

Kapitel 9

Erstes Moment der Nukleon-Strukturfunktion

9.1 Tiefinelastische Streuung

Informationen über die innere Struktur des Nukleons lassen sich durch Streuexperimente gewinnen. Bei der *tiefinelastischen Streuung* wird ein Lepton am Nukleon gestreut, wobei der Impulsübertrag so groß ist, daß das Nukleon zerstört wird; anschließend werden die Energie und der Streuwinkel des Leptons gemessen.

Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozeß ist proportional zum Produkt aus dem leptonen Tensor

$$L_{\mu\nu} = 2 \left(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p \cdot p' + i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s^\alpha q^\beta \right), \quad (9.1)$$

wobei p und p' den Leptonimpuls vor bzw. nach dem Stoß bezeichnen, $q = p - p'$ der Impulsübertrag auf das Nukleon und s der Spinvektor des Leptons ist, und dem hadronischen Tensor

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi m_N} \int d^4 z e^{iqz} \langle N | [j_\mu(z), j_\nu(0)] | N \rangle \quad (9.2)$$

mit dem elektromagnetischen Strom j_μ ; mit m_N bezeichnen wir die Nukleonmasse. Die Björken-Skalenvariable x ist durch

$$x = \frac{Q^2}{2pq} \quad (9.3)$$

definiert (mit $Q^2 = -q^2 > 0$).

Der hadronische Tensor zerfällt in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil:

$$W^{\mu\nu} = W_A^{\mu\nu} + W_S^{\mu\nu}. \quad (9.4)$$

Aus Lorentzinvarianz sowie aus der Invarianz der starken Wechselwirkung unter Paritäts- und Zeitumkehr folgt, daß $W_S^{\mu\nu}$ bzw. $W_A^{\mu\nu}$ die folgende allgemeine Form haben:

$$W_S^{\mu\nu} = \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{1}{m_{N\nu}} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) F_2(x, Q^2) \quad (9.5)$$

$$W_A^{\mu\nu} = \frac{1}{m_{N\nu}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha s_\beta g_1(x, Q^2) + \frac{1}{m_{N\nu}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha \left(s_\beta - \frac{q \cdot s}{m_{N\nu}} p_\beta \right) g_2(x, Q^2) \quad (9.6)$$

mit $\nu = \frac{pq}{m_N}$ und den *Strukturfunktionen* $F_i(x, Q^2)$, $g_i(x, Q^2)$. Wir werden im Folgenden nur den unpolarisierten Fall betrachten; damit tragen nur die Funktionen $F_1(x, Q^2)$, $F_2(x, Q^2)$ zum Wirkungsquerschnitt bei. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\epsilon'} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(F_2(x, Q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2F_1(x, Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (9.7)$$

wobei ϵ, ϵ' die Energie des Elektrons vor bzw. nach der Streuung, θ den Streuwinkel des Elektrons und $d\Omega$ das Raumwinkelelement bezeichnen. Aus der Messung von Energie und Stoßwinkel des Elektrons lassen sich F_1 und F_2 bestimmen.

9.2 Operatorproduktentwicklung

Die Strukturfunktionen lassen sich in der Gittereichtheorie nicht direkt berechnen; mit Hilfe der Operatorproduktentwicklung ist aber eine Berechnung ihrer niedrigsten Momente möglich. Ausgangspunkt dafür ist die Compton-Streuamplitude

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi m_N} \int d^4z e^{iqz} \langle N | \mathcal{T} \{ j_\mu(z) j_\nu(0) \} | N \rangle \quad (9.8)$$

wobei $\mathcal{T}\{\dots\}$ das zeitgeordnete Produkt bezeichnet. Das Produkt $j(z)j(0)$ der beiden Ströme divergiert für $z \rightarrow 0$. Allgemein läßt sich das Produkt zweier Operatoren $O_A(z), O_B(0)$ für $z \rightarrow 0$ als Summe

$$O_A(z)O_B(0) = \sum_C C_{ABC} \left(\frac{z}{2} \right) O_C(0) \quad (9.9)$$

schreiben; dabei wird über alle lokalen Operatoren O_C , die mit den Symmetrien der linken Seite von Gl. (9.9) verträglich sind, summiert.

