

Kapitel 3

Eine Vorstudie zur Simulation von Gluonsystemen

In Kap. 2 wurde gezeigt, daß die sich in diffraktiven inelastischen γ^*p -, γp -, pp - und $\bar{p}p$ -Reaktionen manifestierenden farblosen Gluoncluster c_0^* aufgrund von selbstorganisierter Kritikalität (SOC) in dem komplexen dynamischen System der weichen Gluonen innerhalb des Protons gebildet haben. Die dabei aus den Daten extrahierten Potenzgesetze für die Verteilungen $D_S(S)$ der Größe S und der Lebensdauer T der c_0^* -Cluster beschreiben dabei das globale Verhalten des Gluonsystems, nicht aber, auf welche Weise die Wechselwirkung der Gluonen zu der Bildung der farblosen Gluoncluster führt.

Gluonen und deren Wechselwirkung werden normalerweise mit Hilfe der Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben, da aber die Kopplungskonstante α_S für die Wechselwirkung in dem betrachteten komplexen Gluonsystem im allgemeinen nicht kleiner als eins ist, helfen störungstheoretische QCD-Rechnungen, also detaillierte Berechnungen auf Grundlage von Feynmandiagrammen, hier nicht weiter. Andererseits handelt es sich bei dem komplexen Gluonsystem nicht um ein Gleichgewichtssystem. Daher ist es auch nicht möglich, Verfahren der Gleichgewichtsthermodynamik, also etwa die Berechnung von Zustandssummen, zu ver-

wenden [7]. Die Beschreibung der mikroskopischen Dynamik in einem komplexen Gluonsystem ist ein ungelöstes Problem.

Für SOC-Systeme gibt es (noch) keinen allgemeinen analytischen Formalismus, vergleichbar mit der Berechnung von Zustandssummen im Rahmen der Gleichgewichtsthermodynamik, den man bei der Beschreibung der Dynamik in einem komplexen Gluonsystem verwenden könnte [7]. Zwar ist das verschiedenen SOC-Systemen zugrundeliegende dynamische Prinzip das gleiche, verschiedene Systeme werden aber individuell behandelt. Hierzu wird die komplexe Dynamik der betrachteten Systeme auf einen Satz von einfachen Iterationsregeln abgebildet, die man mit Computerprogrammen simulieren kann. Beispiele hierfür sind Modelle [14, 10, 11, 12, 13], mit denen SOC-Phänomene wie Erdbeben [4], Lawinen [8, 9] oder biologische Evolution [16] beschrieben werden können. Ein derartiges SOC-Modell zur Simulation der Dynamik eines komplexen Gluonsystems sollte die Bildung von farblosen Gluonclustern c_0^* beschreiben, deren Größenverteilung $D_S(S)$ und Lebensdauerverteilung $D_T(T)$ den Potenzgesetzen $D_S(S) \sim S^{-\mu}$ bzw. $D_T(T) \sim T^{-\nu}$ mit den Exponenten $\mu \approx 2$ und $\nu \approx 2$ gehorcht.

Dabei stellt sich die Frage, wieviele der spezifischen Details der komplizierten Gluon-Gluon-Wechselwirkung (Farbe, Kopplungskonstante, Impulse) wirklich wichtig sind. Anders gesagt, auf was kann man verzichten, ohne die für das Verhalten des Systems wesentlichen Eigenschaften zu verlieren? Hier kann man erwarten, daß wie in anderen Systemen [14, 10, 12, 13] auch, das globale Verhalten des Systems robust gegenüber spezifischen Details der Wechselwirkung ist, mit anderen Worten, auf viele spezifische Details der Wechselwirkung verzichtet werden kann. Als Vorstudie auf dem Weg zur Entwicklung eines SOC-Modells zur Simulation eines Gluonsystems und der Bildung von Gluonclustern soll im folgenden eine stark vereinfachte Modellvorstellung betrachtet werden, in deren Rahmen die Dynamik im Gluonsystem als Evolutionsprozeß [36] im Sinne der Evolution von biologischen Arten beschrieben wird. Diese einfache Modellvorstellung entspricht einer abgewandelten Version des Bak-Sneppen-Modells [12], bei der die spezifi-

schen Details der Wechselwirkung der Gluonen so weitgehend ignoriert werden, daß das Modell analytisch betrachtet werden kann.

3.1 Dynamik in Gluonsystemen als evolutionärer Prozeß – eine stark vereinfachte Modellvorstellung

Um die Dynamik eines Gluonsystems zu modellieren, wird das Gluonsystem in eine willkürliche Anzahl L von Untersystemen s_i unterteilt, die mit $i = 1, \dots, L$ durchnummeriert werden. Jedes dieser Untersysteme ist offen, weder die Zahl n_i der in ihnen enthaltenen Gluonen, noch die Energien ε_i der Untersysteme sind feste Größen. Durch den Austausch von Gluonen zwischen den einzelnen Untersystemen oder auch durch Wechselwirkung mit Quarks und Antiquarks außerhalb des komplexen Gluonsystems werden sich die Untersysteme s_i bzw. deren Energien ε_i im Laufe der Zeit verändern. Entsprechend der oben beschriebenen vereinfachten Beschreibung der Dynamik und der Vernachlässigung der spezifischen Details werden diese Veränderungen als Zufallsprozeß beschrieben.

Im Sinne der Unschärferelation ist der Quotient $1/\varepsilon_i$ ein Maß für die Lebensdauer τ_i eines Zustandes eines Untersystems mit Energie ε_i . Daher haben Untersysteme mit großen Energien ε_i eine größere Wahrscheinlichkeit sich zu verändern als Untersysteme mit kleineren Energien ε_i . Untersysteme mit kleineren Energien ε_i sind gewissermaßen *fitter* als Untersysteme mit großen Energien ε_i . Statt den Untersystemen s_i zufällige ε_i -Werte zuzuordnen, wird jedem Untersystem s_i des Gluonsystems eine *Fitness* f_i zugeordnet, die eine (gleichverteilte) Zufallszahl zwischen 0 und 1 ist.

Die Wechselwirkung der Gluonen führt zu einer Wechselwirkung zwischen den einzelnen Untersystemen. Um diese zu beschreiben, wird in jedem einzelnen Zeit- bzw. Iterationsschritt der Einfachheit halber eine Wechselwirkung zwischen dem

Untersystem s_i mit der geringsten Fitness und einem anderen Untersystem angenommen. Die beiden Untersysteme verändern dabei ihren Zustand, das heißt ihre Fitness wird sich ändern. Da über die Details dieser Wechselwirkung selbst nichts bekannt ist, werden jedem der beiden Untersysteme jeweils neue Zufallszahlen als Fitnesswerte zugewiesen. Da das Untersystem mit der geringsten Fitness mit jedem anderen Untersystem wechselwirken kann, wird dieses zufällig gewählt.

Die Simulation des Gluonsystems besteht nun in der iterativen Anwendung der oben definierten Regeln.

Das so definierte Modell ist eine Variante des SOC-Modells von Bak und Sneppen [12], das zur Beschreibung der biologischen Evolution von Arten innerhalb einer Nahrungskette vorgeschlagen wurde. Dort entsprechen den Gluon-Untersystemen biologische Arten. Die Änderung der Fitness eines Untersystems s_i entspricht im Bak-Sneppen-Modell dem Ersetzen einer biologischen Art durch eine neue Art mit zufällig gewählter Fitness. Obwohl im Bak-Sneppen-Modell die komplizierte Wechselwirkung zwischen den Arten vereinfacht als Interaktion von Zufallszahlen beschrieben wird, werden wesentliche Aspekte der Evolution, wie die Beobachtung, daß evolutionäre Prozesse durch kurze hektische Aktivitätsphasen und lange ruhige Phasen mit keiner oder nur geringer Aktivität gekennzeichnet sind (*punctuated equilibrium*) und das lawinenartige Aussterben von Arten [16], beschrieben. Abgewandelte Versionen dieses Modells sind in einer großen Zahl von Arbeiten [13-50] auf ihre Eigenschaften hin untersucht worden. Einen Überblick über die Eigenschaften derartiger Evolutionsmodelle findet sich in [17], die dort genannten Zusammenhänge basieren auf empirischen Erkenntnissen, das heißt auf Simulationen der Modelle. Das Bak Sneppen Modell konnte, trotz seiner bestechenden Einfachheit, analytisch noch nicht gelöst werden. Die hier für die Behandlung des komplexen Gluonsystems vorgeschlagene Variante des Bak-Sneppen-Modells [12] wird als *k random neighbor* Version bezeichnet [41], wobei k die Zahl der zufällig gewählten "Nachbarn" im System ist, mit denen die Art mit der geringsten Fitness wechselwirkt. In dem hier betrachteten Fall ist $k = 1$.

Im nächsten Abschnitt wird untersucht, ob die Behandlung des komplexen Gluonsystems im Rahmen der oben beschriebenen stark vereinfachten Modellvorstellung selbstorganisiertes kritisches Verhalten ergibt, also Gluoncluster gebildet werden, deren Verteilungen $D_S(S)$ und $D_T(T)$ der Größe S und Lebensdauer T nach Potenzgesetzen der Form $D_S(S) \sim S^{-\mu}$ und $D_T(T) \sim T^{-\nu}$ mit positiven reellen Exponenten μ und ν sind. Hierzu wird das betrachtete einfache Evolutionsmodell mathematisch behandelt. Die dabei erzielten Ergebnisse der analytischen Berechnungen werden mit Simulationen des Modellsystems verglichen.

3.2 Analytische Behandlung und Simulation des einfachen Evolutionsmodells

3.2.1 Qualitatives Verhalten des Modellsystems

Das oben beschriebene Modell zur Beschreibung der Dynamik in einem komplexen Gluonsystem besteht aus L Untersystemen, die im folgenden als Zellen bezeichnet werden und fortlaufend von $i = 1, \dots, L$ numeriert werden. Um das qualitative Verhalten des Modellsystems zu beschreiben, wird von einem Anfangszustand des Systems ($t = 0$) ausgegangen, in dem alle Fitnesswerte f_i der L Zellen zufällig zwischen Null und Eins verteilt sind (gleichverteilt). Anschließend wird das Modellsystem den in Kap. 3.1 beschriebenen Iterationsregeln unterworfen. Da einerseits in jedem einzelnen Iterationsschritt die minimale Fitness im System durch eine zufällig gewählte ersetzt wird, andererseits die Systemgröße L eine endliche Zahl ist, wird die mittlere Fitness des Systems mit der Zeit wachsen. Andererseits kann die mittlere Fitness im System nicht unbeschränkt gegen Eins streben, da ja die Fitnesswerte in jedem einzelnen Iterationsschritt zufällig verteilt werden. Es gibt also gewissermaßen zwei entgegengesetzte Tendenzen, die das System in einen Zustand hineinführen, in denen die Fitnesswerte oberhalb einer Grenze f_c zufällig verteilt sein werden. Dieses Verhalten gilt aber nur glo-

bal, tatsächlich kommt es zu Fluktuationen (Lawinen), da im Iterationsprozeß die Fitnesswerte zufällig zwischen Null und Eins gewählt werden; es werden also notwendigerweise immer wieder Fitnesswerte, die kleiner als f_c sind, vorkommen. Wichtig ist aber, daß sich das System immer wieder in einen Zustand entwickelt, bei dem alle Fitnesswerte oberhalb der Schwelle f_c liegen. Diesen Zustand kann man als einen Attraktor auffassen, von dem sich das System zwar immer wieder entfernt, zu dem es aber auch immer wieder zurückkehrt.

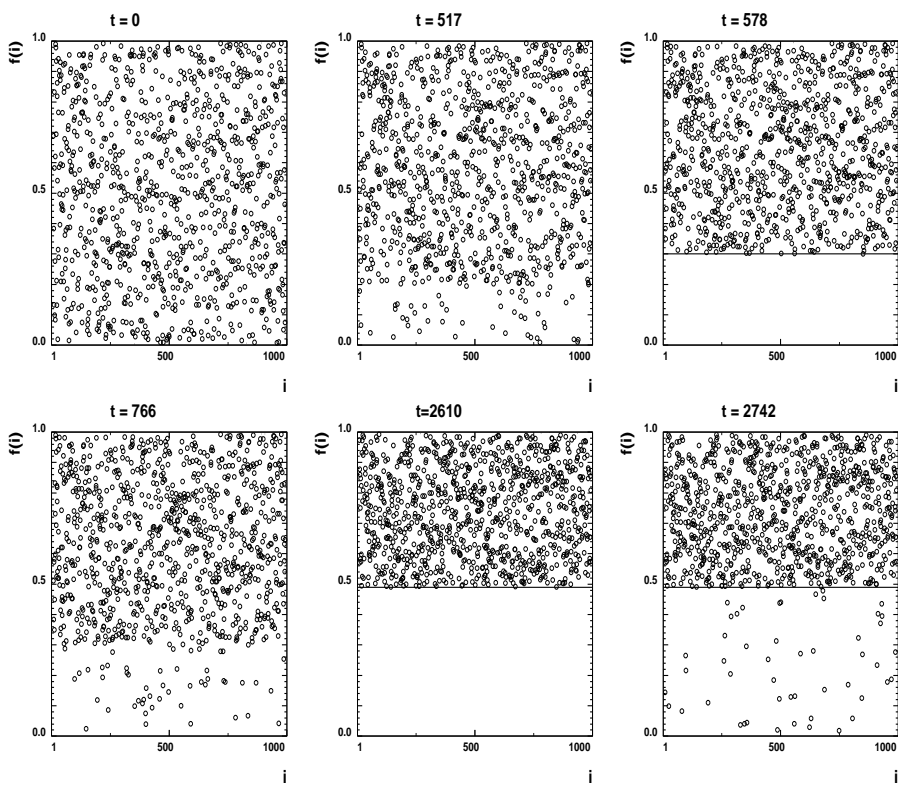


Abbildung 3.1: Verteilung der Fitnesswerte f_i der einzelnen Zellen zu verschiedenen Zeitpunkten in einem System der Größe $L=1000$. Links oben die Verteilung zu Beginn, rechts oben liegen alle Fitnesswerte bei $t = 578$ oberhalb von $f_0 = 0.3$, in der Mitte unten nach $t = 2610$ Zeitschritten oberhalb $f_0 = 0.49$. Zur Demonstration der zeitlichen Entwicklung sind zusätzlich Schnappschüsse des Systems für $t = 517$, $t = 766$ und $t = 2742$ gezeigt.

