Flächeninhaltserhaltender Willmore-Fluss im asymptotisch Schwarzschildschen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften
am Fachbereich Mathematik und Informatik der Freien Universität Berlin

vorgelegt von Felix Jachan im Januar 2014

Erstgutachter: Prof. Dr. Felix Schulze
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jan Metzger

Datum der Disputation: 16. April 2014

Betreut von Prof. Dr. Felix Schulze, Freie Universität Berlin

Eidestattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und mich keiner anderen als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel bedient zu haben. Die Arbeit wurde in keinem früheren Promotionsverfahren eingereicht und ist bislang nicht veröffentlicht.

Berlin, 16. Januar 2014

Felix Jachan

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Forschung am Willmorefunktional

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) = \frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu$$

hat in den letzten Jahren rasant an Fahrt aufgenommen und befindet sich momentan nicht zuletzt wegen des jüngst erbrachten Beweises der in den 1960er Jahren geäußerten Willmorevermutung auf einem ihrer Höhepunkte.

In der oben angegebenen Form bezeichnet $F(\Sigma)$ die Immersion einer festen, geschlossenen (d.h. kompakten und randlosen) 2-Fläche Σ in eine umgebende 3-Mannigfaltigkeit und H die hierdurch auf Σ induzierte mittlere Krümmung. In der Literatur finden sich auch Varianten des Funktionals für Flächen in höheren Codimensionen. Ebenfalls anzutreffen sind Varianten mit von $1/2$ abweichenden Vorfaktoren sowie die Variante $\widetilde{\mathbf{W}}(F(\Sigma)) = \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu$, die sich bei Flächen im $\mathbf{R}^3$ nur um eine topologische Konstante von $\mathbf{W}(F(\Sigma))$ unterscheidet und mit deren Hilfe sich das Willmorefunktional anschaulich als Indikator für die „Rundheit" der Fläche $F(\Sigma)$ charakterisieren lässt; die Größe $|\mathring{A}|^2$ misst punktweise den Unterschied der Hauptkrümmungen zueinander. Andererseits wird durch $\mathbf{W}$ auch die *totale Krümmung* von $F(\Sigma)$ widergespiegelt, und es scheint einleuchtend, daß diese von starken Verwindungen oder Selbstüberschneidungen der Fläche in die Höhe getrieben wird – tatsächlich ist nach einem Resultat in [LY82] ein hinreichend kleiner Wert von $\mathbf{W}(F(\Sigma))$ ein Garant dafür, daß es sich bei $F(\Sigma)$ zwangsläufig um eine *eingebettete* Fläche handelt.

Wir halten fest, daß ein kleiner Wert des Willmorefunktionals eine gewisse Gutartigkeit der betrachteten Fläche nach sich zieht und grundsätzlich als gut und erstrebenswert angesehen werden sollte.

Geschichtliches und grundlegende Fragestellungen

Die Betrachtung des Willmorefunktionals lässt sich mindestens auf die Untersuchung von „Konformminimalflächen" im $\mathbf{R}^3$ in den 1920er Jahren zurückverfolgen; in [Tho24, §7] findet sich erstmals eine Herleitung der zu $\mathbf{W}$ gehörigen Euler-Lagrange-Gleichung im $\mathbf{R}^3$

$$0 = -(\triangle H + H|\mathring{A}|^2), \tag{1.1}$$

hier bezeichnet $\triangle$ den Laplace-Beltrami-Operator auf $F(\Sigma)$. Der Weg des Willmorefunktionals in seine heutige Popularität wurde jedoch erst Jahrzehnte später von Namenspatron T. J. Willmore geebnet, der mit elementaren Mitteln (vgl. [Wil96, §7.2]) die absolute untere Schranke

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) \geq 8\pi$$

für alle geschlossenen, immersierten Flächen $F(\Sigma) \subset \mathbf{R}^3$ herleitete, die genau auf runden Koordinatensphären angenommen wird, und später die eingangs erwähnte *Willmorevermutung* äußerte, es existiere nach Einschränkung von $\mathbf{W}$ auf die Klasse aller immersierten *Tori* eine bessere (d.h. größere) untere Schranke, die genau auf runden Tori mit Radienverhältnis $1/\sqrt{2}$ angenommen wird. Dies markiert den Ausgangspunkt andauernder und fruchtbarer Erforschungen dieser und verwandter Fragestellungen, wie etwa der Frage nach der Existenz von Minimierern von $\mathbf{W}$ mit vorgeschriebenem Genus (die sich mit den Resultaten aus [Sim93] und [BK03] positiv beantworten lässt). Die Willmorevermutung selbst wurde erst kürzlich in [MN12] bewiesen.

Eine Fragestellung, der im $\mathbf{R}^3$ jedoch *keine* größere Aufmerksamkeit zuteil wurde, ist die Existenz von Minimierern $F(\Sigma)$ von $\mathbf{W}$ unter vorgeschriebenem Flächeninhalt $|F(\Sigma)|$, d.h. die Existenz von Flächen, die für festes Σ und ein gegebenes $K > 0$

$$\begin{cases} |F(\Sigma)| = K, \\ F(\Sigma) \text{ ist lokaler Minimierer von } \mathbf{W} \text{ in } \left\{\tilde{F}(\Sigma) : |\tilde{F}(\Sigma)| = K\right\} \end{cases} \tag{1.2}$$

erfüllen. Dies allerdings aus gutem Grund, denn es lässt sich leicht zeigen, daß unter Umskalierung von $F(\Sigma)$ mit jedem beliebigen Faktor $\tau > 0$

$$\mathbf{W}(\tau \cdot F(\Sigma)) = \mathbf{W}(F(\Sigma)),$$

und sich damit aus jedem Minimierer $F(\Sigma)$ von $\mathbf{W}$ im $\mathbf{R}^3$ eine ganze Familie $\{\tau \cdot F(\Sigma) : \tau > 0\}$ von Minimierern erzeugen lässt, die jeden gewünschten Flächeninhalt abdeckt.

Anders jedoch verhält es sich bei der Betrachtung von (1.2) für Hyperflächen in *nichteuklidischen*, d.h. vom $\mathbf{R}^3$ abweichenden 3-Mannigfaltigkeiten, da ein wie oben beschriebenes Skalierungsargument nun nicht mehr zur Verfügung steht und auf andere Mittel zurückgegriffen werden muss. Gerade im Nichteuklidischen jedoch erhält die Suche nach derartigen Minimierern in ihrer Rolle als „nichteuklidische Analoga zu Koordinatensphären" eine gewisse Relevanz, wie in den folgenden Zeilen anhand einiger spezieller 3-Mannigfaltigkeiten verdeutlicht werden soll.

Minimierer von W zu gegebenem Flächeninhalt – Etwas Physik

Eine wichtige Rolle in der Relativitätstheorie spielt die Klasse *schwarzschildscher* 3-Mannigfaltigkeiten. Diese modellieren aus physikalischer Sicht die Umgebung eines perfekten isolierten Schwarzen Loches, und lassen sich aus geometrischer Sicht jeweils durch Versehung von $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ mit einer radialsymmetrischen Metrik g_m^S erzeugen, die über die euklidischen Koordinaten des $\mathbf{R}^3$ und einen *Masse*parameter m punktweise explizit durch

$$g_m^S(p)_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2\|p\|_{\mathbf{R}^3}}\right)^4 \delta_{ij}$$

festgelegt ist. Nun ergibt sich aus direkter Rechnung für die *Hawkingmasse* m_H jeder zentrierten Koordinatensphäre $S_R(0)$ mit Radius $R > 0$

$$\begin{aligned} m_H(S_R(0)) &:= \left(\frac{|S_R(0)|}{(16\pi)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \big(16\pi - 2\mathbf{W}(S_R(0))\big) \\ &= m, \end{aligned} \tag{1.3}$$

und es liegt nahe, die rechte Seite in (1.3) bei unbekanntem m auch zur *Definition* der Masse einer Schwarzschildmetrik zu verwenden. Diese Intuition lässt sich auch auf eine allgemeinere Klasse von Metriken ausdehnen: Betrachtet man Metriken g auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, die nur durch ihre *asymptotische Annäherung im Unendlichen* an eine (unbekannte) Schwarzschildmetrik g_m^S ausgezeichnet sind, die also für eine geeignete Norm

$$\sup_{\mathbf{R}^3 \setminus B_R(0)} \|g - g_m^S\| \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

erfüllen, motiviert dies die Betrachtung von (1.3) für Koordinatensphären $S_R(0)$ mit $R \to \infty$.

Nun sind derartige Sphären aber andererseits (vgl. [LMS11, Satz 12]) in $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g_m^S)$, ähnlich zu runden Sphären im Euklidischen, gerade als (lokale) *Minimierer von* $\mathbf{W}$ *unter vorgegebenem Flächeninhalt* ausgezeichnet – und es scheint daher ratsamer, bei der Übertragung einer Massedefinition auf asymptotisch schwarzschildsche Metriken g wie oben anstelle von Koordinatensphären auf diese robustere, da geometrischere Klasse von Flächen zurückzugreifen. Insgesamt stellt damit der Ausdruck

$$\left(\frac{K}{(16\pi)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(16\pi - 2\min\left\{\mathbf{W}(F(\Sigma)) \,:\, |F(\Sigma)| = K\right\}\right)$$

für $K \to \infty$, eventuell unter der Forderung zusätzlicher Rundheits- und Zentrierungsbedingungen an die betrachteten $F(\Sigma)$, einen guten Kandidaten zur Definition einer „natürlichen" Masse in asymptotisch schwarzschildschen Metriken dar.

Ähnlich ließen sich auch Ansätze verfolgen, um über die „Mittelpunkte" derartiger Minimierer mit Flächeninhalt $K \to \infty$ das Masse*zentrum* von g zu definieren (das sich im Falle der Schwarzschildmetrik g_m^S gerade im Ursprung $\{0\}$ befindet), oder über die Flächen selbst natürliche Polarkoordinaten auf einem äußeren Gebiet in $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ zu konstruieren.

Eine neue Methode für ein altes Problem

Die Existenz lokaler Minimierer von $\mathbf{W}$ unter vorgegebenen, hinreichend großen Flächeninhalten in asymptotisch schwarzschildschen Metriken wurde umfassend von T. Lamm, J. Metzger und F. Schulze in [LMS11] behandelt; insbesondere wurden dort auch Zentrierungsresultate bewiesen, die die dort konstruierten Minimierer für die oben aufgeführten Verwendungszwecke in Betracht kommen lassen. Der Beweis zu [LMS11, Satz 1] wurde im Wesentlichen über eine *Stetigkeitsmethode* erbracht: Ist g asymptotisch zu einer schwarzschildschen Metrik g_m^S, so lässt sich durch Interpolation zwischen g_m^S und g unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen für jedes hinreichend große R aus der Existenz der expliziten Lösung $S_R(0)$ zu (1.2) in $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g_m^S)$ auf die Existenz einer Lösung $\Theta_R = \Theta(S_R(0))$ in $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ schließen. Aus dem Konstruktionsprozess von Θ_R geht hervor, daß die auf diese Weise für ein geeignetes $R_0 \gg 1$ aus den Mengen $\{S_R(0)\}_{R \geq R_0}$ konstruierbare Familie $\{\Theta_R\}_{R \geq R_0}$ eine Blätterung eines äußeren Gebietes von $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ darstellt und insbesondere jeden gewünschten, hinreichend großen Flächeninhalt abdeckt.

Ein hiervon in zweierlei Hinsicht abweichender Ansatz zum Auffinden „runder" Hyperflächen vorgegebener Größe wird von G. Huisken und S.-T. Yau in [HY96] verfolgt. Der erste Unterschied liegt bereits in der Nutzbarmachung bzw. Übertragung eines von (1.2) abweichenden Charakteristikums runder Sphären im $\mathbf{R}^3$: Diese lassen sich auch als *Lösungen des isoperimetrischen Problems*, d.h. für ein gegebenes $V > 0$ als Lösungen zu

$$\begin{cases} \mathrm{vol}(F(\Sigma)) = V, \\ F(\Sigma) \text{ ist lokaler Minimierer von } |\cdot| \text{ in } \left\{\tilde{F}(\Sigma) : \mathrm{vol}(\tilde{F}(\Sigma)) = V\right\} \end{cases} \tag{1.4}$$

beschreiben, wobei $\mathrm{vol}(F(\Sigma))$ das (3-)Volumen des von $F(\Sigma)$ eingeschlossen Gebiets bezeichnet. In Analogie zu den, Lösungen von (1.2) betreffenden, Ergebnissen in [LMS11] lassen sich die Hauptresultate in [HY96] in der Existenz einer Blätterung $\{\tilde{\Theta}_R\}_{R\geq R_0}$, $R_0 \gg 1$, hinreichend zentrierter Lösungen zu (1.4) zusammenfassen, von denen jedes Blatt $\tilde{\Theta}_R$ dasselbe Volumen wie die Koordinatensphäre $S_R(0)$ einschließt.

Der für uns wesentlichere Unterschied zu [LMS11] besteht jedoch in der Methode, die in [HY96] benutzt wird, um die Flächen $\tilde{\Theta}_R$ ausfindig zu machen. Diese werden über eine Variante des *Gradientenflusses* zum Flächeninhaltsfunktional $|\cdot|$ erzeugt: Ohne Umwege über die Konstruktion von Minimierern in $(\mathbf{R}^3\setminus\{0\}, g_m^S)$ wird eine beliebige „Start"fläche in $(\mathbf{R}^3\setminus\{0\}, g)$ mit festgelegtem Volumen (in diesem Falle eine Koordinatensphäre $S_R(0)$) nach einer präzise festgelegten geometrischen Vorschrift deformiert, die den Flächeninhalt der Fläche verringert, während das eingeschlossene Volumen unverändert bleibt. Es lässt sich zeigen, daß unter Fortschreiten einer derartigen *Evolution* im Grenzwert eine Lösung von (1.4) entsteht, die das (festgelegte) eingeschlossene Volumen mit der Startfläche gemein hat.

Die vorliegende Arbeit befasst sich im weitesten Sinne mit der Frage, inwieweit die *Resultate* aus [LMS11] mit den *Methoden* aus [HY96] erbracht werden können, d.h. ob es möglich ist, Lösungen des Problems (1.2) in $(\mathbf{R}^3\setminus\{0\}, g)$ durch Benutzung eines Gradientenflusses, nun zum Willmorefunktional, oder einer Variante hiervon erzeugen zu können. Bei der Untersuchung dieser Fragestellung kann auf einen umfangreichen Fundus bereits entwickelter Methoden und Ideen zurückgegriffen werden, die im Zusammenhang mit verwandten Fragestellungen im $\mathbf{R}^3$ entwickelt wurden und in den nächsten Absätzen umrissen und präzisiert werden sollen.

Der Willmore-Fluss im $\mathbf{R}^3$ und die Argumente von Kuwert & Schätzle

Gradientenflüsse stellen ein zentrales Werkzeug in der Variationsrechnung dar: Ausgehend von der Überlegung, daß (genau wie in der endlichdimensionalen Analysis) der Gradient eines reellwertigen Funktionals an einem nichtkritischen Punkt in Richtung der höchsten Steigung zeigt, „fließt" man unter konsequenter Bewegung in Richtung des *negativen* Gradienten zwangsläufig auf ein lokales Minimum oder, zumindest, einen kritischen Punkt dieses Funktionals zu. Hierbei ist zu beachten, daß diese Bewegung von einem gegebenen Startpunkt aus im Allgemeinen zwar für eine kurze Zeit, aber nicht beliebig lang durchführbar ist, da auch Punkte erreicht werden können, in denen das betrachtete Funktional nicht mehr definiert ist. Diese *Singularitäten* gilt es zu klassifizieren und, im Idealfall, auszuschließen.

Nun ist im Falle des Willmorefunktionals im $\mathbf{R}^3$ der Gradient an einem „Punkt" F gerade gegeben durch die rechte Seite von (1.1) (genauer durch die Funktion $\partial\mathbf{W} : p\in\Sigma \mapsto -(\triangle H + H|\mathring{A}|^2)\cdot\nu(p) \in \mathbf{R}^3$, wobei ν ein festes Einheitsnormalenfeld an $F(\Sigma)$ bezeichnet), womit sich aus obiger Argumentation die Betrachtung des Gradientenflusses zum Willmorefunktional bzw. des *Willmore-Flusses* im $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} F:\Sigma\times[0,T)\to\mathbf{R}^3,\\ F(\Sigma,0)=F_0(\Sigma),\\ \partial_t F(p,t) = (\triangle H + H|\mathring{A}|^2)\cdot\nu(p) \end{cases} \tag{WF$\mathbf{R}^3$}$$

zu einer gegebenen Startfläche $F_0:\Sigma\to\mathbf{R}^3$ motiviert.

Initiiert und vorangetrieben wurde die Untersuchung dieses Flusses maßgeblich von E. Kuwert und R. Schätzle in den frühen 2000er Jahren in [KS02] und [KS01], teilweise auch in höheren Codimensionen. Hervorzuheben ist insbesondere folgendes Resultat, mit dem sich das erste Auftreten einer Singularität unter (WF$\mathbf{R}^3$) auf einem Zeitintervall ausschließen lässt, dessen Länge allein durch den Grad der *Krümmungskonzentration* von F_0 bestimmt ist. Im Folgenden bezeichnet A die zweite Fundamentalform von $F(\Sigma)$, deren Norm $|A|$ punktweise die Norm aller Hauptkrümmungen kontrolliert, und die Integration (1.5) versteht sich auf dem Urbild $F_0^{-1}(B_\rho(x)) \subset \Sigma$.

Satz 1.1 ([KS02, Satz 1.2, Aussage (1.5)] für $n = 3$)**.** *Sei* Σ *geschlossene* 2*-Fläche und* $F_0 : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ *glatte Immersion. Sei* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{R}^3$ *maximale Lösung zu* (WF$\mathbf{R}^3$) *mit* $F(\Sigma, 0) = F_0(\Sigma)$*. Dann gibt es absolute Konstanten* $\varepsilon_1, c > 0$*, sodaß, falls für ein* $\rho > 0$ *und jede Kugel* $B_\rho(x) \subset \mathbf{R}^3$ *die Voraussetzung*

$$\int_{F_0(\Sigma)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon_1 \tag{1.5}$$

erfüllt ist,

$$T_{\max} > c\rho^4.$$

□

Aus Satz 1.1 ergibt sich sofort ein notwendiges Charakteristikum jeder Singularität: Ist bekannt, daß für eine Lösung $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{R}^3$ von (WF$\mathbf{R}^3$)

$$T_{\max} < \infty,$$

und ist $\rho(t) > 0$ für jedes $t \in [0, T_{\max})$ als beliebiger Radius gewählt, der Bedingung (1.5) auf der Fläche $F(\Sigma, t)$ erfüllt, so ergibt sich aus Satz 1.1 direkt

$$T_{\max} - t > c\rho(t)^4,$$

und damit für $t \nearrow T_{\max}$ zwangsläufig

$$\rho(t) < (c^{-1}(T_{\max} - t))^{\frac{1}{4}} \longrightarrow 0.$$

Es lässt sich schließen, daß sich *ein Teil der Krümmung von* $F(\Sigma, \cdot)$ *im umgebenden Raum konzentriert*, d.h. daß Zeiten $t_i \nearrow T_{\max}$, Radien $\rho_i \searrow 0$ und Kugeln $B_{\rho_i}(x_i) \subset \mathbf{R}^3$ existieren mit

$$\int_{F(\Sigma,t_i)\cap B_{\rho_i}(x_i)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu > \varepsilon_1 \quad \text{für alle } i. \tag{1.6}$$

Mit Eigenschaft (1.6) wird der vage formulierte „Abbruch“ des Flusses (WF$\mathbf{R}^3$) durch ein konkretes geometrisches Phänomen greifbar und damit insbesondere *an*greifbar gemacht: Gelingt es, das Auftreten von (1.6) durch die Forderung geeigneter Zusatzbedingungen kategorisch auszuschließen, so sind auf diesem Wege hinreichende Bedingungen für die *Langzeitexistenz* von (WF$\mathbf{R}^3$) gefunden. Hierfür erinnern wir an die eingangs erwähnte Rolle von $\mathbf{W}$ als Maß für die totale Krümmung einer Fläche; es besteht die Hoffnung, daß das Auftreten der durch (1.6) beschriebenen Krümmungskonzentration nur bei großen Werten der $\mathbf{W}(F(\Sigma, t_i))$ möglich ist – was sich insbesondere durch Forderung einer geeigneten Schranke an $\mathbf{W}(F_0(\Sigma))$ gänzlich ausschließen ließe. Dieses Argument wird in [KS04, Satz 5.2] tatsächlich zum Erfolg geführt; für alle *sphärischen* Startflächen $F_0(\Sigma) \subset \mathbf{R}^3$, die der Bedingung

$$\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \leq 2\mathbf{W}(S_R(x)) = 16\pi$$

genügen, lässt sich das Auftreten von (1.6) ausschließen und damit $T_{\max} = \infty$ gewährleisten.

Das dem Beweis dieses Resultates zugrundeliegende Hauptwerkzeug wird durch die Konstruktion und Analyse einer *Blowupfläche* um die Konzentrationspunkte geliefert; grob gesprochen wird nach Normierung aller Kugeln $B_{\rho_i}(x_i)$ in (1.6) auf einen einheitlichen Radius und der damit einhergehenden Reskalierung der Flächenstücke $F(\Sigma,t_i)\cap B_{\rho_i}(x_i)$ im Grenzwert ein Flächenstück erzeugt, das aufgrund der uniformen unteren Schranke in (1.6) eine nichtverschwindende Krümmung aufweist. Es lässt sich jedoch zeigen, daß dieses Flächenstück bei hinreichend kleinen Werten der $\mathbf{W}(F(\Sigma,t_i))$ einen Teil einer (flachen) Ebene darstellen muss, woraus sich in diesem Fall direkt ein Widerspruch ergibt.

Aus dem Ausbleiben von Krümmungskonzentration lassen sich auch Rückschlüsse über das Langzeit*verhalten* der $F(\Sigma,\cdot)$ unter (WF$\mathbf{R}^3$) ziehen: Aus der hierdurch implizierten gleichmäßigen „L^2-Verteilung“ der Krümmung auf allen $F(\Sigma,t)$ kann induktiv auf uniforme Schranken an A und alle Ableitungen $\nabla^{(k)}A$ geschlossen werden. Diese Schranken bilden den Grundstein für die Argumente in [KS01, Lemma 5.4] und [KS01, Lemma 5.5], mit denen sich für $t\nearrow\infty$ *glatte Konvergenz der $F(\Sigma,t)$ zu einer runden Sphäre* und damit zu einem Minimierer von $\mathbf{W}$ im $\mathbf{R}^3$ zeigen lässt.

