrementelle Konstruktionen con BRIO entlang raumfüllender Kurven in linearer erwarteter Zeit laufen.

Der Flusskomplex einer Punktmenge ist die Gesamtheit der stabilen Mannigfaltigkeiten des Flusses, der durch die Distanzfunktion der Punktmenge induziert wird. Wir geben einen Algorithmus zur Berechnung des Flusskomplex in höheren Dimensionen an. Dieser beruht auf der Delaunay Triangulierung, dem Voronoi Diagramm und der rekursiven Natur des Flusses. Basierend auf dem Algorithmus geben wir eine topologische Analyse der unterliegenden Räume von Subkomplexen des Flusskomplex. Wir zeigen, dass ein solcher Raum homotopieäquivalent zu der entsprechenden Vereinigung von Kugeln ist.

Acknowledgments

I am very grateful to my advisor Günter Rote for his support, for our joint research, his many good ideas, and his careful proofreading of this thesis. I thank Robert Scot Drysdale III for agreeing to co-referee this thesis and for interesting discussions during his stay in Berlin. I thank Joachim Giesen for his support, our joint research and his friendship during my stay in Zurich.

I would like to thank my workgroup at Free University Berlin, in particular my office mate André Schulz, for their support, the excellent research environment, and friendly atmosphere.

I am grateful to Emo Welzl and his workgroup in Zurich, in particular Joachim Giesen, for their hospitality and the excellent research environment during my stay in Zurich. In particular, I enjoyed the GWOPs (Group Emo Workshop on Open Problems).

It was a great opportunity to be a member of the graduate program 'Combinatorics, Geometry, and Computation'. I thank all professors, in particular the speaker Helmut Alt, and all students for the excellent research environment.

I would like to thank all people that have contributed to many great research visits with their hospitality and fruitful research. In particular I thank Mario Costa Sousa and his family in Calgary and Carola Wenk and Joe in San Antonio. Furthermore, I thank all visitors of the FU workgroup, the Korean Computational Geometry Community, and cartographers of the ETH Zurich.

I have enjoyed and benefited from the collaboration with many people and would like to thank all my collaborators, in particular Christian Knauer and Eyal Ackerman. The collaboration on rolling cube puzzles was particularly fun and I thank among many others Robert Abbott. I would like to thank Yuanxin Liu and Nina Amenta for stimulating discussions on the algorithm discussed in Chapters 3 and 4.

I would like to thank all the people that prepared me for my PhD, in particular Jürgen Döllner, Wolfram Pohlers, Norbert Schmitz, Jan Schroer, Heinz Bürger, and Günter Jaenichen.

I thank my family and friends for their constant support in all times. I started two great sports during my studies and I thank Jo for introducing me to Ultimate and my Vaettern Rundan Cycling crew for great trips.

Finally, and most importantly, I thank Maike much more than I can express within these lines.

Berlin, September 2007.

Contents