Die Divergenz für $z \rightarrow 0$ ist in den *Wilson-Koeffizienten* C_{ABC} enthalten: Für $z \rightarrow 0$ divergieren diese (bis auf logarithmische Korrekturen) wie

$$C_{ABC} \sim \left(\frac{1}{z} \right)^{d_{O_C} - d_{O_A} - d_{O_B}}, \quad (9.10)$$

wobei wir mit d_O die (Massen-)Dimension des Operators O bezeichnen.

Die Operatoren in (9.9) werden bei einer Skala μ renormiert; auch die Wilson-Koeffizienten hängen von dieser Renormierungsskala ab. In dem bei der Entwicklung der Compton-Amplitude auftretenden Fall zweier Ströme, deren Renormierung nicht von einer Skala abhängt, darf auch die rechte Seite der Entwicklung (9.9) nicht von μ abhängen, d.h. die Skalenabhängigkeit der Wilson-Koeffizienten und die der Operatoren müssen sich gerade kompensieren.

Die in der Entwicklung der Amplitude $T_{\mu\nu}$ auftretenden lokalen Operatoren können so gewählt werden, daß sie unter einer irreduziblen Darstellung der Lorentzgruppe transformieren, d.h. es handelt sich um Linearkombinationen

$$c_{\mu_1 \dots \mu_s} O^{\mu_1 \dots \mu_s} \quad (9.11)$$

von Tensoroperatoren $O^{\mu_1 \dots \mu_s}$. Nur der symmetrische Anteil von $c_{\mu_1 \dots \mu_s}$ trägt zu $T_{\mu\nu}$ bei; damit der Operator zu einer irreduziblen Darstellung gehört, muß er außerdem spurlos im folgenden Sinne sein:

$$g_{\mu_i \mu_j} c_{\mu_1 \dots \mu_s} = 0 \quad (9.12)$$

für beliebige Indizes μ_i, μ_j . Die Anzahl s der Indizes wird als *Spin* s_O des Operators O bezeichnet. Das Matrixelement eines solchen Operators zwischen Nukleonzuständen skaliert wie q^{-s_O} ; das Produkt aus Wilsonkoeffizient und Matrixelement skaliert also wie

$$q^{d_O - s_O} = q^{-t_O} \quad (9.13)$$

mit dem *Twist* $t_O = d_O - s_O$ des Operators O . Für $q^2 \rightarrow \infty$ liefern also die Operatoren minimalen Twists den dominanten Beitrag; dies sind die Twist-2 Operatoren

$$O^{\mu_1 \dots \mu_s} = \bar{\psi} \gamma^{\mu_1} \overleftrightarrow{D}^{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}^{\mu_s} \psi. \quad (9.14)$$

Aus Lorentzinvarianz folgt, daß das Matrixelement eines solchen Operators zwischen Nukleonzuständen die Form

$$\langle p, s | O^{\mu_1 \dots \mu_s} | p, s \rangle = 2v_s p^{\mu_1} \dots p^{\mu_s} \quad (9.15)$$

mit einer Konstante v_s haben muß.

Mit Hilfe von Dispersionsrelationen und unter Benutzung des optischen Theorems läßt sich aus der Operatorproduktentwicklung der Compton-Amplitude $T_{\mu\nu}$ folgende Relation für die Momente

$$F_i^n = \int_0^1 dx x^n F_i(x, q^2) \quad (9.16)$$

der Strukturfunktionen gewinnen:

$$F_1^n = \sum_f c_i^{n,f}(q^2) v_n^f + O(1/q^2) \quad \text{für } n \text{ gerade} \quad (9.17)$$

$$F_2^n = \sum_f c_i^{n,f}(q^2) v_n^f + O(1/q^2) \quad \text{für } n \text{ ungerade,} \quad (9.18)$$

wobei die Terme $O(1/q^2)$ von Operatoren höheren Twists herrühren.

9.3 Gitterrechnung

Wie in Abschnitt 5.3.2 diskutiert, zerfällt die irreduzible $SO(4)$ -Darstellung auf den symmetrischen spurlosen Rang-2 Tensoren unter der hyperkubischen Gruppe $H(4)$ in die sechsdimensionale Darstellung D_a und die dreidimensionale Darstellung D_b (siehe Gl. (5.59), (5.60)). Folglich können wir zwei verschiedene Matrixelemente v_{2a} und v_{2b} berechnen; im Kontinuumslimit müssen die renormierten Matrixelemente übereinstimmen.