Flächeninhaltserhaltender Willmore-Fluss – nicht nur im $\mathbf{R}^3$

Nach Konstruktion des Willmoreflusses ist die Willmoreenergie einer sich unter diesem Fluss bewegenden Fläche $F(\Sigma,t)$ zwar monoton fallend in t – eine Kontrolle über das Verhalten des Flächeninhalts $|F(\Sigma,t)|$ ist jedoch im Allgemeinen nicht zu erwarten. Somit kommt die Übertragung des Willmore-Flusses in seiner oben beschriebenen und von Kuwert & Schätzle untersuchten Form (WF$\mathbf{R}^3$) auf asymptotisch schwarzschildsche Mannigfaltigkeiten zwar als Mittel zum Auffinden von Minimierern von $\mathbf{W}$ in diesen Mannigfaltigkeiten in Betracht, nicht jedoch zum Auffinden von Lösungen zu (1.2) für gegebenes K.

Eine Lösung dieses Problems bietet die Abänderung von (WF$\mathbf{R}^3$) durch die Entfernung desjenigen Bestandteils von $\partial_t F(p,t)$, der sich für die Veränderung des Flächeninhalts verantwortlich zeigt. Dieses Verfahren wird im Detail in Abschnitt 2.2 durchgeführt und führt, ausgehend von (WF$\mathbf{R}^3$), auf den Fluss

$$\begin{cases} F:\Sigma\times[0,T)\to\mathbf{R}^3,\\ F(\Sigma,0)=F_0(\Sigma),\\ \partial_t F(p,t)=(\triangle H+H|\mathring{A}|^2)\cdot\nu(p)+H\lambda\cdot\nu(p)\end{cases} \tag{WFF$\mathbf{R}^3$}$$

mit einem globalen Integralterm $\lambda=\lambda(F(\Sigma,t))$, auf dessen explizite Gestalt erst später eingegangen werden soll – wesentlich ist hier nur, daß es sich bei $-H\lambda\cdot\nu(p)$ gerade um den oben angesprochenen zu entfernenden Teil von $\partial_t F(p,t)$ handelt, und bei Evolution unter (WFF$\mathbf{R}^3$) tatsächlich die gewünschten Monotonien

$$\partial_t\mathbf{W}(F(\Sigma,t))\le 0 \quad \text{und} \quad \partial_t|F(\Sigma,t)|=0$$

gelten. Es besteht also die Hoffnung, mit dem Fluss (WFF$\mathbf{R}^3$) zumindest im Euklidischen geeignete Startflächen $F_0(\Sigma)$ auf flächeninhaltserhaltende Weise in Minimierer von $\mathbf{W}$ umformen zu können (die sich mit den Resultaten der vorliegenden Arbeit tatsächlich bewahrheiten wird).

Auch in allgemeineren (insbesondere nichteuklidischen) 3-Mannigfaltigkeiten lässt sich, ähnlich zum Vorgehen im $\mathbf{R}^3$, der Gradientenfluss zu $\mathbf{W}$ bestimmen und wie oben beschrieben in eine flächeninhaltserhaltende Form bringen. Dies führt auf die in Abschnitt 2.2 beschriebenen, universelleren Flüsse (WF) und (WFF), die im Euklidischen gerade den Flüssen (WF$\mathbf{R}^3$) bzw. (WFF$\mathbf{R}^3$) entsprechen und sich von diesen um zusätzliche, aus der Umgebungskrümmung resultierende Terme unterscheiden. Mit der Untersuchung des Flusses (WFF) in asymptotisch schwarzschildschen Mannigfaltigkeiten $(\mathbf{R}^3\setminus\{0\},g)$ und der hierfür notwendigen Adaption der im Euklidischen für (WF) erarbeiteten Resultate ist das Hauptmotiv der vorliegenden Arbeit gefunden.

Zu bewältigende Hürden

Mit der Herauslösung der Methoden von Kuwert & Schätzle aus dem Euklidischen wird in vielerlei Hinsicht Neuland betreten; erst kürzlich wurden in [MWW13] mit dem Aufstellen einer zu Satz 1.1 analogen Aussage erste Schritte zur Untersuchung des Flusses (WF) in ausgewählten 3-Mannigfaltigkeiten getan, entsprechende Resultate für (WFF) in asymptotisch schwarzschildschen Mannigfaltigkeiten $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ und allgemeinen 3-Mannigfaltigkeiten werden in Abschnitt 4.3 und Anhang A.2 dieser Arbeit aufgestellt.

Die Schwierigkeit der Arbeit in Mannigfaltigkeiten übersteigt die der Arbeit im Euklidischen um ein Vielfaches: Die umgebende Krümmung induziert Terme in nahezu jeder aufzustellenden Evolutionsgleichung, deren algebraische Struktur sich oft an keiner offensichtlichen Vorschrift orientiert und die sich damit nur schwer in allgemeine Aussagen und Abschätzungen pressen lassen.

Auch auf die Annehmlichkeiten der Vektorraumstruktur des $\mathbf{R}^3$ muss zunächst verzichtet werden; die Mittel der Translation und Reskalierung von Hyperflächen, die in [KS01] eine wesentliche Rolle in der Blowupanalyse spielen und damit einen entscheidenden Anteil an der Herleitung von Langzeitexistenzresultaten tragen, stehen nicht mehr zur Verfügung und müssen durch geeignete Alternativen ersetzt werden. Hier jedoch wird uns die spezielle Struktur der in dieser Arbeit betrachteten Mannigfaltigkeiten $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ in die Hände spielen, die es erlaubt, entsprechende Operationen auf Koordinatenebene weiterhin durchzuführen, solange sich die hieraus resultierenden nichtgeometrischen Auswirkungen korrigieren oder auf sinnvolle Weise kontrollieren lassen.

Probleme sind auch durch den in (WFF) auftretenden nichtlokalen Integralterm λ zu erwarten. Auch dieser findet sich in einem Großteil der zur Herleitung nennenswerter Resultate notwendigen Gleichungen wieder und muss daher auf geeignete Weise kontrolliert werden. Tatsächlich ist dies aber mit den üblichen analytischen Mitteln kaum zu bewerkstelligen, und auch nach dem Studium der folgenden Kapitel wird der Leser keine Antworten auf die Frage nach Monotonieverhalten, expliziten Schranken oder auch nur nach dem bloßen Vorzeichen von λ gefunden haben. Glücklicherweise aber wird sich zeigen, daß zur Herleitung vieler Aussagen unter (WFF) zu einem festen Zeitpunkt $t \geq 0$ nur die Kenntnis der Größe $\int_0^t \lambda^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, d.h. der L^2-Norm von λ auf dem verstrichenen Zeitintervall, erforderlich ist. Zumindest für (WFF) im Euklidischen aber lässt sich gerade diese Größe durch ein bemerkenswert kurzes Argument kontrollieren, das zu großen Teilen einem Hinweis des Betreuers der vorliegenden Arbeit, Felix Schulze, zu verdanken ist. Hierauf aufbauend kann nun wieder ein Charakteristikum von $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ ausgenutzt werden: Aufgrund des asymptotischen Verhaltens der Metrik g lässt sich der Ansatz zur L^2-Kontrolle von λ aus dem Euklidischen auf ein hinreichend weit vom Ursprung entferntes Gebiet in $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ übertragen und auch dort zum Erfolg führen.

Die Übertragung von Argumenten aus dem $\mathbf{R}^3$ in einen äußeren Bereich von $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ wird ein häufig wiederkehrendes Motiv dieser Arbeit darstellen.

Die folgenden Seiten und ausgewählte Resultate

Wir können nun eine Auswahl der in dieser Arbeit aufgestellten Resultate und den hierfür eingeschlagenen Weg umreißen. Zwecks besserer Lesbarkeit setzen wir im Folgenden für Metriken g wie oben

$$\mathbf{M} := (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g)$$

und verzichten weitgehend auf für diesen Überblick unwesentliche technische Details; für die exakten Aussagen sei auf die entsprechenden Kapitel und die referenzierten Resultate verwiesen.

Eine grundlegende Frage bei der Untersuchung von Lösungen eines jeden geometrischen Flusses ist die nach der bloßen *Existenz* dieser Lösungen, die für (WFF) in $\mathbf{M}$ durch folgenden Satz gewährleistet wird. Die hierfür benötigten Beweistechniken liegen aufgrund des nichtlokalen Terms λ etwas abseits der üblichen „Standardmethoden“ für partielle Differentialgleichungen, und greifen vor allem auf die abstrakte Lösungstheorie in [Ama93] und die Argumentation in [ES98, §2] zurück. Es sei angemerkt, daß eine analoge Existenzaussage ohne Einschränkung auch für (WFF) in *beliebigen* umgebenden 3-Mannigfaltigkeiten gilt.

Satz 1.2 (Satz 4.3, Kurzzeitexistenz für (WFF))**.** *Sei* Σ *geschlossene* 2*-Fläche und* $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ *glatte Immersion. Dann existiert ein maximales* $T_{\max} > 0$ *und eine eindeutige Lösung* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ *von* (WFF) *zu Startwerten* $F_0(\Sigma)$*.* □

Durch Adaption der Methoden von Kuwert & Schätzle ist es nun möglich, ein Analogon des oben beschriebenen Satzes 1.1 aufzustellen, um wie dort die Zeit $T_{\max}$ auf sinnvolle Weise in Abhängigkeit von $F_0(\Sigma)$ zu quantifizieren und im Gegenzug das charakteristische Verhalten der Flächen $F(\Sigma, \cdot)$ nahe $T_{\max}$ herauszuarbeiten. Hierfür muss gefordert werden, daß sich die betrachteten Flächen im „fast euklidischen“ Bereich von $\mathbf{M}$, d.h. hinreichend weit entfernt vom Ursprung bewegen; diese Forderung ist für die Übertragbarkeit ausgewählter im $\mathbf{R}^3$ zulässiger Argumente wesentlich und wird mit Eigenschaft (VΣ) auf Seite 45 präzisiert. Zusätzlich ist zu gewährleisten, daß die $F(\Sigma, t)$ mit wachsendem t nicht in der (räumlichen) Unendlichkeit verschwinden.

Satz 1.3 (Satz 4.11, Minimale Existenzzeit für (WFF))**.** *Sei* Σ *geschlossene* 2*-Fläche und* $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ *glatte Immersion. Sei* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ *maximale Lösung von* (WFF) *mit* $F(\Sigma, 0) = F_0(\Sigma)$*, die für alle* $t \in [0, T_{\max})$ *hinreichend weit vom Ursprung entfernt liegt und hinreichend zentriert ist. Gelte*

$$\int_0^{T_{\max}} \lambda^2(\xi)\, \mathrm{d}\xi \ll 1. \tag{1.7}$$

Dann gibt es eine absolute Konstante $\varepsilon_1 > 0$*, sodaß, falls für ein* $\rho > 0$ *und jede Koordinatenkugel* $B_\rho(x) \subset \mathbf{M}$ *die Voraussetzung*

$$\int_{F_0(\Sigma) \cap B_\rho(x)} |A|^2\, \mathrm{d}\mu \le \varepsilon_1$$

erfüllt ist,

$$T_{\max} > \min\{c\rho^4, C(\mathbf{M})\} > 0.$$

□

Auf den ersten Blick stellt Bedingung (1.7) eine äußerst restriktive Einschränkung der Anwendbarkeit von Satz 1.3 dar. Wir erinnern allerdings daran, daß dieser Satz nur dazu benötigt wird, um das Verhalten von (WFF) *nahe* einer vermeintlichen Singularität zu untersuchen; falls sich zeigen lässt, daß unter (WFF) im Falle einer *endlichen* Existenzzeit $T_{\max}$

$$\int_0^{T_{\max}} \lambda^2(\xi)\, \mathrm{d}\xi < \infty, \tag{1.8}$$

so folgt für $t \nearrow T_{\max}$

$$\int_t^{T_{\max}} \lambda^2(\xi)\, \mathrm{d}\xi \to 0$$

und damit die Anwendbarkeit von Satz 1.3 *nahe* $T_{\max}$. Auch beim Aufstellen von Krümmungsabschätzungen unter (WFF) ist die Kontrolle der Größe (1.8) wesentlich und stellt damit ein zentrales Standbein für viele der in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Resultate dar. Wie bereits angekündigt lässt sich eine derartige Kontrolle tatsächlich gewährleisten:

Satz 1.4 (Satz 4.7, L^2-Schranken an λ)**.** *Sei* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ *Lösung von* (WFF) *mit* $F(\Sigma, 0) = F_0(\Sigma)$*, die für alle* $t \in [0, T_{\max})$ *hinreichend weit vom Ursprung entfernt liegt und hinreichend zentriert ist. Dann gilt für alle* $t \in [0, T_{\max})$

$$\int_0^t \lambda(\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi \leq C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma))(1+t).$$

□

Mit den Sätzen 1.3 und 1.4 lässt sich nun unter (WFF) in $\mathbf{M}$ nahe einer Singularität auf Krümmungskonzentration der Flächen $F(\Sigma, \cdot)$ schließen, und damit auf das Phänomen, das auch schon von Kuwert & Schätzle für den Fluss (WF) im $\mathbf{R}^3$ nachgewiesen wurde. Es existieren also Zeiten $t_i \nearrow T_{\max}$ und Koordinatenkugeln $B_{\rho_i}(x_i) \subset \mathbf{M}$ mit $\rho_i \searrow 0$, die die Eigenschaft (1.6) erfüllen.

Wie in [KS04] kann dieses Verhalten nun bei bestimmten Startflächen $F_0(\Sigma)$ ausgeschlossen werden. Eine zentrale (wenn auch technische) Rolle spielt hierbei die *Blowupfläche* $\hat{F}(\hat{\Sigma}) \subset \mathbf{R}^3$, die in einem Grenzwertprozess nach geeigneter Reskalierung der Flächen $F(\Sigma, t_i)$ um die Punkte x_i entsteht und die aufgrund der (skalierungsinvarianten) unteren Schranke in (1.6) eine nichtverschwindende Krümmung aufweist. Dem Beweis des folgenden Satzes liegen in hohem Maße die in Abschnitt B.1 aufgestellten Skalierungstechniken zugrunde.

Satz 1.5 (Satz 4.18, Existenz und Eigenschaften der Blowupfläche)**.** *Sei* Σ *geschlossene* 2*-Fläche und* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ *Lösung von* (WFF)*, die für alle* $t \in [0, T_{\max})$ *hinreichend weit vom Ursprung entfernt liegt und hinreichend zentriert ist. Konzentriere sich die Krümmung von* $F(\Sigma, \cdot)$ *im Sinne von* (1.6)*. Dann gibt es Zeiten* $t_j \nearrow T_{\max}$ *und eine nichtkompakte* 2*-Fläche* $\hat{F} : \hat{\Sigma} \to \mathbf{R}^3$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Auf Koordinatenebene konvergieren die Flächen* $F(\Sigma, t_j)$ *nach Reskalierung und Translation in einem geeigneten Sinne gegen* $\hat{F}(\hat{\Sigma})$*,*
- $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ *ist kritischer Punkt von* $\mathbf{W}$*,*
- *Für die zweite Fundamentalform* $\hat{A}$ *von* $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ *gilt* $\hat{A} \not\equiv 0$.

□

Wir merken an, daß $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ bemerkenswerte Parallelen zu der in [KS01, §4] konstruierten Blowupfläche für (WF) im Euklidischen aufweist: Die Tatsache, daß $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ eine Hyperfläche im $\mathbf{R}^3$ darstellt, ist auf das anschauliche „Wegskalieren“ der umgebenden Krümmung zurückzuführen. Da sich außerdem zeigen lässt, daß der Term λ im Grenzwert keine Rolle mehr spielt, handelt es sich bei $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ um einen stationären Punkt von (WF) und nicht etwa „nur“ von (WFF).

Mit Hilfe der Kompaktheitssätze in [KS04] und eines tiefen Klassifikationsresultates aus [Bry84] kann nun bei *sphärischen* $F(\Sigma, \cdot)$ und hinreichend kleinen Werten von $\mathbf{W}(F(\Sigma, \cdot))$ mindestens eine der in Satz 1.5 aufgeführten Eigenschaften von $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ ausgeschlossen werden. Genauer lässt sich zeigen, daß $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ unter diesen Voraussetzungen nur dann ein kritischer Punkt von $\mathbf{W}$ sein kann, wenn $\hat{F}$ eine *Ebene* im $\mathbf{R}^3$ beschreibt und damit insbesondere $\hat{A} \equiv 0$

erfüllt. Es ergibt sich direkt ein Widerspruch zu Satz 1.5 und damit die Negation der Implikationskette

$$T_{\max} < \infty \Rightarrow \text{Krümmungskonzentration} \Rightarrow \text{Existenz von } \hat{F}(\hat{\Sigma}) \text{ wie in Satz 1.5.}$$

Wir erhalten folgendes Resultat, das ein Analogon zu [KS04, Satz 5.2] darstellt:

Satz 1.6 (Satz 4.20, Langzeitexistenz). *Sei Σ sphärisch und $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ glatte Immersion mit*

$$\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \leq 16\pi - \zeta$$

für ein $\zeta > 0$. Sei $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ maximale Lösung von (WFF) *mit $F(\Sigma, 0) = F_0(\Sigma)$, die in Abhängigkeit von ζ für alle $t \in [0, T_{\max})$ hinreichend weit vom Ursprung entfernt liegt und hinreichend zentriert ist. Dann gilt*

$$T_{\max} = \infty.$$

□

Der Einfluss der Konstante ζ auf die notwendige Entfernung der Flächen zum Ursprung in Satz 1.6 ergibt sich aus der Notwendigkeit, im Beweis das Willmorefunktional der betrachteten Flächen *bezüglich der euklidischen Metrik* hinreichend beschränken zu können – hierdurch erst wird die Anwendbarkeit der Resultate aus [KS04] und [Bry84] überhaupt gewährleistet. Es sei auch angemerkt, daß diese Resultate zwingend Codimension 1 voraussetzen, und damit eine eventuelle Verallgemeinerung von Satz 1.6 auf höhere Codimensionen notgedrungen über neue Beweistechniken erbracht werden müsste. Bei allen weiteren bis hierher vorgestellten Resultaten scheint eine direkte Verallgemeinerung jedoch durchaus aussichtsreich.

Ist die Langzeit*existenz* einer Lösung $F(\Sigma, \cdot)$ von (WFF) sichergestellt, so stellt sich die Frage nach dem Langzeit*verhalten* dieser Lösung, d.h. nach dem Verhalten der Flächen $F(\Sigma, t)$ für $t \nearrow \infty$. Wie in [KS01] lassen sich hierfür uniforme Krümmungsabschätzungen an diese Flächen ausnutzen, die durch das dem Ausbleiben von Krümmungskonzentration ermöglicht werden und die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 aufgestellt werden. Schnell ergibt sich dann unter Verwendung eines geeigneten Kompaktheitssatzes folgendes Konvergenzresultat.

Satz 1.7 (Lemma 4.21, Teilfolgenkonvergenz). *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.6 gibt es für jede Folge $t_i \nearrow \infty$ eine Teilfolge $t_j \nearrow \infty$ und eine Immersion $F_\infty : \Sigma \to \mathbf{M}$ mit den Eigenschaften*

- *Die Flächen $F(\Sigma, t_j)$ konvergieren in $C^\infty(\mathbf{M})$ gegen $F_\infty(\Sigma)$,*
- *$F_\infty(\Sigma)$ ist stationäre Fläche unter* (WFF) *in* $\mathbf{M}$.

□

Satz 1.7 stellt ein Analogon zu [KS01, Lemma 5.4] dar und markiert bislang das Ende der Übertragungen des durch [KS02] und [KS01] vorgegebenen Weges auf (WFF) in $\mathbf{M}$. Für die Übertragung weiterer Ergebnisse und insbesondere den Nachweis *glatter* Konvergenz zu stationären Flächen unter (WFF) wäre nun eine hinreichende Klassifikation dieser Flächen notwendig; der Umstand, daß die Geometrie der Immersion F_∞ in Satz 1.7 eventuell massiv von der konkreten Folge t_i abhängt, steht der Herleitung folgen*unabhängiger* Aussagen über die Flächen $F(\Sigma, \cdot)$ und damit den ersten Schritten zum Nachweis glatter Konvergenz unter (WFF) in $\mathbf{M}$ im Wege.

Bei der Betrachtung von (WFF) *im Euklidischen* können jedoch auch diese ausstehenden Schritte bewältigt werden: Die Übertragung der bis hierher aufgeführten Resultate in den $\mathbf{R}^3$

ist nicht nur problemlos möglich, sondern führt im Falle von Satz 1.4 sogar auf die weitaus stärkere Aussage

$$\int_0^\infty \lambda(\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi \le C(F_0(\Sigma)),$$

die in Proposition 4.8 präzisiert wird. Bei der Adaption von Satz 1.7 führt dies jedoch zur Erkenntnis, daß jeder wie dort beschriebene Grenzwert $F_\infty(\Sigma)$ zwangsläufig einen kritischen Punkt von $\mathbf{W}$ darstellt, der sich mit den Resultaten aus [Bry84] eindeutig als runde Sphäre mit Flächeninhalt $|F_0(\Sigma)|$ identifizieren lässt. Im Detail werden diese Schritte in Abschnitt A.1 durchgeführt und führen auf folgenden

Satz 1.8 (Proposition A.1 und Satz A.2, Langzeitexistenz und glatte Konvergenz im $\mathbf{R}^3$)**.** *Sei Σ sphärisch und $F_0 : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ glatte Immersion mit*

$$\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) < 16\pi.$$

Dann existiert eine Lösung $F : \Sigma \times [0,\infty) \to \mathbf{R}^3$ von (WFF) *im $\mathbf{R}^3$ mit $F(\Sigma,0) = F_0(\Sigma)$. Die spurfreie zweite Fundamentalform $\mathring{A}$ auf Σ erfüllt*

$$\|\mathring{A}\|_\infty(t) \le C\exp(-ct) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

und es gilt für alle $k \ge 1$

$$\|\nabla^{(k)} A\|_\infty(t) \le C\exp(-ct) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

□

Abschließend soll an dieser Stelle auf die in Abschnitt 3.2 aufgestellten Evolutionsgleichungen für die k-ten Ableitungen $\nabla^{(k)} A$ der Krümmung einer sich unter (WFF) bewegenden Fläche eingegangen werden. Diese stellen den technischen Unterbau praktisch jedes oben erwähnten Resultates dar und nehmen aufgrund eines subtilen technischen Details einen großen Teil der vorliegenden Arbeit ein.

Exemplarisch für die Ergebnisse in Abschnitt 3.2 steht zunächst folgende grobe Variante von Satz 3.17.

