

# Kapitel 7

## Spektrum des Diracoperators

### 7.1 Topologische Ladung

In der Kontinuums-Formulierung der Quantenchromodynamik ist der (masselose) Dirac-Operator  $\mathcal{D} = \gamma_\mu(\partial_\mu + A_\mu)$  ein antihermitescher Operator. Aufgrund der Antikommutatorbeziehung  $\{\mathcal{D}, \gamma_5\} = 0$  haben die Eigenwerte und -vektoren von  $\mathcal{D}$  folgende Eigenschaften:

- Imaginäre Eigenwerte treten in Paaren  $\pm i\lambda_i$  (mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ) auf; die zugehörigen Eigenvektoren  $u_\lambda, u_{-\lambda}$  erfüllen  $u_{-\lambda} = \gamma_5 u_\lambda$ .
- Die Eigenvektoren  $v_i$  zum Eigenwert 0 können so gewählt werden, daß  $\gamma_5 v_i = \sigma_i v_i$  mit  $\sigma_i \in \{1, -1\}$  gilt. Der *Index* von  $D$  ist durch  $\text{index} D = \sum_i \sigma_i$  definiert.

Nach dem Atiyah-Singer-Indextheorem ist der Index von  $D$  gleich der durch

$$Q^{\text{top}} = \int d^4x q(x) \quad (7.1)$$

definierten topologischen Ladung der Eichfeldkonfiguration; dabei ist  $q(x)$  die topologische Ladungsdichte (Gl. (3.22)). Die Größe  $Q^{\text{top}}$  ist eine topologische Invariante, d. h. sie ist invariant unter stetigen Deformationen des Eichfeldes.

Die *topologische Suszeptibilität*  $\chi^{\text{top}}$  ist definiert durch

$$\chi^{\text{top}} = \int d^4x \langle q(x)q(0) \rangle. \quad (7.2)$$

Dies ist ein rein formaler Ausdruck, der einer Ultraviolettregularisierung bedarf. Nach der Witten-Veneziano-Formel[67, 68] ist die Masse des  $\eta'$ -Teilchens proportional zu  $\chi$ :

$$m_{\eta'}^2 = \frac{2N_f}{f_\pi^2} \chi^{\text{top}}, \quad (7.3)$$

wobei die topologische Suszeptibilität in der reinen Eichtheorie zu bestimmen ist (für eine Herleitung der Formel im Rahmen der Gitterfeldtheorie mit Ginsparg-Wilson-Fermionen siehe [69]). Aus den experimentell bestimmten Werten für die  $\eta'$ -Masse ( $m_\eta = 958$  MeV)

und die Pion-Zerfallskonstante ( $f_\pi = 92 \text{ MeV}$ ) ergibt sich nach Gl. 7.3  $\chi^{\text{top}} \approx (190 \text{ MeV})^4$ .

Aus der Ginsparg-Wilson-Relation folgt, daß die Eigenwerte des Overlap-Operators auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $\frac{\rho}{a}$  und Radius  $\frac{\rho}{a}$  liegen. Analog zum Kontinuum kann man auch hier verschiedene Fälle unterscheiden:

- Komplexe Eigenwerte, die in komplex konjugierten Paaren  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  auftreten; auch hier hängen die zugehörigen Eigenvektoren  $u_\lambda, u_{-\lambda}$  über  $u_{-\lambda} = \gamma_5 u_\lambda$  zusammen
- Der Eigenwert 0. Wie im Kontinuum können die Eigenvektoren als Eigenvektoren von  $\gamma_5$  gewählt werden und der Index von  $D$  kann als Differenz der Anzahl der Eigenvektoren mit positiver bzw. negativer Chiralität definiert werden.
- Außerdem tritt der reelle Eigenwert  $\frac{2\rho}{a}$  auf. Auch die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert können als Eigenwerte von  $\gamma_5$  gewählt werden.