Dieses Verhalten ermöglicht die Definition von Fluktuationen bzw. Lawinen, die der im Bak-Sneppen-Modell gewählten [12] entspricht. Bezeichnet man einen Zeit-

punkt, bei dem alle Fitnesswerte f_i des Systems größer sind als ein Wert f_0 , als Beginn einer f_0 -Lawine bzw. f_0 -Fluktuation und den nächsten Zeitpunkt, bei dem wiederum alle Fitnesswerte über f_0 liegen, als das Ende der Lawine, so ist die Lebensdauer T einer f_0 -Lawine definiert. Die kleinstmögliche Lebensdauer einer solchen Fluktuation ist also gerade Eins. Mit N_{cov} sei die Zahl der durch eine Lawine in Mitleidenschaft gezogenen Zellen bezeichnet, also der Zellen, denen jeweils neue Fitnesswerte zugeordnet wurden. (cov steht für *covered sites*.) Die so eingeführten f_0 -Lawinen hängen dabei von der willkürlich gewählten Fitnessschwelle f_0 ab, die in den Modellregeln gar nicht enthalten ist. Die Schwelle f_0 ist also künstlich und stellt gewissermaßen eine Brille dar, mit der man das System beobachtet. Bei der Betrachtung von f_0 -Lawinen fragt man danach, zu welchen Zeitpunkten alle Fitnesswerte f_i oberhalb der Schwelle f_0 liegen und wie die entsprechenden Zeitintervalle, in denen das nicht der Fall ist, verteilt sind. Zur Veranschaulichung der Dynamik und von f_0 -Fluktuationen dienen die Abb. 3.1 und Abb. 3.2.

In Abb. 3.1 ist die Verteilung der Fitnesswerte f_i zu verschiedenen Zeitpunkten der Iteration in einem System der Größe $L = 1000$ gezeigt. Links oben wird die zufällige Verteilung der Fitnesswerte zwischen 0 und 1 zu Beginn der Simulation, also für $t = 0$ gezeigt. Zum Zeitpunkt $t = 578$ liegen alle f_i 's zum ersten Mal oberhalb der Schwelle $f_0 = 0.3$, für $t = 2610$ zum ersten Mal oberhalb von $f_0 = 0.049$. Zusätzlich sind Schnappschüsse des System bei $t = 517$, $t = 2742$ und $t = 2624$ gezeigt.

Etwas komprimierter ist die zeitliche Entwicklung des Modells in Abb. 3.2 dargestellt. Dort ist jeweils der Wert der zum Zeitpunkt t im System vorhandenen minimalsten Fitness, $f_{\min}(t) = \min\{f_i | 1 \leq i \leq L\}$, wobei L die Systemgröße ist, aufgetragen. Die eingezeichnete Treppenfunktion $g(t)$ mit

$$g(t) = \max\{f_{\min}(t') | 0 \leq t' \leq t\} \quad (3.1)$$

wird als "Gap"-Funktion bezeichnet [17]. Gemäß ihrer Definition ist g eine mo-

noton wachsende Funktion. Ihre Bedeutung erfaßt man am besten anhand eines Beispiels. Hat $g(t)$ zur Zeit t beispielsweise den Wert 0.4, so kann man daran ablesen, daß innerhalb von t -Zeitschritten alle Fitnesswerte f_i einmal oberhalb von 0.4 gelegen haben, wobei die niedrigste Fitness gerade den Wert 0.4 hatte. Zu diesem Zeitpunkt gibt es also einen freien Fitnessbereich bzw. eine Lücke $[0, g(t)]$, innerhalb derer kein Fitnesswert verteilt ist. Führt die Dynamik des Modells dazu, daß zu einem späteren Zeitpunkt alle Fitnesswerte im System wiederum größer als 0.4 sind, so wird der Gap-Funktion g der zu diesem Zeitpunkt minimalste Fitnesswert zugeordnet. Verkürzt kann man also sagen, daß $g(t)$ die innerhalb von t Zeitschritten vorkommende maximale Fitnesslücke angibt.

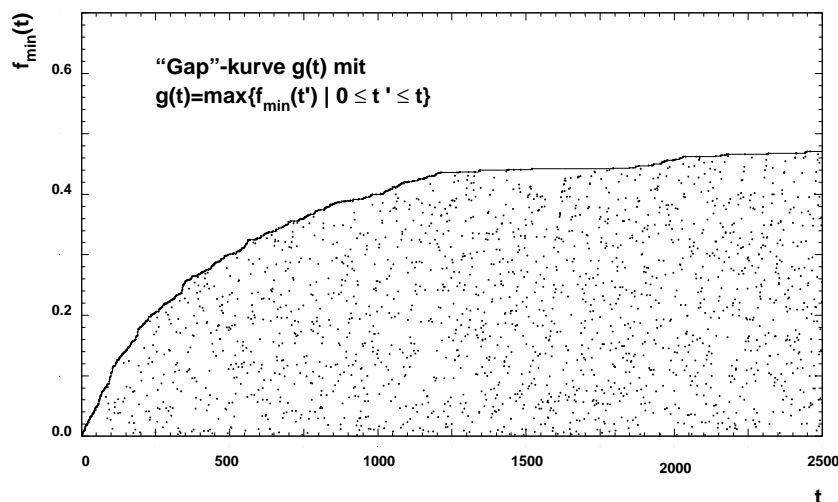


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der Dynamik des Modells. Aufgetragen über t ist jeweils der zum Zeitpunkt t kleinste im System vorhandene Fitnesswert $f_{\min}(t) = \min\{f_i | 1 \leq i \leq L\}$, wobei L die Systemgröße, also die Anzahl der Zellen ist. Die einhüllende Treppenfunktion in der Abbildung ist die “Gap”-Funktion $g(t)$ mit $g(t) = \max\{f_{\min}(t') | 0 \leq t' \leq t\}$. Die Daten entstammen einer Simulation mit $L = 1000$.

Wie im Bak-Sneppen-Evolutionsmodell kann durch numerische Simulation die kritische Fitness f_c bestimmt und die Verteilungen der Fitnessfluktuationen untersucht werden. Wie unten gezeigt wird, geht die Verteilungen der Lebensdauern

der f_0 -Lawinen bzw. f_0 -Fluktuationen für $f_0 \rightarrow f_c$ in Potenzgesetze über. Es treten also Fluktuationen jeder Lebensdauer auf. Für $f_0 \rightarrow f_c$ divergiert der Mittelwert der Lebensdauern $\langle T \rangle_{f_0}$ und der Größe $\langle N_{\text{COV}} \rangle_{f_0}$, was die Bezeichnung von f_c als kritische Fitness und des oben beschriebenen Zustand als kritischen Zustand rechtfertigt. Diese Bezeichnungen greifen den unten gezeigten Ergebnissen der näheren Betrachtung etwas vor.

3.2.2 Einfluß der Systemgröße

Die Betrachtung des Einflusses der Systemgröße L liefert den Schlüssel für die unten dargestellte analytische Lösung. Ihr Einfluß kann zunächst qualitativ betrachtet werden. Es ist offensichtlich, daß die Entwicklung des Systems hin zum kritischen Zustand um so langsamer verläuft, je größer die Systemgröße L ist und umgekehrt. Im Grenzfall eines aus unendlich vielen Zellen bestehenden Systems kommt dessen Entwicklung sogar zum Stillstand.

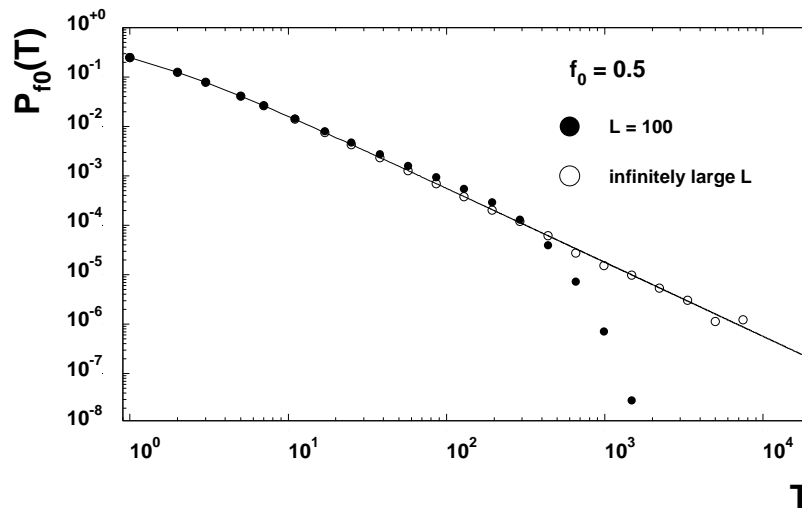


Abbildung 3.3: Durch Simulation bestimmte Lebensdauervertelung $P_{f_0}(T)$ für $f_0 = 0.5$ in einem System mit $L = 100$ Zellen (\bullet) und einem System mit unendlich vielen Zellen (\circ). Die Kurve ist die analytisch bestimmte Lebensdauervertelung aus Glng. 3.17

Betrachtet sei eine einzelne Lawine. Die Zelle mit der minimalsten Fitness gehört in jedem Iterationsschritt zu dieser Lawine. Außer dieser Zelle wird in jedem Iterationsschritt eine weitere Zelle zufällig gewählt, deren Fitness ebenfalls geändert wird. Ist nun die Systemgröße L sehr groß, das heißt viel größer als die Zahl der innerhalb der Lawine in Mitleidenschaft gezogenen Zellen, so wird mit großer Sicherheit die zufällig gewählte Zelle aus den zu diesem Zeitpunkt nicht von der Lawine beeinflussten Zellen gewählt. Die Zahl der durch die Lawine beeinflussten Zellen wächst also in jedem Zeitschritt mit großer Wahrscheinlichkeit um Eins. Erst dann, wenn eine solche Fluktuation der Größe nach nicht mehr wesentlich kleiner ist als L , wird es immer wahrscheinlicher, daß die in jedem Iterationsschritt zufällig gewählte Zelle bereits zur Lawine gehört, ihre Fitness also unterhalb von f_c liegt. Diese Rückkopplung, die über die Zelle mit der minimalsten Fitness, die natürlich zur Lawine gehört, hinausgeht, bietet die Möglichkeit, nicht nur der Zelle mit der minimalsten Fitness, sondern auch anderen Zellen, deren Fitness kleiner ist als f_c , einen neuen Fitnesswert zuzuordnen, der dann möglicherweise wieder oberhalb von f_c liegt. Der Rückkopplungsmechanismus führt dazu, daß die Lawinen effektiv kleiner werden, als sie es in einem größeren System werden würden. Wie auch immer, dieser Effekt, der der Endlichkeit des Systems geschuldet ist, macht sich nur bei sehr großen Lawinen bemerkbar und führt wie im Bak-Sneppen-Modell letztendlich zu Abweichungen vom kritischen Verhalten, weil die Verteilungsfunktionen der Lebensdauer bzw. Größe für sehr große Werte durch diesen Effekt unterdrückt werden. Die Abweichung vom kritischen Verhalten aufgrund der endlichen Systemgröße (*finite size effect*) ist in Abb. 3.3 illustriert.

Formal gesehen kann man sagen, daß in einem System endlicher Größe die Mittelwerte der Größen- bzw. Lebensdauer-Verteilung zwar sehr groß werden können, jedoch endlich bleiben. In einem unendlich großen System gibt es diesen Effekt nicht, und das Potenzverhalten der Verteilungsfunktionen gilt ohne jede Einschränkung. Andererseits wird die Zeit, innerhalb derer sich solch ein unend-

lich ausgedehntes System in den kritischen Zustand entwickelt, immer größer, je größer das System ist.