Satz 1.9 (Satz 3.17 für (WFF) und $k \ge 3$, Krümmungsevolution)**.** *Sei $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ Lösung von* (WFF) *mit $F(\Sigma,0) = F_0(\Sigma)$, die hinreichend weit vom Ursprung entfernt liegt. Sei $\tilde{\eta} \in C_c^\infty(\mathbf{M})$ feste Abschneidefunktion auf $\mathbf{M}$, und gelte*

$$\int_{F(\Sigma,t)\cap[\tilde{\eta}>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \ll 1.$$

Sei $3 \le k \in \mathbf{N}$ fest. Dann gilt für $\eta := \tilde{\eta} \circ F \in C^\infty(\Sigma \times [0,T))$ und ein geeignetes $s \in \mathbf{N}$

$$\partial_t \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(k)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \le C(|\lambda|^2 + 1) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(k)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C$$

mit

$$C = C(k, \mathbf{M}, |F_0(\Sigma)|, \tilde{\eta}, \sum_{i \le k-3} \sup_{[\eta>0]} |\nabla^{(i)} A|).$$

□

Vom konzeptuellen Standpunkt her stellt Satz 1.9 nichts weiter als eine Variante des entsprechenden Resultates [KS02, Proposition 4.5] dar. Ein wesentliches Detail steckt jedoch in der angegebenen Konstante C: Die Krümmung des umgebenden Raums $\mathbf{M}$ erzeugt Terme in den Evolutionsgleichungen, deren Ableitungen auf den Flächen $F(\Sigma,\cdot)$ sich nicht ohne weiteres durch die Ableitungen der Krümmung selbst in $\mathbf{M}$ abschätzen lassen. Genauer beschrieben wird dieser Umstand in Abschnitt B.2 und sorgt letztlich für einen impliziten, schwer nachzuvollziehbaren Einfluss der zweiten Fundamentalform A auf alle durchgeführten Abschätzungen.

Nun ließe sich relativ einfach eine Variante von Satz 1.9 herleiten, in der die Konstante C für gegebenes k von $\sup_{[\eta>0]} |\nabla^{(i)} A|$ *bis einschließlich* $i = k-1$ abhängt. Zur Herleitung von Krümmungsabschätzungen wäre ein derartiger Satz jedoch im Hinblick auf den zentralen, in Abschnitt 3.3 durchgeführten Induktionsprozess nicht zielführend, in dem Satz 1.9 in Verbindung mit der Sobolevungleichung (B.21) benutzt wird. Diese Sobolevungleichung setzt zur Herleitung von sup-Schranken an eine Funktion f zwingend L^2-Schranken an die *zweite* Ableitung von f voraus, woraus sich letztlich die *Notwendigkeit* ergibt, die Konstante C für gegebenes k nur von $\sup_{[\eta>0]} |\nabla^{(i)} A|$ *bis maximal* $i = k-3$ abhängen zu lassen. Die Abarbeitung dieser Notwendigkeit macht massiven Gebrauch von den in Abschnitt B.2 aufgestellten Ergebnissen und findet sich auf den Seiten 45–61.

Grob gesprochen kann nun in Abschnitt 3.3 das Induktionsschema

$$\cdots \overset{\text{Satz 1.9}}{\Longrightarrow} \|\nabla^{(k-1)} A\|_{L^2} < C \overset{\text{Sobolev}}{\Longrightarrow} \|\nabla^{(k-3)} A\|_{L^\infty} < C \overset{\text{Satz 1.9}}{\Longrightarrow} \|\nabla^{(k)} A\|_{L^2} < C \overset{\text{Sobolev}}{\Longrightarrow} \cdots$$

durchgeführt werden, wodurch sich unter anderem folgender Satz ergibt.

Satz 1.10 (Satz 3.22 für (WFF), Krümmungsschranken). *Sei* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ *Lösung von* (WFF) *mit* $F(\Sigma,0) = F_0(\Sigma)$*, die hinreichend weit vom Ursprung entfernt liegt. Gelte für eine Koordinatenkugel* $B_\rho(x) \subset \mathbf{M}$

$$\int_{F(\Sigma,t)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \ll 1.$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbf{N}$ *und* $t < T_{\max}$

$$\|\nabla^{(k)} A\|_{L^\infty(F(\Sigma,t)\cap B_{\rho/2}(x))} < C$$

mit

$$C = C(k, t, \mathbf{M}, F_0(\Sigma), \rho^{-2}, \int_0^t \lambda^2 \, \mathrm{d}\xi).$$

□

Offene und weiterführende Fragen

Die Resultate in dieser Arbeit stellen keine Ausnahme zu der in der Wissenschaft üblichen Praxis dar, mindestens so viele Fragen aufzuwerfen wie sie beantworten.

An erster Stelle steht die Frage nach der Abschwächung der „hinreichenden Zentrierung“, die in den oben aufgeführten Resultaten von *allen* betrachteten Flächen $F(\Sigma,\cdot) \subset \mathbf{M}$ gefordert wird. Eventuell lässt sich durch Adaption der Techniken in [LMS11] oder auch [HY96] zeigen, daß sich die Flächen unter (WFF) in $\mathbf{M}$ von selbst um das Massezentrum zentrieren und nicht in den stark gekrümmten Bereich nahe des Zentrums eindringen, sofern nur die *Startfläche*

$F_0(\Sigma)$ geeigneten Zentrierungs- und Rundheitsbedingungen genügt. In [HY96] wurde ein derartiges Argument für den dort untersuchten Fluss erfolgreich durchgeführt, und es besteht die Hoffnung, dies auch in dem hier vorliegenden Szenario bewerkstelligen zu können.

Wie bereits angedeutet, besteht Arbeitsbedarf auch bei der Verbesserung der Konvergenzverhaltens von (WFF) bei Langzeitexistenz in **M**, so wie es mit Satz 1.8 für (WFF) im $\mathbf{R}^3$ möglich war. Hierfür müsste ein Klassifikationsresultat für die Grenzflächen $F_\infty(\Sigma)$ aus Satz 1.7 und damit für stationäre Punkte von (WFF) in **M** erarbeitet werden. Auch hier könnten die Methoden aus [LMS11] behilflich sein; in gewisser Hinsicht ist mit [LMS11, Satz 2] bereits ein derartiges Resultat unter starken Zusatzbedingungen vorhanden.

Ein weiterer Themenaspekt ergibt sich aus der Übertragung obiger Resultate aus der verhältnismäßig speziellen Mannigfaltigkeit **M** in *beliebige* Mannigfaltigkeiten $\tilde{\mathbf{M}}$. Erste Schritte hierfür wurden mit einem zu Satz 1.3 analogen Existenzzeitresultat für (WFF) in $\tilde{\mathbf{M}}$ bereits in Abschnitt A.2 getan; diejenigen Aspekte, die bislang die spezielle Stuktur von **M** benutzen, wie die Blowupanalyse und die L^2-Kontrolle von λ, wurden jedoch noch nicht angetastet. Dank der lokalen Verfügbarkeit Gauß'scher Normalkoordinaten erscheint jedoch der Versuch aussichtsreich, die ursprünglich für die Arbeit in **M** erarbeiteten Techniken zumindest für den Fluss hinreichend *kleiner* Flächen in $\tilde{\mathbf{M}}$ zu adaptieren.

Abschließend weisen wir darauf hin, daß die in Abschnitt 3.3 erarbeiteten Krümmungsschranken sowie ausgewählte weitere Resultate nicht speziell für (WFF), sondern allgemeiner für die in Abschnitt 2.2 eingeführte Klasse (WF$*$) von Flüssen aufgestellt wurden, deren Evolutionsgleichung die algebraische Struktur sowohl mit der von (WFF) als auch von (WF) gemein hat. Diese Resultate lassen sich aber insbesondere auch bei der Untersuchung verwandter Flüsse, wie etwa des *volumenerhaltenden* Willmore-Flusses, direkt verwenden, sofern es gelingt, den jeweiligen nichtlokalen Term im L^2-Sinne analog zu λ in Satz 1.4 zu kontrollieren. Eventuell zeigt diese Arbeit dem Leser damit einen vielversprechenden Weg auf; den Weg zu weiteren schönen Resultaten aus der Welt des Willmore-Flusses.

Meinen Eltern, meinen Freunden.

Kapitel 2

Vorbereitungen

2.1 Geometrische Grundlagen und Konventionen

Auf den folgenden Seiten wollen wir uns mit allgemeinen Fakten und zum Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendigen Grundlagen befassen, die sich in dieser oder ähnlicher Form auch in jedem besseren Buch über Riemannsche Geometrie finden lassen. Wir folgen durchweg der Einsteinschen Summenkonvention, summieren also über wiederholt auftretende Indizes, sofern nicht explizit auf etwas anderes hingewiesen wird.

In Abschätzungen auftretende Konstanten bezeichnen wir mit $C(\dots)$, wobei als Argumente beliebige (geometrische) Objekte auftreten können. Ist eines dieser Objekte eine reelle Zahl, so achten wir im Regelfall darauf, C auf monoton steigende Weise von dieser Zahl abhängen zu lassen. Absolute Konstanten bezeichnen wir mit c und bezeichnen darüberhinaus mit $c_0(\dots)$ Konstanten, die invariant unter den in Abschnitt B.1 beschriebenen Transformationen sind.

Sei nun zunächst $(\tilde{\mathbf{M}}, g)$ beliebige Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit. Über die (in lokalen Koordinaten) durch g induzierten Christoffelsymbole

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} := \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right)$$

definiert sich der Levi-Civita-Zusammenhang für Basisvektorfelder $\{e_1, e_2, e_3\}$ durch

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_j := \overline{\Gamma}_{ij}^{k} e_k$$

und der Zusammenhang auf den dualen 1-Formen $\{\, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3\}$ durch

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_i} \, \mathrm{d}x^j &:= - \, \mathrm{d}x^j (\overline{\nabla}_{e_i}(\cdot)) \\ &= - \overline{\Gamma}_{ik}^{j} \, \mathrm{d}x^k . \end{aligned}$$

Für differenzierbare Funktionen $f : \tilde{\mathbf{M}} \to \mathbf{R}$ setzen wir $\overline{\nabla}_{e_i} f := \partial_i f$ und definieren den Zusammenhang auf allgemeinen Tensorfeldern über die Produktregel. Wir schreiben kurz $\overline{\nabla}_i := \overline{\nabla}_{e_i}$.

Den Riemannschen Krümmungstensor $\overline{\mathrm{Rm}}$ nutzen wir nach der Konvention

$$\overline{\mathrm{Rm}}_{ijk}{}^{l} := \left(\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j e_k - \overline{\nabla}_j \overline{\nabla}_i e_k \right)^l$$

und definieren den Riccitensor $\overline{\mathrm{Rc}}$ und die Skalarkrümmung $\overline{\mathrm{Sc}}$ auf $\tilde{\mathbf{M}}$ durch

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Rc}}_{ij} &:= \overline{\mathrm{Rm}}_{kij}{}^{k}, \\ \overline{\mathrm{Sc}} &:= \overline{\mathrm{Rc}}_{k}{}^{k}. \end{aligned}$$

Abschließend definieren wir die Schnittkrümmung eines gegebenen zweidimensionalen Unterraums E_p des Tangentialraums $T_p\tilde{\mathbf{M}}$ durch

$$\overline{\sec}(E_p) := \frac{\overline{\mathrm{Rm}}(u,v,v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}$$

für eine beliebige Basis $\{u,v\}$ von E_p; es lässt sich leicht zeigen, daß diese Definition von der konkreten Wahl dieser Basis unabhängig ist.

Proposition 2.1. *Für jede k-Form ϕ folgt nach direkter Rechnung in lokalen Koordinaten*

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_p \overline{\nabla}_q - \overline{\nabla}_q \overline{\nabla}_p)\phi_{s_1,\ldots,s_k} &= -\sum_{1\le r\le k} \phi(e_{s_1},\ldots,e_{s_{r-1}},\overline{\mathrm{Rm}}(e_p,e_q)e_{s_r},e_{s_{r+1}},\ldots,e_{s_k}) \\ &= -\sum_{1\le r\le k} \overline{\mathrm{Rm}}_{pqs_r}{}^{b}\,\phi_{s_1,\ldots,s_{r-1},b,s_{r+1},\ldots,s_k}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Für 3-dimensionale $\tilde{\mathbf{M}}$ ist $\overline{\mathrm{Rm}}$ durch $\overline{\mathrm{Rc}}$ vollständig festgelegt; genauer gilt nach [LMS11, (1.1)] in lokalen Koordinaten

$$\overline{\mathrm{Rm}}_{ijkl} = \overline{\mathrm{Rc}}_{il}\,g_{jk} - \overline{\mathrm{Rc}}_{ik}\,g_{jl} - \overline{\mathrm{Rc}}_{jl}\,g_{ik} + \overline{\mathrm{Rc}}_{jk}\,g_{il} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Sc}}\left(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\right). \tag{2.2}$$

□

2.1.1 Geometrie von Hyperflächen

Sei nun $F : \Sigma \to \tilde{\mathbf{M}}$ orientierbare, glatte Immersion einer geschlossenen (d.h. kompakten und randlosen) 2-Fläche Σ. Durch

$$\gamma := F^* g$$

definieren wir (wie allgemein üblich) eine Metrik auf Σ; F wird dadurch zur Isometrie und wir können der Einfachheit halber (Σ,γ) und $(F(\Sigma), g|_{TF(\Sigma)})$ kanonisch miteinander identifizieren.

Wir nehmen uns daher die Freiheit, jede Rechnung, Aussage oder Definition je nach Anwendung entweder auf Σ oder im Bild $F(\Sigma)$ zu formulieren und werden nicht explizit auf die konkrete Wahl hinweisen.

Mit diesen Worten im Hinterkopf definieren wir die zweite Fundamentalform auf Σ durch

$$A(X,Y) := -g(\nu, \overline{\nabla}_X Y),$$

wobei ν ein fest gewähltes Einheitsnormalenfeld an $F(\Sigma)$ ist, und definieren den Levi-Civita-Zusammenhang auf Σ durch

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &:= \left(\overline{\nabla}_X Y\right)^{\top} \\ &= \overline{\nabla}_X Y + A(X,Y)\nu,\end{aligned}$$

hier bezeichnet $(\cdot)^{\top}$ die Projektionsabbildung auf den Tangentialraum von Σ. Mit A lassen sich nun die mittlere Krümmung H und die spurfreie zweite Fundamentalform $\mathring{A}$ mittels

$$\begin{aligned}H &:= \mathrm{tr}^{\Sigma} A = \gamma^{ij} A_{ij}, \\ \mathring{A} &:= A - \frac{1}{2} H\gamma\end{aligned}$$

definieren; darüberhinaus können wir über ∇ auf Σ Krümmungsgrößen Rm, Rc und Sc analog zu $\overline{\mathrm{Rm}}, \overline{\mathrm{Rc}}$ und $\overline{\mathrm{Sc}}$ festlegen.

Die Gaußgleichungen liefern uns dann in lokalen Koordinaten

$$\overline{\mathrm{Rm}}_{ijkl} = \mathrm{Rm}_{ijkl} + A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk}.$$

Hieraus ergeben sich nach Spurnehmen die Vorschriften

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Rc}}_{ij} &= \mathrm{Rc}_{ij} + \overline{\mathrm{Rm}}_{i\nu\nu j} + A_i^k A_{kj} - HA_{ij}, \\ \overline{\mathrm{Sc}} &= \mathrm{Sc} + 2\,\overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} + |A|^2 - H^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei die ν-Indizes als fest anzusehen sind.

Auf ähnliche Weise implizieren die Codazzigleichungen

$$\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik} = \overline{\mathrm{Rm}}_{ij\nu k}$$

nach Spurnehmen und nach Definition von $\mathring{A}$ die Formulierungen

$$\begin{aligned} \nabla_i H &= (\mathrm{div} A)_i - \overline{\mathrm{Rc}}_{i\nu} \\ &= 2(\mathrm{div} \mathring{A})_i - 2\,\overline{\mathrm{Rc}}_{i\nu} \end{aligned} \tag{2.4}$$

und damit insbesondere

$$\nabla_i A_{jk} = \nabla_i \mathring{A}_{jk} + \Big((\mathrm{div}\mathring{A})_i - \overline{\mathrm{Rc}}_{i\nu} \Big)\, \gamma_{jk}. \tag{2.5}$$

Kombination der Codazzi- mit den Gaußgleichungen liefert nun in Verbindung mit Proposition 2.1 nach direkter Rechnung mit $\omega(\cdot) := \overline{\mathrm{Rc}}(\cdot, \nu)^{\top}$

$$\begin{aligned} \triangle A_{ij} = {} & \nabla^{(2)}_{ij} H + \nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - \mathrm{div}^{\Sigma} \omega \\ & + HA_i^k A_{kj} - |A|^2 A_{ij} - A_j^p\, \overline{\mathrm{Rm}}^{\,k}{}_{ikp} - A^{kp}\, \overline{\mathrm{Rm}}_{kijp}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dies stellt eine Variante der bekannten Simons-Identität ([Hui86, Lemma 2.1]) dar.

Ebenfalls in [Hui86] finden sich außerdem die Gauß-Weingartengleichungen

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j F^{\alpha} &= \Gamma_{ij}^k\, \partial_k F^{\alpha} - \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\delta}\, \partial_i F^{\beta}\, \partial_j F^{\delta} - A_{ij} \nu^{\alpha}, \\ \partial_j \nu^{\alpha} &= \gamma^{lm} A_{jl} \partial_m F^{\alpha} - \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\delta}\, \nu^{\beta}\, \partial_j F^{\delta}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

hier bezeichnet ∂ lokale Koordinatenableitungen auf Σ, und die Indizes $\alpha, \beta, \delta \in \{1,2,3\}$ verstehen sich bezüglich lokaler Koordinaten auf $\tilde{\mathbf{M}}$. Abschließend induziert F auf Σ das kanonische Flächenelement $\mathrm{d}\mu$ durch

$$\mathrm{d}\mu := \big(\det(\gamma_{ij})_{1 \le i,j \le 2}\big)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2,$$

und wir können den Flächeninhalt sowie die Willmoreenergie von Σ definieren durch

$$\begin{aligned} |F(\Sigma)| &:= \int_{\Sigma} \mathrm{d}\mu, \\ \mathbf{W}(F(\Sigma)) &:= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H^2\, \mathrm{d}\mu\,. \end{aligned}$$

Alternative Definitionen von $\mathbf{W}(F(\Sigma))$ liefert

Proposition 2.2. *Durch Integration von* (2.3) *ergeben sich*

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) = \frac{1}{2}\int_\Sigma |A|^2 \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{Sc} \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Sc}} \, \mathrm{d}\mu$$

und

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) = \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \mathrm{Sc} \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma 2\overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} - \overline{\mathrm{Sc}} \, \mathrm{d}\mu\,.$$

□

Variationen in $\tilde{\mathbf{M}}$

Sei nun $F(\cdot,t) : \Sigma \to \tilde{\mathbf{M}}$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, eine Familie von Immersionen in $\tilde{\mathbf{M}}$ und gelte $\partial_t F = \alpha\nu$ für eine Funktion $\alpha : \Sigma \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbf{R}$. Dann gelten für die auf Σ wie oben induzierten Größen sowie für den Normalenvektor folgende Evolutionsgleichungen, die sich z.B. in [HP99] finden oder leicht aus den dort angegebenen folgern lassen.

Lemma 2.3. *Für $F : \Sigma \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \tilde{\mathbf{M}}$ mit $\partial_t F = \alpha\nu$ wie oben gilt in lokalen Koordinaten auf $\Sigma \times (-\varepsilon,\varepsilon)$*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \gamma_{ij} = 2\alpha A_{ij},\\
&\partial_t \gamma^{ij} = -2\alpha A^{ij},\\
&\partial_t \, \mathrm{d}\mu = \alpha H \, \mathrm{d}\mu,\\
&\partial_t \nu = -\nabla\alpha,\\
&\partial_t A_{ij} = -\nabla_i\nabla_j\alpha + \alpha\left(A_{ik}A^k_j - T_{ij}\right),\\
&\partial_t H = L\alpha,\\
&\partial_t \Gamma^k_{ij} = A^k_j\nabla_i\alpha + A^k_i\nabla_j\alpha - A_{ij}\nabla^k\alpha + \alpha\left(\nabla_i A^k_j + \nabla_j A^k_i - \nabla^k A_{ij}\right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&Lf := -\triangle f - f\left(|A|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right),\\
&T_{ij} := \overline{\mathrm{Rm}}(\nu, e_i, e_j, \nu).
\end{aligned}$$

□

2.1.2 Sternnotation und -Polynome

In vielen Rechnungen wird nur die algebraische Struktur zwischen den auftretenden Größen von Interesse sein, sodaß sich oft auf explizites Ausschreiben von Tensorausdrücken verzichten lässt.

Für zwei Tensoren S,T schreiben wir $S*T$ für jeden Tensor, der sich durch reelle Linearkombination beliebiger miteinander verträglicher Spuren von Tensoren der Form $g^{\pm1}\otimes\cdots\otimes g^{\pm1}\otimes S\otimes T$ und $g^{\pm1}\otimes\cdots\otimes g^{\pm1}\otimes T\otimes S$ erzeugen lässt; $g^{\pm1}$ steht hier für die Metrik g oder deren Inverse g^{-1}. Die konkreten zur Erzeugung von $S*T$ durchgeführten Operationen dürfen hierbei zwar von den Typen der Tensoren S,T abhängen, nicht jedoch von ihren konkreten (Zahl-)Werten. Damit ergibt sich

$$|S*T| \le c|S||T|,$$

wobei c nur von den verwendeten Operationen abhängt. Desweiteren haben wir

$$\nabla(S*T) = \nabla S*T + S*\nabla T$$

sowie auf randlosen Mengen

$$\int \nabla S*T = \int S*\nabla T.$$

Beispiele für die $*$-Notation sind die Schreibweisen $\langle \mathrm{Rm}, \mathrm{Rc}\otimes\mathrm{Rc}\rangle = \mathrm{Rm}*\mathrm{Rm}*\mathrm{Rm}$, $|T|^2 = T*T$, oder auch $\triangle T\otimes g + \nabla^{(2)}T = 1*\nabla^{(2)}T$.

Abschließend erweitern wir die $*$-Notation im Sinne des Distributivgesetzes mittels

$$S*(T+R) := S*T + S*R$$

und bemerken, daß diese Neudefinition weiterhin die ursprünglich unter diesem Ausdruck zusammengefassten Tensoren beinhaltet.