Mit der Definition (3.59) der topologischen Ladungsdichte auf dem Gitter gilt auch hier das Indextheorem

$$\sum_x q(x) = \text{index } D. \quad (7.4)$$

Das Indextheorem (7.4) ermöglicht die Bestimmung der topologischen Suszeptibilität durch Messung der Verteilung der topologischen Ladung:

$$\chi^{\text{top}} = \frac{1}{V} \sum_{x,y} \langle q(x)q(y) \rangle = \frac{\langle Q^2 \rangle}{V}. \quad (7.5)$$

In Abbildung 7.1 haben wir die in zwei unterschiedlichen Volumina gemessene Verteilung der topologischen Ladung dargestellt; daraus erhalten wir folgende Ergebnisse für die Suszeptibilität:

V	$\langle Q^2 \rangle$	$\chi^{\text{top}}$
$16^3 32$	8.5(6)	$(166(4) \text{ MeV})^4$
$24^3 48$	40.3(3.6)	$(164(4) \text{ MeV})^4$

## 7.2 Spektrale Dichte

Die Verteilung der Eigenwerte des Dirac-Operators wird durch die spektrale Dichte

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{V} \sum_k \langle \delta(\lambda - \lambda_k) \rangle_U \quad (7.6)$$

beschrieben, wobei  $\lambda_k$  den  $k$ -ten Eigenwert des Diracoperators bezeichnet. Die spektrale Dichte hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung; jedoch hängt sie eng mit dem chiralen Kondensat zusammen[70]: Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall von  $n_f$

Quarkflavours mit Massen  $m_i$ . Die Partitionsfunktion ist

$$Z(m_1, \dots, m_{n_f}) = \int DU D\Psi D\bar{\Psi} e^{-\int d^4x \sum_{i=1}^{n_f} \bar{\psi}(x) (\not{D} + m_i) \psi(x) - S_g(U)} \quad (7.7)$$

$$= \int DU \prod_{i=1}^{n_f} \det(\not{D} + m_i) e^{-S_g(U)}. \quad (7.8)$$

Um zu einem Ausdruck für  $\rho(\lambda)$  zu kommen, führen wir zwei zusätzliche Quarkflavours mit den Massen  $\mu_1, \mu_2$  ein, von denen ein Flavour mit der gewöhnlichen (Fermi-)Statistik, das andere („Geistflavour“) aber mit der Bose-Statistik beschrieben wird. Dies führt zur Partitionsfunktion

$$\tilde{Z}(m_1, \dots, m_{n_f}, \mu_1, \mu_2) = \int DU \prod_{i=1}^{n_f} \det(\not{D} + m_i) e^{-S_g(U)} \frac{\det(\not{D} + \mu_1)}{\det(\not{D} + \mu_2)}. \quad (7.9)$$

Offensichtlich gilt  $\tilde{Z}(m_i, \mu, \mu) = Z(m_i)$ . Weiterhin bilden wir das chirale Kondensat bezüglich der Masse  $\mu_1$ :

$$\Sigma(m_1, \dots, m_{n_f}, \mu) = \left. \frac{\partial}{\partial \mu_1} \log \tilde{Z}(m_i, \mu_1, \mu_2) \right|_{\mu_1 = \mu_2 = \mu}. \quad (7.10)$$

Aus der Partitionsfunktion (7.9) erhalten wir

$$\Sigma(m_1, \dots, m_{n_f}, \mu) = \frac{1}{V} \sum_k \left\langle \frac{1}{\mu + i\lambda_k} \right\rangle_U \quad (7.11)$$

und damit schließlich folgende Beziehung zur spektralen Dichte bezüglich der ursprünglichen Partitionsfunktion  $Z$ :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Sigma(m_1, \dots, m_{n_f}, i\lambda + \epsilon) - \Sigma(m_1, \dots, m_{n_f}, i\lambda - \epsilon)) \right). \quad (7.12)$$

Die Partitionsfunktion  $\tilde{Z}$  ist gerade die Partitionsfunktion in der „supersymmetrischen“ Formulierung der chiralen Störungstheorie für die partielle Valenzquarknäherung. Im Bereich kleiner Quarkmassen kann die Abhängigkeit von  $\Sigma(m_1, \dots, m_{n_f}, \mu)$  (und damit nach Gl. (7.12) auch die spektrale Dichte  $\rho(\lambda)$  als Funktion der Kopplungskonstanten der chiralen Störungstheorie berechnet werden.