3.2.3 Aktive Zellen und Aktivität

Um die Verteilungsfunktionen von Größe und Lebensdauer der Lawinen zu bestimmen, sei hier der Begriff der *Aktivität* eingeführt. Eine Zelle i des Systems heißt *aktiv bezüglich* f_0 , wenn ihre Fitness f_i unterhalb von f_0 liegt. Andernfalls heißt sie *nicht aktiv*. Die Tatsache, ob eine Zelle aktiv ist oder nicht, ist eine Funktion der Zeit. Ist sie einmal aktiviert, so muß sie, bevor die Lawine beendet wird, deaktiviert werden. Dies führt automatisch zu der Definition der Aktivität $A_{f_0}(t)$ bezüglich f_0 , die die Zahl der aktiven Zellen zum Zeitpunkt t bezeichnet. Setzt man den Zeitnullpunkt $t = 0$ auf den Beginn einer Lawine, so gilt

$$A_{f_0}(t = 0) = 0 \quad (3.2)$$

$$A_{f_0}(t \text{ mit } 0 < t < T) > 0 \quad (3.3)$$

$$A_{f_0}(t = T) = 0, \quad (3.4)$$

wobei T die Lebensdauer der Lawine bezeichnet. Die eingeführten Begriffe *aktiv* und *Aktivität* sind in Abb. 3.4 illustriert. Besonders einfache Verhältnisse erhält man, wenn man ein unendlich großes System betrachten, da dann nicht der oben beschriebene Effekt einer endlichen Systemgröße eintreten kann. In diesem Fall nimmt die Zahl der Zellen, die während der Dauer einer Lawine beeinflußt werden, in jedem Zeitschritt um eins zu, da die zufällig gewählte Zelle, deren Fitness neben der minimalen Fitness geändert wird, mit Sicherheit noch nicht zur Lawine gehörte. Damit sind N_{COV} und die Lawinendauer T streng korreliert, und es gilt

$$N_{\text{COV}} = kT + 1. \quad (3.5)$$

Wie bereits erwähnt, müßte man unendlich lange warten, bis die Entwicklung des Systems dazu führt, daß sich alle Fitnesswerte f_i oberhalb von f_0 befinden. Daher

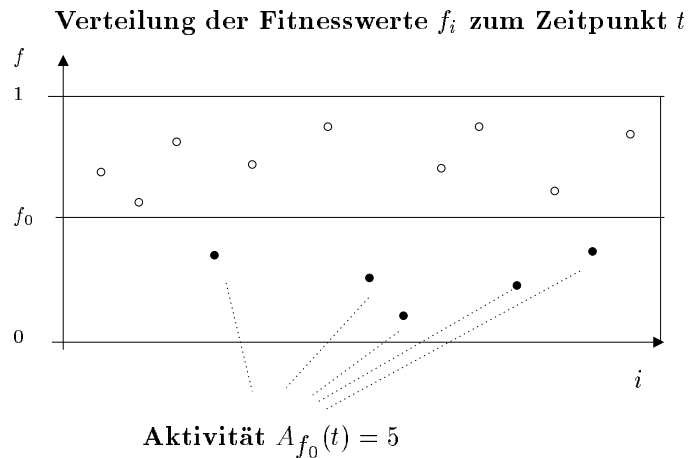


Abbildung 3.4: Dargestellt sind die Fitnesswerte f_i für die einzelnen Zellen i zu einem Zeitpunkt t . Alle Zellen mit Fitness f_i unterhalb der Schwelle f_0 sind aktiv. Die Aktivität ist die Zahl der aktiven Zellen, in diesem Beispiel gerade fünf.

ist es notwendig, gleich zu Beginn, also für $t = 0$, alle Fitnesswerte zufällig zwischen f_0 und 1 zu verteilen, den Anfangszustand gewissermaßen zu präparieren. Die Aktivität kann sich in jedem Iterationsschritt um eins erhöhen, gleich bleiben oder um eins kleiner werden, da die Zelle mit der minimalen Fitness ja bereits aktiv ist und die zusätzlich und zufällig gewählte Zelle mit Sicherheit nicht aktiv ist. Lediglich der erste Iterationsschritt $t = 0 \rightarrow t = 1$ bildet hier eine Ausnahme, da hier die Zelle mit der minimalen Fitness nicht aktiv ist und sich daher die Aktivität nicht vermindern kann. In diesem Fall kann die Aktivität verschwindend bleiben, sich um eins oder um zwei erhöhen. In Abb. 3.5 sind die möglichen Aktivitätswerte, die eine Lawine der Lebensdauer T durchlaufen kann, in einem Beispiel für $T = 8$ dargestellt.

Im Folgenden soll nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{f_0}(T)$ für das Auftreten von f_0 -Lawinen mit Lebensdauer T bestimmt werden. Die kombinatorische Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeit aller Pfade im Aktivitätsdiagramm 3.5 zu bestimmen, die zu einer Lawine mit Lebensdauer T gehören.

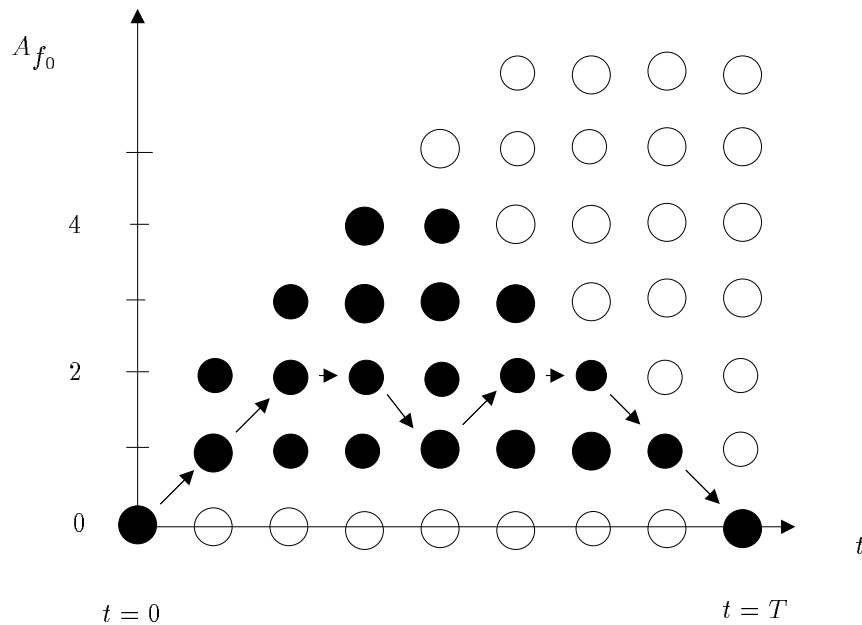


Abbildung 3.5: Die schwarzen Felder stellen in Abhängigkeit von den Zeitpunkten t alle Aktivitätswerte dar, die die Lawine der Lebensdauer T annehmen kann.

3.2.4 Vernichter, Neutrale und Erzeuger

Da sich die Aktivität in jedem Iterationsschritt (Der erste Iterationsschritt bildet hier eine Ausnahme.) grundsätzlich nicht verändert, sich um eins erhöht oder um eins erniedrigt, liegt es nahe, diese drei elementaren Prozesse zunächst getrennt zu betrachten. Unter einem Erzeuger k^+ sei ein Iterationsschritt verstanden, der die Zelle mit der minimalen Fitness aktiv läßt (bzw. im ersten Schritt aktiviert) und die zufällig gewählte Zelle aktiviert. Unter einem Neutralen k^0 sei ein Iterationsschritt verstanden, nach dem entweder die Zelle, die zuvor die minimale Fitness besaß, aktiv und die zufällig gewählte Zelle nicht aktiv ist oder umgekehrt. Entsprechend sei ein Vernichter k^- ein Iterationsschritt, nach dem sowohl die Zelle, die zuvor die minimale Fitness besaß, als auch die zufällig gewählte Zelle nicht aktiv sind. Wegen der zufälligen Wahl der Fitnesswerte kann jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Prozesse in einem Iterationsschritt

unmittelbar angegeben werden:

$$p^- \equiv P(k^-) = (1 - f_0)^2 \quad (3.6)$$

$$p^0 \equiv P(k^0) = 2f_0(1 - f_0) \quad (3.7)$$

$$p^+ \equiv P(k^+) = f_0^2 \quad (3.8)$$

Mit Hilfe der elementaren Wahrscheinlichkeiten p^+ , p^0 und p^- können die Wahrscheinlichkeiten $P(n, t)$ dafür, daß zum Zeitpunkt $t + 1$ eine Zahl n von Zellen aktiv sind, durch entsprechende Wahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t ausgedrückt werden [42]. Wenn man von den Rändern des erreichbaren (n, t) -Bereiches absieht, ergibt sich

$$\begin{aligned} P(n, t + 1) = & P(n + 1, t) \cdot (1 - f_0)^2 + P(n, t) \cdot 2f_0(1 - f_0) \\ & + P(n - 1, t) \cdot f_0^2 . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Gleichung, die die Iteration der Wahrscheinlichkeiten im Kern beschreibt, ist gerade die diskretisierte Version der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = f_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) + (1 - 2f_0) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) , \quad (3.10)$$

wenn man von der Wahrscheinlichkeit $P(n, t)$ zur Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$ übergeht. Insbesondere für $f_0 \rightarrow 0.5$ geht die Differentialgleichung in die Diffusionsgleichung [43] über. Auf diesen Zusammenhang wird in einem späteren Abschnitt noch näher eingegangen werden.

Sieht man vom ersten Iterationschritt ab, so vermindert k^- die Aktivität in einem unendlich großen System immer um eins. In einem endlichen System kann aber auch der Fall eintreten, daß sich die Aktivität um zwei erniedrigt, nämlich genau dann, wenn die zufällig gewählte Zelle ebenfalls bereits aktiv war. Ist die zufällig gewählte Zelle bereits aktiv, so führt k^+ zu einer ungeänderten Aktivität. Ein neutraler Prozeß k^0 schließlich beinhaltet in diesem Fall die Möglichkeit der Verminderung der Aktivität. Deutlich wird hierbei, daß die Aktivität $A_{f_0}(t + 1)$ vom Verhältnis $A_{f_0}(t)/L$ abhängt und verglichen mit einem unendlich großen

System zu effektiv kleineren Lawinen führen wird. Siehe hierzu auch Abb. 3.3, in der der Zerfall der Lawinenverteilung für große Lebensdauern in einem endlichen System mit $L = 100$ gegenüber einem unendlich großen System dargestellt ist. Im Folgenden ist immer, wenn nicht gesondert vermerkt, von einem unendlich großen System die Rede.

Mit Hilfe der eingeführten Aktivität und der elementaren Prozesse der Vernichter, der Neutralen und der Erzeuger kann mit einem Computerprogramm die Lawinenverteilung einfach und schnell bestimmt werden. Innerhalb des Programmes muß dazu lediglich die Aktivität bzw. deren Veränderung ausgewürfelt werden, auf eine Bestimmung der Zelle mit der minimalen Fitness, die relativ langsam ist, kann verzichtet werden.

Jede Lawine besteht aus einer zeitlichen Abfolge $\omega(T)$ der Elementarprozesse k^- , k^0 und k^+ , die einem Pfad im Aktivitätsdiagramm 3.5 entspricht. Beispielsweise gehört der Prozeß

$$\omega(T) = (k^0, k^+, k^0, k^-, k^+, k^0, k^-, k^-) \quad (3.11)$$

zu einer Lawine der Lebensdauer $T = 8$ (siehe Abb. 3.5). Anhand dieses Beispiels können einige wichtige Aspekte erläutert werden:

1. Jede Lawine endet mit einem Vernichter k^- .
2. Jede Lawine mit $T > 1$ beginnt mit einem Erzeuger k^+ oder einem Neutralen k^0 .
3. Betrachtet man Lawinen mit fester Lebensdauer T , so ist die Reihenfolge der Prozesse k^0 , k^- und k^+ nicht beliebig, da die Aktivität für alle t mit $0 < t < T$ nichtverschwindend sein muß.