Für einen beliebigen Tensor T definieren wir für $k \geq 0, j \geq 2$

$$P_j^k(T) := \sum_{i_1+\dots+i_j=k} \nabla^{(i_1)}T*\ldots*\nabla^{(i_j)}T$$

sowie für $s \leq k$

$$P_j^{k;\leq s}(T) := \sum_{\substack{i_1+\dots+i_j=k\\ i_1,\dots,i_j\leq s}} \nabla^{(i_1)}T*\ldots*\nabla^{(i_j)}T,$$

und setzen für alle k

$$P_0^k(T) := 0.$$

Es folgen direkt die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
&\nabla P_j^k(T) = P_j^{k+1}(T),\\
&T*P_j^k(T) = P_{j+1}^k(T),\\
&P_j^k(T)*P_i^m(T) = P_{j+i}^{k+m}(T).
\end{aligned}$$

2.1.3 (ν)-Notation

Eine große Hürde bei der Herleitung brauchbarer Abschätzungen unter Variationen in $\tilde{\mathbf{M}}$ stellt die Kontrolle des Zusammenspiels zwischen (Krümmungs-)Tensoren auf $\tilde{\mathbf{M}}$, Einschränkungen derselben auf die Flächen $F(\Sigma,\cdot)$ und insbesondere höheren Ableitungen dieser Einschränkungen dar. Letztlich aus dem Vergleich der Zusammenhänge ∇ und $\overline{\nabla}$ ergibt sich das scheinbar willkürliche Auftreten des Normalenvektors ν als fester Index in den zu untersuchenden Tensorausdrücken.

Um derartige Ausdrücke auf lesbare Weise bündeln zu können, schreiben wir $(\phi)^{(\nu)}$ für jede k-Form ψ auf Σ, $k \in \mathbf{N}_0$, die sich aus einer gegebenen $k+l$-Form ϕ auf $\tilde{\mathbf{M}}$ und einer beliebigen Permutation P ihrer Argumente mittels

$$\psi(\cdot,\dots,\cdot) = \phi(P(\underbrace{\nu,\nu,\dots,\nu}_{l\text{ Mal}},\cdot,\dots,\cdot))^\top$$

erzeugen lässt; $(\cdot)^\top$ bezeichnet hier die Einschränkung auf $T\Sigma$. In der $(\cdot)^{(\nu)}$-Schreibweise gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Rc}}(\cdot,\nu)^\top = (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)},\\ &\overline{\mathrm{Rm}}(\cdot,\nu,\nu,\cdot)^\top = (\overline{\mathrm{Rm}})^{(\nu)},\end{aligned}$$

oder auch für eine gegebene Funktion $\tilde{f} : \tilde{\mathbf{M}} \to \mathbf{R}$

$$\tilde{f}|_\Sigma = (\tilde{f})^{(\nu)}.$$

Eine tiefergehende Betrachtung von $(\cdot)^{(\nu)}$-Termen findet sich in Abschnitt B.2; an dieser Stelle sei jedoch bereits die direkt aus der Definition folgende wichtige Eigenschaft

$$|(\phi)^{(\nu)}|_\gamma \le |\phi|_g$$

erwähnt.

2.2 Willmoreenergie und induzierte Gradientenflüsse

2.2.1 Willmore-Fluss

Seien $F : \Sigma \to \tilde{\mathbf{M}}$ und $\mathbf{W}(F(\Sigma)) = \frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}\mu$ wie in Abschnitt 2.1.1 festgelegt. Unter einer Variation F mit $\partial_t F|_{t=0} = \alpha\nu$ gilt nach Lemma 2.3 und partieller Integration, daß in $t = 0$

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{W}(F(\Sigma,t)) &= \int_\Sigma H\partial_t H \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 \partial_t \,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_\Sigma HL\alpha + \frac{1}{2}H^3\alpha \,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_\Sigma \alpha\left(LH + \frac{1}{2}H^3\right)\mathrm{d}\mu,\end{aligned}\tag{2.8}$$

der L^2-Gradient von $\mathbf{W}$ unter Variationen in Normalenrichtung ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial\mathbf{W} &:= \alpha_{\mathbf{W}}\nu,\\ \alpha_{\mathbf{W}} &:= LH + \frac{1}{2}H^3\\ &= -\triangle H - H\left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right)\end{aligned}$$

und wir definieren den Willmore-Fluss von F als

$$\begin{cases}\partial_t F = -\partial\mathbf{W}\\ \qquad = \left(\triangle H + H\left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right)\right)\nu,\\ F(\cdot,0) = F_0(\cdot).\end{cases}\tag{WF}$$

Im Allgemeinen lässt sich nicht erwarten, daß sich der Flächeninhalt $|F(\Sigma,\cdot)|$ unter dem Fluss (WF) nicht ändert. Jedoch lässt sich zumindest eine Wachstumsschranke herleiten:

Lemma 2.4. *Sei F Lösung von* (WF) *auf* $[0,T)$. *Dann gilt für alle* $0 \le t < T$

$$\big||F(\Sigma,t)| - |F_0(\Sigma)|\big| \le t^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{W}(F_0(\Sigma)).$$

Beweis. Zunächst ist der L^2-Gradient des Flächenfunktionals $|\cdot|$ gegeben durch

$$\partial|\cdot| = H\nu$$

(dies motiviert den mittleren Krümmungsfluss als Gradientenfluss zu $|\cdot|$), und unter (WF) folgt wegen (2.8) direkt, daß in $[0,T)$

$$\begin{aligned}
\big|\partial_t |F(\Sigma,t)|\big| &= \Big| - \int_\Sigma H\alpha_{\mathbf{W}}\, \mathrm{d}\mu\, \Big| \\
&\le \left(\int_\Sigma H^2\, \mathrm{d}\mu \cdot \int_\Sigma (\alpha_{\mathbf{W}})^2\, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-2\mathbf{W}(F(\Sigma,t)) \cdot \partial_t(\mathbf{W}(F(\Sigma,t)))\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-\partial_t \left(\mathbf{W}(F(\Sigma,t))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nach Integration folgt für jedes $t_0 \in [0,T)$

$$\begin{aligned}
\big||F(\Sigma,t_0)| - |F_0(\Sigma)|\big| &\le \int_0^{t_0} \big|\partial_t |F(\Sigma,t)|\big|\, \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^{t_0} \left(-\partial_t \left(\mathbf{W}(F(\Sigma,t))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t \\
&\le t_0^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{t_0} -\partial_t \left(\mathbf{W}(F(\Sigma,t))^2\right)\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= t_0^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{W}(F_0(\Sigma))^2 - \mathbf{W}(F(\Sigma,t_0))^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

2.2.2 Willmore-Fluss mit Nebenbedingungen

Flächeninhaltserhaltender Willmore-Fluss

Gesucht ist nun eine flächeninhaltserhaltende Variante von (WF). Wir bezeichnen mit $\mathscr{F}$ den Raum aller Immersionen $F : \Sigma \to \tilde{\mathbf{M}}$ mit induzierter Metrik $g_F^{\mathscr{F}}(\cdot,\cdot) := \int_{F(\Sigma)} g(\cdot,\cdot)\, \mathrm{d}\mu$. Gesucht ist die Projektion π des Vektors $-\partial\mathbf{W}$ auf den Tangentialraum der Hyperfläche $\Gamma := \{F \in \mathscr{F} : |F(\Sigma)| = |F_0(\Sigma)|\}$; der Fluss in Richtung $\pi(-\partial\mathbf{W})$ minimiert dann $\mathbf{W}$ flächenerhaltend.

Nun ergibt sich ein Normalenvektor ν_Γ an Γ aus dem L^2-Gradienten des Flächenfunktionals $\partial|\cdot| = H\nu$; wegen $g^{\mathscr{F}}(H\nu, H\nu) = (H,H)_{L^2(\Sigma)}$ folgt, daß

$$\nu_\Gamma = \frac{H\nu}{\|H\|_{L^2(\Sigma)}}.$$

Einsetzen liefert nun

$$\begin{aligned}
\pi(-\partial\mathbf{W}) &= -\partial\mathbf{W} - g^{\mathscr{F}}(-\partial\mathbf{W}, \nu_\Gamma)\nu_\Gamma \\
&= -\partial\mathbf{W} + H \cdot \frac{(\alpha_{\mathbf{W}}, H)_{L^2(\Sigma)}}{\|H\|^2_{L^2(\Sigma)}} \nu \\
&= -\partial\mathbf{W} + H\lambda\nu,
\end{aligned}$$

wobei der Lagrangeterm $\lambda = \lambda(F(\Sigma,t)) \in \mathbf{R}$ durch

$$\begin{aligned}\lambda &:= \frac{(\alpha_{\mathbf{W}}, H)_{L^2(\Sigma)}}{\|H\|^2_{L^2(\Sigma)}} \\ &= \frac{1}{2\mathbf{W}(F(\Sigma))} \int_\Sigma |\nabla H|^2 - H^2 \left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) \right) \,\mathrm{d}\mu\end{aligned} \tag{2.9}$$

gegeben ist, und wir können den flächeninhaltserhaltenden Willmore-Fluss definieren als

$$\begin{cases} \partial_t F = (-\alpha_{\mathbf{W}} + H\lambda)\nu \\ \qquad = \left(\triangle H + H \left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) + \lambda \right) \right) \nu, \\ F(\cdot,0) = F_0(\cdot). \end{cases} \tag{WFF}$$

Jede stationäre Fläche unter dem Fluss (WFF) erfüllt damit $\partial \mathbf{W} = \lambda \partial |\cdot|$ bzw. punktweise

$$-\triangle H - H \left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) \right) = \lambda H,$$

der Term λ nimmt in diesem Fall also die Rolle des Lagrangemultiplikators ein, woraus sich die Bezeichnung „Lagrangeterm“ motiviert.

Proposition 2.5. *Nach Definition* (2.9) *gilt unter* (WFF)

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{W}(F(\Sigma,t)) &= \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + \lambda H)\, \alpha_{\mathbf{W}} \,\mathrm{d}\mu \\ &= -\|\alpha_{\mathbf{W}}\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{(\alpha_{\mathbf{W}}, H)^2_{L^2(\Sigma)}}{\|H\|^2_{L^2(\Sigma)}} \\ &\le 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_t |F(\Sigma,t)| &= \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + \lambda H) H \,\mathrm{d}\mu \\ &= -(\alpha_{\mathbf{W}}, H)_{L^2(\Sigma)} + \lambda \|H\|^2_{L^2(\Sigma)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Willmore-Fluss mit allgemeinen Lagrangetermen

Für einige der in dieser Arbeit auftretenden Betrachtungen wird weder die flächeninhaltserhaltende Eigenschaft des Flusses (WFF) noch die konkrete Form (2.9) des Terms λ von Bedeutung sein. Diese werden daher allgemeiner am Fluss

$$\begin{cases} \partial_t F = (-\alpha_{\mathbf{W}} + H\theta)\nu \\ \qquad = \left(\triangle H + H \left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) + \theta \right) \right) \nu, \\ F(\cdot,0) = F_0(\cdot) \end{cases} \tag{WF$*$}$$

für eine beliebige, eventuell unbekannte Funktion $\theta : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ durchgeführt; Einsetzen der Funktion $\theta \equiv 0$ liefert damit Ergebnisse für den Fluss (WF), Ergebnisse für (WFF) ergeben sich durch die Wahl $\theta = \lambda$.

Darüberhinaus ergibt sich im Hinblick auf den Nachweis der Kurzzeitexistenz von (WFF) über Fixpunktmethoden in Abschnitt 4.1.1 auch die *Notwendigkeit* der Untersuchung von (WF$*$), um mit den hieraus resultierenden a-priori-Schranken eine fundierte Basis für das dort durchgeführte Argument schaffen zu können.

Proposition 2.6. *Unter* (WF$*$) *gilt*

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{W}(F(\Sigma,t)) &= \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + \theta H)\, \alpha_{\mathbf{W}}\, \mathrm{d}\mu \\ &= -\|\alpha_{\mathbf{W}}\|^2_{L^2(\Sigma)} + \int_\Sigma \theta H \alpha_{\mathbf{W}}\, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{1}{2}\theta^2 \mathbf{W}(F(\Sigma,t))\end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{W}(F(\Sigma,t)) \leq \mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t (\theta(\xi))^2\, \mathrm{d}\xi\right).$$

□

2.3 Asymptotisch schwarzschildsche Mannigfaltigkeiten

Ein großer Teil unserer Untersuchungen wird sich mit Hyperflächen in einer Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten $\mathbf{M}$ befassen, die sich durch das asymptotische Abfallverhalten ihrer Metriken im Unendlichen auszeichnen und in diesem Abschnitt genauer definiert werden sollen. Die Frage der Übertragbarkeit unserer Ergebnisse auf allgemeine umgebende Mannigfaltigkeiten $\tilde{\mathbf{M}}$ wird zum Teil in Anhang A.2 behandelt.

Schwarzschildmetriken

Wir bezeichnen im Folgenden mit g^e die euklidische Metrik des $\mathbf{R}^3$ und definieren auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ die Schwarzschildmetrik g^S_m der Masse m durch

$$g^S_m := \phi^4_m g^e,$$

wobei für $r = r(x) := (\sum_i (x^i)^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\phi_m(x) := 1 + \frac{m}{2r}.$$

Im Folgenden verzichten wir auf den Index m, schreiben also nur noch g^S bzw. ϕ. Den durch g^S induzierten Levi-Civita-Zusammenhang bezeichnen wir mit $\overline{\nabla}^S$, die induzierten Krümmungstensoren mit $\overline{\mathrm{Rm}}^S$ bzw. $\overline{\mathrm{Rc}}^S$. Einen Überblick über das asymptotische Verhalten dieser Größen ergibt sich aus folgender

Proposition 2.7. *Für die zu* $\overline{\nabla}^S$ *gehörigen Christoffelsymbole* ${}^S\overline{\Gamma}$ *gilt in euklidischen Koordinaten explizit*

$$\begin{aligned}{}^S\overline{\Gamma}^k_{ij} &= {}^e\overline{\Gamma}^k_{ij} + 2\phi^{-1}\left(\delta_{kj}\partial_i\phi + \delta_{ki}\partial_j\phi - g^e_{ij}(g^e)^{kl}\partial_l\phi\right) \\ &= 2\phi^{-1}\left(\delta_{kj}\partial_i\phi + \delta_{ki}\partial_j\phi - \delta_{ij}\partial_k\phi\right).\end{aligned}$$

Nach längerer Rechnung erhält man direkt $\overline{\mathrm{Rc}}^S_{ij}(x) = mr^{-3}\phi^{-2}(\delta_{ij} - 3r^{-2}x^i x^j)$*, bzw. in koordinatenfreier Form mit* $\rho(\cdot) := g^e(\frac{\partial}{\partial r}, \cdot)$

$$\overline{\mathrm{Rc}}^S = mr^{-3}\phi^{-2}\,(g^e - 3\rho \otimes \rho)\,,$$

und es ergibt sich insbesondere $\overline{\mathrm{Sc}}^S = 0$.

Da außerdem

$$\begin{aligned}|g^S - g^e|_{g^e} &= c|\phi^4 - 1| \\ &= c\sum_{k=1}^{4} c_k \left(\frac{m}{2r}\right)^k\end{aligned}$$

mit $c_k = \binom{4}{k}$*, erhalten wir ingesamt die Existenz einer absoluten Konstante c mit*

$$c^{-1}m \leq \sup_{\mathbf{R}^3\setminus B_m(0)} \left(r|g^S - g^e|_{g^e} + r^2|\overline{\nabla}^S - \overline{\nabla}^{g^e}|_{g^e} + r^3|\overline{\mathrm{Rc}}^S|_{g^e} + r^4|\overline{\nabla}^S\overline{\mathrm{Rc}}^S|_{g^e}\right) \leq cm.$$

□

Asymptotisch schwarzschildsche Metriken

Definition 2.8 (Asymptotisch schwarzschildsch)**.** *Eine Metrik g auf* $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ *ist* (m,κ,σ)*-asymptotisch schwarzschildsch, falls in euklidischen Koordinaten für die durch g induzierten Größen* $\overline{\nabla}$ *und* $\overline{\mathrm{Rc}}$

$$\sup_{\mathbf{R}^3\setminus B_\sigma(0)} \left(r^2|g - g^S|_{g^e} + r^3|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^S|_{g^e} + r^4|\overline{\mathrm{Rc}} - \overline{\mathrm{Rc}}^S|_{g^e} + r^5|\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}} - \overline{\nabla}^S\overline{\mathrm{Rc}}^S|_{g^e}\right) \leq \kappa.$$

Definition 2.9. *Für eine feste, glatte, asymptotisch schwarzschildsche Metrik g setzen wir*

$$\mathbf{M} := (\mathbf{M}, g) := (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g).$$

Außerdem definieren wir

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}, g^e) &:= (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g^e), \\ (\mathbf{M}, g^S) &:= (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g^S).\end{aligned}$$

2.3.1 Eigenschaften von M

Die Betrachtung von Mannigfaltigkeiten $\mathbf{M}$ wie oben birgt einige Annehmlichkeiten im Vergleich zu Untersuchungen in allgemeinen Mannigfaltigkeiten $\tilde{\mathbf{M}}$. Zunächst steht uns auf $\mathbf{M}$ die globale Kartenabbildung

$$\mathrm{id} : \mathbf{M} \to \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$$

zur Verfügung, der wir uns, sofern nicht explizit anders angegeben, bedienen werden, und die uns auf $\mathbf{M}$ die (globale) Definition der Funktion $r(x) = (\sum_i (x^i)^2)^{\frac{1}{2}} = |\,\mathrm{id}(x)|_{\mathbf{R}^3}$ wie oben ermöglicht.

Zusätzliche Vorteile ergeben sich aus der Gestalt der Metrik g, die nach obigen Definitionen insbesondere asymptotisch zur euklidischen Metrik g^e ist. Definieren wir Kugeln in $\mathbf{M}$ bezüglich der Kartenabbildung id über

$$B_\rho(p) := \{x \in \mathbf{M} : |\,\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(p)|_{\mathbf{R}^3} < \rho\},$$

so entsprechen diese, falls $0 \notin B_\rho(p)$, geodätischen Kugeln bezüglich dist_{g^e} und sind für hinreichend große $r(p)$ mit den üblichen geodätischen Kugeln bezüglich dist_g vergleichbar.

Zusätzlich werden wir dank des nächsten Lemmas in asymptotisch schwarzschildschen Mannigfaltigkeiten auf eine gesonderte Auszeichnung der Tensornormen $|T|_g, |T|_{g^S}$ und $|T|_{g^e}$ keinen Wert mehr legen müssen.

Lemma 2.10. *Sei T k-Form auf $\mathbf{M}$. Dann gibt es ein $r_0(k,m,\kappa,\sigma)$, sodaß auf $\mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)$ die Größen $|T|_g, |T|_{g^S}, |T|_{g^e}$ uniform vergleichbar sind.*

Beweis. Wir rechnen für $|T|_g$ und $|T|_{g^e}$, die Aussage für $|T|_{g^S}$ folgt analog.

Zunächst implizieren Proposition 2.7 und Definition 2.8 auf $\mathbf{M}\setminus B_\sigma(0)$, daß für $r > m$

$$\begin{aligned} |g-g^e| &\leq |g-g^S| + |g^S-g^e| \\ &\leq c(\kappa r^{-2} + m r^{-1}), \end{aligned} \tag{2.10}$$

und wir erhalten für jedes $\varepsilon > 0$ ein hinreichend großes r mit

$$|g-g^e| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere gibt es ein $r_0(m,\kappa,\sigma)$ mit $\det(g) \geq \frac{1}{2}$ auf $\mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)$. Nun gilt nach dem Mittelwertsatz für beliebige positiv definite Matrizen A, B

$$|A^{-1}-B^{-1}| \leq C\left((\det A)^{-1}, (\det B)^{-1}\right)|A-B|,$$

und es folgt auf $\mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)$ uniform

$$\begin{aligned} &|g^{-1}-(g^e)^{-1}| \leq c|g-g^e|, \\ &|g^{-1}| + |(g^e)^{-1}| \leq c. \end{aligned}$$

Sei nun T beliebig. Nach Cauchy-Schwarz erhalten wir nun wegen der Schranke an $|g^{-1}|$ für $r > r_0$ in euklidischen Koordinaten

$$\begin{aligned} &||T|_g^2 - |T|_{g^e}^2| \\ &\quad = |\left(g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_k j_k} - (g^e)^{i_1 j_1}\cdots (g^e)^{i_k j_k}\right) T_{i_1\dots i_k} T_{j_1\dots j_k}| \\ &\quad = |\sum_{p=1}^{k}\left((g^e)^{i_1 j_1}\cdots (g^e)^{i_{p-1} j_{p-1}}\left(g^{i_p j_p} - (g^e)^{i_p j_p}\right) g^{i_{p+1} j_{p+1}}\cdots g^{i_k j_k}\right) T_{i_1\dots i_k} T_{j_1\dots j_k}| \\ &\quad \leq |T|_{g^e}^2 \left(\sum_{\substack{i_1,\dots i_k \\ j_1,\dots,j_k}}\left(\sum_p (g^e)^{i_1 j_1}\cdots\left(g^{i_p j_p} - (g^e)^{i_p j_p}\right)\cdots g^{i_k j_k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \leq c(k)|T|_{g^e}^2 \left(\sum_p \sum_{\substack{i_1,\dots i_k \\ j_1,\dots,j_k}}\left((g^e)^{i_1 j_1}\cdots\left(g^{i_p j_p} - (g^e)^{i_p j_p}\right)\cdots g^{i_k j_k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \leq c(k)|T|_{g^e}^2 |g^{-1}-(g^e)^{-1}|_{g_e} \end{aligned}$$

und es ergibt sich nach Benutzung von (2.10)

$$||T|_g^2 - |T|_{g^e}^2| \leq \frac{1}{2}|T|_{g^e}^2$$

für $r > r_0(k,m,\kappa,\sigma)$. Die Behauptung folgt. □

Lemma 2.11. *Sei $f \in C^2(\mathbf{M})$. Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m,\kappa,\sigma)$ und absolute Konstanten c, sodaß in $\mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$*

$$
\begin{aligned}
&|\overline{\nabla}^{(2)} f| \le c|\overline{\nabla}^{(2)^{g^e}} f| + c|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}||\nabla f|,\\
&|\overline{\nabla}^{(2)^{g^e}} f| \le c|\overline{\nabla}^{(2)} f| + c|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}||\nabla f|.
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir rechnen in euklidischen Koordinaten direkt

$$
\begin{aligned}
||\overline{\nabla}^{(2)} f|^2_{g^e} - |\overline{\nabla}^{(2)^{g^e}} f|^2_{g^e}| &= |\sum_{i,j} \left(\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j f - \overline{\nabla}^{g^e}_i \overline{\nabla}^{g^e}_j f\right)\left(\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j f + \overline{\nabla}^{g^e}_i \overline{\nabla}^{g^e}_j f\right)|\\
&\le c \sum_{i,j,p,q} \left(|\overline{\Gamma}^p_{ij} \overline{\nabla}_p f| \left(|\overline{\nabla}^{g^e}_i \overline{\nabla}^{g^e}_j f| + |\overline{\Gamma}^q_{ij} \overline{\nabla}_q f|\right)\right)\\
&\le c|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}|_{g^e} |\nabla f|_{g^e} |\overline{\nabla}^{(2)^{g^e}} f|_{g^e} + c|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}|^2_{g^e} |\nabla f|^2_{g^e}\\
&\le \frac{1}{2}|\overline{\nabla}^{(2)^{g^e}} f|^2_{g^e} + c|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}|^2_{g^e} |\nabla f|^2_{g^e}.
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt mit Lemma 2.10. □

2.3.2 Hyperflächen in M

Sei nun $F(\Sigma)$ immersierte, geschlossene 2-Fläche in $\mathbf{M} = (\mathbf{M}, g)$. Zusätzlich zu den in Abschnitt 2.1.1 aufgestellten Definitionen lassen sich nun, mit $\mathrm{id}, r : \mathbf{M} \to \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ wie oben, die Größen

$$
\begin{aligned}
r_{\min}(F(\Sigma)) &:= \min_{p \in F(\Sigma)} r(p),\\
r_{\max}(F(\Sigma)) &:= \max_{p \in F(\Sigma)} r(p),
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\mathrm{diam}(F(\Sigma)) := \max_{p,q \in F(\Sigma)} |\mathrm{id}(p) - \mathrm{id}(q)|_{\mathbf{R}^3}
$$

festlegen.

