Zusammenfassung

In dieser Dissertation diskutieren wir die eindimensionale gebrochene (*fractional*) Diffusionsgleichung mit Drift

$$ {}_tD_*^{\beta}\, u(x,t) = {}_xD_0^{\alpha}\, u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(F(x)u(x,t))\,,\; u(x,0) = \delta(x)\,, $$

where $0 < \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$. Hier bezeichnet ${}_tD_*^{\beta}$ die Caputo zeit-gebrochene Ableitung und ${}_xD_0^{\alpha}$ den räumlichen gebrochenen Riesz-Differentaloperator mit dem Symbol $-|\kappa|^{\alpha}$.

In Kapitel 3 werden diskrete Approximationen für zeit-gebrochene Diffusionsprozesse ($\alpha = 2$) mit ursprungsorientierter Drift in Form von expliziten und impliziten Differenzenschemata und in Form von *random-walk*-Modellen gewonnen. Wir haben diese *random-walk*-Modelle simuliert und numerische Ergebnisse für die Differenzenverfahren gegeben. Dann diskutieren wir die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen de stationären Lösungen des Modells. Ausserdem diskutieren wir im Détail die Beziehungen zum klassischen Ehrenfest-Modell, das wir in Kapitel 2 sorgfältig beschrieben haben.

In Kapitel 4 geben wir eine Übersicht über die Theorie des continuous time random walk. Wir zeigen, wie die oben stehende gebrochene Diffusionsgleichung im Spezialfall $F(x) = 0$ aus der Integralgleichung für *continuous time random walk* oder der für einen kumulativen Erneuerungsprozess durch wohl-skalierten Grenzübergang verschwindender Wartezeiten und Sprünge hergeleitetet werden kann. Wir simulieren die Modelle für verschiedene Werte der Parameter α und β. Dann benutzen wir eine Transformation der unabhängigen Variablen x und t zur Simulation des *random walk* für räumlich Diffuson mit zentraler linearer Drift ($F(x) = -x$ and $\beta = 1$) . Die Simulation zeigt, wie Sprünge und Wartezeiten komprimiert werden im Vergleich zum Fall mit keiner Drift. Wir verallgemeinern den Transformationssatz auf die Situation nicht-symmetrischer räumlicher inverser Riesz-Feller-Operatoren.

Schliesslich geben wir in Kapitel 5 Beweise für Konvergenz diskreter Lösungen der oben stehenden raum-zeitlich gebrochener Diffusion mit und ohne zentrale lineare Drift gegen die exakte Lösung für den angegebenen Parameterbereich. Hierzu arbeiten wir mit der kombinierten Fourier-Laplace-Transformation.Die numerischen Lösungen erhalten wir mit expliziten und impliziten Differenzenverfahren, die *random-walk*-Simulationen werden mit der Momnte-Carlo-Methode durchgeführt.