

# Anhang A

## Tiefinelastische Elektron-Protonstreuung bei HERA

In diesem Abschnitt sind einige Aspekte tiefinelastischer Elektron-Protonstreuung, insbesondere hinsichtlich der bei HERA erzielten Ergebnisse, zusammengestellt. Diese Zusammenstellung orientiert sich dabei an dem Lehrbuch *Quarks and Leptons* von F. Halzen und A.D. Martin [1] sowie an dem kürzlich erschienenen Review von HERA[2].

### Kinematik

Der erste Elektron-Proton-Collider HERA ist ein ausgezeichnetes Instrument zur Untersuchung der Struktur des Protons. Wegen der Heisenbergschen Unschärferelation ist die Auflösung, die man in einer  $ep$ -Reaktion erreicht, um so größer, je größer der Impulsübertrag in dieser Reaktion ist. Große Impulsüberträge lassen sich natürlich am einfachsten in Reaktionen mit großen Energien realisieren. Bei HERA stoßen Elektronen mit einer Energie von 27.5 GeV mit Protonen der

Energie  $820\text{ GeV}$  zusammen.

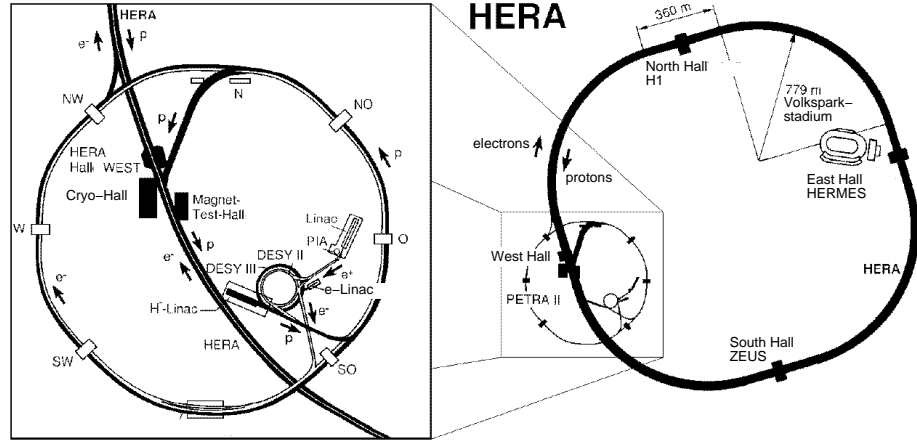


Abbildung A.1: Layout von HERA, man beachte insbesondere die sich gegenüberliegenden Detektoren der Collaborationen H1 im Norden und ZEUS im Süden (Fig. 12 aus [2]).

Das Quadrat der *center-of-mass*-Energie  $s$ , das in einer derartigen Reaktion erreicht wird, beträgt

$$s = (k + p)^2 \quad (\text{A.1})$$

$$\approx 4E_e E_p \quad (\text{A.2})$$

$$\approx (300\text{GeV})^2, \quad (\text{A.3})$$

wobei  $k$  und  $p$  die Vierer-Impulsvektoren des Elektrons und Protons sind. An dieser Stelle kann auch der Vorteil des Colliderkonzeptes deutlich gemacht werden. Um eine gleich große Reaktionsenergie in einem Experiment mit ruhendem Target (*fixed target*) zu erreichen, müßte der Elektronenstrahl eine Energie von etwa  $E_e = s/2m_p = 47\text{ TeV}$  besitzen, was etwa zwei Größenordnungen über der zur Zeit erreichbaren Strahlenergie liegt[2].

Eine besondere Rolle bei der Untersuchung der Struktur des Protons sind Reaktionen der Form  $ep \rightarrow eX$  bei großen Energie- und Impulsüberträgen. Diese Reaktionen bezeichnet man als tiefinelastische Elektron-Protonstreuung (DIS).

Die zur Beschreibung dieser Reaktion üblicherweise verwendeten Variablen sind

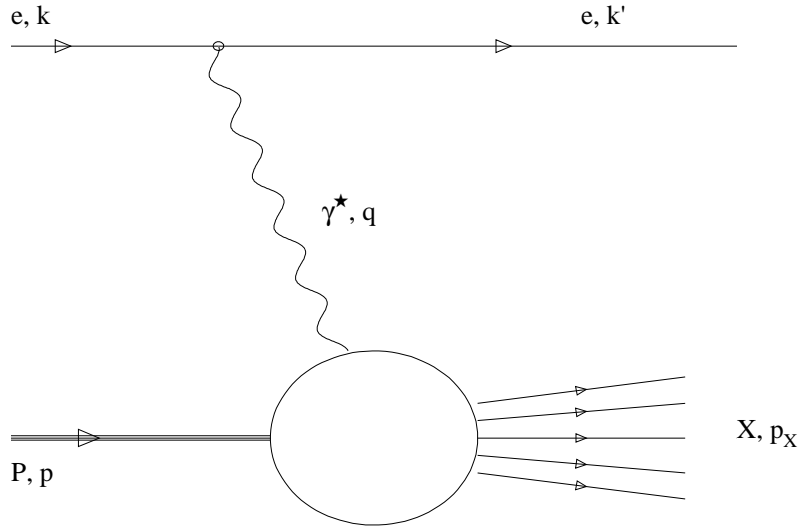


Abbildung A.2: Graph zur tief-inelastischen Elektron-Proton Streuung (in Ein-Photon-Austauschnäherung).