Im hier interessierenden Fall (Valenzquarknäherung) ist  $n_f = 0$ ; somit hängt die spektrale Dichte von den Konstanten  $\Sigma$ ,  $f$  und  $\delta$  ab (vgl. Abschnitt. 3.4). Zwei Fälle müssen unterschieden werden;

- „p-Entwicklung“: für  $\lambda > \frac{f^2}{2\Sigma\sqrt{V}}$  ist die spektrale Dichte bis zur Ordnung  $p^2$  gegeben durch[70]

$$\rho(\lambda) = \frac{\Sigma}{\pi} \left( 1 - 16\pi^2 \delta G'_V \left( \frac{2\Sigma}{f^2} \lambda \right) \right) \quad (7.13)$$

mit

$$G'_V(M^2) = \frac{\partial}{\partial M^2} G_V(M^2), \quad (7.14)$$

wobei  $G_V(M^2)$  der in Gl. (3.77) definierte pseudoskalare Propagator ist. Im Grenzfall unendlichen Volumens ergibt dies

$$\rho(\lambda)|_{V=\infty} = \frac{\Sigma}{\pi} \left[ 1 - \delta \left( 1 + \log \left( \frac{2\Sigma}{f^2 \Lambda_\chi^2} \lambda \right) \right) \right]. \quad (7.15)$$

- "ε-Entwicklung: Für  $\lambda \ll \frac{f^2}{2\Sigma\sqrt{V}}$  müssen die Formeln der ε-Entwicklung der chiralen Störungstheorie benutzt werden; in diesem Fall hängt die spektrale Dichte von der topologischen Ladung  $Q$  ab:

$$\rho(Q; \lambda) = V\Sigma^{\text{eff}} f_Q(V\Sigma^{\text{eff}} \lambda) \quad (7.16)$$

mit

$$f_Q(x) = \frac{x}{2}(J_{Q+1}(x)J_{Q-1}(x) - J_Q(x)^2) \quad (7.17)$$

wobei  $J_Q(x)$  die Besselfunktion 1. Ordnung ist; die volumenabhängige Konstante  $\Sigma^{\text{eff}}$  ist durch

$$\Sigma^{\text{eff}}(V) = \Sigma(1 - 16\pi^2 \delta \bar{G}'_V(0)) \quad (7.18)$$

mit

$$\bar{G}_V(M^2) = G_V(M^2) - \frac{1}{M^2 V}, \quad (7.19)$$

$$\bar{G}'_V(M^2) = \frac{\partial}{\partial M^2} \bar{G}(M^2) \quad (7.20)$$

gegeben.

Unter der Voraussetzung, daß die Breite der Verteilung der topologischen Ladung gemäß

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{f^2 m_0^2 V}{6} \quad (7.21)$$

mit der Flavour-Singulett-Masse zusammenhängt[71], beschreibt die durch

$$\rho(\lambda) = V\hat{\Sigma}(\lambda) \sum_Q w(Q) f_Q(V\hat{\Sigma}(\lambda)\lambda) + O(\lambda) \quad (7.22)$$

mit

$$\hat{\Sigma}(\lambda) = \Sigma \left( 1 - 16\pi^2 \delta \bar{G}'_V \left( \frac{2\Sigma}{f^2} \lambda \right) \right) \quad (7.23)$$

definierte Funktion (wobei  $w(Q)$  das Gewicht des Sektors der topologischen Ladung  $Q$  bezeichnet) die spektrale Dichte sowohl im Gültigkeitsbereich der ε-Entwicklung als auch im Gültigkeitsbereich der p-Entwicklung.