3.2.5 Berechnung der Lebensdauerverteilung

Um die Verteilungsfunktion $P_{f_0}(t)$ von Lawinen mit Lebensdauer t zu bestimmen, sei der Fall betrachtet, daß sich für $t = 0$ alle f_i -Werte des Systems oberhalb

einer Schwelle f_0 befinden. Die Wahrscheinlichkeit $P_{f_0}(t)$, daß ein Lawine die Lebensdauer T besitzt, bedeutet

$$P_{f_0}(T) = P(A(T) = 0 \text{ und } A(t) > 0 \text{ für } t \in \{1, \dots, T-1\}), \quad (3.12)$$

wobei $A(t)$ die oben eingeführte Aktivität ist. Berechnung der Wahrscheinlichkeit bedeutet, das statistische Gewicht aller zu einer Lawine der Lebensdauer T gehörenden Prozesse ω (siehe Glng. 3.11) beziehungsweise, äquivalent dazu, das statistische Gewicht aller möglichen Pfade im Aktivitätsdiagramm (siehe Abb. 3.5) zu bestimmen. Betrachten man nun die Prozesse $\omega(T)$, die zu Lawinen mit Lebensdauer T gehören, etwas genauer. Sie sind (vergl. Glng. 3.11) charakterisiert durch die zeitliche Aufeinanderfolge der oben eingeführten elementaren Prozesse k^+ (Erzeuger), k^0 (Neutraler) und k^- (Vernichter). Sie unterscheiden sich untereinander in der Zahl n^+ der Erzeuger, der Zahl n^0 der Neutralen und der Zahl n^- der Vernichter sowie in deren Anordnung. Der letzte Iterationsschritt in einer f_0 -Lawine der Lebensdauer T ist immer ein Vernichter, somit kann man aus den verbleibenden $T-1$ Zeitschritten genau $\binom{T-1}{n^0}$ Zeitschritte für die n^0 neutralen Prozesse k^0 auswählen. Auf den verbleibenden $T-1-n^0$ Zeitschritten sind nun n^+ Erzeuger k^+ und $n^+ = n^- - 1$ Vernichter k^- zu verteilen, da in jeder Lawine die Zahl der Vernichter n^- gerade um eins größer sein muß, als die Zahl n^+ der Erzeuger k^+ . Damit ist $T-1-n^0$ immer eine gerade Zahl. Ist T gerade, so muß also die Zahl n^0 der neutralen Prozesse k^0 ungerade sein und umgekehrt. Aus dem genannten folgt unmittelbar, daß

$$\begin{aligned} P_{f_0}(T|T \text{ gerade}) &= f_0^{T-1}(1-f_0)^{T+1} \\ &\times \sum_{n^0 \text{ ungerade}}^{T-1} \binom{T-1}{n^0} C\left(\frac{T-1-n^0}{2}\right) 2^{n^0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

und

$$P_{f_0}(T|T \text{ ungerade}) = f_0^{T-1}(1-f_0)^{T+1} \quad (3.14)$$

$$\times \sum_{n^0 \text{ gerade}}^{T-1} \binom{T-1}{n^0} C\left(\frac{T-1-n^0}{2}\right) 2^{n^0}$$

ist, wenn man $n^+ + n^0 + n^- = T$ und die Einzelwahrscheinlichkeiten für die elementaren Prozesse berücksichtigt.

Die in den Gln. 3.13 und 3.14 erscheinenden Zahlen $C((T-1-n^0)/2)$ sind gerade die Zahl der Möglichkeiten, $n^+ = (T-1-n^0)/2$ Erzeuger k^+ und eine gleiche Zahl von Vernichtern k^- auf $T-1-n^0$ Zeitschritten unterzubringen. Hierbei unterliegt die Reihenfolge der Erzeuger und Vernichter aber einer erheblichen Einschränkung, da solange die Lawine nicht abbricht, die Aktivität $A(t)$ größer als Null sein muß. Diese Bedingung bedeutet, daß in jedem Prozeß $\omega(T)$ vor jedem Zeitschritt mindestens so viele Erzeuger wie Vernichter stehen müssen. Das Problem der Bestimmung der Zahlen $C(n)$ läßt sich also auf das folgende Anordnungsproblem abbilden:

Wieviele Möglichkeiten gibt es n rote Bücher (Erzeuger) und n blaue Bücher (Vernichter) auf einem Regal mit $2n$ Plätzen so anzuordnen, daß vor jedem Buch mindestens so viele rote wie blaue Bücher stehen?

Äquivalent dazu ist $C(n)$ die Zahl aller Möglichkeiten n mal 1 und n mal (-1) derart anzuordnen, daß alle Partialsummen nicht negativ sind. Die Lösung dieses Problems sind gerade die Catalanschen Zahlen C_n [44, 45, 46], die die Entwicklungskoeffizienten der erzeugenden Funktion

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots \quad (3.15)$$

sind. Für die Catalanschen Zahlen gilt

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (3.16)$$

Ihre Verwandtschaft mit den zentralen Binomialkoeffizienten kommt auch durch die Tatsache zum Ausdruck, daß sie Elemente eines Zahlendreiecks sind, das

dem Pascalschen Dreieck ähnelt. In diesem Catalanschen Dreieck (Abb. 3.6) wird deutlich, daß die Catalanschen Zahlen die verschiedenen Möglichkeiten abzählen, die Erzeuger (entspricht den nach rechts unten weisenden Pfeilen \searrow) und die Vernichter (entsprechen den nach links unten weisenden Pfeilen \swarrow) anzuordnen.

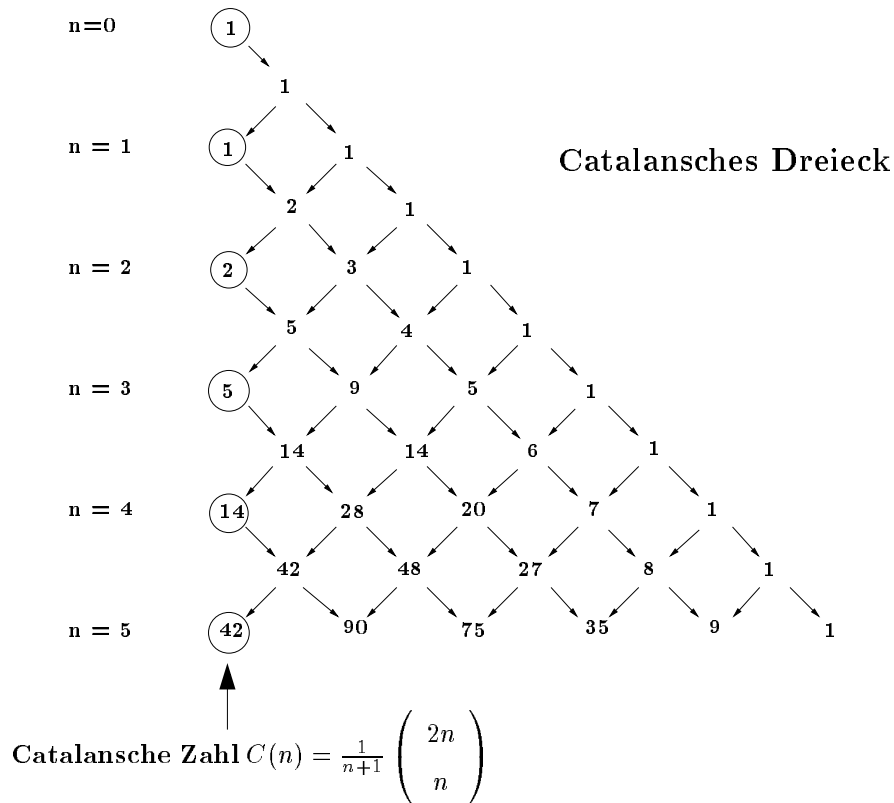


Abbildung 3.6: Das Catalansche Dreieck. Wie im Pascalschen Dreieck sind die Zahlen die Summe der über ihnen stehenden Zahlen. Die Catalanschen Zahlen $C(n)$ sind die in der linken Spalte stehenden eingekreisten Zahlen. Sie geben an auf wieviel verschiedenen Pfaden ausgehend von der Spitze man zum entsprechenden Kreis gelangt.

Die noch verbleibende Summation über die Zahl n^0 der Neutralen k^0 in den Glng. 3.13 und 3.14 kann nun wegen $C(n) = C_n$ durchgeführt werden, wobei sich sowohl für gerade als auch für ungerade T

$$P_{f_0}(T) = \frac{1-f_0}{f_0} (4f_0(1-f_0))^T \frac{\Gamma(T+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(T+2)} \quad (3.17)$$

ergibt¹.

¹Interessanterweise stimmt diese Lösung exakt mit der Lebensdauerverteilung für Lawinen

3.2.6 Diskussion der analytischen Lösung

Die analytisch bestimmte Lebensdauerverteilung $P_{f_0}(T)$ der Lawinen kann nun mit Simulationen verglichen werden. In Abb. 3.7 sind für ein Modell mit $L = 30000$

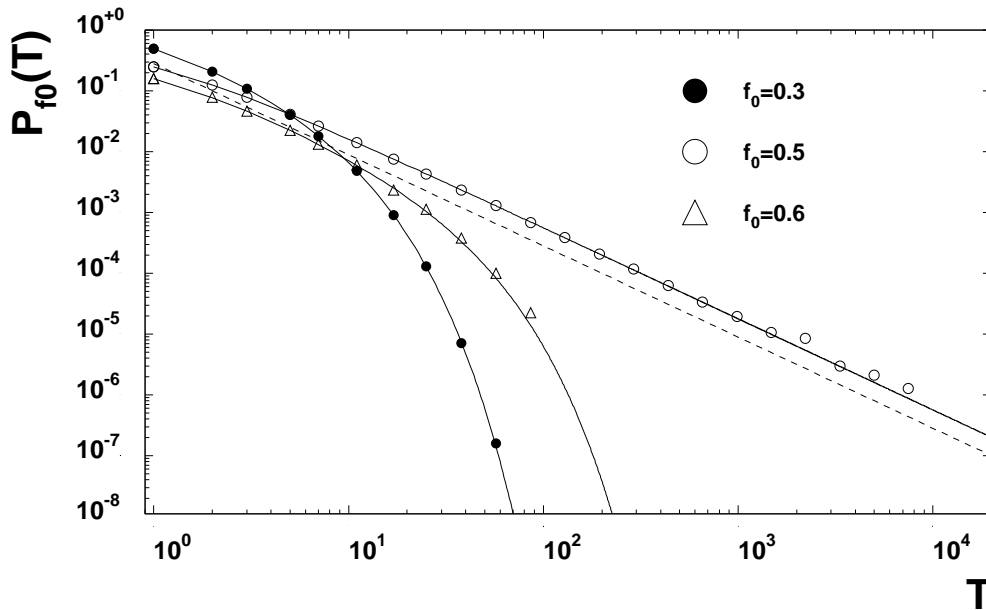


Abbildung 3.7: Lebensdauerverteilung $P_{f_0}(T)$ für ein System mit $L = 30000$ Zellen. Die Datenpunkte \bullet für $f_0 = 0.3$, \circ für $f_0 = 0.5$ und \triangle für $f_0 = 0.6$ entstammen 10^9 Iterationsschritten. Die durchgezogenen Kurven entsprechen dem analytischen Ergebnis aus Glng. 3.17, die gestrichelte Kurve entspricht einer Potenz mit dem Exponenten $-3/2$, sie verläuft für große Werte von T parallel zu den Daten und der theoretischen Kurve für die kritische Fitness $f_0 = f_c = 0.5$.

Zellen die durch Simulation gewonnenen Lebensdauerverteilungen $P_{f_0}(T)$ für die Werte $f_0 = 0.3$ (\bullet), $f_0 = 0.5$ (\circ) und $f_0 = 0.6$ (\triangle) dargestellt und mit dem analytischen Ergebnis für $P_{f_0}(T)$ aus Glng. 3.17 verglichen. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung sehr gut. Das ist nicht ganz so selbstverständlich, wie es zunächst erscheinen mag, denn Glng. 3.17 gilt nur für den Grenzfall $L \rightarrow \infty$, während die Punkte in Abb. 3.7 zu einem System mit endlichem L gehören. Die

in einer anderen Variante des Evolutionsmodells (*Multi Trait Model*) [47] überein.

erwartete Abweichung der Punkte vom dem in Gln. 3.17 beschriebenen Verhalten – aufgrund des oben diskutierten Einflusses der Endlichkeit des Systems – ist in Abb. 3.3 für ein System mit $L = 100$ illustriert. Sie setzt relativ spät ein, erst bei etwa $T \approx 400$, einer Lebensdauer, bei der in einem unendlich großen System die Zahl der durch die Lawine beeinflussten Zellen wegen $N = kT + 1 \approx 400$ die Systemgröße L des endlichen Systems bereits wesentlich überschritten hätte. Da also offenbar der *finite size effect* erst sehr spät einsetzt, ist die gute Übereinstimmung der Simulationen in Abb. 3.7 des endlichen Systems $L = 30000$ mit dem analytischen Ergebnis Gln. 3.17 für $L \rightarrow \infty$ verständlich.