Der Bezug zu Flächen im euklidischen Raum

Ist $r_{\min}$ hinreichend groß, so lassen sich viele der durch g auf Σ induzierten geometrischen Größen in Bezug zu den auf $F(\Sigma) \subset (\mathbf{M}, g^e)$ induzierten setzen. Dies wird es uns ermöglichen, bekannte Ungleichungen und Sachverhalte im euklidischen Raum einfach in asymptotisch schwarzschildsche Mannigfaltigkeiten übertragen zu können.

Die grundlegenden Beziehungen zwischen den durch g, g^e und g^S auf Σ induzierten geometrischen Größen bündelt zunächst folgendes Lemma, das sich direkt aus [Met04, Lemma 2.2] und [LMS11, Lemma 1.3] ergibt.

Lemma 2.12. *Seien $\mathbf{M}, g, g^S, g^e, \Sigma$ und F wie oben definiert. Seien ν, ν^S, ν^e die äußeren Normalenvektoren an $F(\Sigma)$ bzgl. g, g^S und g^e. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
&\nu^S = \phi^{-2} \nu^e,\\
&|\nu - \nu^S| \le c\kappa r^{-2}
\end{aligned}
$$

sowie für die auf Σ induzierten Zusammenhänge $\nabla, \nabla^S, \nabla^e$

$$\nabla^S = \nabla^e + \phi^{-1} * \nabla^e \phi,$$
$$|\nabla - \nabla^S| \le c\kappa r^{-3}.$$

Die induzierten mittleren Krümmungen H, H^S und H^e erfüllen

$$H^S = \phi^{-2} H^e + 4\phi^{-3} \partial_{\nu^e} \phi,$$
$$|H - H^S| \le c\kappa r^{-3},$$

die spurfreien zweiten Fundamentalformen $\mathring{A}, \mathring{A}^S, \mathring{A}^e$

$$\mathring{A}^S = \phi^2 \mathring{A}^e,$$
$$|\mathring{A} - \mathring{A}^S| \le c\kappa r^{-3},$$

es ergibt sich für $r_{\min} > r_0(m, \kappa, \sigma)$

$$|A^S - A^e| \le cm\left(r^{-2} + r^{-1}|A^e|\right),$$
$$|A - A^S| \le c\kappa\left(r^{-3} + r^{-2}|H|\right),$$

sowie

$$|\nabla^S A^S - \nabla^e A^e| \le cm\left(r^{-3} + r^{-2}|A^e| + r^{-1}|\nabla^e A^e|\right),$$
$$|\nabla A - \nabla^S A^S| \le c\kappa\left(r^{-4} + r^{-3}|A| + r^{-2}|\nabla A|\right).$$

Für die auf Σ induzierten Flächenelemente $\mathrm{d}\mu$, $\mathrm{d}\mu^S$, $\mathrm{d}\mu^e$ gilt

$$\mathrm{d}\mu^S = \phi^4 \,\mathrm{d}\mu^e,$$
$$|\,\mathrm{d}\mu - \mathrm{d}\mu^S\,| \le c\kappa \,\mathrm{d}\mu\, r^{-2}.$$

□

Korollar 2.13. *Seien $F, \mathbf{M}, \Sigma$ wie oben. Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m, \kappa, \sigma)$, sodaß für $r_{\min} > r_0$*

$$|\|\cdot\|_{L^1(\Sigma, g^e)} - \|\cdot\|_{L^1(\Sigma, g)}| \le c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})\|\cdot\|_{L^1(\Sigma, g)}.$$

Beweis. Sei $f \in L^1(\Sigma)$ beliebig, fest. Lemma 2.12 liefert zunächst

$$|\int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu^e\,| \le c\kappa r_{\min}^{-2} \int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu + cm r_{\min}^{-1} \int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu^e, \tag{2.11}$$

wobei $|\phi^4 - 1| \le cmr^{-1}$ benutzt wurde. Für $r_{\min} > r_0(m, \kappa, \sigma)$ ergibt sich nach Absorbieren direkt

$$c^{-1}\|f\|_{L^1(\Sigma, g)} \le \|f\|_{L^1(\Sigma, g^e)} \le c\|f\|_{L^1(\Sigma, g)}$$

auf $\mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$; erneutes Einsetzen in (2.11) liefert

$$|\int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu^e\,| \le c\left(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1}\right) \int_\Sigma |f|\,\mathrm{d}\mu$$

und damit die Behauptung. □

Für weitere Folgerungen aus 2.12 ist es notwendig, mit Integralen über wie dort auftretende asymptotisch abfallende Terme auf sinnvolle Weise umgehen zu können. Hierbei hilft uns

Lemma 2.14. *Seien $F, \mathbf{M}, \Sigma$ wie oben. Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m, \kappa, \sigma)$, sodaß, falls $r_{\min} > r_0$, für jedes $p > 2$*

$$\int_\Sigma r^{-p}\,\mathrm{d}\mu \leq c(p) r_{\min}^{2-p} \int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\mu \tag{2.12}$$

und für jedes $q > 1$

$$\int_\Sigma |H| r^{-q}\,\mathrm{d}\mu \leq c(q) r_{\min}^{1-q} \int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{2.13}$$

Beweis. Bei (2.12) handelt es sich um [LMS11, Lemma 1.4], Aussage (2.13) folgt direkt aus (2.12) und der Hölderschen Ungleichung. □

Folgerungen aus Lemma 2.14 ergeben sich mit Lemma 2.12 und Proposition 2.2:

Korollar 2.15. *Seien $F, \mathbf{M}, \Sigma$ wie oben. Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m, \kappa, \sigma)$, sodaß für $r_{\min} > r_0$*

$$|\mathbf{W}(F(\Sigma))_{g^e} - \mathbf{W}(F(\Sigma))| \leq c(m r_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2}) \mathbf{W}(F(\Sigma)).$$

Beweis. Zunächst gilt nach Korollar 2.13 für $r_{\min} > r_0(m, \kappa, \sigma)$

$$\int_\Sigma (H^e)^2\,\mathrm{d}\mu^e \leq \left(1 + c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})\right) \int_\Sigma (H^e)^2\,\mathrm{d}\mu,$$

sowie nach Lemma 2.12 und Lemma 2.14

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma (H^e)^2\,\mathrm{d}\mu &\leq \int_\Sigma \left(\phi^2 |H^S| + c m r^{-2}\right)^2 \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Sigma \left(\phi^2 |H| + c(\kappa r^{-3} + m r^{-2})\right)^2 \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Sigma \phi^4 H^2\,\mathrm{d}\mu + c \int_\Sigma |H| (\kappa r^{-3} + m r^{-2})\,\mathrm{d}\mu + c \int_\Sigma \kappa^2 r^{-6} + m^2 r^{-4}\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Sigma (1 + c m r^{-1}) H^2\,\mathrm{d}\mu + c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1} + \kappa^2 r_{\min}^{-4} + m^2 r_{\min}^{-2}) \int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(1 + c(m r_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2})\right) \int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $r_{\min} > \max\{m, \kappa^{\frac{1}{2}}\}$ benutzt wurde. Kombiniert ergibt sich direkt

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(F(\Sigma))_{g^e} &\leq \left(1 + c(m r_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2})\right)^2 \mathbf{W}(F(\Sigma)) \\
&\leq \left(1 + c(m r_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2})\right) \mathbf{W}(F(\Sigma)).
\end{aligned}$$

Analog folgt mit einer Variante von Lemma 2.14 für Flächen in $(\mathbf{M}, g^e)$ die Ungleichung

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) \leq \left(1 + c(m r_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2})\right) \mathbf{W}(F(\Sigma))_{g^e},$$

die Behauptung folgt. □

Korollar 2.16. *Seien $F, \mathbf{M}, \Sigma$ wie oben. Dann gilt für $r_{\min} \geq r_0(m, \kappa, \sigma)$*

$$|4\pi(1-\operatorname{genus}(\Sigma)) + \frac{1}{2}\int_\Sigma |A|^2 \,\mathrm{d}\mu - \mathbf{W}(F(\Sigma))| \leq c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})\mathbf{W}(F(\Sigma)),$$
$$|8\pi(1-\operatorname{genus}(\Sigma))) + \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu - \mathbf{W}(F(\Sigma))| \leq c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})\mathbf{W}(F(\Sigma)).$$

Insbesondere gibt es eine absolute Konstante $c > 0$, sodaß für hinreichend großes $r_{\min}$

$$\int_\Sigma |A|^2 \,\mathrm{d}\mu < c(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + \operatorname{genus}(\Sigma))$$

sowie für sphärische Σ

$$c^{-1} < \mathbf{W}(F(\Sigma)).$$

Beweis. Zunächst folgt aus Proposition 2.7 und Definition 2.8

$$|\int_\Sigma \overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Sc}} \,\mathrm{d}\mu| \leq c\int_\Sigma \kappa r^{-4} + m r^{-3} \,\mathrm{d}\mu,$$

und wir erhalten nach Anwendung von Lemma 2.14 direkt

$$|\int_\Sigma \overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Sc}} \,\mathrm{d}\mu| \leq c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})\mathbf{W}(F(\Sigma)).$$

Setzt man dies in die Aussagen in Proposition 2.2 ein und benutzt, daß nach dem Satz von Gauß-Bonnet ([Pet06, §4.3]) für die Eulercharakteristik $\chi_\Sigma := 2 - 2\operatorname{genus}(\Sigma)$ von Σ

$$\int_\Sigma \mathrm{Sc} \,\mathrm{d}\mu = 4\pi\chi_\Sigma,$$

so folgt direkt die Behauptung. □

Auswirkungen von Willmoreschranken

Eine Reihe bekannter Resultate setzt sich mit dem quantitativen Einfluss der Willmoreenergie auf die „Rundheit" von Hyperflächen im euklidischen Raum auseinander – mit Korollar 2.15 verfügen wir nun über ein Werkzeug, um einige dieser Aussagen problemlos auf Flächen in $\mathbf{M}$ übertragen zu können.

Lemma 2.17. *Seien $F, \mathbf{M}, \Sigma$ wie in Lemma 2.12. Dann gibt es eine absolute Konstante c und ein $r_0(m, \kappa, \sigma)$, sodaß für $r_{\min} > r_0$*

$$c^{-1}\mathbf{W}(F(\Sigma))^{-1} \leq \frac{(\operatorname{diam}(F(\Sigma)))^2}{|F(\Sigma)|} \leq c\mathbf{W}(F(\Sigma)).$$

Beweis. Die Behauptung gilt nach [Sim93, Lemma 1.1] für Flächen in $(\mathbf{M}, g^e)$ und lässt sich für hinreichend große r direkt mit den Korollaren 2.13 und 2.15 direkt übertragen. □

Lemma 2.18. *Seien $F, \mathbf{M}, \Sigma$ wie in Lemma 2.12. Dann gibt es eine absolute Konstante c und ein $r_0(m, \kappa, \sigma)$, sodaß für jede euklidische Kugel $B_\rho(x) \subset \mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$*

$$|F(\Sigma) \cap B_\rho(x)| \leq c\rho^2\mathbf{W}(F(\Sigma)).$$

Beweis. Nach [Sim93, (1.3)] gilt für beliebige $0 < \rho \le \delta < \infty$ bezüglich der euklidischen Metrik

$$\rho^{-2}|F(\Sigma) \cap B_\rho(x)|_{g^e} \le c\left(\delta^{-2}|F(\Sigma) \cap B_\delta(x)|_{g^e} + \int_{F(\Sigma)\cap B_\delta(x)} (H^e)^2 \,\mathrm{d}\mu^e\right).$$

Da Σ kompakt ist, ergibt sich für $\delta \nearrow \infty$

$$\rho^{-2}|F(\Sigma) \cap B_\rho(x)|_{g^e} \le c\mathbf{W}(F(\Sigma))_{g^e},$$

die Behauptung folgt nun mit den Korollaren 2.13 und 2.15. □

Lemma 2.19. *Seien $\mathbf{M}, \Sigma, F$ wie oben, und existiere ein $k \in \mathbf{N}$ mit*

$$\exists x_1 \ne \cdots \ne x_k \in \Sigma : F(x_i) = F(x_j) \text{ für alle } 1 \le i, j \le k.$$

Dann gibt es ein $r_0(m, \kappa, \sigma)$, sodaß für $r_{\min} > r_0$

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) \ge 8\pi k - ck(mr_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2}).$$

Insbesondere gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $r_0(m, \kappa, \sigma, \delta^{-1})$, sodaß für $r_{\min} > r_0$ die Implikation

$$\mathbf{W}(F(\Sigma)) \le 16\pi - \delta \Longrightarrow F \text{ ist Einbettung}$$

gilt.

Beweis. Der erste Teil der Aussage ergibt sich direkt aus [LY82, Satz 6] und Korollar 2.15. Für den zweiten Teil bemerkt man, daß für jedes *nicht*injektive F $k = 2$ wählbar ist; die Behauptung folgt für $c(mr_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2}) < \delta/2$. □

Sobolevungleichungen

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft von $\mathbf{M}$ ist die uneingeschränkte Gültigkeit der Michael-Simon-Sobolevungleichung

$$\|f\|_{L^2(\Sigma)} \le c\int_\Sigma |Hf| + |\nabla f| \,\mathrm{d}\mu$$

auf allen Hyperflächen $F(\Sigma) \subset \mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$ für ein geeignet gewähltes r_0; auch hier handelt es sich wieder um eine Adaption der bekannten Ungleichung im $\mathbf{R}^3$ unter Benutzung der bisher aufgestellten Resultate. Für die präzise Formulierung der Aussage und etliche Folgerungen hieraus verweisen wir auf Abschnitt B.3.

Kapitel 3

Willmore-Fluss mit allgemeinen Lagrangetermen

3.1 Kurzzeitexistenz bei bekanntem θ

Für diejenigen Spielarten des Flusses (WF$*$) bei denen die Funktion $\theta : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ *bekannt* bzw. *vorgegeben* ist, lässt sich durch Adaption der Methoden in [EMS98, §2] und [Sim01, §2] direkt ein Kurzzeitexistenzresultat beweisen. Insbesondere wird hiermit ein Resultat für den Fluss (WF) eingeschlossen; für (WFF) verweisen wir auf Abschnitt 4.1.

Die in [EMS98] bzw. [Sim01] benutzten Methoden für Hyperflächen im $\mathbf{R}^n$ lassen sich ohne größere Änderungen auf Hyperflächen in beliebigen umgebenden Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Herzstück bildet jeweils eine Formulierung der betrachteten Evolutionsgleichung als parabolisches, quasilineares Differentialgleichungsproblem vierter Ordnung für Funktionsgraphen über der Startfläche.

Das duale Funktionsgraphenproblem

Sei $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ glatte, orientierbare Immersion einer geschlossenen 2-Fläche mit Einheitsnormalenfeld ν. Wir folgen [EMS98, §2] und wählen eine feste, endliche Kartenüberdeckung $\{U_l\}_l$ von Σ derart, daß $F_0|_{U_l}$ für jedes l eine Einbettung ist. Bezeichnet nun $\overline{\exp}_p : T_p\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ die Gaußabbildung auf $\mathbf{M}$, so ergibt sich die Existenz eines $r_0 > 0$, sodaß für jedes l die Abbildung

$$\begin{aligned} X_l : U_l \times (-r_0, r_0) &\to \operatorname{im}(X_l) \subset \mathbf{M}, \\ (s,r) &\mapsto \overline{\exp}_{F_0(s)}(r\cdot\nu) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ein Diffeomorphismus ist; für $p \in \operatorname{im}(X_l)$ sind damit die Punkte $s_l(p) \in U_l$, $r_l(p) \in (-r_0, r_0)$ durch

$$(s_l(p), r_l(p)) := X_l^{-1}(p)$$

wohldefiniert und wir erhalten eine lokale reguläre Parametrisierung der Tubenumgebung $\{p \in \mathbf{M} : \operatorname{dist}_g(p, F_0(\Sigma)) < r_0\} = \bigcup_l \operatorname{im}(X_l)$ über $\Sigma \times (-r_0, r_0)$. Ferner gilt nach Konstruktion für jedes l

$$\begin{aligned} F_0(U_l) &= (X_l(U_l, 0)), \\ \nu|_{F_0(U_l)} &= \partial_r X_l|_{r=0}, \\ r_l(p) &= \operatorname{sgndist}_g(p, F_0(U_l)), \end{aligned}$$

wobei sgndist die Distanzfunktion mit Vorzeichen bezeichnet.

Ist nun $T > 0$ und $f : \Sigma \times [0,T) \to (-r_0, r_0)$ beliebige Funktion, so ist die Variation

$$\begin{aligned} &G_f : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}, \\ &(s,t) \mapsto X_l(s, f(s,t)) \text{ falls } s \in U_l \end{aligned} \tag{3.2}$$

wohldefiniert und von gleicher Regularität wie f. Analog zum euklidischen Fall bzw. zur Argumentation in [EMS98] ist außerdem für jedes feste t das Flächenstück $G_f(U_l,t)$ darstellbar als (Null-)Niveaumenge der Funktion

$$\begin{aligned} &\Phi_{l,f}(\cdot,t) : \mathrm{im}(X_l) \to \mathbf{R}, \\ &p \mapsto r_l(p) - f(s_l(p),t) \end{aligned}$$

und direkte Rechnung ergibt für jedes $\alpha : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{R}$ und alle $(s,t) \in U_l \times [0,T)$

$$\begin{aligned} &\big(\partial_t G_f(s,t)\big)^{\perp} = \alpha(s,t)\nu \\ \iff \quad &\alpha(s,t) = -\frac{\partial_t \Phi_{l,f}(p,t)}{|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}(p,t)|}\Bigg|_{p=G_f(s,t)} = \frac{\partial_t f(s,t)}{|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}(p,t)|}\Bigg|_{p=G_f(s,t)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

womit eine direkte Beziehung zwischen der Bewegung der Flächen $G_f(\Sigma,\cdot)$ in Normalenrichtung und dem Verhalten der Funktion f hergestellt ist.

Sei nun $\theta \in C^0([0,T),\mathbf{R})$ beliebig, fest. Ist f hinreichend glatt, so induziert G_f zu jedem Zeitpunkt auf Σ eine Metrik γ_f und geometrische Krümmungsgrößen $\cdot_f$ wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, und es lässt sich aus (3.3) und den Definitionen in Abschnitt 2.2 schließen, daß (modulo tangentialer Bewegungen) die Existenz einer Lösung des Flusses (WF$*$) zu Startwerten $F_0(\Sigma)$ gleichwertig ist zur Existenz einer Funktion $f : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{R}$ mit

$$\begin{aligned} &\partial_t f|_{U_l} = Q_l(f), \\ &f(\cdot,0) \equiv 0, \end{aligned}$$

wobei für jedes l

$$Q_l(f) := \big(-\alpha_{\mathbf{W}f} + H_f\theta\big)\, G_f^*|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}|.$$

Bemerken wir abschließend, daß mit der Funktion

$$s \mapsto G_f^*|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}| \text{ falls } s \in U_l \tag{3.4}$$

auch der analog festgelegte Operator Q auf ganz Σ wohldefiniert ist, so lässt sich obiges Problem global als

$$\begin{aligned} &\partial_t f = Q(f), \\ &f(\cdot,0) \equiv 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

formulieren.

Völlig analog zu [Sim01, Lemma 2.1] lässt sich nun die in Problem (3.5) verborgene quasilineare Struktur zum Vorschein bringen. In Anlehnung an die dort benutzte Notation definieren wir zunächst für $\alpha \in (0,1)$ und $k \in \mathbf{N}_0$ die „kleinen" Hölderräume $h^{k,\alpha} = h^{k,\alpha}(\Sigma) \subset C^{k,\alpha}(\Sigma)$ durch

$$\begin{aligned} h^{k,\alpha} &:= \overline{C^\infty(\Sigma)}^{\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Sigma)}} \\ &= \Big\{u \in C^{k,\alpha}(\Sigma) \,:\, \text{es gibt } \{u_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset C^\infty(\Sigma) \text{ mit } \|u_j - u\|_{C^{k,\alpha}(\Sigma)} \to 0\Big\}, \end{aligned}$$

und bemerken, daß die der Norm $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Sigma)}$ zugrundeliegende Hölderhalbnorm sich auch zunächst lokal auf den Gebieten U_l über die zugehörigen Kartenabbildungen und die übliche Halbnorm im Euklidischen definieren lässt. Wie in [Ama95] bezeichnen wir zudem mit $\mathscr{H}(h^{4,\alpha},h^{0,\alpha})$ die Klasse derjenigen linearen, stetigen Operatoren $A\in\mathscr{L}(h^{4,\alpha},h^{0,\alpha})$, deren Negatives $-A$, aufgefasst als unbeschränkter Operator in $h^{0,\alpha}$ mit Definitionsbereich $h^{4,\alpha}$, einen zum abstrakten Problem

$$\dot u = -Au$$

gehörigen Fluss $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ in $h^{0,\alpha}$ erzeugt, der sich für hinreichend kleines γ analytisch auf den komplexen Sektor $Z := \{z\neq 0\in\mathbf{C} : |\arg(z)|\leq\gamma\}$ fortsetzen lässt und für jedes $u\in h^{0,\alpha}$ der Forderung

$$\lim_{z\in Z,\, z\to 0} S(z)u = u$$

genügt. Diese Klasse entspricht in der in [Ama95, §1.2] verwendeten Sprache der Klasse der (negativen) Erzeuger einer *stark stetigen analytischen Halbgruppe* in $\mathscr{L}(h^{0,\alpha},h^{0,\alpha})$ und lässt sich durch die dortigen Ergebnisse vollständig über die Resolventenmenge von $-A$ und das Wachstum der zugehörigen Resolventenoperatoren charakterisieren.