die Invarianten:

$$s = (k + p)^2 \quad (\text{A.4})$$

$$Q^2 = -q^2 = (k - k')^2 \quad (\text{A.5})$$

$$W^2 = (q + p)^2 \quad (\text{A.6})$$

$$M_x^2 = p_x^2 \quad (\text{A.7})$$

$$\nu = \frac{q \cdot p}{m_p} \quad (\text{A.8})$$

$$y = \frac{q \cdot p}{k \cdot p} \quad (\text{A.9})$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2p \cdot q} \quad (\text{A.10})$$

Hierbei ist  $s$  die *ep-center-of-mass*-Energie,  $W^2$  das Quadrat der  $\gamma^*p$ -*center-of-mass*-Energie und  $M_x$  die invariante Masse des erzeugten Endzustandes  $X$ . Das Quadrat des Impulses des virtuellen Photons  $q^2 = -Q^2 < 0$  bestimmt wegen der Heisenbergschen Unschärferelation die Auflösung  $\Delta b$  der Reaktion:

$$\Delta b \sim 1/\sqrt{Q^2} \quad (\text{A.11})$$

Bei HERA verteilt sich  $Q^2$  über einen Bereich von  $Q^2 \approx 0$  bis zu  $Q^2 \approx 9 \cdot 10^4 \text{ GeV}^2$  und erlaubt daher die Auflösung von Strukturen bis zu  $10^{-16} \text{ cm}$ . Die Variablen

$y$  und  $\nu$  versteht man am besten im Ruhesystem des Protons: sind in diesem System  $E_e$  und  $E'_e$  die Energie des einfallenden bzw. gestreuten Elektrons, so ist  $\nu = E_e - E - e'$  der absolute und  $y = (E_e - E'_e)/E_e$  der relative Energieverlust des Elektrons. Somit gilt

$$0 \leq y \leq 1. \quad (\text{A.12})$$

Für die sogenannte Bjorkenvariable  $x_B$  kann man ebenfalls kinematische Grenzen ableiten. Wegen der Beziehung

$$W^2 = (q + p)^2 = -Q^2 + 2p \cdot q + m_p^2 \quad (\text{A.13})$$

gilt für

$$x_B = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{W^2 + Q^2 - m_p^2} \quad (\text{A.14})$$

Also folgt wegen  $W^2 > m_p^2$  und  $Q^2 > 0$ , daß

$$0 \leq x_B \leq 1. \quad (\text{A.15})$$

Die Variable  $x_B$  kann am einfachsten in einem Bezugssystem verstanden werden, in dem sich das Proton sehr schnell bewegt. Wird beispielsweise das virtuelle Photon  $\gamma^*$  in der Reaktion von einem Quark absorbiert, das einen Impulsbruchteil  $z$  am Gesamtimpuls des Protons trägt, und ist  $p'$  der Viererimpuls des gestreuten Partons, so erhält man bei Vernachlässigung der Quarkmasse

$$0 = (p')^2 = (zp + q)^2 = 2zp \cdot q - Q^2. \quad (\text{A.16})$$

Somit bedeutet  $x_B$  wegen  $x_B = z$  gerade den Impulsbruchanteil des getroffenen Quarks- bzw. Antiquarks. Bei HERA erreicht man hierbei  $x_B$ -Werte von bis zu  $10^{-5}$ . Eine weitere wichtige Beziehung ist durch

$$Q^2 = x_B y (s - m_p^2) \quad (\text{A.17})$$

gegeben. Sie zeigt, daß der maximal erreichbare  $Q^2$ -Wert durch  $s$  gegeben ist ( $s \gg m_p^2$ ) und gerade erreicht wird, wenn  $x_B$  und  $y$  gegen 1 streben.

Aufgrund der oben skizzierten kinematischen Zusammenhänge kann man zusammenfassend sagen, daß HERA aufgrund der großen *center-of-mass*-Energie die Möglichkeit bietet, Protonen sehr hoch aufzulösen und die Quark- bzw. Anti-quarkverteilungen im Proton für sehr kleine Impulsbruchanteile  $x_B$  zu untersuchen.