Das Verhalten der Lebensdauerverteilung

$$P_{f_0}(T) = \frac{1 - f_0}{f_0} (4f_0(1 - f_0))^T \frac{\Gamma(T + 1/2)}{\Gamma(1/2) \Gamma(T + 2)} \quad (3.18)$$

für große Werte der Lebensdauer T kann mit Hilfe der Stirlingschen Formel $\Gamma(n) \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ für große Argumente n der Γ -Funktion bestimmt werden. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(T + 1/2)}{\Gamma(T + 2)} &\approx e^{3/2} \sqrt{\frac{n + 1/2}{n + 2}} \frac{(n + 1/2)^{(n+1/2)}}{(n + 2)^{(n+2)}} \\ &\approx \left[\frac{e}{n + 2} \right]^{3/2} \left(1 - \frac{3/2}{n + 2} \right)^{(n+1/2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

und wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3/2}{n} \right)^n = e^{-3/2} \quad (3.20)$$

bekommt man insgesamt für die Lebensdauerverteilung $P_{f_0}(T)$ für große Lebensdauern

$$P_{f_0}(T) \propto \frac{1 - f_0}{\sqrt{\pi} f_0} \cdot e^{a(f_0)T} \cdot T^{-3/2}, \quad (3.21)$$

wobei die von f_0 abhängige Funktion $a(f_0)$ durch

$$a(f_0) = \ln(4f_0(1 - f_0)) \quad (3.22)$$

gegeben ist. Die Gleichung 3.21 zusammen mit 3.22 stimmen mit dem in [42] angegebenen Näherungsausdruck für die Lebensdauerverteilung der Lawinen für große T überein. Wie man in Gln. 3.22 leicht sieht, kommt es also bei allen Werten von $f_0 \neq 0.5$ zu einem exponentiellen Zerfall der Lebensdauerverteilung der Lawinen, während die Lebensdauerverteilung für $f_0 = 0.5$ einem Potenzgesetz mit dem Exponenten $-3/2$ folgt. $f_0 = 0.5$ ist also gerade der kritische Fitnesswert f_c .

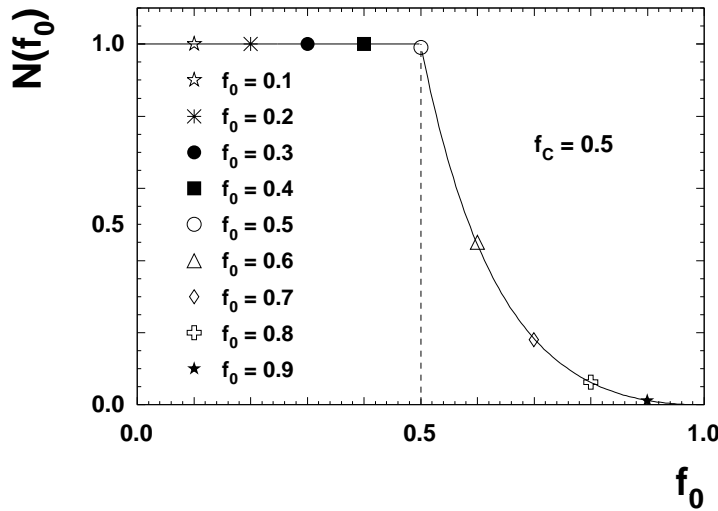


Abbildung 3.8: In der Abbildung ist das theoretische Ergebnis (durchgezogene Linie) für das Normierungsintegral der Lebensdauerverteilung $N(f_0)$ (siehe Gln. 3.25) den Simulationsergebnissen des Modells mit $L = 30000$ für verschiedene Werte der Fitnessschwelle f_0 gegenübergestellt. Für $f_0 > f_c = 0.5$ gibt es eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit für Lawinen, die niemals enden.

Die in der Lebensdauerverteilung $P_{f_0}(T)$ auftretenden Zahlen

$$b_T \equiv \frac{\Gamma(T + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(T + 2)} \quad (3.23)$$

sind die Entwicklungskoeffizienten der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{2(1 - \sqrt{1-x})}{x} \equiv g(x) . \quad (3.24)$$

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion g kann die Normierung von P_{f_0} und der Erwartungswert der Lebensdauer $\langle T \rangle_{f_0}$ recht einfach bestimmt werden:

$$\begin{aligned} N(f_0) &= \sum_{T=1}^{\infty} P_{f_0}(T) & (3.25) \\ &= \frac{1-f_0}{f_0} [g(4f_0(1-f_0)) - 1] \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } f_0 < f_c \\ (1-f_0)^2/f_0^2 & \text{für } f_0 > f_c \end{cases} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, alle f_0 -Lawinen mit $f_0 < f_c$ enden, während für $f_0 > f_c$ ein nichtverschwindender Anteil $1 - N(f_0)$ der Lawinen nicht endet. Insbesondere für $f_0 \rightarrow 1$ enden die Lawinen nicht, was offensichtlich vernünftig ist. In Abb. 3.8 ist das analytische Ergebnis für die Normierung $N(f_0)$ der Gln. 3.25 den Ergebnissen der Simulation des Modells mit $L = 30000$ gegenübergestellt.

Auch der Erwartungswert der Lebensdauer $\langle T \rangle_{f_0}$ kann mit Hilfe der erzeugenden Funktion g bestimmt werden. So ergibt sich für $f_0 < 0.5$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{f_0} &= \frac{1-f_0}{f_0} \sum_{T=1}^{\infty} T(4f_0(1-f_0))^T b_T & (3.26) \\ &= \frac{1-f_0}{f_0} \left(x \frac{d}{dx} g(x) \right) \Big|_{x=4f_0(1-f_0)} \\ &= \frac{1}{1-2f_0} . \end{aligned}$$

Der Mittelwert der Lebensdauerdistribution der Lawinen $\langle T \rangle_{f_0}$ divergiert also für $f_0 \rightarrow 0.5$, was wiederum zeigt, daß $f_c = 0.5$ die kritische Fitness ist. Insbesondere gilt

$$\langle T \rangle_{f_0} = \frac{f_c}{(f_c - f_0)^\gamma} \quad (3.27)$$

mit dem kritischen Exponenten $\gamma = 1$.

In Referenz [17] wurden für das Bak-Sneppen-Evolutionsmodell und andere damit vergleichbare Evolutionsmodelle, also auch für das hier betrachtete Modell, viele Beziehungen, insbesondere Relationen zwischen den Exponenten verschiedener Potenzgesetze hergeleitet. Die Tatsache, daß im kritischen Zustand, das heißt

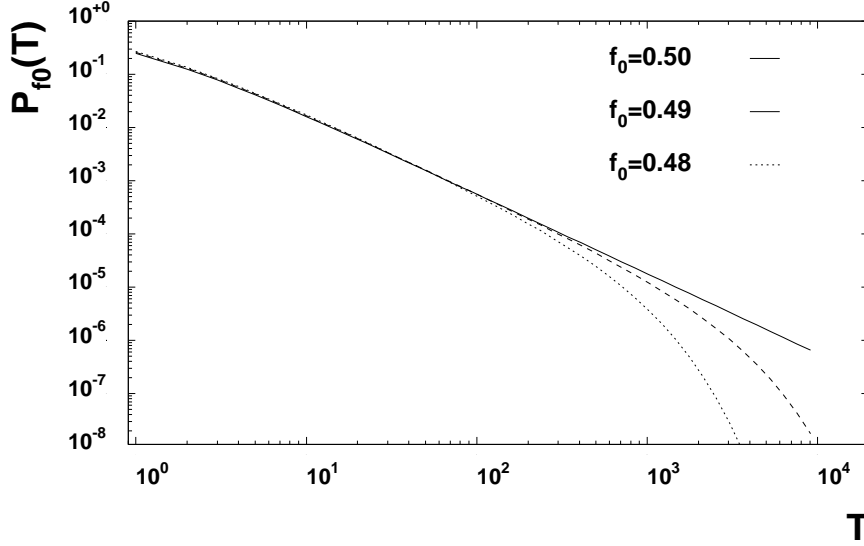


Abbildung 3.9: Lebensdauervertelung $P_{f_0}(T)$ der f_0 -Lawinen für verschiedene Werte von f_0 in der Nähe von f_c . Für große T weicht die Verteilung vom Potenzverhalten ab; Dieses Verhalten wird durch den Exponenten σ in Glng. 3.30 beschrieben.

für $f_0 \rightarrow f_c$, einige Beziehungen zu Potenzgesetzen werden, wie zum Beispiel die Lebensdauervertelung, stütze sich dort auf numerische Simulationen. Es ist daher von erheblichem Interesse, über ein exakt lösbares Modell zu verfügen, mit dessen Hilfe die Ergebnisse und Beziehungen aus [17] am Beispiel nachvollzogen und überprüft werden können. So rechnet man beispielsweise für hier betrachtete einfache Modell leicht nach, daß der kritische Exponent γ die sogenannte γ -Gleichung

$$\gamma = \lim_{f_0 \rightarrow f_c} \frac{\langle N_{\text{cov}} \rangle_{f_0} (f_c - f_0)}{1 - f_0} \quad (3.28)$$

(siehe Glng. 17 aus [17]) erfüllt, die für alle Evolutionsmodelle des betrachteten Typs gültig sein sollte. Benutzt wurde dabei, daß $\langle N_{\text{cov}} \rangle_{f_0} = \langle T \rangle_{f_0} + 1$ ist. Weiterhin zeigt sich, daß

$$\frac{d \ln \langle T \rangle_{f_0}}{df_0} = \frac{\langle N_{\text{cov}} \rangle_{f_0}}{1 - f_0} \quad (3.29)$$

gilt (vergl. Glng.16 aus [17]). In [17] wird, motiviert durch die Ergebnisse von

numerischen Simulationen verschiedener Modelle, für die Lebensdauerverteilung der Ansatz (vergl. Glng.11 in [17])

$$P_{f_0}(T) = T^{-\tau} h(T(f_c - f_0)^{1/\sigma}) \quad (3.30)$$

gemacht. Die Funktion $h(x)$ soll die Abweichung von P_{f_0} vom Potenzgesetz für $f_0 \approx f_c$ aber $f_0 \neq f_c$ beschreiben. Das bedeutet, daß $h(x=0) = 1$ ist, und $h(x)$ für $x \gg 1$ sehr schnell verschwindet. Dieses Verhalten zeigt sich zum Beispiel in Abb. 3.9, wenn man die Kurven für $f_0 = 0.48$, $f_0 = 0.49$ und $f_0 = f_c = 0.5$ miteinander vergleicht. Für den kritischen Exponenten τ gilt $\tau = 3/2$. Mit Hilfe von Gleichung Glng. 3.21, die das Verhalten von $P_{f_0}(T)$ für große Werte von T beschreibt, kann der Exponent $1/\sigma$ leicht berechnet werden, denn für $(f_c - f_0)/f_c \ll 1$ gilt

$$\begin{aligned} h(T(f_c - f_0)^{1/\sigma}) &\equiv \frac{1 - f_0}{\sqrt{\pi} f_0} (4f_0(1 - f_0))^T \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - 4T(f_c - f_0)^2\right) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Somit ist $\sigma = 1/2$, was auch den in [17] angegebenen Zusammenhang der kritischen Exponenten τ , γ und σ (siehe Glng. 13 aus [17])

$$\gamma = \frac{2 - \tau}{\sigma} \quad (3.32)$$

wegen $\gamma = 1$ und $\tau = 3/2$ bestätigt.

Die durch die kombinatorische Betrachtung des Modells erzielten Resultate sind in Tab. 3.1 zusammengefaßt. Alle wesentlichen Ergebnisse wurden durch Simulationen bestätigt bzw. illustriert.

3.2.7 Größenverteilung der Lawinen

Neben der Lebensdauer T ist die Zahl der durch die Lawine veränderten Zellen N_{COV} ein Maß für deren Größe. Da in dem betrachteten einfachen Evolutionsmodell aber $N_{\text{COV}} = T + 1$ ist, sind natürlich T und N_{COV} praktisch gleich, das heißt

Mit Kombinatorik erzielte Ergebnisse:	
<p>Lebensdauerverteilung:</p> $P_{f_0}(T) = \frac{1-f_0}{f_0} (4f_0(1-f_0))^T \frac{\Gamma(T+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(T+2)}$	<p>Kritische Fitness:</p> $f_c = 0.5$
<p>Lebensdauerverteilung für $T \gg 1$:</p> $P_{f_0}(T) \approx \frac{1-f_0}{\sqrt{\pi}f_0} (4f_0(1-f_0))^T T^{-\tau}$ <p>mit $\tau = 3/2$.</p>	<p>Kritischer Exponent:</p> $\tau = 3/2$
<p>Annäherung $f_0 \rightarrow f_c$:</p> $P_{f_0}(T) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - 4T(f_c - f_0)^{1/\sigma}\right) T^{-\tau}$ <p>mit $\sigma = 1/2$.</p>	<p>Kritischer Exponent:</p> $\sigma = 1/2$
<p>Normierung:</p> $N(f_0) = \sum_{T=1}^{\infty} P_{f_0}(T)$ $= \begin{cases} 1 & \text{für } f_0 < f_c \\ (1-f_0)^2/f_0^2 & \text{für } f_0 > f_c \end{cases}$	<p>Oberhalb von $f_c = 0.5$ enden nicht mehr alle Lawinen!</p>
<p>Mittlere Lebensdauer von f_0-Lawinen:</p> $\langle T \rangle_{f_0} = \frac{1-f_0}{f_0} \sum_{T=1}^{\infty} T(4f_0(1-f_0))^T b_T$ $= \frac{f_c}{(f_c - f_0)^\gamma}$ <p>mit $f_c = 0.5$ und $\gamma = 1$.</p>	<p>Kritischer Exponent:</p> $\gamma = 1$ <p>Mittlere Lebensdauer divergiert für $f_0 \rightarrow f_c$.</p>
<p>γ-Gleichung ist erfüllt ([17]):</p> $\gamma = \lim_{f_0 \rightarrow f_c} \frac{\langle N_{\text{cov}} \rangle_{f_0} (f_c - f_0)}{1 - f_0}$	
<p>Relation zwischen γ, τ und σ gilt ([17]):</p> $\gamma = \frac{2 - \tau}{\sigma}$	

Tabelle 3.1: Tabelle der durch kombinatorische Betrachtung des Modells erzielten Ergebnisse.

für ihre Verteilungen und die Erwartungswerte gilt

$$P_{f_0}(N_{\text{cov}}) = P_{f_0}(T + 1) \quad \text{und} \quad (3.33)$$

$$\langle N_{\text{cov}} \rangle_{f_0} = \langle T \rangle_{f_0} + 1 . \quad (3.34)$$

Die Angabe von N_{cov} liefert also keine über die Lebensdauer T hinausgehende Information. Aus diesem Grund soll hier eine mit der Lebenszeit T nicht so stark korrelierte Größe S einer Lawine eingeführt werden. Es bietet sich an, S als die im Laufe der Lebensdauer T angesammelte totale Aktivität

$$S \equiv \sum_{t=0}^T A(t) \quad (3.35)$$

zu definieren, da das so definierte S auf ganz anschauliche Weise ein Maß für die Größe einer f_0 -Lawine ist.