Auf dem Gitter betrachten wir die Operatoren

$$O^{\mu\nu}(t) = \sum_{\substack{\vec{x} \\ x=(t,\vec{x})}} \left(\bar{u}(x) \gamma_\mu \overleftrightarrow{D}^\nu u(x) - \bar{d}(x) \gamma_\mu \overleftrightarrow{D}^\nu d(x) \right) \quad (9.19)$$

mit der antisymmetrischen kovarianten Ableitung \overleftrightarrow{D} .

Die Matrixelemente v_{2a}, v_{2b} ergeben sich aus dem Quotienten einer Dreipunkt- und einer Zweipunktfunktion. Dazu sei $O = c_{\mu\nu} O^{\mu\nu}$, wobei die Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ so gewählt seien, daß der Operator zu einer der beiden Darstellungen D_a bzw. D_b gehört.

Das asymptotische Verhalten der Dreipunktfunktion $C_{B_3}(O, \Gamma_4, \vec{p}, \tau, t)$ für $0 \ll \tau \ll t \ll N_T$ ist dann

$$C_{B_3}(\Gamma_4, O, \vec{p}, \tau, t) \longrightarrow e^{-m_N t} \Gamma_{4, \beta\alpha} \sum_{s, s'} \langle 0 | B | p, s \rangle \langle p, s | O | p, s' \rangle \langle p, s' | B | 0 \rangle \quad (9.20)$$

$$= Z_p e^{-m_N t} v_2 c_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \text{tr}(\bar{u}(p, s) \Gamma_4 u(p, s)) \quad (9.21)$$

$$= Z_p e^{-m_N t} v_2 \left(-c_{44} E_{\vec{p}}^2 + 2i E_{\vec{p}} \sum_{i=1}^3 c_{i4} p_i + \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} p_i p_j \right). \quad (9.22)$$

Der statistische Fehler einer Dreipunktfunktion $C_{B_3}(O, \Gamma_4, \vec{p}, \tau, t)$ nimmt mit wachsendem Impuls \vec{p} stark zu; aus diesem Grund ist es wünschenswert, Dreipunktfunktionen mit $\vec{p} = 0$ zu betrachten. Aus (9.22) folgt, daß dies nur möglich ist, falls $c_{44} \neq 0$ gilt, d.h. nur das Matrixelement v_{2b} kann aus einer Dreipunktfunktion mit $\vec{p} = 0$ bestimmt werden. Daher werden wir im Folgenden den Operator

$$O_{v_{2b}} = O^{44} - \frac{1}{3} (O^{11} + O^{22} + O^{33}) \quad (9.23)$$

betrachten. Um v_{2b} aus der Dreipunktfunktion zu bestimmen, bilden wir das Verhältnis

$$R(t, \tau) = - \frac{C_{B_3}(O_{v_{2b}}, \Gamma_4, \vec{p} = 0, \tau, t)}{m_N C_{B_2}(\Gamma_4, 0, t)}. \quad (9.24)$$

In Abb. 9.1 ist dieses Verhältnis für verschiedene Quarkmassen in Abhängigkeit von τ dargestellt (der Wert von t ist fixiert auf $t = 13$).

Durch Multiplikation mit der in Abschnitt 5.3.2 bestimmten Renormierungskonstante

$$Z_{v_{2b}}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 1.90 \quad (9.25)$$

erhalten wir das renormierte Matrixelement; in Abb. 9.2 ist dieses in Abhängigkeit von der Quarkmasse aufgetragen. Eine lineare chirale Extrapolation ergibt

$$v_{2b} = 0.25(1) \quad (9.26)$$

im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei $\mu = 2 \text{ GeV}$.