Wir setzen abschließend

$$\mathfrak{A}^{k,\alpha} := \left\{ u\in h^{k,\alpha} \,:\, \sup_{\Sigma}|u| < r_0 \right\} \subset h^{k,\alpha},$$

und fixieren

$$0<\alpha<\beta_0<1.$$

Dann gilt zu jedem festen Zeitpunkt t

Lemma 3.1. *Es existieren $P\in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0},\mathscr{H}(h^{4,\alpha},h^{0,\alpha})\right)$ und $B,E\in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0},h^{0,\beta_0}\right)$, sodaß*

$$Q(f) = -P(f)f + B(f) + \theta E(f)$$

für jedes $f\in\mathfrak{A}^{4,\alpha}$.

Beweis. Dies folgt analog zu [Sim01, Lemma 2.1] direkt aus [EMS98, Lemma 2.1], in dem ein analoges Resultat für den Oberflächendiffusionsfluss für Flächen im $\mathbf{R}^n$ aufgestellt wird und dessen Beweis sich direkt übertragen lässt: Nach Konstruktion (3.1) stehen die Vektoren $\partial_r X_l|_{r=r'}$ für festes l und jedes $r'\in(-r_0,r_0)$ senkrecht auf der Äquidistanzfläche $\{p : \operatorname{sgndist}_g(p,F_0(U_l)) = r'\}\subset(\mathbf{M},g)$, und die auf $U_l\times(-r_0,r_0)$ definierbare Metrik X_l^*g lässt sich somit wie in [EMS98, Lemma 2.1] auf jeder Faser $U_l\times\{r'\}$ orthogonal in

$$X_l^*g = w_l(r') + \mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r$$

für ein geeignetes $w_l(r')$ aufspalten. Damit behalten alle im dortigen Beweis aufgeführten Rechnungen und lokalen Darstellungen (modulo positiver Vorfaktoren) ihre Gültigkeit und es ergibt sich die Existenz von $P\in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0},\mathscr{H}(h^{4,\alpha},h^{0,\alpha})\right)$ und $B_1\in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0},h^{0,\beta_0}\right)$ mit

$$\left(\triangle_f H_f\right) G_f^*|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}| = -P(f)f + B_1(f)$$

für alle l. Nun gilt nach den Definitionen in Abschnitt 2.2

$$\begin{aligned} &Q(f) - \left(\triangle_f H_f\right) G_f^*|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}| \\ &\quad = H_f\left(|\mathring{A}_f|^2 + G_f^*\,\overline{\mathrm{Rc}}(\nu_{G_f(\Sigma)},\nu_{G_f(\Sigma)}) + \theta\right) G_f^*|\overline{\nabla}\Phi_{l,f}|, \end{aligned} \tag{3.6}$$

und die Behauptung ist gezeigt, wenn es gelingt, die geometrischen Größen auf der rechten Seite von (3.6) als Funktionen von f in $C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, h^{0,\beta_0}\right)$ darzustellen: Zunächst ergibt sich wie in [EMS98] für beliebige $s \in U_l \subset \Sigma$ auf $\Xi_l := (U_l \times (-r_0, r_0), X_l^* g)$

$$(\nabla^{\Xi_l} X_l^* \Phi_{l,f})(s,r) = \partial_r - \nabla^{U_l \times \{r\}} f(s)$$

und es folgt mit w_l wie oben, $\widehat{\Phi}_{l,f} := X_l^* \Phi_{l,f}$ und $\widehat{\mathrm{Rc}} := X_l^* \overline{\mathrm{Rc}}$ wie in Rechnung [EMS98, (2.3)]

$$\begin{aligned} G_f^* \overline{\mathrm{Rc}}(\nu_{G_f(\Sigma)}, \nu_{G_f(\Sigma)})\Big|_s &= |\overline{\nabla} \Phi_{l,f}|_g^{-2} \cdot \overline{\mathrm{Rc}}(\overline{\nabla} \Phi_{l,f}, \overline{\nabla} \Phi_{l,f})\Big|_{G_f(s)} \\ &= |\nabla^{\Xi_l} \widehat{\Phi}_{l,f}|_{X_l^* g}^{-2} \cdot \widehat{\mathrm{Rc}}(\nabla^{\Xi_l} \widehat{\Phi}_{l,f}, \nabla^{\Xi_l} \widehat{\Phi}_{l,f})\Big|_{(s,f(s))} \\ &= (1 + w_l^{ij} \partial_i f \partial_j f)^{-1}\Big|_{(s,f(s))} \\ &\qquad \cdot \left(\widehat{\mathrm{Rc}}_{ij} w_l^{ik} w_l^{jq} \partial_k f \partial_q f - 2\widehat{\mathrm{Rc}}_{ri} w_l^{ij} \partial_j f + \widehat{\mathrm{Rc}}_{rr}\right)\Big|_{(s,f(s))}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei alle Koordinatenableitungen am Punkt $s \in U_l$ zu verstehen sind, über $i, j, k, q \in \{1, 2\}$ summiert wird und der Index r als fest anzusehen ist. Bemerkt man nun, daß sowohl die Koeffizienten w_l^{ij} als auch $\widehat{\mathrm{Rc}}_{ij}$ zwar (glatt) von den *Werten* der Funktion f abhängen, nicht jedoch von ihren *Ableitungen*, liefert Darstellung (3.7) eine vollständige Beschreibung davon, wie diese in den Ausdruck

$$\tilde{B}(f) := G_f^* \overline{\mathrm{Rc}}(\nu_{G_f(\Sigma)}, \nu_{G_f(\Sigma)})$$

eingehen. Es ergibt sich insbesondere

$$\tilde{B} \in C^\infty(\mathfrak{A}^{1,\beta_0}, h^{0,\beta_0}).$$

Analog verfährt man mit den übrigen Termen in (3.6), vgl. [Sim01, Lemma 2.1], unter Benutzung geeigneter lokaler Koordinatendarstellungen von $\nabla^{\Xi_l}(\nabla^{\Xi_l} \widehat{\Phi}_{l,f} \cdot |\nabla^{\Xi_l} \widehat{\Phi}_{l,f}|^{-1})$ und der Definitionen von zweiter Fundamentalform und mittlerer Krümmung. Insgesamt ergibt sich damit aber insbesondere die Glatt- und Wohldefiniertheit der Abbildungen

$$\begin{aligned} &B_2, E : \mathfrak{A}^{2,\beta_0} \to h^{0,\beta_0}, \\ &B_2(f) := H_f \left(|\mathring{A}_f|^2 + \tilde{B}(f)\right) G_f^* |\overline{\nabla} \Phi_{l,f}|, \\ &E(f) := H_f G_f^* |\overline{\nabla} \Phi_{l,f}|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit $B := B_1 + B_2$. □

Es ergibt sich direkt

Satz 3.2. *Sei $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ glatte, orientierbare Immersion einer geschlossenen 2-Fläche Σ, $T' > 0$ und $\theta \in C^{0,1}([0,T'), \mathbf{R})$ fest. Dann existiert ein $T \in (0, T']$, eine eindeutige Lösung $f : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{R}$ zu (3.5) und eine eindeutige Lösung $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}$ von (WF$*$) zu Startwerten $F_0(\Sigma)$. Für jedes $\beta \in (0,1)$ gilt*

$$[t \mapsto f(\cdot, t)] \in C([0,T), \mathfrak{A}^{2,\beta}). \tag{3.8}$$

Beweis. Nach Voraussetzung an θ gilt zunächst mit den in Lemma 3.1 festgelegten Abbildungen B und E, daß

$$B + \theta E \in C^{0,1}(\mathfrak{A}^{2,\beta_0} \times [0,T'), h^{0,\beta_0}).$$

Analog zu [Sim01, Proposition 2.2] ergibt sich damit aus Lemma 3.1 die Existenz eines $T > 0$ und einer Lösung f wie oben; die Zeitabhängigkeit von $B + \theta E$ lässt sich hierbei wie in [Ama93, Bemerkung 12.2] handhaben. Eigenschaft (3.8) ergibt sich aus der Glattheit der Startwerte, da β in [Sim01, Proposition 2.2] beliebig nah an 1 gewählt werden kann.

Sei nun die zu f duale Variation G_f wie in (3.2) definiert. Durch Entfernung der tangentialen Anteile von $\partial_t G_f$ ergibt sich die gesuchte Variation F: Setzt man dazu

$$\overline{V} := -\left(\partial_t G_f - \left(\partial_t G_f\right)^{\perp}\right),$$

so ist das zeitabhängige Vektorfeld $V := G_f^*(\overline{V})$ auf Σ wohldefiniert und für jedes $t \in [0,T)$ der Diffeomorphismus $\phi_t : \Sigma \to \Sigma$ durch

$$\begin{aligned}
&\phi_0(\cdot) \equiv \mathrm{id}_\Sigma(\cdot),\\
&\dot{\phi}_t(s) = V(\phi_t(s), s) \text{ für alle } (s,t) \in \Sigma \times [0,T)
\end{aligned}$$

eindeutig festgelegt. Die Behauptung folgt mit $F(s,t) := G_f(\phi_t(s),t)$. □

3.2 Evolution der Krümmung

Das Aufstellen geeigneter Evolutionsgleichungen stellt ein unverzichtbares Herzstück der Untersuchung jedes geometrischen Flusses dar. Für den Fluss (WF$*$) in $\mathbf{M}$ können wir uns hierbei grob am Vorgehen in [KS02, §2] orientieren, müssen aber weitaus höhere, aus der Krümmung des umgebenden Raums resultierende, technische Hürden überwinden.

Zunächst aber beginnen wir mit folgendem Lemma, das uns beim beim Vertauschen kovarianter Ableitungen auf Σ hilft und eine Variante von [KS02, Lemma 2.1] für Hyperflächen in allgemeinen 3-Mannigfaltigkeiten darstellt.

Im Folgenden machen wir ausgiebigen Gebrauch der in den Abschnitten 2.1.2 bzw. 2.1.3 eingeführten $*$- und $(\cdot)^{(\nu)}$-Notationen.

Lemma 3.3. *Sei ψ k-Form auf Σ und $[\nabla, \mathrm{div}]\psi := \nabla \operatorname{div} \psi - \operatorname{div} \nabla \psi$. Dann gilt*

$$[\nabla, \mathrm{div}]\psi = \psi * \mathrm{Rm} - \operatorname{div} T_\psi$$

mit $\mathrm{div} = \mathrm{div}^\Sigma$ *und*

$$T_\psi(X_0, X_1, X_2 \dots, X_k) := \nabla_{X_0} \psi(X_1, X_2, \dots, X_k) - \nabla_{X_1} \psi(X_0, X_2, \dots, X_k).$$

Beweis. In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}
[\nabla, \mathrm{div}]\psi_{i_1,\dots,i_k} &= \nabla_{i_1} \nabla^j \psi_{j,i_2,\dots,i_k} - \nabla^j \nabla_j \psi_{i_1,\dots,i_k}\\
&= \left(\nabla_{i_1} \nabla^j - \nabla^j \nabla_{i_1}\right) \psi_{j,i_2,\dots,i_k} + \nabla^j \left(\nabla_{i_1} \psi_{j,i_2,\dots,i_k} - \nabla_j \psi_{i_1,\dots,i_k}\right)\\
&= \left(\nabla_{i_1} \nabla^j - \nabla^j \nabla_{i_1}\right) \psi_{j,i_2,\dots,i_k} - \nabla^j (T_\psi)_{j,i_1,\dots,i_k}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nun gilt aber nach (2.1) für beliebige $s_1, \dots, s_k$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{i_1} \nabla^j - \nabla^j \nabla_{i_1}) \psi_{s_1,\dots,s_k} &= -\sum_r \mathrm{Rm}_{i_1\ s_r}^{\ \ j\ \ b}\, \psi_{s_1,\dots,s_{r-1},b,s_{r+1},\dots,s_k}\\
&= \psi * \mathrm{Rm},
\end{aligned}$$

Einsetzen in (3.9) liefert die Behauptung. □

Proposition 3.4. *Für eine k-Form ϕ auf Σ und $\psi := \nabla\phi$ ergibt sich für den Tensor T_ψ aus Lemma 3.3*

$$(T_\psi)_{p,q,i_1,\dots,i_k} = (\nabla_p\nabla_q - \nabla_q\nabla_p)\phi_{i_1,\dots,i_k}$$
$$= \begin{cases} \phi * \mathrm{Rm}, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Einsetzen von $\psi = \nabla\phi$ in Lemma 3.3 liefert also

$$[\nabla, \mathrm{div}]\,\nabla\phi = \begin{cases} \nabla\phi * \mathrm{Rm} + \phi * \nabla\mathrm{Rm}, & k \geq 1, \\ \nabla\phi * \mathrm{Rm}, & k = 0. \end{cases}$$

□

Wir sind nun in der Lage, eine Evolutionsgleichung für A unter (WF$*$) aufzustellen und nutzen hierbei intensiv aus, daß nach (2.2)

$$\overline{\mathrm{Rm}}^\top = 1 * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}$$

und somit nach den Gaußgleichungen

$$\mathrm{Rm} = 1 * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + P_0^2(A). \tag{3.10}$$

Lemma 3.5. *Unter* (WF$*$) *gilt*

$$(\partial_t + \triangle^2)A = P_3^2(A) + P_5^0(A) + \sum_{k+l=2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + 1 * \nabla^{(3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}$$
$$+ A * P_2^0((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) + P_3^0(A) * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}$$
$$+ \theta * \left(\nabla^{(2)}A + P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\right).$$

Beweis. Zunächst gilt nach Lemma 2.3 für $\partial_t F = \alpha\nu$

$$\partial_t A_{ij} = -\nabla_{ij}^{(2)}\alpha + \alpha\left(A_{ik}A_j^k - T_{ij}\right)$$
$$= -\nabla_{ij}^{(2)}\alpha + \alpha * \left(P_2^0(A) + (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\right),$$

wobei benutzt wurde, daß

$$T_{ij} = \overline{\mathrm{Rc}}_{ij} + (\overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Sc}})\gamma_{ij}$$
$$= 1 * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}.$$

Unter (WF$*$) gilt nun nach Definition

$$\alpha = \triangle H + P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + H\theta,$$

Einsetzen hiervon liefert direkt

$$\partial_t A_{ij} = -\nabla_{ij}^{(2)}\triangle H + \nabla^{(2)}\left(P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} - H\theta\right)$$
$$+ \left(\triangle H + P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + H\theta\right) * \left(P_2^0(A) + (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\right)$$
$$= -\nabla_{ij}^{(2)}\triangle H + P_3^2(A) + P_5^0(A) + \sum_{k+l=2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \tag{3.11}$$
$$+ A * P_2^0((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) + (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} * P_3^0(A)$$
$$+ \theta * \left(\nabla^{(2)}A + P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\right).$$

Nun ist aber nach (3.10) und Proposition 3.4, angewendet auf ∇H und H,

$$
\begin{aligned}
(\nabla^{(2)} \triangle - \triangle \nabla^{(2)})H &= [\nabla, \operatorname{div}] \nabla^{(2)} H + \nabla[\nabla, \operatorname{div}] \nabla H \\
&= \nabla^{(2)} H * \mathrm{Rm} + \nabla H * \nabla \mathrm{Rm} + \nabla (\nabla H * \mathrm{Rm}) \\
&= P_3^2(A) + \nabla^{(2)} A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \nabla A * \nabla (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)},
\end{aligned}
$$

sowie nach der Simons-Identität (2.6)

$$
\begin{aligned}
\triangle \nabla^{(2)} H - \triangle^2 A &= \triangle \left(P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + 1 * \nabla (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \right) \\
&= P_3^2(A) + \sum_{k+l=2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + 1 * \nabla^{(3)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}.
\end{aligned}
$$

Kombination dieser Aussagen mit (3.11) liefert die Behauptung. □

3.2.1 Höhere Ableitungen

Folgendes Lemma hilft uns beim Berechnen der Evolution höherer Krümmungsableitungen und stellt ein Analogon zu [KS02, Lemma 2.3] dar.

Lemma 3.6. *Sei $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{M}$ eine Variation in $\mathbf{M}$ mit $\partial_t F = \alpha \nu$ und seien ϕ, Y k-Formen auf Σ mit $(\partial_t + \triangle^2)\phi = Y$. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_t + \triangle^2\right) \nabla \phi = \nabla Y &+ \phi * A * \nabla \alpha + \phi * \nabla A * \alpha \\
&+ \sum_{i+j=3} \nabla^{(i)} \phi * \nabla^{(j)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \sum_{i+j+k=3} \nabla^{(i)} \phi * \nabla^{(j)} A * \nabla^{(k)} A.
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir rechnen ohne Einschränkung in einem festen Punkt $(p,t) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ und wählen zeitunabhängige Koordinaten derart, daß $\Gamma_{ij}^k|_{(p,t)} = 0$. Dann gilt in (p,t)

$$
\begin{aligned}
(\partial_t (\nabla \phi))_{i_0, i_1 \dots, i_k} &= \partial_t \left((\nabla \phi)_{i_0, i_1 \dots, i_k} \right) \\
&= \partial_t \left(\partial_{i_0} (\phi_{i_1 \dots, i_k}) - \sum_r \phi(\dots, \nabla_{i_0} e_{i_r}, \dots) \right) \\
&= \partial_{i_0} \left((Y - \triangle^2 \phi)_{i_1, \dots, i_k} \right) - \sum_{r,p} \phi(\dots, \partial_t \Gamma_{i_0 i_r}^p e_p, \dots),
\end{aligned}
$$

also nach Lemma 2.3

$$
\partial_t (\nabla \phi) = \nabla Y - \nabla \triangle^2 \phi + \phi * (A * \nabla \alpha + \alpha * \nabla A). \tag{3.12}
$$

Wegen Proposition 3.4 gilt aber

$$
\begin{aligned}
(\nabla \triangle^2 - \triangle^2 \nabla)\phi &= \triangle ([\nabla, \operatorname{div}] \nabla \phi) + [\nabla, \operatorname{div}] \nabla \triangle \phi \\
&= \triangle (\nabla \phi * \mathrm{Rm} + \phi * \nabla \mathrm{Rm}) + \nabla \triangle \phi * \mathrm{Rm} + \triangle \phi * \nabla \mathrm{Rm},
\end{aligned}
$$

wir erhalten nach Einsetzen in (3.12)

$$
(\partial_t + \triangle^2) \nabla \phi = \nabla Y + \phi * (A * \nabla \alpha + \alpha * \nabla A) + \sum_{i+j=3} \nabla^{(i)} \phi * \nabla^{(j)} \mathrm{Rm}
$$

und mit (3.10) die Behauptung. □

Nun können wir aus Lemma 3.5 eine Evolutionsgleichung für höhere Ableitungen von A herleiten.

Lemma 3.7. *Unter* (WF$*$) *gilt für alle* $m \geq 0$

$$\begin{aligned}(\partial_t + \triangle^2)\nabla^{(m)}A = {} & P_3^{m+2}(A) + P_5^m(A) + 1 * \nabla^{(m+3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\ & + \theta * \left(P_3^m(A) + \nabla^{(m+2)}A + \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\right) \\ & + \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\ & + \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)}A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Beweis. Wir führen eine Induktion über m durch; Lemma 3.5 liefert die Behauptung für $m = 0$.

Bezeichne nun $Y(m)$ einen Ausdruck der Form der rechten Seite von (3.13). Ist (3.13) für ein m erfüllt, d.h. gilt $(\partial_t + \triangle^2)\nabla^{(m)}A = Y(m)$, so folgt nach Lemma 3.6 mit $\phi = \nabla^{(m)}A$, $Y = Y(m)$ und $\alpha = -\alpha_{\mathbf{W}} + H\theta$

$$\begin{aligned}(\partial_t + \triangle^2)\nabla^{(m+1)}A = {} & \nabla(Y(m)) + \nabla^{(m)}A * A * \nabla\,\alpha_{\mathbf{W}} + \nabla^{(m)}A * \nabla A * \alpha_{\mathbf{W}} \\ & + \theta * \nabla^{(m)}A * \nabla A * A + \sum_{i+j=3} \nabla^{(i+m)}A * \nabla^{(j)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\ & + \sum_{i+j+k=3} \nabla^{(i+m)}A * \nabla^{(j)}A * \nabla^{(k)}A \\ = {} & Y(m+1) + P_3^{m+3}(A) + \theta * P_3^{m+1}(A) \\ & + \sum_{k+l=m+3} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\ & + \nabla^{(m)}A * A * \nabla\,\alpha_{\mathbf{W}} + \nabla^{(m)}A * \nabla A * \alpha_{\mathbf{W}}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Wegen $\alpha_{\mathbf{W}} = -\triangle H - H(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu}) = P_1^2(A) + P_3^0(A) + A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}$ gilt nun aber, daß

$$\begin{aligned}\nabla^{(m)}A * A * \nabla\,\alpha_{\mathbf{W}} &= P_3^{m+3}(A) + P_5^{m+1}(A) + \nabla^{(m)}A * A * \nabla(A * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \\ &= P_3^{m+3}(A) + P_5^{m+1}(A) + P_3^{m+1}(A) * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + P_3^m(A) * \nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)},\end{aligned}$$

analog ergibt sich

$$\nabla^{(m)}A * \nabla A * \alpha_{\mathbf{W}} = P_3^{m+3}(A) + P_5^{m+1}(A) + P_3^{m+1}(A) * (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}.$$

Damit lassen sich jedoch alle Terme in (3.14) in den $Y(m+1)$-Ausdruck aufnehmen – es folgt $(\partial_t + \triangle)\nabla^{(m+1)}A = Y(m+1)$ und damit die Behauptung. □

3.2.2 Integralgleichungen

Um mit der Natur der Evolutionsgleichungen des letzten Abschnittes als Differentialgleichungen vierter Ordnung umgehen zu können, müssen diese analog zum Vorgehen in [KS02, §3] in lokale Integralgleichungen umgewandelt werden. Zunächst ergibt sich aus einer direkten Rechnung (vgl. [KS02, Lemma 3.1]) folgende

Proposition 3.8. *Sei $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{M}$ eine Variation in $\mathbf{M}$ mit $\partial_t F = \alpha\nu$ und seien ϕ, Y k-Formen auf Σ mit $(\partial_t + \triangle^2)\phi = Y$. Dann gilt für alle $\eta \in C^2(\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon))$*

$$\begin{aligned}\partial_t \int_\Sigma \eta |\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu - 2\int_\Sigma \eta \langle \phi, Y\rangle \,\mathrm{d}\mu + 2\int_\Sigma \langle \triangle\phi, \triangle(\eta\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu \\ = \int_\Sigma (\partial_t \eta)|\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta\alpha \cdot A * \phi * \phi \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das durch γ induzierte Tensorskalarprodukt ist. □

Durch geschicktes Abschätzen des $\int \langle \triangle\phi, \triangle(\eta\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu$-Terms in Proposition 3.8 können wir „gute“ Gradiententerme auf der linken Seite erzeugen – Ergebnis ist folgendes Lemma, das eine Variante von [KS02, Lemma 3.2] darstellt.