Wie in Abb. 3.10 gezeigt, liefert die Simulation des Modells für große Werte von S für $f_0 = f_c$ ein Potenzgesetz für die Verteilung der Lawinengrößen.

$$P_{f_c}(S) \propto S^{-\lambda} , \quad (3.36)$$

wobei ein Fit den kritischen Exponenten zu $\lambda = 1.33$ bestimmt.

Leider ist die kombinatorische Betrachtung der Größenverteilung $P_{f_c}(S)$ komplizierter als es für die Lebensdauerverteilung $P_{f_c}(T)$ der Fall war. Der Grund hierfür ist, daß für S nicht nur die Zahl der Erzeuger, Vernichter und Neutralen eine Rolle spielt, sondern auch deren Reihenfolge. Der numerische Wert des Exponenten kann aber leicht eingegrenzt werden. Betrachtet man das Aktivitätsdiagramm in Abb. 3.11, so ist offensichtlich, daß die gemittelte Größe $\langle S(T) \rangle_{f_0}$ der Lawinen mit Lebensdauer T sich zwischen den Extremen $\langle S(T) \rangle_{f_0} \propto T$ und $\langle S(T) \rangle_{f_0} \propto T^2$ bewegt. Dieser Zusammenhang legt den Ansatz

$$\langle S(T) \rangle_{f_0} \propto T^\alpha \quad (3.37)$$

nahe, wobei

$$\alpha_{\min} = 1 < \alpha < \alpha_{\max} = 2 \quad (3.38)$$

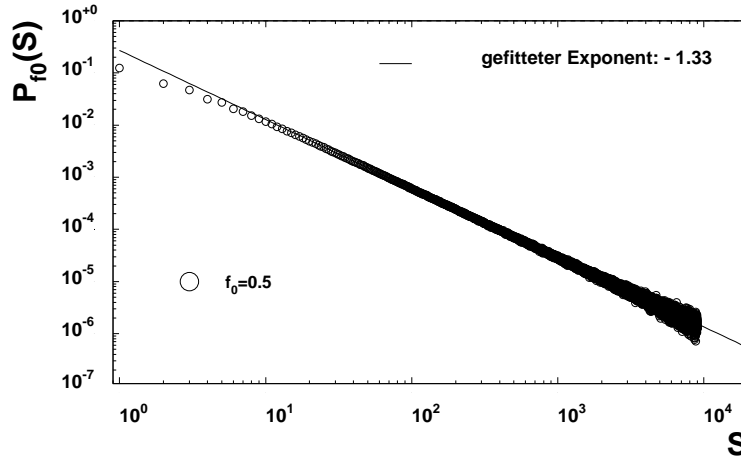


Abbildung 3.10: Größenverteilung $P_{f_0}(S)$ der Lawinen für $f_0 = f_c$. Die Simulation liefert ein Potenzgesetz $S^{-\lambda}$ mit dem kritischen Exponenten $\lambda \approx 1.33$.

ist. Für die Umrechnung auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{f_0}(S)$ sei nun der Einfachheit halber angenommen, daß die möglichen Werte für die Größe $S(T)$ recht scharf um den Erwartungswert $\langle S(T) \rangle_{f_0}$ konzentriert sind. Dann kann man erwarten, daß

$$P_{f_c}(S) \approx P_{f_c}(T) \cdot \frac{dT}{d\langle S(T) \rangle_{f_c}} \quad (3.39)$$

$$\propto S^{-(\tau+\alpha-1)/\alpha}$$

eine vernünftige Näherung für die Verteilung der Lawinengrößen bei $f_0 = f_c$ darstellt. Mit Hilfe des exakten Exponenten $\tau = 3/2$ und des Exponenten α ergibt sich also für den kritischen Exponenten λ gerade

$$\lambda = \frac{\tau + \alpha - 1}{\alpha}. \quad (3.40)$$

Die obere und untere Grenze α_{\min} und α_{\max} für den Exponenten α liefern dann eine obere und untere Grenze λ_{\min} und λ_{\max} für den kritischen Exponenten λ .

$$\lambda_{\min} = \frac{5}{4} < \lambda < \lambda_{\max} = \frac{3}{2}, \quad (3.41)$$

so daß sich $\lambda = 1.38 \pm 0.13$ ergibt, was verglichen mit dem empirischen Ergebnis $\lambda = 1.33$ relativ gut ist. Der Ansatz $\langle S(T) \rangle_{f_0} \sim T^\alpha$ aus Glng. 3.37 wird durch

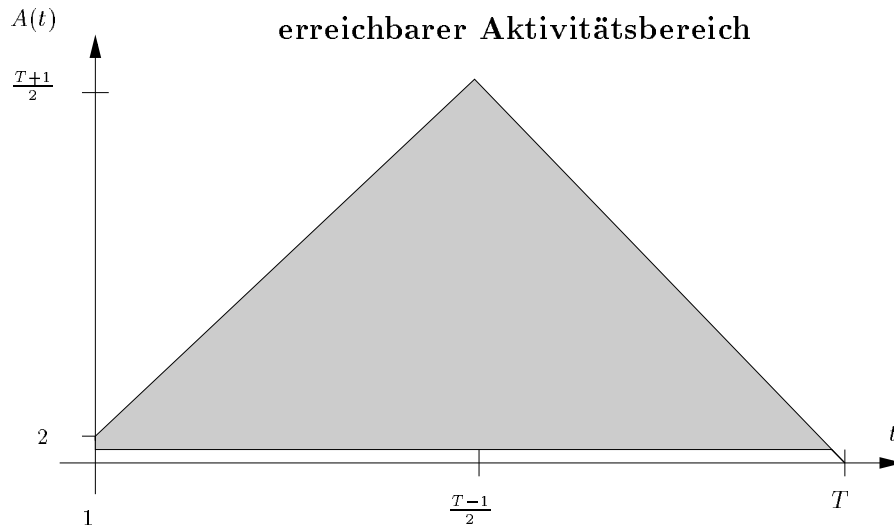


Abbildung 3.11: Dargestellt ist hier der Bereich, in dem sich die Aktivität $A(t)$ von Lawinen mit Lebensdauer T (hier ist T ungerade) befinden kann.

die Ergebnisse der Simulation des Modells bestätigt. So ist in Abb. 3.12 der Mittelwert $\langle S(T) \rangle_{f_0}$ der Lawinengröße als Funktion der Lebensdauer T für $f_0 = 0.3$, $f_0 = 0.4$, $f_0 = 0.5$ und $f_0 = 0.55$ aufgetragen, wobei sich $\langle S(T) \rangle_{f_0} \sim T^\alpha$ mit jeweils $\alpha \approx 1.5$ ergibt. In Abb. 3.12 ist ebenfalls zu erkennen, daß die Streuung der Größe S der Lawinen mit fester Lebensdauer T um den Mittelwert $\langle S(T) \rangle_{f_0}$ recht klein ist. Letztendlich zeigt sich bei der Bestimmung des Exponenten λ die Grenze des bisher Erreichten. Für eine analytische Berechnung werden noch weitere Werkzeuge benötigt, die im nächsten Abschnitt zur Verfügung gestellt werden.

3.2.8 Berechnung der Größenverteilung

Die bisherige Betrachtung hat zu einer exakten Lösung der Lebensdauerverteilung $P_{f_0}(T)$ der Lawinen geführt, mit deren Hilfe bereits viele Aspekte des Modells beleuchtet werden konnten. Die kombinatorische Betrachtung des Modells basierte auf der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A(t) > 0$ für $0 < t < T$ und $A(T) = 0$). Eine vollständige Lösung des Modelles erfordert aber die

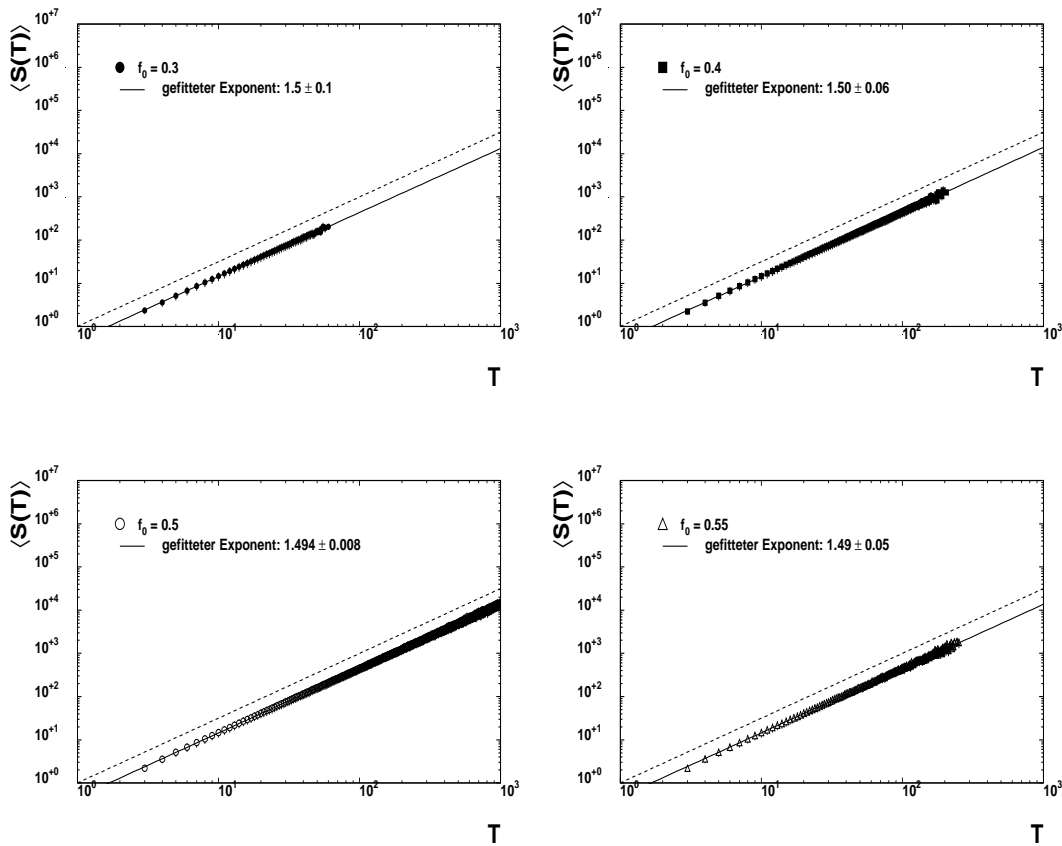


Abbildung 3.12: Dargestellt ist hier der Mittelwert $\langle S(T) \rangle_{f_0}$ der Lawinengröße als Funktion der Lebensdauer T für $f_0 = 0.3$, $f_0 = 0.4$, $f_0 = 0.5$ und $f_0 = 0.55$. Die gestrichelten Linien entsprechen jeweils einem Potenzgesetz T^α mit dem Exponenten $\alpha = 1.5$.

Kenntnis aller Wahrscheinlichkeiten

$$P_{n,t} = P(A(t') > 0 \text{ für } 0 < t' < t \text{ und } A(t) = n) \quad (3.42)$$

mit $n = 0, \dots, t + 1$. Wenn man daran denkt, welche Anstrengungen erforderlich waren, auf kombinatorischem Weg alleine die Wahrscheinlichkeiten $P_{n=0,t}$ zu bestimmen, so liegt es nahe, eine andere Methode heranzuziehen.