Wir haben auf zwei Volumina ( $V_1 = 16^3 32$ ,  $V_2 = 24^3 48$ ) die spektrale Dichte  $\rho(\lambda)$  gemessen und simultan an Gl. (7.22) gefittet; um die Effekte höherer Ordnungen in der chiralen Störungstheorie zu berücksichtigen, haben wir in Gl. (7.22) noch zwei Terme  $a_1 \lambda$  und  $a_2 \lambda^2$  mit Konstanten  $a_1$ ,  $a_2$  berücksichtigt. Für  $f$  haben wir den in Abschnitt 6.1.2

bestimmten Wert eingesetzt; für die Gewichtungsfunktion  $w(Q)$  haben wir die gemessene Ladungsverteilung benutzt. Der Fit liefert die Werte

$$\delta = 0.20(3) \quad (7.24)$$

$$\Sigma = (212(18) \text{ MeV})^3, \quad (7.25)$$

die mit den in Kapitel 6 bestimmten Werten kompatibel sind. In Abb. 7.2 haben wir die spektrale Dichte in den beiden Volumina zusammen mit den Fitfunktionen dargestellt. Im Bereich  $a\lambda < 0.05$  ist die Volumenabhängigkeit klar erkennbar.

Mit der in Abschnitt 5.3.1 bestimmten Renormierungskonstante  $Z_S$  können wir den Wert von  $\Sigma$  in das  $\overline{\text{MS}}$ -Schema umrechnen und erhalten

$$\Sigma^{\overline{\text{MS}}}(2\text{GeV}) = (231(20) \text{ MeV})^3. \quad (7.26)$$

### 7.2.1 Zufallsmatrixtheorie

Eine weitere Möglichkeit, die spektrale Dichte des Diracoperators zu berechnen, ist durch die Zufallsmatrixtheorie[72] gegeben.

Dabei nimmt man an, daß die Verteilung der Eigenwerte in einem gewissen Bereich universell ist und nur von den globalen Symmetrien der Theorie abhängt. Demzufolge kann man die Eigenwertverteilung in einem möglichst einfachen Modell mit den entsprechenden Symmetrien berechnen.

Im Falle der QCD mit  $n_f$  Fermionflavours ist die Symmetrie die chirale  $SU(n_f)_L \times SU(n_f)_R$ -Symmetrie, die spontan zu  $SU(n_f)_V$  gebrochen ist. Ein Modell mit der gleichen Symmetrie ist das chirale unitäre Ensemble von Zufallsmatrizen, definiert durch die Partitionsfunktion

$$Z_\nu^{\text{ZM}} = \int DW \prod_i \det(D + m_i) e^{-\frac{N}{2} \text{tr} \Sigma_Z^2 W^\dagger W}. \quad (7.27)$$

Dabei ist  $W$  eine  $n \times m$ -Matrix,  $\nu = m - n$ ,  $N = n + m$ , und  $D$  ist eine Blockmatrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Hieraus lassen sich nicht nur die spektrale Dichte, sondern auch die Verteilung des  $k$ -kleinsten Eigenwertes  $\rho_k(Q; \lambda)$  analytisch bestimmen[73]. Die Formeln haben die allgemeine Form

$$\rho_k(Q; \lambda) = \hat{\rho}_k(Q; \Sigma_Z V \lambda), \quad (7.29)$$

die expliziten Ausdrücke für  $Q \leq 2$  und  $k=1$  sind

$$\hat{\rho}_1(0, x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \quad (7.30)$$

$$\hat{\rho}_1(1, x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} I_2(x) \quad (7.31)$$

$$\hat{\rho}_1(2, x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \left( I_2^2(x) - I_1(x) I_3(x) \right) \quad (7.32)$$

mit der modifizierten Besselfunktion 1. Art  $I_n(x)$ . Die Komplexität dieser Formeln nimmt mit wachsendem  $Q$  und  $k$  rasch zu.

Die Darstellung (7.27) der Partitionsfunktion der Zufallsmatrixtheorie kann als Partitionsfunktion eines  $\sigma$ -Modells dargestellt werden[72]; für  $N \rightarrow \infty$  ist die Partitionsfunktion gleich der Partitionsfunktion in der  $\epsilon$ -Entwicklung der chiralen Störungstheorie, wenn die Identifizierung

$$\Sigma_Z = \Sigma^{\text{eff}} \quad (7.33)$$

vorgenommen wird. In Abb. 7.3 haben wir die in Zufallsmatrixtheorie berechneten Eigenwertverteilungen mit den auf dem Gitter ( $\beta = 8.45$ ,  $V = 16^3 32$ ) gemessenen Verteilungen verglichen; dabei haben wir  $\Sigma^{\text{eff}}$  gemäß Gl. (7.18) mit den oben bestimmten Parametern  $\delta$ ,  $\Sigma$  berechnet. Qualitativ stimmt die gemessene Verteilung mit der von der Zufallsmatrixtheorie vorhergesagten Verteilung überein.