## Wirkungsquerschnitt und Quarkverteilungsfunktionen

Der invariante differentielle Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $ep \rightarrow eX$ , bei der über alle auftretenden Endzustände  $X$  summiert wird, kann aus rein kinematischen Überlegungen, das heißt ohne Aussagen über die Struktur des Protons zu treffen, durch sogenannte Strukturfunktionen parametrisiert werden. Für tiefinelastische Elektron-Protonstreuung (DIS) schreibt man hier üblicherweise

$$\frac{d\sigma}{dx_B dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x_B Q^4} \left\{ \frac{y^2}{2} 2x_B F_1(x_B, Q^2) + (1-y) F_2(x_B, Q^2) \right\}, \quad (\text{A.18})$$

wobei die Strukturfunktionen  $F_1$  und  $F_2$ , wie durch ihre Bezeichnung bereits zum Ausdruck gebracht, durch die Struktur des Protons bestimmt sind. Aufgabe theoretischer Vorstellungen über die Struktur des Protons ist es, diese Funktionen zu beschreiben.

Im Parton-Modell wird das Proton als aus geladenen Konstituenten, sogenannten Partonen, zusammengesetzt gedacht. In einem Bezugssystem, in dem sich das Proton sehr schnell bewegt, beispielsweise dem sogenannten Breit-System, in dem die nullte Komponente des Viererimpuls  $q$  des virtuellen Photons verschwindet

$$q^\mu = (0, 0, 0, Q), \quad (\text{A.19})$$

können im sogenannten tiefinelastischen Grenzfall  $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ ,  $x_B = \frac{Q^2}{2m_p \nu}$  die Partonen als frei betrachtet werden. Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann aus der inkohärenten Überlagerung der einzelnen  $eq$ - bzw.  $e\bar{q}$ -Prozesse. Als Folge

dieser Überlegungen ergeben sich dann die beiden o.g. Strukturfunktionen, wenn man die Partonen als Spin-1/2 Teilchen beschreibt, zu

$$F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 q_i(x_B) \quad (\text{A.20})$$

$$F_2(x_B) = \sum_i x_B e_i^2 q_i(x_B) . \quad (\text{A.21})$$

Die Funktionen  $q_i(x_B)$  beschreiben dabei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Partonen verschiedener Art über dem longitudinalen Impulsbruchanteil  $x_B$ . Die Zahlen  $e_i$  sind der Bruchteil an der Elementarladung  $e$ , den die Partonen besitzen. Neben dem sogenannten Scaling der Strukturfunktionen (das heißt der Abwesenheit einer  $Q^2$ -Abhängigkeit) ergibt sich als Konsequenz die sogenannte Callan-Gross-Relation

$$2x_B F_1(x_B) = F_2(x_B) . \quad (\text{A.22})$$

*Scaling* und Callan-Gross-Relation wurden experimentell in erster Näherung gemessen und dienen neben anderen experimentellen Befunden (Drittelzahligkeit der Ladungen  $e_i$ ) der Identifikation der Partonen mit den Quarks bzw. Antiquarks, was das Parton-Modell zum Quark-Parton-Modell werden läßt.

Im Rahmen des Quark-Parton-Modells können empirisch Quarkverteilungsfunktionen  $q_i(x_B)$  aus den experimentellen Daten für die Strukturfunktion  $F_2(x_B)$  von Proton und Neutron gewonnen werden. Im folgenden wird dies kurz skizziert. Hierzu führt man einfach für die verschiedenen Flavour Quark- und Antiquarkverteilungsfunktionen des Protons bzw. Neutrons ein  $u^{p/n}(x_B)$ ,  $\bar{u}^{p/n}(x_B)$ ,  $d^{p/n}(x_B)$ ,  $\bar{d}^{p/n}(x_B)$ ,  $s^{p/n}(x_B)$  und  $\bar{s}^{p/n}(x_B)$  ein. Somit erhält man für die Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_B} F_2^p(x_B) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x_B) + \bar{u}^p(x_B)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x_B) + \bar{d}^p(x_B)] \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x_B) + \bar{s}^p(x_B)] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_B} F_2^n(x_B) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x_B) + \bar{u}^n(x_B)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x_B) + \bar{d}^n(x_B)] \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n(x_B) + \bar{s}^n(x_B)] . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die Verteilungsfunktionen für Proton und Neutron sind nicht unabhängig voneinander, da sie Teil eines Isospindubletts sind. Aus diesem Grund kann man

$$d^n(x_B) = u^p(x_B) \equiv u(x_B) \quad (\text{A.25})$$

$$u^n(x_B) = d^p(x_B) \equiv d(x_B) \quad (\text{A.26})$$

$$s^n(x_B) = s^p(x_B) \equiv s(x_B) \quad (\text{A.27})$$

schreiben. Da die Quantenzahlen des Protons denen einer  $uud$ -Kombination, und die des Neutrons einer  $udd$ -Kombination entsprechen, ist es sinnvoll, die Quarkverteilungen in einen Valenz- und einen Seeanteil aufzuteilen. Die Valenzquarks tragen dabei die Quantenzahlen des Protons (Neutrons); die Seequarks stammen aus Fluktuationen von Gluonen, die von den Quarks abgestrahlt werden. Ist der "See" in Proton und Neutron gleich beschaffen (isospininvariant) und nimmt man der Einfachheit halber an, daß die verschiedenen Quarkflavour im "See" jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, so erhält man