Wie bereits oben erwähnt (siehe auch [42]) führen die Modellregeln für den Übergang von den diskreten Variablen n und t zu kontinuierlichen Variablen x und t auf die Differentialgleichung Gln. 3.10 für die den Wahrscheinlichkeiten $P_{n,t}$

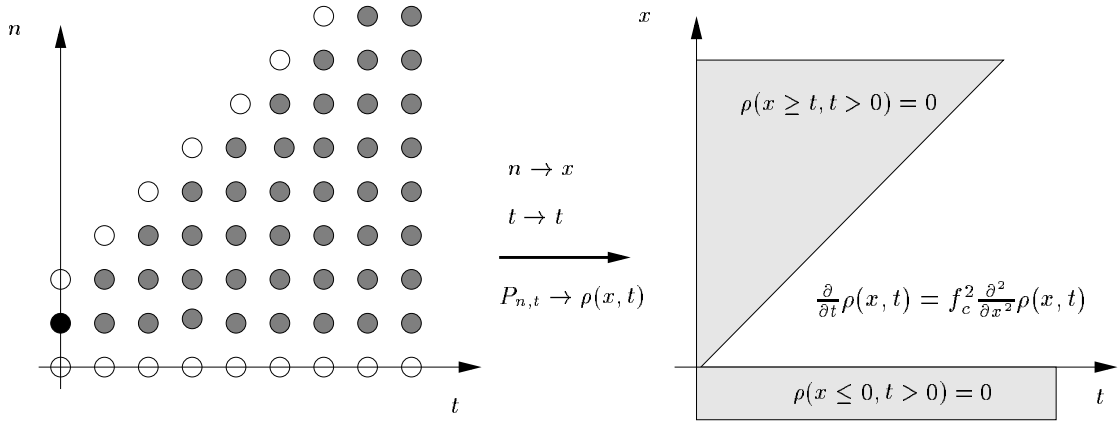
entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = f_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) + (1 - 2f_0) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \quad (3.43)$$

Speziell für den kritischen Wert $f_c = 0.5$ der Fitness ergibt sich die Diffusionsgleichung bzw. Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = f_c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t). \quad (3.44)$$

Der Übergang vom Diskreten in das Kontinuum ist in Abb. 3.13 illustriert. An



$$P_{n,t+1} - P_{n,t} = f_c^2 [(P_{n+1,t} - P_{n,t}) - (P_{n,t} - P_{n-1,t})]$$

Randbedingungen: $P(0, 1) = 1$, $P_{0,t} = 0$ und $P_{t+1,t} = 0$.

Abbildung 3.13: Übergang von den diskreten Variablen n (Zahl der aktiven Zellen) und t zu kontinuierlichen Variablen x und t . Die Wahrscheinlichkeiten $P_{n,t}$ werden zur Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$.

dieser Stelle noch eine kleine Bemerkung zu $P(n = 0, t = 0)$ bzw. $P(n = 1, t = 0)$.

Im ersten Iterationsschritt gibt es die Ausnahmesituation, daß sich die Zahl der aktiven Zellen nicht erniedrigen kann, weil $A(t = 0) = 0$ ist. Für alle $t > 0$ ändert sich aber nichts an den sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten, wenn man für $t = 0$ die Ersetzung

$$\left. \begin{array}{l} P(n = 0, t = 0) = 1 \\ P(n \neq 0, t = 0) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} P(n = 1, t = 0) = 1 \\ P(n \neq 1, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.45)$$

vornimmt und

$$\begin{aligned}
 P(n = 2, t = 1) &= f_0^2 \\
 P(n = 1, t = 1) &= 2f_0(1 - f_0) \\
 P(n = 0, t = 1) &= (1 - f_0)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

beibehält (siehe Abb. 3.13). Das hat den Vorteil daß es die oben erwähnte Ausnahme im ersten Schritt nicht mehr gibt, und für $f_0 = f_c$ die Iterationsvorschrift

$$P_{n+1,t} - P_{n,t} = f_c^2 [(P_{n+1,t} - P_{n,t}) - (P_{n,t} - P_{n-1,t})]
 \tag{3.47}$$

für alle $1 \leq n \leq t + 1$ mit $t > 0$ gilt. Die Stelle $(n = 0, t = 1)$ stellt dann gewissermaßen eine Wahrscheinlichkeitsquelle dar und die Iteration dient für fortschreitende t -Werte der Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf den erreichbaren Aktivitätsbereich. Der Weg zur Beschaffung einer Näherungslösung der Diffusi-

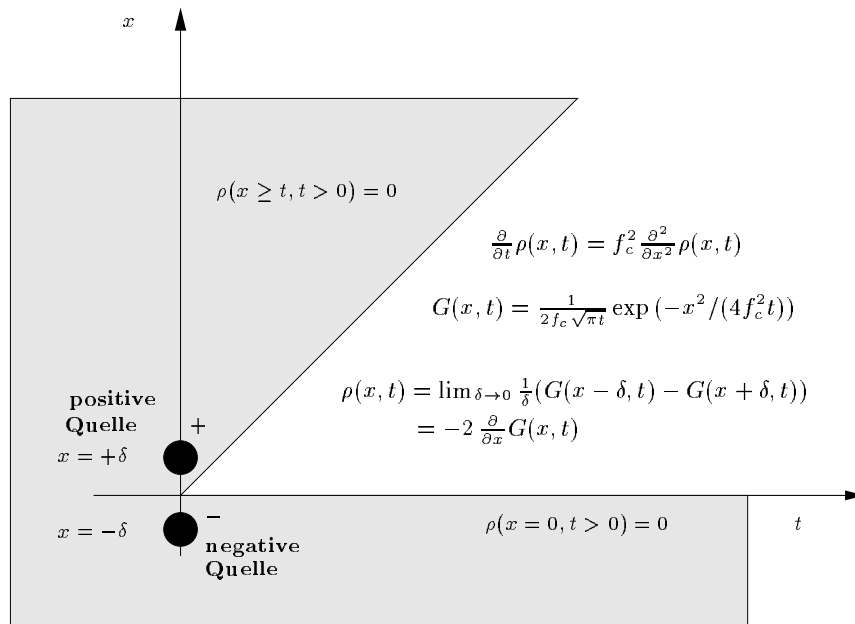


Abbildung 3.14: Zur Konstruktion einer Näherungslösung der Diffusionsgleichung für $t \gg 1$ im Gebiet $0 \leq x \leq t$ mit den geforderten Randbedingungen für $t \gg 1$. $G(x, t)$ ist Greensche Funktion der Diffusionsgleichung, das heißt $\frac{\partial}{\partial t}G(x, t) - f_c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x, t) = \delta(x) \delta(t)$. $G(x, t)$ ist Lösung für eine Diffusionsquelle bei $x = 0$ und $t = 0$. Durch Überlagerung zweier Quellen erhält man die gesuchte Lösung, die quasi das Feld eines Diffusionsdipols ist.

ongleichung Glng. 3.44 ist in Abb. 3.14 skizziert. Eine bekannte Lösung [43] der Diffusionsgleichung ist gerade deren Greensche Funktion, für die

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x, t) - f_c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x, t) = \delta(x)\delta(t) \quad (3.48)$$

gilt und

$$G(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{(-x^2/(4f_c^2t))} / (2f_c\sqrt{\pi t}) & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

ist. $G(x, t)$ ist eine Lösung für eine punktförmige Diffusionsquelle am Ort $x = 0$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird. Um die Randbedingungen zu erfüllen, braucht man nur zwei Quellen in geeigneter Weise zu kombinieren (siehe hierzu Abb. 3.14). Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (G(x - \delta, t) - G(x + \delta, t)) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial x}G(x, t) \\ &= \frac{x}{2f_c^3 \sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp(-x^2/(4f_c^2t)) \end{aligned} \quad (3.50)$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte². Für $x = 0$ ist die Randbedingung erfüllt, für $x = t > 0$ verschwindet $\rho(x, t)$ exponentiell, an der oberen Begrenzung ist die Randbedingung also näherungsweise erfüllt; und zwar umso besser, je größer t ist. Kehrt man zur diskreten Formulierung zurück, so hat man für große Werte von $t \gg 1$ mit

$$P_{n,t} \approx \frac{n}{2f_c^3 \sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp(-n^2/(4f_c^2t)) \quad (3.51)$$

eine Näherungslösung für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gefunden. Tatsächlich muß man sich noch vergewissern, daß das Ergebnis konsistent mit der analytisch

²Die Betrachtung des Grenzprozesses $\delta \rightarrow 0$ ist wegen $t \gg 1$ eigentlich nicht nötig, ebenso gut kann man es bei $\delta = \pm 1$ belassen. Der Vorteil der Betrachtung von $\delta \rightarrow 0$ liegt schlicht in der Einfachheit der nachfolgenden Formeln.

exakt bestimmten Verteilung $P_{f_0}(T)$ bei $f_0 = f_c$ ist, das heißt für große Werte von T mit

$$P_{f_c}(T) = \frac{\Gamma(T + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(T + 2)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} T^{(-3/2)} \quad (3.52)$$

übereinstimmt. Diese Forderung ist in gewissem Sinn ebenfalls eine Randbedingung und stellt außerdem eine Plausibilitätskontrolle dar. Hierzu rechnet man nach, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß die Lawine zum Zeitpunkt T noch nicht beendet ist. Mit

$$\begin{aligned} P(A(t) > 0 \text{ für } 1 \leq t \leq T) &\approx \int_0^\infty dx \rho(x, t) \\ &= \frac{1}{f_c \sqrt{\pi} \sqrt{t}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} P_{f_c}(T) &\approx P(A(t) > 0 \text{ für } 1 \leq t \leq T) - P(A(t) > 0 \text{ für } 1 \leq t \leq T + 1) \\ &\approx -\frac{\partial}{\partial T} P(A(t) > 0 \text{ für } 1 \leq t \leq T) \\ &= \frac{1}{2f_c \sqrt{\pi} T^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Offensichtlich hat die Näherungslösung $\rho(x, t)$ das gewünschte Verhalten. Die gute Übereinstimmung für große Werte von T mit der exakten Lebensdauerverteilung kann Abb. 3.15 entnommen werden.

Nun kann man mit Hilfe der Näherungslösung den Exponenten λ der Größenverteilung der Lawinen berechnen. Hierzu sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aktivität zum Zeitpunkt t innerhalb einer Lawine $\tilde{P}_{n,t}$ bzw. $\tilde{\rho}(x, t)$ (nicht innerhalb des Systems!) betrachtet. Mit Glng. 3.53 ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x, t) &\approx \frac{x}{2f_c^2 t} \exp(-x^2/(4f_c^2 t)) \quad \text{und} \\ \tilde{P}_{n,t} &\approx \frac{n}{2f_c^2 t} \exp(-n^2/(4f_c^2 t)). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Hieraus läßt sich nun die mittlere Aktivität $\langle \tilde{x}(t) \rangle$ zum Zeitpunkt t innerhalb von zum Zeitpunkt $t = 0$ gestarteten Lawinen bestimmen.

$$\langle \tilde{x}(t) \rangle \approx \int_0^\infty dx x \tilde{\rho}(x, t) \quad (3.56)$$

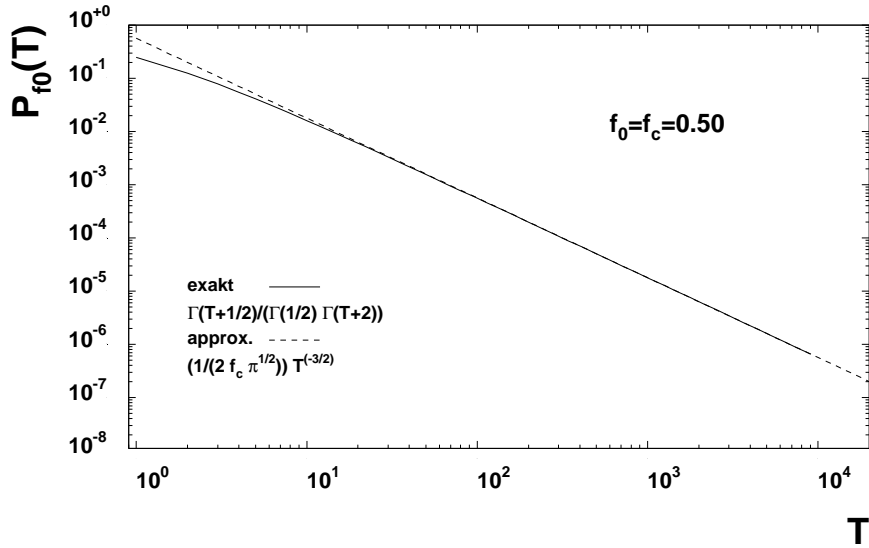


Abbildung 3.15: Dargestellt ist die Lebensdauererzeugung $P_{f_0}(T)$ für $f_0 = f_c = 0.5$. Die durchgezogene Linie entspricht dem exakten Ergebnis aus Glng. 3.52, die gestrichelte Linie der Näherung für große Werte von T aus Glng. 3.54.

$$= f_c \sqrt{\pi} \sqrt{t}$$

Im Gegensatz dazu wäre die mittlere Aktivität $\langle x(t) \rangle$ im System zum Zeitpunkt t im Falle der kritischen Fitness $f_c = 0.5$

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &\approx \int_0^{\infty} dx x \rho(x, t) \\ &= 1.0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

also eine Konstante. Das bedeutet, daß im kritischen Fall $f_0 = f_c$ die Information über zum Zeitpunkt $t = 0$ startende Lawinen nicht verloren geht, sondern eine konstante mittlere Aktivität, bedingt durch diese Lawinen, im System verbleibt. Diese Beobachtung ist nicht überraschend, da nach Glng. 3.25 für f_0 -Werte unterhalb von f_c alle Lawinen in endlicher Zeit enden, während im Gegensatz dazu für f_0 -Lawinen mit $f_0 > f_c$ nicht alle Lawinen in endlicher Zeit enden. Die mittlere Aktivität $\langle x(t) \rangle$ im System, die durch Lawinen, die bei $t = 0$ starten, bedingt ist, ist ebenfalls eine der Größen, die in [48, 17] ganz allgemein für Evolutionsmodelle

des Bak-Sneppen-Typs betrachtet wird. Für den Ansatz

$$\langle n(t) \rangle \propto t^\eta \quad (3.58)$$

wird in [48, 17] $\eta = 0$ angegeben, was mit dem hier analytisch abgeleiteten Ergebnis übereinstimmt.