Lemma 3.9. *Sei $\eta \in C^2(\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ mit $\eta(\cdot,t) \in [0,1]$ und gelte $\sup_{[\eta(\cdot,t)>0]} |\overline{\mathrm{Rm}}^\top| \leq \Pi_0$ für ein $\Pi_0 \in \mathbf{R}$. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Proposition 3.8 für alle $s \geq 4$*

$$\begin{aligned}\partial_t \int_\Sigma \eta^s|\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu - 2\int_\Sigma \eta^s \langle\phi, Y\rangle \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)}\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2 |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu \\ \leq \int_\Sigma s\eta^{s-1}\partial_t \eta |\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \alpha \cdot A * \phi * \phi \,\mathrm{d}\mu \\ + c(s)\int_\Sigma |\phi|^2 \eta^{s-4}\left(|\nabla\eta|^4 + \eta^2|\nabla^{(2)}\eta|^2\right) \mathrm{d}\mu \\ + c(s)\int_\Sigma \eta^s |\phi|^2 \left(|\nabla A|^2 + |A|^4\right) \mathrm{d}\mu + c(s)\Pi_0^2 \int_\Sigma \eta^s |\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

Beweis. Nach [KS02, (3.3)] gibt es zunächst ein $c(s)$, sodaß

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)}\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu \\ \leq \frac{3}{2}\int_\Sigma \langle \nabla^{(2)}\phi, \nabla^{(2)}(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu \\ + c(s)\int_\Sigma |\phi|^2\eta^{s-4}\left(|\nabla\eta|^4 + \eta^2|\nabla^{(2)}\eta|^2\right)\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Außerdem gilt nach partieller Integration und Anwendung von Proposition 3.4 sowie der Gaußgleichungen

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle\nabla^{(2)}\phi, \nabla^{(2)}(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu \\ = -\int_\Sigma \langle \triangle\nabla\phi, \nabla(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu \\ = -\int_\Sigma \langle \nabla\triangle\phi, \nabla(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \langle \nabla\phi * \mathrm{Rm} + \phi * \nabla\mathrm{Rm}, \nabla(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu \\ = \int_\Sigma \langle \triangle\phi, \triangle(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu \\ + \int_\Sigma \nabla\phi * \overline{\mathrm{Rm}}^\top * \nabla(\eta^s\phi) \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \phi * \overline{\mathrm{Rm}}^\top * \nabla^{(2)}(\eta^s\phi) \,\mathrm{d}\mu \\ + \int_\Sigma \langle \nabla\phi * A * A + \phi * \nabla A * A, \nabla(\eta^s\phi)\rangle \,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Für die folgenden Rechnungen halten wir fest, daß

$$|\nabla(\eta^s\phi)| \leq s\eta^{s-1}|\nabla\eta||\phi| + \eta^s|\nabla\phi|, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}|\nabla^{(2)}(\eta^s\phi)| \leq{}& c(s)|\phi|\left(\eta^{s-2}|\nabla\eta|^2 + \eta^{s-1}|\nabla^{(2)}\eta|\right)\\ &+ c(s)\eta^{s-1}|\nabla\eta||\nabla\phi| + \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|\end{aligned} \tag{3.18}$$

und schätzen die Terme in (3.16) einzeln nach oben ab – Zunächst gilt nach Voraussetzung an $\overline{\mathrm{Rm}}^\top$ für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \nabla\phi * \overline{\mathrm{Rm}}^\top * \nabla(\eta^s\phi)\,\mathrm{d}\mu &\leq c\Pi_0\int_\Sigma |\nabla\phi||\nabla(\eta^s\phi)|\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq c\Pi_0\int_\Sigma s\eta^{s-1}|\nabla\eta||\nabla\phi||\phi| + \eta^s|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq c\Pi_0\int_\Sigma s\eta^{s-1}|\nabla\eta||\nabla\phi||\phi| + \eta^s|\phi||\nabla^{(2)}\phi|\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq c(s,\varepsilon)\Pi_0^2\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad + \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

ähnlich rechnet man mit (3.18)

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \phi * \overline{\mathrm{Rm}}^\top * \nabla^{(2)}(\eta^s\phi)\,\mathrm{d}\mu &\leq c(s)\Pi_0\int_\Sigma |\phi|^2\left(\eta^{s-2}|\nabla\eta|^2 + \eta^{s-1}|\nabla^{(2)}\eta|\right)\mathrm{d}\mu\\ &\quad + c(s)\Pi_0\int_\Sigma |\phi|\left(\eta^{s-1}|\nabla\eta||\nabla\phi| + \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|\right)\mathrm{d}\mu\\ &\leq c(s,\varepsilon)\Pi_0^2\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad + \int_\Sigma |\phi|^2\eta^{s-4}\left(|\nabla\eta|^4 + \eta^2|\nabla^{(2)}\eta|^2\right)\mathrm{d}\mu\\ &\quad + \varepsilon\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

Abschließend gilt

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \langle\nabla\phi * A * A + \phi * \nabla A * A, \nabla(\eta^s\phi)\rangle\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\leq c(s)\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla\eta|\left(|\phi||\nabla\phi||A|^2 + |\phi|^2|\nabla A||A|\right)\mathrm{d}\mu\\ &\qquad + c\int_\Sigma \eta^s\left(|\nabla\phi|^2|A|^2 + |\phi||\nabla\phi||A||\nabla A|\right)\mathrm{d}\mu\\ &\quad\leq \varepsilon\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s,\varepsilon)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2|A|^4\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad + c(s)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s)\int_\Sigma \eta^{s-2}|\phi|^2|\nabla\eta|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad + c\int_\Sigma \eta^s|\nabla\phi|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\leq 2\varepsilon\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s,\varepsilon)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\left(|\nabla A|^2 + |A|^4\right)\mathrm{d}\mu\\ &\qquad + \int_\Sigma \eta^{s-4}|\phi|^2|\nabla\eta|^4\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, daß für jede Konstante $\tilde{c}$

$$\begin{aligned}\tilde{c}\int_\Sigma \eta^s|\nabla\phi|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu \le{}& c(s,\tilde{c})\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla\eta||\phi||\nabla\phi||A|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &+c(\tilde{c})\int_\Sigma \eta^s|\phi|\left(|\nabla^{(2)}\phi||A|^2+|\nabla\phi||A||\nabla A|\right)\mathrm{d}\mu\\ \le{}& c(s,\tilde{c},\varepsilon)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2|A|^4\,\mathrm{d}\mu+\frac{\varepsilon}{2}\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &+\frac{\varepsilon}{2}\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu+\frac{\tilde{c}}{2}\int_\Sigma \eta^s|\nabla\phi|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &+c(\tilde{c})\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\tilde{c}\int_\Sigma \eta^s|\nabla\phi|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu \le{}& c(s,\tilde{c},\varepsilon)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\left(|\nabla A|^2+|A|^4\right)\mathrm{d}\mu\\ &+\varepsilon\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu+\varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

Aus (3.16) ergibt sich also nach Einsetzen obiger Abschätzungen insgesamt

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma\langle\nabla^{(2)}\phi,\nabla^{(2)}(\eta^s\phi)\rangle\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\le\int_\Sigma\langle\triangle\phi,\triangle(\eta^s\phi)\rangle\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad+4\varepsilon\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu+3\varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad+c(s,\varepsilon)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\left(|\nabla A|^2+|A|^4\right)\mathrm{d}\mu\\ &\qquad+c(s,\varepsilon)\Pi_0^2\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad+c\int_\Sigma|\phi|^2\eta^{s-4}\left(|\nabla\eta|^4+\eta^2|\nabla^{(2)}\eta|^2\right)\mathrm{d}\mu,\end{aligned}\tag{3.19}$$

setzt man (3.19) nun für ein festes $\varepsilon\ll 1$ in (3.15) ein, folgt nach Absorbieren der ε-Terme

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}\phi|^2\,\mathrm{d}\mu+\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla\eta|^2|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\le 2\int_\Sigma\langle\triangle\phi,\triangle(\eta^s\phi)\rangle\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad+c(s)\int_\Sigma|\phi|^2\eta^{s-4}\left(|\nabla\eta|^4+\eta^2|\nabla^{(2)}\eta|^2\right)\mathrm{d}\mu\\ &\qquad+c(s)\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\left(|\nabla A|^2+|A|^4\right)\mathrm{d}\mu+c(s)\Pi_0^2\int_\Sigma \eta^s|\phi|^2\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

und mit Proposition 3.8 die Behauptung. □

Spezialisierung auf (WF$*$)

Wir wollen nun obige allgemeine Ergebnisse auf den Fluss (WF$*$) anwenden und spezialisieren uns darüberhinaus auf Funktionen η auf Σ, die durch Abschneidefunktionen auf dem umgebenden Raum $\mathbf{M}$ induziert sind.

Sei dazu $\tilde{\eta} \in C^2(\mathbf{M})$, $0 \le \tilde{\eta}(\cdot) \le 1$, eine zeitunabhängige Abschneidefunktion, und gelte $\sup_{\mathbf{M}} |\overline{\nabla}^{(i)} \tilde{\eta}|_g \le \Lambda_i$ für Konstanten $\Lambda_i \in \mathbf{R}$ und $i \in \{1,2\}$. Durch

$$\eta(\cdot,t) := \tilde{\eta}(\cdot)|_{F(\Sigma,t)} \tag{3.20}$$

erhalten wir eine zeitabhängige Abschneidefunktion auf Σ, und es gilt nach Lemma B.9 und der Kettenregel unter (WF$*$)

$$\begin{aligned}
&|\nabla \eta|_\gamma \le \Lambda_1,\\
&|\nabla^{(2)} \eta|_\gamma \le \Lambda_2 + |A|\Lambda_1,\\
&\partial_t \eta = (-\alpha_{\mathbf{W}} + \theta H) \cdot \overline{\nabla}_\nu \tilde{\eta}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Lemma 3.10. *Seien $\tilde{\eta}, \eta$ wie in* (3.20) *festgelegt und gelte $|\overline{\mathrm{Rc}}|_g|_{[\tilde{\eta}>0]} \le \Pi_0 \in \mathbf{R}$. Dann gilt unter* (WF$*$) *für alle $m \ge 0$ und $s \ge 2m+4$*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + \frac{3}{4} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla \eta|^2 |\nabla^{(m+1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu\\
&\quad \le c\Lambda_1^2 \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu\\
&\qquad + c(s)(\Lambda_1^4 + \Lambda_2^2 + \Pi_0^2) \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu\\
&\qquad + c|\theta|^2 \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu\\
&\qquad + c(s) \int_\Sigma \eta^s \left(\nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\le m}(A) \right) \mathrm{d}\mu\\
&\qquad + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \Bigg[\nabla^{(m+3)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\\
&\qquad\qquad + \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \Bigg] \mathrm{d}\mu\\
&\qquad + \int_\Sigma \eta^s \theta * \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \, \mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst gilt wegen (2.2) punktweise auf $\mathbf{M}$, daß $|\overline{\mathrm{Rm}}|_g \le c|\overline{\mathrm{Rc}}|_g \le c\Pi_0$. Benutzung von Lemma 3.9 mit $\alpha = -\alpha_{\mathbf{W}} + H\theta = \triangle H + P_3^0(A) + H((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \theta)$, $\phi = \nabla^{(m)} A$ und $Y = (\partial_t + \triangle^2) \nabla^{(m)} A$ ergibt unter Benutzung von Lemma 3.7 und der Eigenschaften (3.21) dann direkt

$$
\begin{aligned}
\partial_t \int_\Sigma & \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla \eta|^2 |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s) \int_\Sigma \eta^{s-1}\, \overline{\nabla}_\nu \tilde{\eta} \left(\triangle H + P_3^0(A)\right) * |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + c(s)\Lambda_1 \int_\Sigma \eta^{s-1} |A| |(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \theta| |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Sigma \eta^s \left(\triangle H + P_3^0(A)\right) * A * \nabla^{(m)} A * \nabla^{(m)} A \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Sigma \eta^s |(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \theta| |A|^2 |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + c(s) \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \left(|\nabla \eta|^4 + \eta^2 |\nabla^{(2)} \eta|^2\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad + c(s) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \left(|\nabla A|^2 + |A|^4\right) \mathrm{d}\mu \qquad (3.22)\\
&\quad + c(s)\Pi_0^2 \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \Bigg[P_3^{m+2}(A) + P_5^m(A) + \nabla^{(m+3)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\
&\qquad + \theta * \Bigg(P_3^m(A) + \nabla^{(m+2)} A + \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \Bigg) \\
&\qquad + \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\
&\qquad + \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \Bigg] \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

all diese Terme wollen nun geschickt abgeschätzt werden; bei einigen können wir uns dafür am Beweis zu [KS02, Proposition 3.3] orientieren. Zunächst gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma & \eta^s |(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \theta| |A|^2 |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\le (\Pi_0^2 + |\theta|^2) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * P_5^m(A) \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

ähnlich rechnet man

$$
\begin{aligned}
c(s)\Lambda_1 & \int_\Sigma \eta^{s-1} |A| |(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} + \theta| |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\le (\Pi_0^2 + |\theta|^2) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \Lambda_1^4 \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + c(s) \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * P_5^m(A).
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt direkt

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma & \eta^s \left(\triangle H + P_3^0(A)\right) * A * \nabla^{(m)} A * \nabla^{(m)} A \,\mathrm{d}\mu \\
&+ c(s) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \left(|\nabla A|^2 + |A|^4\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad \le c(s) \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \left(P_3^{m+2}(A) + P_5^m(A)\right) \mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

sowie nach Young

$$
\begin{aligned}
c(s) &\int_\Sigma \eta^{s-1}\,\overline{\nabla}_\nu\,\tilde{\eta}\,|\nabla^{(m)}A|^2 * P_3^0(A)\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)\int_\Sigma |\nabla^{(m)}A|^2(|A|^3\eta^{\frac{3}{4}s})(\eta^{\frac{1}{4}s-1}\Lambda_1)\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|A|^4\,\mathrm{d}\mu + \Lambda_1^4\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&= c(s)\int_\Sigma \eta^s\,\nabla^{(m)}A * P_5^m(A)\,\mathrm{d}\mu + \Lambda_1^4\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

und für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s\theta * \nabla^{(m)}A * \left(P_3^m(A) + \nabla^{(m+2)}A\right)\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s P_6^{2m;\le m}(A)\,\mathrm{d}\mu + c(\varepsilon)|\theta|^2\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}
$$

Desweiteren gilt wegen (3.21)

$$
\begin{aligned}
c(s) &\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\left(|\nabla\eta|^4 + \eta^2|\nabla^{(2)}\eta|^2\right)\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)\Lambda_1^4\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s)\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m)}A|^2(|A|^2\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)(\Lambda_1^4 + \Lambda_2^2)\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s)\int_\Sigma \eta^s\,\nabla^{(m)}A * P_5^m(A)\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}
$$

Abschließend ergibt sich wegen $\nabla_i(\overline{\nabla}_\nu\,\tilde{\eta}) = \overline{\nabla}^{(2)}_{i\nu}\,\tilde{\eta} + A_i^k\,\overline{\nabla}_k\,\tilde{\eta}$ durch partielle Integration direkt

$$
\begin{aligned}
c(s) &\int_\Sigma \eta^{s-1}\,\triangle H\,\overline{\nabla}_\nu\,\tilde{\eta}\,|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)\int_\Sigma |\nabla A|\Big[\eta^{s-2}|\nabla\eta||\overline{\nabla}_\nu\,\tilde{\eta}||\nabla^{(m)}A|^2 \\
&\qquad + \eta^{s-1}|\nabla(\overline{\nabla}_\nu\,\tilde{\eta})||\nabla^{(m)}A|^2 + \eta^{s-1}|\overline{\nabla}_\nu\,\tilde{\eta}||\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m+1)}A|\Big]\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)\Lambda_1^2\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla A||\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)\Lambda_2\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla A||\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)\Lambda_1\int_\Sigma \eta^{s-1}|A||\nabla A||\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)\Lambda_1\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla A||\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m+1)}A|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)(\Lambda_2^2 + \Lambda_1^4)\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s)\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)\Lambda_1^2\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m)}A|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu + c\Lambda_1^2\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m+1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(s)(\Lambda_2^2 + \Lambda_1^4)\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + c\Lambda_1^2\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m+1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)\int_\Sigma \eta^s\,\nabla^{(m)}A * \left(P_5^m(A) + P_3^{m+2}(A)\right)\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}
$$

Einsetzen obiger Abschätzungen in (3.22) und Absorbieren liefert nun unter Benutzung von $\nabla^{(m)}A * P_5^m(A) = P_6^{2m;\le m}(A)$ die Behauptung. □

Kontrolle der durch M induzierten Krümmungsterme

Ziel dieses Abschnittes ist die vollständige Kontrolle der in Lemma 3.10 auftretenden Terme durch uns bekannte geometrische Größen. Zentrale Aufgabe hierbei ist die Umwandlung von Ableitungen der auf Σ eingeschränkten Krümmungen $(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}$ durch Ableitungen von $\overline{\mathrm{Rc}}$ im umgebenden Raum und die Behandlung der hierbei hinzukommenden $\nabla^{(k)}A$-Terme. Wären bereits lokale sup-Schranken an diese neuen Terme bekannt, ließen sie sich problemlos in eine großzügig gewählte Konstante aufnehmen, was unsere Rechnungen stark vereinfachen würde. Im Hinblick auf den zentralen in Abschnitt 3.3.1 durchgeführten Induktionsbeweis werden wir solche Schranken für hinreichend kleine k tatsächlich fordern dürfen; höhere Ableitungen von A müssen aber weiterhin genau beachtet werden. Wichtiges Werkzeug hierfür sind die Formeln in Abschnitt B.2.

Aus technischen Gründen wird sich auf den folgenden Seiten die Verwendung der Ungleichungen aus Abschnitt B.3 und insbesondere aus Proposition B.19 nicht vermeiden lassen, die eine hinreichende Entfernung der Fläche zum Ursprung und eine lokal kleine L^2-Norm von A zwingend voraussetzen. Genauer konzentrieren wir uns im Folgenden auf einen festen Zeitpunkt t_0 und definieren an diesem Zeitpunkt die Generalvoraussetzungen

$$r_{\min} \geq r_0(m, \kappa, \sigma, \mathbf{W}(F(\Sigma, t_0))), \tag{VΣ}$$

$$\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon_0, \tag{Vη}$$

wobei r_0 so groß ist, daß Lemma B.13 und die Abschätzungen aus Kapitel 2 in $\mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$ gültig sind, und ε_0 wie in Proposition B.19 gewählt – damit gelten insbesondere die dort aufgeführten Integralungleichungen. Zudem nehmen wir im Hinblick auf Satz 3.19 an, daß ε_0 klein genug ist, um die Größe der im dortigen Beweis auftauchenden (absoluten) Konstanten parieren zu können.

Um die Aussagen der folgenden Lemmata auf konsistente Weise formulieren zu können, setzen wir

$$\nabla^{(j)}A := 0$$

für negative j.

Lemma 3.11. *Seien $\tilde{\eta}, \eta$ wie in (3.20), $m \geq 0$, $s \geq 2m+4$, gelte $|\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}}|_g|_{[\tilde{\eta}>0]} \leq \Pi_k \in \mathbf{R}$ für alle $k \leq m+2$, und seien außerdem (VΣ) und (Vη) erfüllt. Dann gilt in t_0 für alle $\varepsilon > 0$*

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)}A * \nabla^{(m+3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m+1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\int_\Sigma \eta^{s-4}|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(m-1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)}A * P_5^m(A) \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\|A\|^4_{2,[\eta>0]} + C\int_\Sigma \eta^s \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

wobei die Konstanten C nur von ε und den Größen

$$m, s, \sum_{k\leq m+2} \Pi_k, \sum_{k\leq m-3} \|\nabla^{(k)}A\|_{\infty,[\eta>0]} \tag{3.24}$$

abhängen.

Für $m = 1$ lässt sich die Konstante C vor dem letzten Term in (3.23) genauer als

$$C = c(s,\varepsilon)\Pi_2^2$$

angeben, und für $m = 0$ gilt explizit

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \nabla^{(m+3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(s)\Lambda_1^2 \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s,\varepsilon)\left(\Lambda_1^4 + \Lambda_2^2 + \Pi_0^2\right) \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s,\varepsilon) \int_\Sigma \eta^s |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * P_5^m(A) \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

Beweis. Vorbereitend gilt nach Rechnung wie in (3.18) wegen der Voraussetzungen an η

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(2)}(\eta^s \nabla^{(m)} A)| &\le c(s) |\nabla^{(m)} A| \left(\eta^{s-2}\Lambda_1^2 + \eta^{s-1}\left(\Lambda_2 + \Lambda_1 |A|\right)\right) \\
&\qquad + c(s)\eta^{s-1}\Lambda_1 |\nabla^{(m+1)} A| + \eta^s |\nabla^{(m+2)} A| \\
&\le c(s)\eta^{s-2} |\nabla^{(m)} A| \left(\Lambda_1^2 + \Lambda_2 + \eta^2 |A|^2\right) \\
&\qquad + c(s)\eta^{s-1}\Lambda_1 |\nabla^{(m+1)} A| + \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|,
\end{aligned}$$

und es folgt für alle $m \ge 0$, daß

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \nabla^{(m+3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le c(s) \int_\Sigma \Big[\eta^{s-2} |\nabla^{(m)} A| \left(\Lambda_1^2 + \Lambda_2\right) + \eta^s |\nabla^{(m)} A| |A|^2 \\
&\qquad\qquad + \eta^{s-1}\Lambda_1 |\nabla^{(m+1)} A| + \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|\Big] |\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Sei nun zunächst $m \ge 4$. Nach Proposition B.12 mit $b = 3$ und $k = m + 1 \ge 5$ folgt dann auf $[\eta > 0]$

$$|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \le C\left(1 + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|\right), \tag{3.26}$$

wobei C von den in (3.24) aufgeführten Größen abhängt. Einsetzen dieses Ausdrucks in (3.25) liefert nach der Young'schen Ungleichung direkt

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \nabla^{(m+3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * P_5^m(A) \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned} \tag{3.27}$$

und die Behauptung folgt.