$$u(x_B) = u_v(x_B) + u_s(x_B) \quad (\text{A.28})$$

$$d(x_B) = d_v(x_B) + d_s(x_B) , \quad (\text{A.29})$$

wobei der Index  $v$  für den Valenz- und der Index  $s$  für den Seequarkanteil der entsprechenden Quarkverteilungsfunktion stehen. Dabei gilt für die Valenzquarkverteilungen

$$\int dx_B u_v(x_B) = 2 \quad (\text{A.30})$$

$$\int dx_{\text{B}} d_v(x_{\text{B}}) = 1 \quad (\text{A.31})$$

$$\int dx_{\text{B}} s_v(x_{\text{B}}) = 0. \quad (\text{A.32})$$

Solche integralen Beziehungen nennt man auch Summenregeln. Führt man gemäß der obigen Argumentation eine universelle Seequarkverteilungsfunktion  $S(x)$  ein, für die

$$\begin{aligned} S(x_{\text{B}}) &= u_s(x_{\text{B}}) = \bar{u}_s(x_{\text{B}}) \\ &= d_s(x_{\text{B}}) = \bar{d}_s(x_{\text{B}}) \\ &= s_s(x_{\text{B}}) = \bar{s}_s(x_{\text{B}}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

gilt, so erhält man für die Strukturfunktionen von Proton und Neutron

$$\frac{1}{x_{\text{B}}} F_2^p = \frac{1}{9} [4u_v + d_v] + \frac{4}{3} S \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{1}{x_{\text{B}}} F_2^n = \frac{1}{9} [u_v + 4d_v] + \frac{4}{3} S. \quad (\text{A.35})$$

Eine interessante Größe in diesem Zusammenhang ist das Verhältnis zwischen den Strukturfunktionen von Neutron und Proton (siehe Abb. A.3).

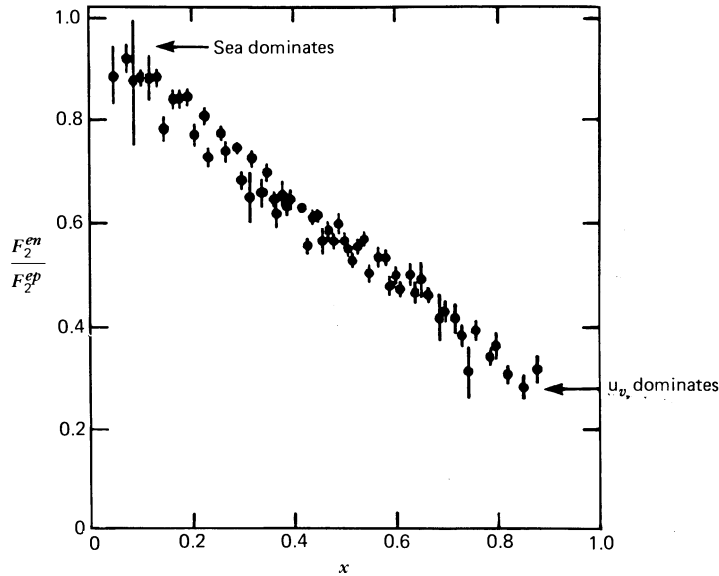


Abbildung A.3: Das Verhältnis  $F_2^n / F_2^p$  als Funktion von  $x_{\text{B}}$  (Abbildung 9.6 aus [1]).



Empirisch findet man, daß

$$\frac{F_2^n(x_B)}{F_2^p(x_B)} \rightarrow 1.0 \quad \text{für } x_B \rightarrow 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{F_2^n(x_B)}{F_2^p(x_B)} \rightarrow 0.25 \quad \text{für } x_B \rightarrow 1, \quad (\text{A.37})$$

woraus man entnehmen kann, daß für kleine Werte von  $x_B$  die Seequarks dominieren, während für große Werte von  $x_B$  im Proton die  $u$ -Valenzquarks dominieren. Abb. A.4 zeigt das Ergebnis einer Analyse tiefinelastischer Elektron-Proton- und Elektron-Neutron-Streuung, die auf einem Fit der funktionalen  $x_B$ -Abhängigkeit der Valenz- und Seequarkverteilungen beruht (für Details siehe z.Bsp.[2]).