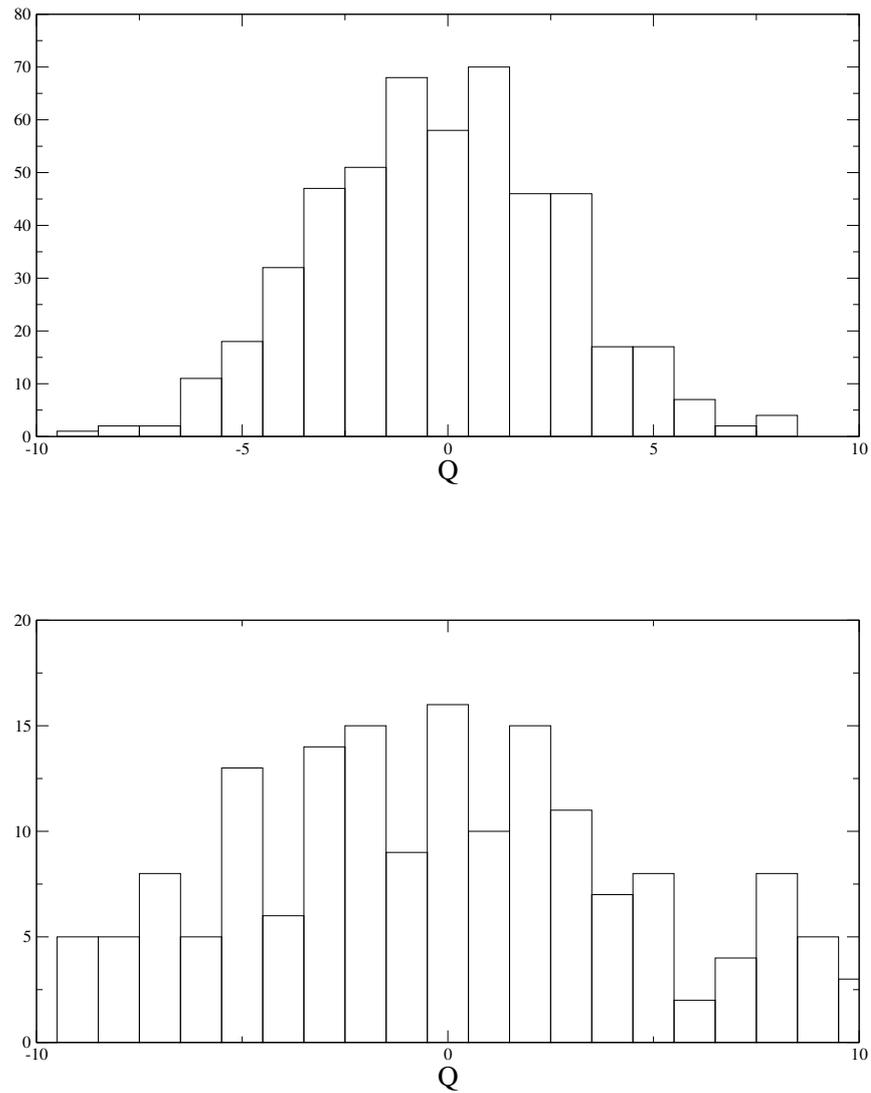


Abbildung 7.1: Verteilung der gemessenen topologischen Ladung. Oben:  $V = 16^{32}$ , Unten:  $V = 24^{348}$ , jeweils bei  $\beta = 8.45$ .