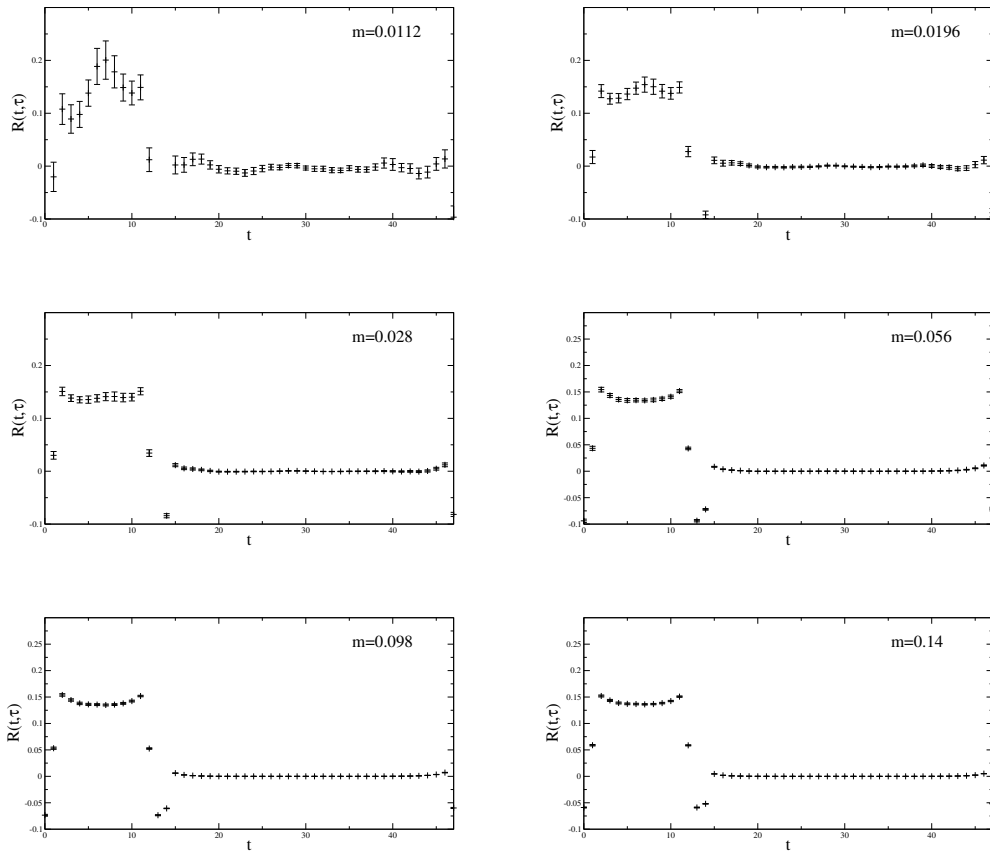


Abbildung 9.1: Das Verhältnis $R(t = 13, \tau)$ (Gl. (9.24)) für verschiedene Werte der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.

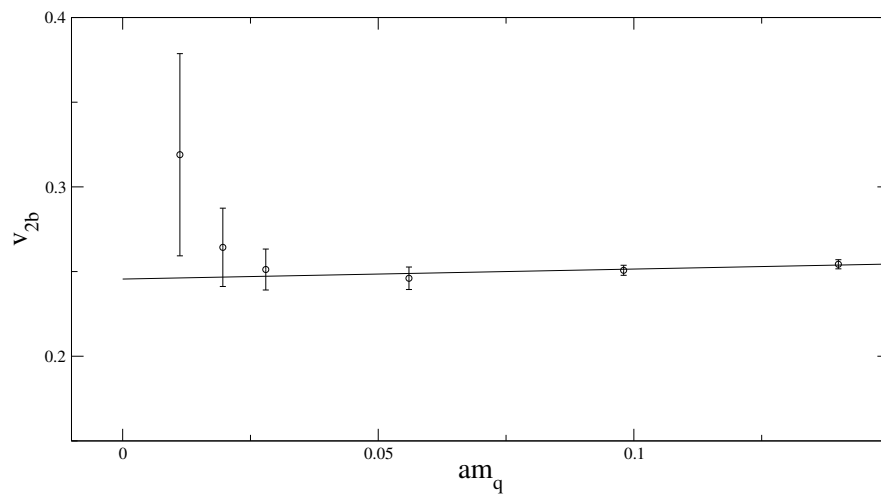


Abbildung 9.2: Das renormierte Matrixelement v_{2b} in Abhängigkeit von der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.