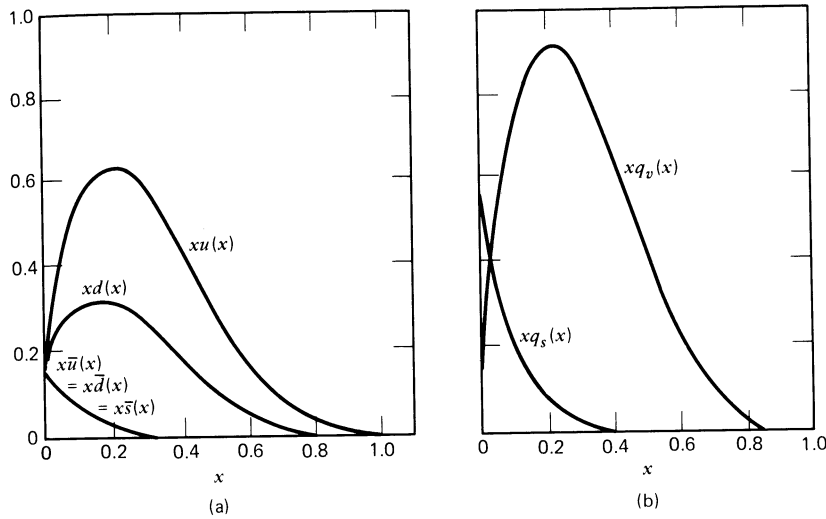


Abbildung A.4: Quarkverteilungsfunktionen nach einer Analyse tiefinelastischer Daten. In (b) wird der gesamte Valenz- bzw. Seequarkanteil an der Strukturfunktion des Protons gezeigt (Abbildung 9.9 aus [1]).

Anhand von Abb. A.4 sieht man, daß der Impuls, der von den  $s$ -Quarks getragen wird, gegenüber dem von  $u$ - und  $d$ -Quarks vernachlässigt werden kann. Integriert man daher die gemessenen Strukturfunktionen  $F_2^{p/n}$  über  $x_B$ , so erhält man

$$\int dx_B F_2^p(x_B) \approx \frac{4}{9}\epsilon_u + \frac{1}{9}\epsilon_d = 0.18 \quad (\text{A.38})$$

$$\int dx_B F_2^n(x_B) \approx \frac{1}{9}\epsilon_u + \frac{4}{9}\epsilon_d = 0.12, \quad (\text{A.39})$$

wobei  $\epsilon_{u/d}$  der gesamte Impulsbruchanteil des Protons ist, der von  $u$ - bzw.  $d$ -Quarks (und Antiquarks) getragen wird. Die Zahlenwerte auf der rechten Seite der Gleichungen sind dabei jeweils der gemessene Wert des Integrales. Aus den obigen Gleichungen folgt, daß  $\epsilon_u \approx 0.36$  und  $\epsilon_d \approx 0.18$  ist, woraus man schließen kann, daß etwa die Hälfte des Impulses des Protons von ungeladenen Konstituenten des Protons – den Gluonen – getragen wird.

Eine instruktive Grafik bezüglich der grundsätzlich zu erwartenden Gestalt der Strukturfunktion des Nukleons ist in Abb. A.5 gegeben.

### Structure Function $F_2$

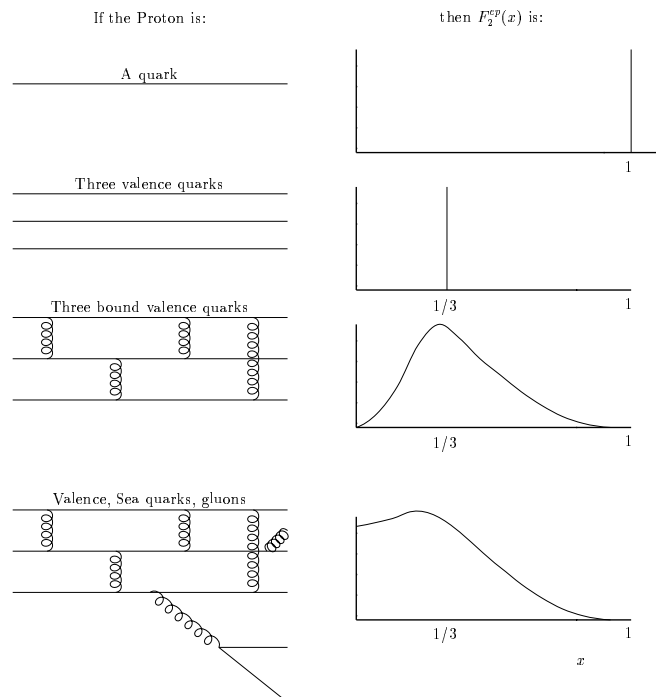


Abbildung A.5: Die Strukturfunktion  $F_2$ , skizziert unter der Annahme verschiedener Arten der Zusammensetzung eines Protons (Abbildung 9.7 aus [1]).

Gibt es nur ein einziges Quark, das demzufolge den gesamten Impuls des Protons tragen müßte, so wäre die Quarkverteilungsfunktion und damit auch die Strukturfunktion des Protons proportional zu  $\delta(x_B - 1)$ . Besteht ein Proton aus drei nicht miteinander wechselwirkenden (und gleichberechtigten) Quarks, so teilen

sich diese den Impuls des Protons; in diesem Fall erwartet man also, daß die Strukturfunktion proportional zu  $\delta(x_B - 1/3)$  ist. Wechselwirken die drei Quarks miteinander, so wird die Verteilungsfunktion breiter, das Maximum erwartet man bei  $x_B = 1/3$ . Schließlich führt die Möglichkeit der Abstrahlung von Gluonen, die wiederum in Quark-Antiquark-Paare fluktuieren können, zur Existenz von zusätzlichen Seequarks mit relativ kleinem Impuls; die Quarkverteilungsfunktionen und damit auch die Strukturfunktion ist bei kleinen  $x_B$ -Werten deutlich höher, als es ohne Abstrahlung von Gluonen der Fall wäre. Dieser Effekt zeigt sich auch in der Analyse der tiefinelastischen Streudaten, wie man der Abb. A.4 entnehmen kann.