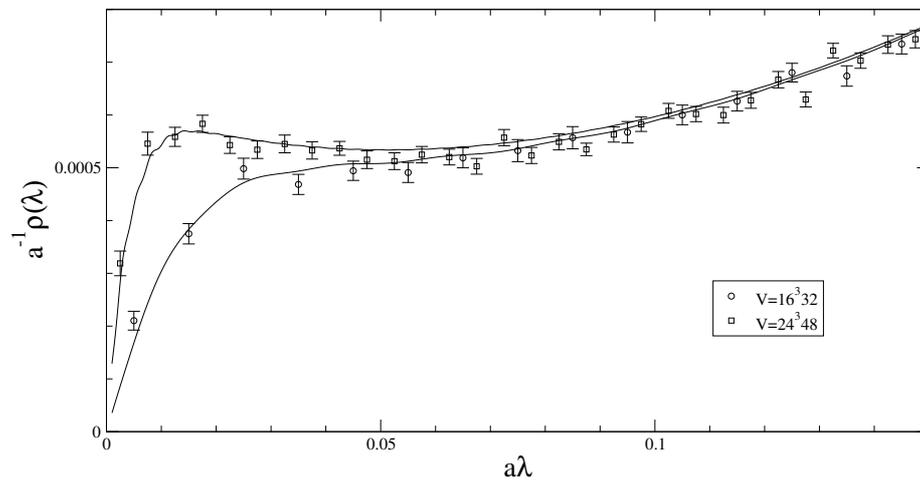


Abbildung 7.2: Spektrale Dichte für zwei Volumina, zusammen mit simultanen Fits an Gl. (7.22).

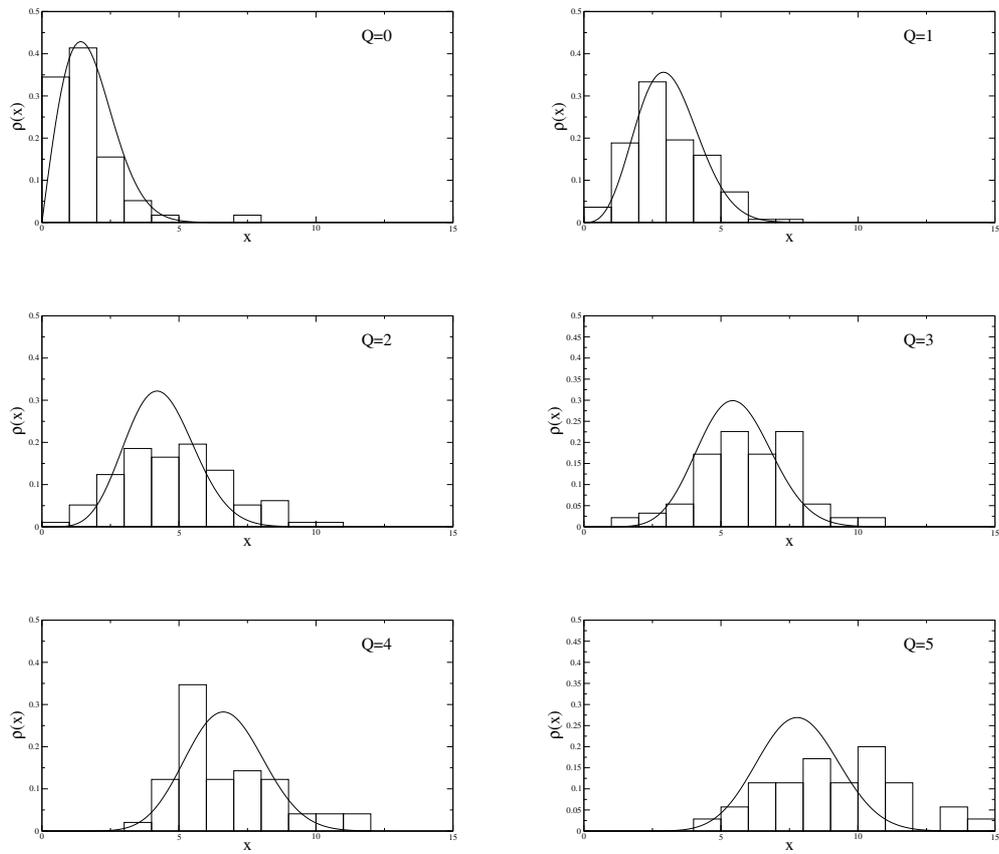


Abbildung 7.3: Verteilung des kleinsten nichtverschwindenden Eigenwertes und Vergleich mit der Zufallsmatrixtheorie.