Um den Exponenten λ der Größenverteilung $P_{f_c}(S)$ zu berechnen, benötigen wir die mittlere Größe $\langle S(T) \rangle_{f_c}$ von f_c -Lawinen mit fester Lebensdauer T . Hierzu muß der Erwartungswert der Aktivität x bezogen auf das von Lawinen mit Lebensdauer T erreichbare Gebiet im Aktivitätsdiagramm Abb. 3.11 bestimmt werden. Für große $t \gg 1$ erhält man

$$\langle S(T) \rangle_{f_c} \approx \underbrace{\int_{t=1}^{T/2} dt \int_{x=0}^t dx x \tilde{\rho}(x, t)}_{\equiv \Delta_1(T)} + \underbrace{\int_{t=T/2}^{T-1} dt \int_{x=0}^{T-t} dx x \tilde{\rho}(x, t)}_{\equiv \Delta_2(T)}. \quad (3.59)$$

Für das erste Integral findet man ohne Schwierigkeiten, daß

$$\Delta_1(T) \approx \frac{f_c}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} T^{3/2}. \quad (3.60)$$

ist. Das zweite Integral ist schwieriger, da aber nur der Exponent der Lebensdauer-Verteilung bestimmt werden soll, reicht hier eine Abschätzung:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta_2(T) < \int_{t=T/2}^T dt \int_{x=0}^{\infty} dx x \tilde{\rho}(x, t) \\ \Rightarrow \Delta_2(T) < \frac{(4 - \sqrt{2})\sqrt{\pi}}{6} f_c T^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung findet man für die mittlere Größe in Lawinen mit Lebensdauer T die Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} f_c \sqrt{\pi} T^{3/2} < \langle S(T) \rangle_{f_c} < \frac{2}{3} f_c \sqrt{\pi} T^{3/2}. \quad (3.62)$$

Somit ist das Ziel erreicht, denn nun kann man ablesen, daß für große $T \gg 1$ der Exponent α der mittleren Größe $\langle S(T) \rangle_{f_c}$ gerade $\alpha = 3/2$ ist, das heißt

$$\langle S(T) \rangle_{f_c} \propto T^\alpha \text{ mit } \alpha = 3/2. \quad (3.63)$$

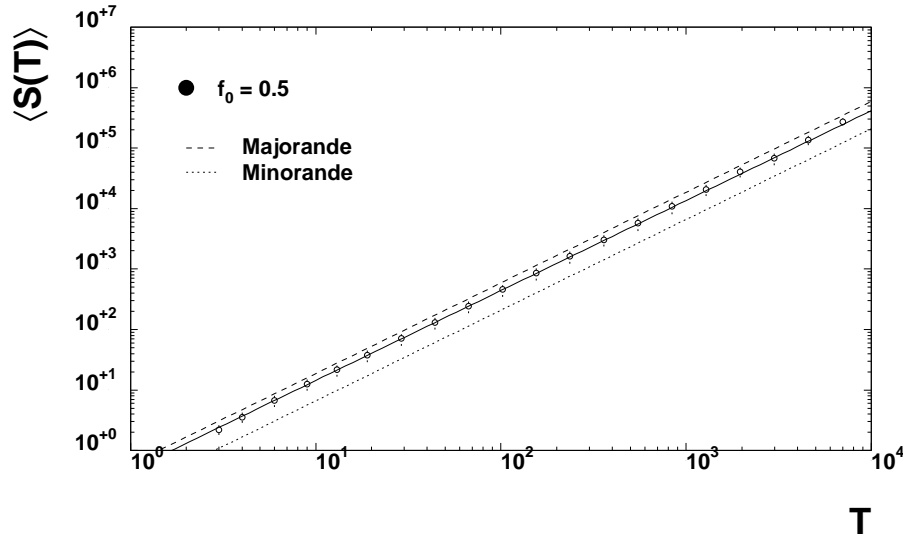


Abbildung 3.16: Dargestellt ist hier der Mittelwert $\langle S(T) \rangle_{f_0}$ der Lawinengröße als Funktion der Lebensdauer T für $f_0 = f_c = 0.5$. Die gestrichelten Linien entsprechen einer analytisch bestimmten Minorande bzw. Majorande, die jeweils proportional zu $T^{3/2}$ sind, daher gilt $\langle S(T) \rangle_{f_0} \propto T^{3/2}$.

Wie man der Abb. 3.16 entnehmen kann, stimmt das auch sehr gut mit den Daten überein. Nachdem der Exponent α analytisch beschafft ist, folgt mit der gleichen Argumentation, die bei der Eingrenzung des Exponenten λ benutzt wurde, daß

$$\begin{aligned} P_{f_c}(S) &\approx P_{f_c}(T) \cdot \frac{dT}{d\langle S(T) \rangle_{f_c}} \\ &\propto S^{-(\tau+\alpha-1)/\alpha} \end{aligned} \quad (3.64)$$

ist. Damit ergibt sich der kritische Exponenten λ der Größenverteilung analytisch zu

$$\lambda = \frac{\tau + \alpha - 1}{\alpha} = \frac{4}{3}, \quad (3.65)$$

was exakt mit den Ergebnissen der Simulation (siehe Abb. 3.10) übereinstimmt. Die mit Hilfe der Diffusionsgleichung und der Betrachtung des entsprechenden Randwertproblems erzielten Ergebnisse sind in Tab. 3.2 zusammengefaßt. Alle wesentlichen Ergebnisse wurden durch Simulationen bestätigt bzw. illustriert.

Durch Betrachtung der Diffusionsgleichung erzielte Ergebnisse für $f_0 = f_c$:	
Wahrscheinlichkeit für n aktive Zellen im System zum Zeitpunkt t ($t \gg 1$) als Folge einer bei $t = 0$ startenden Lawine:	
$P_{n,t} \approx \frac{n}{2f_c^3 \sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp(-n^2/(4f_c^2 t))$	
Wahrscheinlichkeit für n aktive Zellen zum Zeitpunkt t ($t \gg 1$) in einer bei $t = 0$ startenden Lawine:	
$P_{n,t} \approx \frac{n}{2f_c^2 \sqrt{\pi t}} \exp(-n^2/(4f_c^2 t))$	
Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bei $t = 0$ startende Lawine zur Zeit T noch läuft:	
$P(A(t) > 0 \text{ für } 1 \leq t \leq T) \approx \frac{1}{f_c \sqrt{\pi} \sqrt{T}}$	
Mittlere Zahl aktiver Zellen in einer bei $t = 0$ startenden Lawine zum Zeitpunkt t :	
$\langle \tilde{n}(t) \rangle \approx f_c \sqrt{\pi} \sqrt{t}$	
Mittlere Zahl aktiver Zellen im System aufgrund einer bei $t = 0$ startenden Lawine zum Zeitpunkt t :	
$\langle n(t) \rangle \approx 1.0$	Kritischer Exponent:
$= t^\eta \text{ mit } \eta = 0.$	$\eta = 0$
Mittlere Größe von Lawinen mit Lebensdauer T :	
$\langle S(T) \rangle_{f_c} \propto T^\alpha \text{ mit } \alpha = 3/2.$	Kritischer Exponent:
	$\alpha = 3/2$
Größenverteilung von f_c -Lawinen:	
$P_{f_c}(S) \propto S^{-\lambda} \text{ mit } \lambda = 4/3.$	Kritischer Exponent:
	$\lambda = 4/3$
Relation zwischen den Exponenten λ , τ und α :	
$\lambda = \frac{\tau + \alpha - 1}{\alpha}$	

Tabelle 3.2: Durch Betrachtung der Diffusionsgleichung bei $f_0 = f_c$ für das Modell erzielte Ergebnisse.

3.3 Selbstorganisiertes kritisches Verhalten und Verteilungen der Gluoncluster im Modellsystem

Die mathematische Behandlung des stark vereinfachten Modellsystems für komplexe Gluonsysteme zeigt, daß sich das System in einen selbstorganisierten kritischen Zustand entwickelt. Dieser Zustand ist dadurch charakterisiert, daß sich die Fitnesswerte aller Gluon-Untersysteme s_i oberhalb einer kritischen Fitness $f_c = 0.5$ befinden.

Eine kleine Störung dieses Zustandes, die darin besteht, daß das Untersystem s_i mit der minimalen Fitness im System seine Fitness ändert (beispielsweise durch Wechselwirkung mit einem Valenzquark), führt zu einer BTW-Lawine bzw. einem BTW-Cluster. Gluonen wechselwirken miteinander, bis am Ende der Lawine alle Gluon-Untersysteme s_i wiederum Fitnesswerte besitzen, die größer als die kritische Fitness $f_c = 0.5$ sind.

Die Lawinen bzw. BTW-Cluster bestehen aus den Gluonensystemen s_i , die während der Lawine ihre Fitness geändert haben, also in dieser Zeit miteinander wechselwirkten. Somit kommt es in dem betrachteten System durch die Evolution der Fitnesswerte der Gluonuntersysteme zur Bildung von Gluonclustern.

Mit Hilfe einer kombinatorischen Betrachtung des Modellsystems kann die Verteilung $D_T(T)$ der Lebensdauer T der Gluoncluster exakt bestimmt werden. Sie folgt einem Potenzgesetz

$$D_T(T) \sim T^{-\nu} \quad (3.66)$$

mit dem Exponenten $\mu = 3/2$.

Einem Gluoncluster mit Lebensdauer T kann als Größe S die innerhalb der seiner Lebensdauer T angesammelte Aktivität

$$S(T) = \sum_{t=0}^T A_{f_c}(t) \quad (3.67)$$

zugeordnet werden. Die Aktivität $A_{f_c}(t)$ ist dabei die Zahl der Gluon-Untersysteme s_i , deren Fitness zum Zeitpunkt t unterhalb der kritischen Fitness f_c liegt. S ist also ein anschauliches Maß für die Größe des Clusters. Für die Verteilung der Größe S der Gluoncluster ergibt sich

$$D_S(S) \sim S^{-\mu}, \quad (3.68)$$

wobei der Exponent analytisch zu $\mu = 4/3$ bestimmt wurde.

Bei dem betrachteten Modellsystem wurde die Beschreibung der Wechselwirkung der Gluonen stark vereinfacht, insbesondere ist die Bedeutung der Fitness eines Gluon-Untersystems nicht näher spezifiziert worden. Der Zusammenhang zwischen der im Rahmen des Modells eingeführten Größe S als totaler Aktivität und der in Kap. 2 betrachteten Größe eines farblosen Gluonclusters c_0^* als Bruchteil x_P an der Energie des Protons ist daher unklar. Der Exponent der Lebensdauer-Verteilung ν der im Modell gebildeten Gluoncluster ist verglichen mit dem Exponenten $\nu \approx 2$ der Lebensdauer-Verteilung der c_0^* -Cluster zu klein. Insofern handelt es sich hier um eine Vorstudie auf dem Weg zur Entwicklung eines SOC-Modells zur Simulation der Dynamik eines Gluonsystems.

Entscheidend ist, daß die stark vereinfachte Modellvorstellung zeigt, daß es zu selbstorganisiertem kritischem Verhalten, also zur Bildung von Gluonclustern, deren Verteilungen Potenzgesetzen der in den Gln. 3.66 und 3.68 angegebenen Form gehorchen, kommt, ohne daß es auf die spezifischen Details der zugrundeliegenden Wechselwirkung der Gluonen ankommt. Da man erwarten kann, daß wie in anderen SOC-Modellen [14, 10, 12, 13] auch, das globale selbstorganisierte kritische Verhalten des Systems robust gegenüber der Veränderung spezifischer Details der Wechselwirkung ist, sollte es möglich sein, das einfache Modell – nun quasi in umgekehrter Richtung – um Details (Farbladung, Bedeutung der Fitness, ...) der Gluonwechselwirkung zu erweitern, um ein realistischeres Modell zur Beschreibung eines Gluonsystems zu erhalten.