## pQCD-Korrekturen und Gluonverteilungsfunktion

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Beschreibung der Strukturfunktion des Protons im Rahmen des Quark-Parton-Modells vorgestellt. Dieser einfache Ansatz ist zwar sehr erfolgreich, wirft aber auch einige Fragen auf. So manifestieren sich in der Differenz zwischen dem Impuls, der von den Quarks (Antiquarks) getragen wird, und dem Gesamtimpuls des Protons die Gluonen, die die Wechselwirkung zwischen den farbigen Quarks (Antiquarks) im Proton vermitteln. Deren spezifische Dynamik ist aber in die Beschreibung noch gar nicht eingegangen. Welche Konsequenzen würden sich bei Berücksichtigung von QCD-Korrekturen ergeben? Ist es möglich, aus den experimentellen Ergebnissen der DIS nicht nur Aussagen über die Verteilung der Quarks, sondern auch der Gluonen zu gewinnen? Das ist eine nicht unerhebliche Frage, schließlich werden ca. 50% des Impulses von Gluonen getragen. Experimentelle DIS-Daten zeigen, daß entgegen der Erwartungen des Quark-Parton-Modells die Strukturfunktion  $F_2^p$  doch eine (wenn auch) schwache  $Q^2$ -Abhängigkeit besitzt. Diese Abhängigkeit nennt man *scaling violation*. In Abb. A.6 ist die  $Q^2$ -Abhängigkeit der Strukturfunktion für

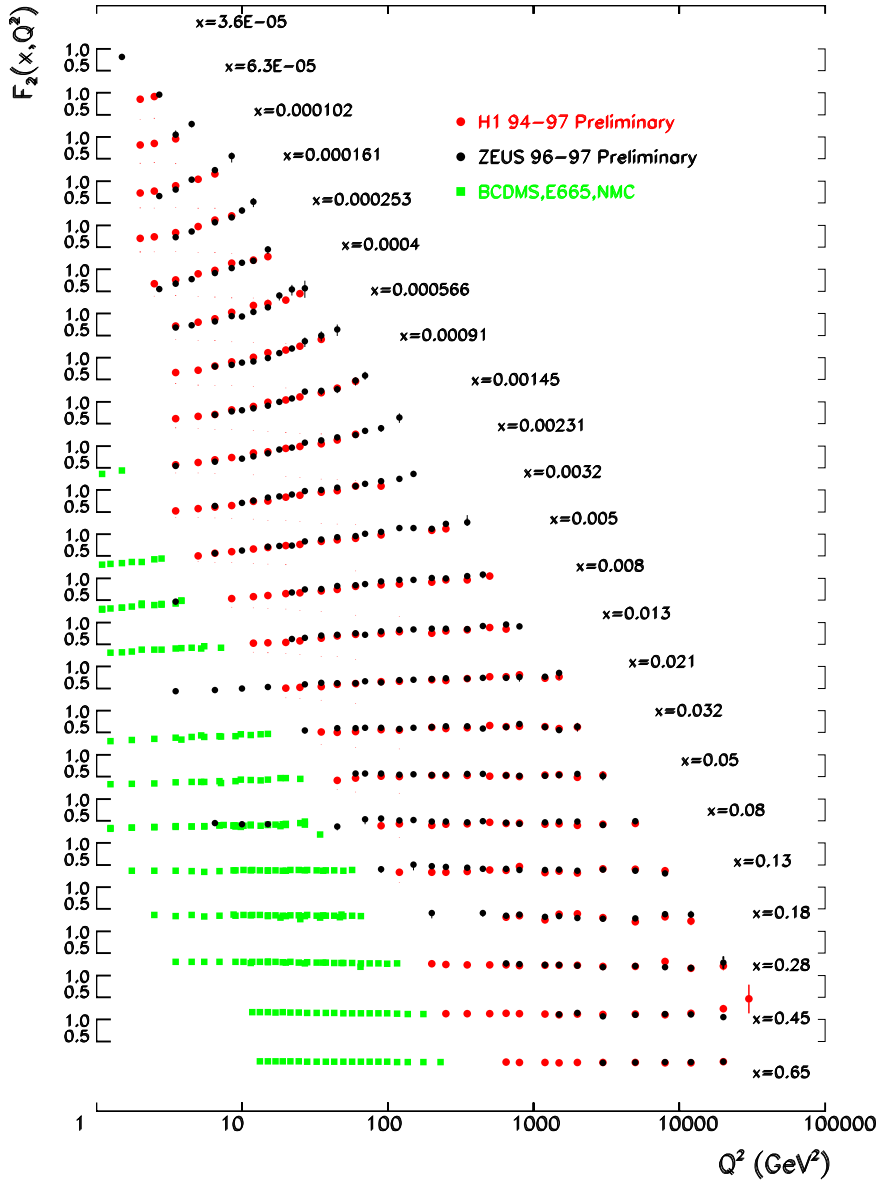


Abbildung A.6:  $F_2$  aufgetragen über  $Q^2$  für verschiedene Werte von  $x_B$ , Daten von HERA 1994-97 verglichen mit früheren *fixed target* Experimenten (Fig.28 aus [2]).

verschiedene  $x_B$ -Werte aufgetragen.

Die QCD-Graphen, die zu  $O(\alpha_s)$ -Korrekturen ( $\alpha_s$  ist die Kopplungskonstante der QCD) des Quark-Parton-Modells führen, sind in Abb. A.7 gezeigt[1].

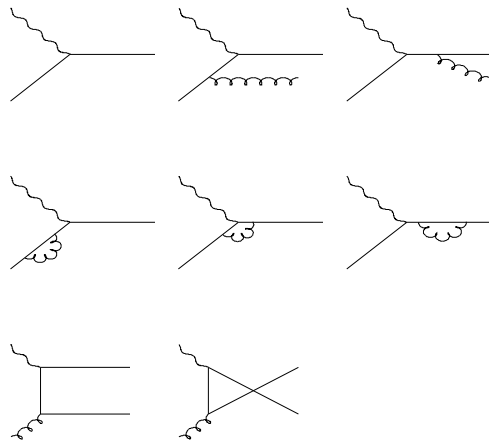


Abbildung A.7: QCD-Graphen, die zu  $O(\alpha_s)$ -Korrekturen des Quark-Parton-Modells beitragen. Die beiden Selbstwechselwirkungsgraphen sowie der Vertexkorrekturgraph tragen in dieser Ordnung durch Interferenz mit dem reinen  $\gamma^*q$ -Graph bei.

Ihre Berücksichtigung führt auf Integrodifferentialgleichungen, die die  $Q^2$ -Abhängigkeit der Quark-Verteilungsfunktionen beschreibt (siehe [1]):

$$\frac{dq_i(x_B, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{x_B}^1 \frac{dy}{y} \left( q_i(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x_B}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{qg}\left(\frac{x_B}{y}\right) \right). \quad (\text{A.40})$$

Hierbei bedeutet  $g(x_B, Q^2)$  die Gluonverteilungsfunktion, und die Funktionen  $P_{ij}$  sind die sogenannten *Splitting*-Funktionen, die die Wahrscheinlichkeit angeben, ein Parton  $i$  in einem Parton  $j$  mit einem bestimmten Bruchteil des Impulses des

Partons  $j$  zu finden [1]. Eine ähnliche Gleichung läßt sich auch für die logarithmische Ableitung der Gluonverteilung angeben[1]:

$$\frac{dg(x_B, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{x_B}^1 \frac{dy}{y} \left( \sum_i q_i(y, Q^2) P_{gq}\left(\frac{x_B}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{gg}\left(\frac{x_B}{y}\right) \right) \quad (\text{A.41})$$

Diese Gleichungen heißen DGLAP-Gleichungen (nach Dockshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi) und werden oft auch als Evolutionsgleichungen bezeichnet, weil sie die  $Q^2$ -Entwicklung (Evolution) der Partonverteilungen beschreiben. Man kann sie auch in einer kompakteren Form [2]

$$\frac{\partial}{\partial \log Q^2} \begin{pmatrix} q \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{bmatrix} P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q \\ g \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

zusammenfassen.

Die *Splitting*-Funktionen hängen von der Zahl der *Splittings* ab.  $P_{qq}$  und  $P_{qg}$  können beispielsweise durch Auswertung der Graphen aus Abb. A.7 in erster Ordnung zu

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[ \frac{1+z^2}{1-z} \right] \quad (\text{A.43})$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (\text{A.44})$$

bestimmt werden[1].

Die Partonverteilungsfunktionen hängen nicht mehr nur von  $x_B$ , sondern auch  $Q^2$  ab. Diese Abhängigkeit trägt der bei verschiedenen  $Q^2$ -Werten verschiedenen Auflösung des virtuellen Photons Rechnung. Der Anstieg der Quarkverteilungsfunktionen ist linear in  $\log Q^2$ , was zu den beobachteten *scaling violations* (siehe Abb. A.6) paßt.

Da in die DGLAP-Gleichungen die Gluonverteilungsfunktion eingeht, kann diese durch Analyse der  $Q^2$ -Abhängigkeit der Strukturfunktion  $F_2(x_B, Q^2)$  bestimmt

werden. So ergeben die DGLAP-Gleichungen für den Anstieg der Strukturfunktion  $F_2(x_B, Q^2)$  mit  $\log Q^2$  die Beziehung

$$\frac{dF_2(x_B, Q^2)}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ \int_{x_B}^1 \frac{dy}{y} \frac{x_B}{y} P_{qq}\left(\frac{x_B}{y}\right) F_2(y, Q^2) + 2 \sum_q e_q^2 \int_{x_B}^1 \frac{dy}{y} \frac{x_B}{y} P_{qg}\left(\frac{x_B}{y}\right) yg(y, Q^2) \right], \quad (\text{A.45})$$

wobei über die verschiedenen Quarkflavour  $q$  summiert wird.

Analysen zur Extraktion der Quark- und Gluonverteilungsfunktionen mit Hilfe der DGLAP-Gleichungen sind bei HERA (siehe [2]) durchgeführt worden. In diesem Zusammenhang sei noch einmal daran erinnert, daß HERA hauptsächlich wegen der hohen Schwerpunktsenergie den kinematisch erreichbaren Bereich wesentlich vergrößert hat, insbesondere zu kleinen  $x_B$ -Werten hin, bei denen die Dichte der Partonen sehr groß wird. Da die DGLAP-Gleichungen nichts über die  $x_B$ -Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen aussagen, werden diese bei einem bestimmten Startwert von  $Q^2 = Q_0^2$  parametrisiert. Die DGLAP-Gleichungen ermöglichen anschließend einen globalen Fit der Parameter an die verfügbaren DIS Daten. Die skizzierte Fitprozedur enthält sehr viele Freiheiten, es ist auch nicht klar, in welchem kinematischen Bereich die DGLAP Gleichungen nicht mehr anwendbar sind. Aber die Analysen zeigen, daß die Gluonen im Bereich der kleinen  $x_B$ -Werte die dominierende Rolle spielen. So zeigt Abb. A.8 die Ergebnisse einer Analyse von ZEUS. Aufgetragen sind dort die mit  $x_B$  multiplizierten Verteilungen der Seequarks ( $x_B \Sigma$ ) und der Gluonen ( $x_B g$ ) über  $x_B$ . Für große Werte von  $Q^2$  liegt die Gluonverteilung deutlich über der Seequarkverteilung.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß der QCD-Ansatz der DGLAP-Gleichungen grundsätzlich nur die (relativ schwache)  $\log Q^2$ -Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen, nicht aber deren starke  $x_B$ -Abhängigkeit beschreibt. Die  $x_B$ -Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen kann nur durch einen Fit aus den Daten gewonnen werden [2].

## ZEUS 1995

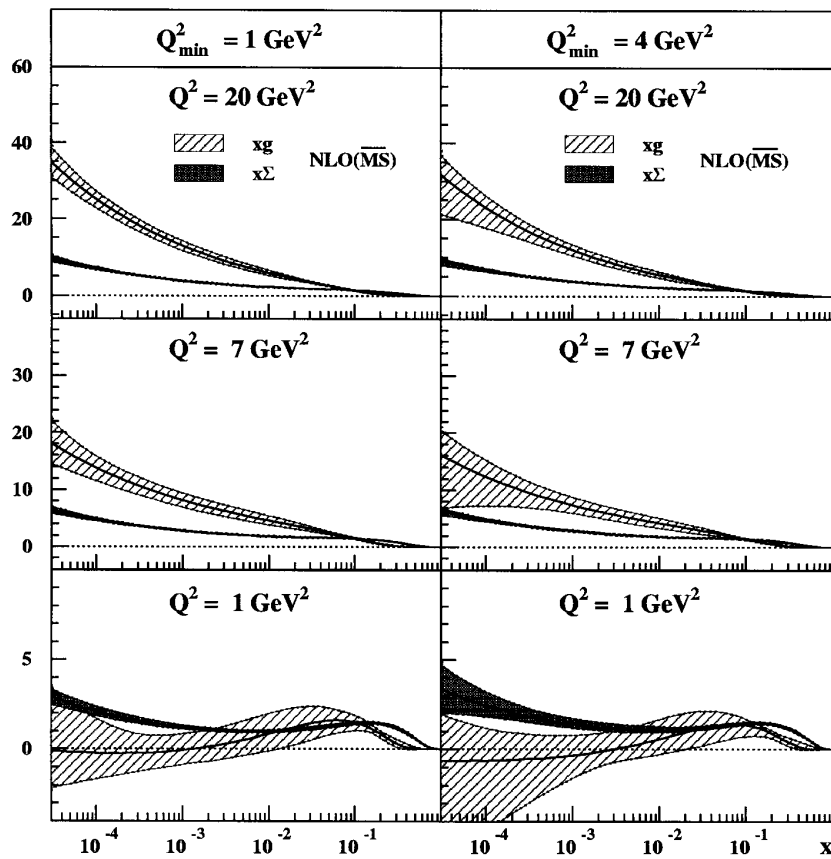


Abbildung A.8: Seequarkverteilungsfunktion  $x_B \Sigma$  (schraffiert) und Gluonverteilungsfunktion  $x_B g$  (dunkel) aufgetragen über  $x_B$ . Ergebnis einer ZEUS Analyse der Daten zu  $F_2$  mit  $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$  (links) beziehungsweise  $Q^2 > 4 \text{ GeV}^2$  (Fig.42 aus 2).



## Literatur zu Anhang A

- [1] F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [2] H. Abramowicz and A. Caldwell, *Rev. Mod. Phys.* 71, 1275 (1999).