Sei nun $m = 0$. Nach Lemma B.10 gilt dann punktweise

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\leq |\overline{\nabla}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|_g + c\Pi_0 |P_1^0(A)| \\
&= |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g + c\Pi_0 |A|
\end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ausdruckes in (3.25) liefert direkt die Behauptung in ihrer angegebenen expliziten Form analog zur Rechnung (3.27).

Für $m = 1$ ergibt sich aus Lemma B.10, daß

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\leq \Pi_2 + c\Pi_0 |P_1^1(A) + P_2^0(A)| + c\Pi_1 |P_1^0(A)| \\
&\leq \Pi_2 + C(|\nabla A| + |A|) + C|A|^2,
\end{aligned}$$

dieser Ausdruck besteht also aus einem Term der Form (3.26) und dem Zusatzterm $C|A|^2$. Beim Durchführen einer Abschätzung wie in (3.27) ergeben sich also die dort auftretenden Integralterme und der Zusatzterm $C\int \eta^s |A|^4$, den wir separat behandeln müssen. Nach Proposition B.19 gilt aber

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \eta^s |A|^4 \,\mathrm{d}\mu &\leq \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^2 \\
&= \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^2
\end{aligned}$$

und wir erhalten direkt die Behauptung.

Sei $m = 2$. Aus Lemma B.10 folgt

$$\begin{aligned}
&|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad\leq \Pi_3 + c\Pi_0 |P_1^2(A) + P_2^1(A) + P_3^0(A)| + c\Pi_1 |P_1^1(A) + P_2^0(A)| + c\Pi_2 |P_1^0(A)| \\
&\quad\leq C(1 + |\nabla^{(2)} A| + |\nabla A| + |A|) + C\left(|\nabla A||A| + |A|^3 + |A|^2\right),
\end{aligned}$$

wir erhalten also nach Abschätzen wie in (3.27) wieder die dort auftretenden Terme sowie einen zusätzlichen Term, der sich mit Proposition B.19 auf die Weise

$$\begin{aligned}
&C\int_\Sigma \eta^s \left(|\nabla A||A| + |A|^3 + |A|^2\right)^2 \mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq C\int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s \left(|\nabla A|^2 |A|^2 + |A|^6\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq C\int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^2 \\
&\quad= C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^2
\end{aligned}$$

abschätzen lässt. Damit ist die Behauptung ist für $m = 2$ gezeigt.

Abschließend prüfen wir den Fall $m = 3$. In $[\eta > 0]$ gilt

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\le \Pi_4 + c\Pi_0|P_1^3(A) + P_2^2(A) + P_3^1(A) + P_4^0(A)| \\
&\quad + c\Pi_1|P_1^2(A) + P_2^1(A) + P_3^0(A)| + c\Pi_2|P_1^1(A) + P_2^0(A)| \\
&\quad + c\Pi_3|P_1^0(A)| \\
&\le \Pi_4 + c\left(\Pi_0|\nabla^{(3)}A| + \Pi_1|\nabla^{(2)}A| + \Pi_2|\nabla A|\right) \\
&\quad + c\Pi_0\left(|\nabla A|^2 + |\nabla^{(2)}A||A| + |\nabla A||A|^2 + |A|^4\right) \\
&\quad + c\Pi_1\left(|\nabla A||A| + |A|^3\right) + c\Pi_2|A|^2 + c\Pi_3|A| \\
&\le C(1 + |\nabla^{(m)}A| + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|) + C|\nabla A|^2,
\end{aligned}$$

wobei C von den in (3.24) angegebenen Größen und damit insbesondere von $\|A\|_{\infty,[\eta>0]}$ abhängig ist.

Analog zur Argumentation in den bereits bewältigten Fällen ist die Behauptung also gezeigt, wenn wir das Integral $\int \eta^s|\nabla A|^4$ auf geeignete Weise abschätzen können; tatsächlich gilt nach partieller Integration und Young, daß

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^4 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le \int_\Sigma c(s)\eta^{s-1}\Lambda_1|\nabla A|^3|A| + c\eta^s|\nabla^{(2)}A||\nabla A|^2|A| \,\mathrm{d}\mu \qquad (3.28) \\
&\quad\le \frac{1}{2}\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^4 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma c(s)\eta^{s-2}\Lambda_1^2|\nabla A|^2|A|^2 + c\eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|A|^2 \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

und es folgt direkt

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^4 \,\mathrm{d}\mu &\le C\int_\Sigma \eta^{s-2}\Lambda_1^2|\nabla A|^2|A|^2 + \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\le C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m-1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

wobei wieder $\|A\|_{\infty,[\eta>0]}$ in die Konstante aufgenommen wurde – damit ist die Behauptung für alle $m \ge 0$ gezeigt. □

Lemma 3.12. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.11 gilt in t_0 für alle $m \ge 1$*

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s\nabla^{(m)}A * \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s\left(\nabla^{(m)}A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\le m}(A)\right) \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\|A\|_{2,[\eta>0]}^4 + C\int_\Sigma \eta^s \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten C nur von den in (3.24) *angegebenen Größen abhängen.*

Für $m = 1$ entfällt der letzte Term in obiger Aussage, und für $m = 0$ gilt für jedes $\varepsilon > 0$ explizit

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s\nabla^{(m)}A * \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\le \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(\varepsilon)\Pi_0^2\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon c(s)\Lambda_1^4\|A\|_{2,[\eta>0]}^4.
\end{aligned}$$

Beweis. Sei zunächst $m \geq 5$. Nach Lemma B.10 gilt in $[\eta > 0]$, daß für alle $l \leq m-2$ und $k \leq m-3$

$$|\nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|, |P_3^k(A)| \leq C,$$

wobei C von allen $\|\nabla^{(j)}A\|_{\infty,[\eta>0]}$, $j \leq m-3$ abhängt. Es ergibt sich direkt

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{1} |P_3^i(A) * \nabla^{(m-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + \sum_{i=2}^{m-2-1} |P_3^i(A) * \nabla^{(m-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\qquad + \sum_{i=m-2}^{m} |P_3^i(A) * \nabla^{(m-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad \leq C\left(\sum_{i=0}^{1} |\nabla^{(m-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + 1 + \sum_{i=m-2}^{m} |P_3^i(A)|\right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

wobei benutzt wurde, daß in der ersten Summe immer $i \leq 1 \leq m-3$ sowie in der letzten Summe $m-i \leq 2 \leq m-2$ (dies stimmt sogar für $m=4$).

Da nach Proposition B.12 (angewendet mit $b=2$, $k=m$ bzw. $b=1, k=m-1$)

$$\begin{aligned}
&|\nabla^{(m)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1 + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|), \\
&|\nabla^{(m-1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1 + |\nabla^{(m-2)}A|)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(dies gilt auch für $m \in \{3,4\}$), gilt für den ersten verbliebenen Summenterm in (3.29), daß

$$\sum_{i=0}^{1} |\nabla^{(m-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1 + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|). \tag{3.31}$$

Für den letzten übrigen Term in (3.29) beachtet man zunächst, daß für $m-2 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned}
P_3^i(A) &= \sum_{\substack{a_1 \geq a_2 \geq a_3 \\ a_1+a_2+a_3=i}} \nabla^{(a_1)}A * \nabla^{(a_2)}A * \nabla^{(a_3)}A \\
&= P_3^{i;\leq m-3}(A) + \left(\sum_{p=m-2}^{i} \nabla^{(p)}A * P_2^{i-p;\leq m-3}(A)\right),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, daß in der dortigen Summe $i-p \leq 2 \leq m-3$ nach Voraussetzung an m. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m-2}^{m} |P_3^i(A)| &\leq C \sum_{i=m-2}^{m} \left(1 + \sum_{p=m-2}^{i} |\nabla^{(p)}A|\right) \\
&\leq C\left(1 + \sum_{i=m-2}^{m} \sum_{p=m-2}^{i} |\nabla^{(p)}A|\right) \\
&\leq C(1 + |\nabla^{(m)}A| + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

und mit (3.29) und (3.31) insgesamt

$$|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1 + |\nabla^{(m)}A| + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|).$$

Mit der Young'schen Ungleichung ergibt sich sofort

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \le C \int_\Sigma \eta^s \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

und damit die Behauptung.

Sei nun $m = 4$. Analog zu (3.29) und (3.31) erhält man zunächst, daß

$$
|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)} ((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| \le C(1 + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) + C \sum_{i=m-2}^{m} |P_3^i(A)|.
$$

Nun folgt aus direkter Rechnung für ein von den Größen (3.24) abhängiges C

$$
|P_3^4(A)| \le C(|\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) + C|\nabla^{(m-2)} A|^2 |A|
$$

und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m-2}^{m} |P_3^i(A)| &\le |P_3^m(A)| + \sum_{i=m-2}^{m-1} \left(|P_3^{i;\le m-3}(A)| + \sum_{p=m-2}^{i} |\nabla^{(p)} A| |P_2^{i-p;\le m-3}(A)| \right) \\
&\le |P_3^m(A)| + C \left(1 + \sum_{p=m-2}^{m-1} |\nabla^{(p)} A| \right) \\
&\le C(1 + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) + C|\nabla^{(m-2)} A|^2,
\end{aligned}
$$

wobei der Summenterm im ersten Schritt analog zu den zu (3.32) führenden Überlegungen zustandekommt. Durch Kombination dieser Ergebnisse ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)} ((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| \\
&\quad \le C(1 + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) + C|\nabla^{(m-2)} A|^2
\end{aligned}
$$

und ein Vorgehen wie in Rechnung (3.33) ergibt somit die dort aufgeführte Abschätzung sowie auf der rechten Seite den Zusatzterm $C \int \eta^s |\nabla^{(m)} A| |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu$, der sich durch partielle Integration und unter Aufnahme der anfallenden $|\nabla^{(m-3)} A|$-Terme in die Konstanten mittels

$$
\begin{aligned}
&C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A| |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \le C \int_\Sigma \Big[s\eta^{s-1} \Lambda_1 |\nabla^{(m)} A| |\nabla^{(m-2)} A| \\
&\qquad\qquad + \eta^s |\nabla^{(m+1)} A| |\nabla^{(m-2)} A| + \eta^s |\nabla^{(m)} A| |\nabla^{(m-1)} A| \Big] \, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \le C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

abschätzen lässt. Es folgt die Behauptung.

Sei $m = 3$. Direktes Ausschreiben der $P_3^k(A)$-Terme ergibt unter erneuter Benutzung von (3.30) für Konstanten C abhängig von den Größen in (3.24)

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad \leq c|A|^3 \cdot C\left(1 + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|\right) \\
&\qquad + c|\nabla A||A|^2 \cdot C\left(1 + |\nabla^{(m-2)}A|\right) \\
&\qquad + c\left(|\nabla^{(2)}A||A|^2 + |\nabla A|^2|A|\right) \cdot C \\
&\qquad + c\left(|\nabla^{(3)}A||A|^2 + |\nabla^{(2)}A||\nabla A||A| + |\nabla A|^3\right) \cdot C \\
&\quad \leq C(1 + |\nabla^{(m)}A| + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|) + C(|\nabla^{(2)}A||\nabla A| + |\nabla A|^3),
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt $|\nabla A|^2 \leq |\nabla A| + |\nabla A|^3$ benutzt wurde. Erneute Durchführung der Rechnung (3.33) ergibt damit wieder das dortige Ergebnis mit einem zusätzlichen Integralterm auf der rechten Seite, der sich zunächst durch partielle Integration und Young unter Aufnahme der anfallenden Terme s, Λ_1 und $|A|$ in die Konstante C mittels

$$
\begin{aligned}
&C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A|\left(|\nabla^{(2)}A||\nabla A| + |\nabla A|^3\right)\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq C\int_\Sigma |\nabla A|^2\left(\eta^{s-1}|\nabla^{(3)}A| + \eta^s|\nabla^{(4)}A|\right)\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A||\nabla^{(2)}A||\nabla A|\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(4)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(3)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^4\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

abschätzen lässt. Da aber nach Rechnung (3.28)

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^4 &\leq c\int_\Sigma \eta^{s-2}\Lambda_1^2|\nabla A|^2|A|^2 + \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

sowie nach partieller Integration für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq C\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla^{(2)}A|^2|\nabla A|\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A||\nabla^{(2)}A||\nabla A|\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|\nabla A|^2 + C(\varepsilon)\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C(\varepsilon)\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

folgt die Behauptung direkt nach Absorbieren und Einsetzen.

Sei nun $m = 2$. Mit Hilfe von Lemma B.10 und Young erhalten wir direkt

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\qquad \le c|A|^3 \cdot \left(\Pi_2 + \Pi_1|A| + \Pi_0(|\nabla A| + |A|^2)\right) \\
&\qquad\qquad + c|\nabla A||A|^2 \cdot (\Pi_1 + \Pi_0|A|) \\
&\qquad\qquad + c\left(|\nabla^{(2)} A||A|^2 + |\nabla A|^2|A|\right) \cdot \Pi_0 \\
&\qquad \le C\left(|A|^3 + |A|^4 + |A|^5 + |A|^2|\nabla A| + |A|^3|\nabla A| + |A|^2|\nabla^{(2)} A| + |A||\nabla A|^2\right) \\
&\qquad \le C\left(|A|^2|\nabla^{(2)} A| + |A||\nabla A|^2 + |A|^5 + |A|\right),
\end{aligned}
$$

wobei C nur von Π_0, Π_1 und Π_2 abhängt, und es ergibt sich zunächst

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \, \mathrm{d}\mu | \\
&\qquad \le C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2|A|^4 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad\qquad + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2|\nabla A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^2|A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|A|^6 \, \mathrm{d}\mu .
\end{aligned}
$$

Da nun außerdem

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2|\nabla A|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2|A|^4 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad = \int_\Sigma \eta^s \left(\nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\le m}(A)\right) \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

und aufgrund der Annahme an $\int_{[\eta>0]} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu$ nach Proposition B.19

$$
\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^2|A|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s|A|^6 \, \mathrm{d}\mu \le \int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu\right)^2
$$

für Konstanten C abhängig von den Größen (3.24), folgt direkt die Behauptung.

Für $m = 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\le c|A|^3 (\Pi_1 + \Pi_0|A|) + c|A|^2|\nabla A|\Pi_0 \\
&\le C\left(|A|^4 + |A|^3 + |A|^2|\nabla A|\right),
\end{aligned}
$$

und mit Young und Proposition B.19 ergibt sich direkt

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \, \mathrm{d}\mu | \\
&\qquad \le C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|\left(|A|^4 + |A|^3 + |A|^2|\nabla A|\right) \mathrm{d}\mu \\
&\qquad \le C\int_\Sigma \eta^s\left(|A|^6 + |A|^2|\nabla A|^2\right) \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad \le C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu\right)^2,
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war.

Abschließend ist für $m=0$ und alle $\varepsilon>0$ nach Proposition B.19

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} P_3^k(A) * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\, \mathrm{d}\mu\,| \\
&\quad \leq c\Pi_0 \int_\Sigma \eta^s |A|^4\, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |A|^6\, \mathrm{d}\mu + c(\varepsilon)\Pi_0^2 \int_\Sigma \eta^s |A|^2\, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon\Lambda_1^4 c(s) \left(\int_{[\eta>0]} |A|^2\, \mathrm{d}\mu\right)^2 + c(\varepsilon)\Pi_0^2 \int_\Sigma \eta^s |A|^2\, \mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.13. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.11 gilt in t_0 für alle $m \geq 1$ und alle $\varepsilon > 0$*

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2\, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m-1)} A|^2\, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m-2)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \left(\nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\leq m}(A)\right) \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\|A\|_{2,[\eta>0]}^4 + C \int_\Sigma \eta^s\, \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

wobei die Konstanten C von ε und den unter (3.24) *angegebenen Größen abhängen.*

Für $m=1$ entfällt der letzte Term in obiger Aussage, und für $m=0$ gilt explizit

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + \Pi_1^{\frac{2}{3}} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2\, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s,\varepsilon)(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4) \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon c(s)\Lambda_1^4 \|A\|_{2,[\eta>0]}^4.
\end{aligned}
$$

Beweis. Sei $m \geq 6$. Da nach Lemma B.10 $|\nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C$ für alle $l \leq m-2$ mit C wie oben angegeben, ergibt sich zunächst

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{3} |\nabla^{(i)} A * \nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + \sum_{i=4}^{m-2-1} |\nabla^{(i)} A * \nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\qquad + \sum_{i=m-2}^{m+2} |\nabla^{(i)} A * \nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad \leq C\left(\sum_{i=0}^{3} |\nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + 1 + \sum_{i=m-2}^{m+2} |\nabla^{(i)} A|\right),
\end{aligned}
$$

und da nach Proposition B.12 für alle $m \geq 5$ gilt, daß

$$\begin{aligned}
&|\nabla^{(m+2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1+|\nabla^{(m+1)}A|+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|),\\
&|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|),\\
&|\nabla^{(m)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|),\\
&|\nabla^{(m-1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1+|\nabla^{(m-2)}A|),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

ergibt sich nach Einsetzen direkt

$$\begin{aligned}
|\sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \leq C(1&+|\nabla^{(m+2)}A|+|\nabla^{(m+1)}A|+|\nabla^{(m)}A|\\
&+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|).
\end{aligned}$$

Nach Young folgt für jedes $\varepsilon > 0$ also sofort

$$\begin{aligned}
&|\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)}A * \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\, \mathrm{d}\mu|\\
&\quad \leq C\int_\Sigma \eta^s \Big[1+\varepsilon|\nabla^{(m+2)}A|^2+|\nabla^{(m+1)}A|^2\\
&\qquad\qquad +c(\varepsilon)|\nabla^{(m)}A|^2+|\nabla^{(m-1)}A|^2+|\nabla^{(m-2)}A|^2\Big]\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned} \tag{3.36}$$

und damit die Behauptung.

Sei $m = 5$. Nach obigen Überlegungen ergibt sich unter Benutzung von (3.35)

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|\\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{2} |\nabla^{(i)}A * \nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|\\
&\qquad + |\nabla^{(3)}A * \nabla^{(4)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + \sum_{i=4}^{m+2} |\nabla^{(i)}A * \nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|\\
&\quad \leq C\left(\sum_{i=0}^{2} |\nabla^{(m+2-i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + |\nabla^{(m-2)}A * \nabla^{(m-1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + \sum_{i=m-1}^{m+2} |\nabla^{(i)}A|\right)\\
&\quad \leq C(1+|\nabla^{(m+2)}A|+|\nabla^{(m+1)}A|+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|)\\
&\qquad + C|\nabla^{(m-2)}A|^2,
\end{aligned}$$

es folgt eine Abschätzung der Form (3.36) mit Zusatzterm $C\int \eta^s |\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu$ auf der rechten Seite. Dieser lässt sich vollkommen analog zum Vorgehen in Rechnung (3.34) behandeln; die Behauptung folgt.

Sei nun $m = 4$. Mit Hilfe von Lemma B.10 rechnen wir mit von den in (3.24) angegebenen Größen abhängigem C durch direktes Ausschreiben

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(m+2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &= |\nabla^{(6)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|\\
&\leq \Pi_6 + \sum_{j=0}^{5}\left(\Pi_j \sum_{a=1}^{6-j} |P_a^{6-j-a}(A)|\right)\\
&\leq C(1+|\nabla^{(m+1)}A|+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|)\\
&\qquad + C|\nabla^{(m-2)}A|^2,
\end{aligned}$$

für $|\nabla^{(m-1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|, \ldots, |\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|$ gelten weiterhin die Abschätzungen aus (3.35). Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\sum_{k+l=m+2} & \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\
&\leq (|\nabla^{(m+2)} A| + |\nabla^{(m+1)} A| + |\nabla^{(m)} A|) \cdot C \\
&\quad + c|\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + c|\nabla^{(m-2)} A||\nabla^{(m)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\quad + C \cdot (|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + |\nabla^{(m+2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|) \\
&\leq C(1 + |\nabla^{(m+2)} A| + |\nabla^{(m+1)} A| + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) \\
&\quad + C|\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| + C|\nabla^{(m-2)} A|^2
\end{aligned}$$

und damit die Abschätzung (3.36) mit den Zusatztermen $C \int \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu$ und $C \int \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu$ auf der rechten Seite; ersterer lässt sich wie in Rechnung (3.34) behandeln. Für den verbleibenden Term gilt zunächst für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
C & \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C(\varepsilon) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

da aber nach partieller Integration unter Aufnahme von $\|\nabla^{(m-3)} A\|_{\infty,[\eta>0]}$ in die Konstante C für jedes $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma & \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq C \int_\Sigma \eta^{s-1} |\nabla^{(m-1)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu \\
&\quad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^3 \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq C \int_\Sigma \eta^{s-1} |\nabla^{(m-1)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu \qquad (3.37) \\
&\quad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \tilde{\varepsilon} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C(\tilde{\varepsilon}) \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m-1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\quad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

folgt für geeignete $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ nach Absorbieren direkt

$$\begin{aligned}
C & \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A||\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m-1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Sei $m = 3$. Durch direkte Anwendung von Lemma B.10 ergeben sich

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(m+2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| = |\nabla^{(5)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| & \\
\leq C(1 + |\nabla^{(m+1)} A| + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) & \\
+ C|\nabla^{(m-2)} A|^2 + C|\nabla^{(m-1)} A||\nabla^{(m-2)} A| &
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}|\nabla^{(m+1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &= |\nabla^{(4)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\ &\leq C(1+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|)+C|\nabla^{(m-2)}A|^2,\end{aligned}$$

die Abschätzungen für $|\nabla^{(m-1)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|$ und $|\nabla^{(m)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|$ aus (3.35) haben weiterhin ihre Gültigkeit. Es ergibt sich nach Einsetzen und Young

$$\begin{aligned}&\sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\ &\quad \leq C(1+|\nabla^{(m+2)}A|+|\nabla^{(m+1)}A|+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|) \\ &\qquad + C|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-2)}A| + C|\nabla^{(m-1)}A|^2 + C|\nabla^{(m-2)}A|^3,\end{aligned}$$

und wir erhalten wieder eine Abschätzung der Form (3.36) mit neu hinzugekommenen, separat abzuschätzenden Integraltermen; mittels partieller Integration rechnet man hierfür unter Aufnahme der erzeugten $\nabla^{(m-3)}A$-Terme in die Konstanten C zunächst

$$\begin{aligned}&C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-2)}A|^3\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\quad + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|\nabla^{(m-2)}A|\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad \leq C\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+1)}A||\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + C\int_\Sigma \eta^{s-1}|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-1)}A||\nabla^{(m-2)}A|\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + C\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(m+1)}A||\nabla^{(m-1)}A||\nabla^{(m-2)}A|\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|\nabla^{(m-2)}A|\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

und es ergibt sich nach Young für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-2)}A|^3\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A||\nabla^{(m-1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\quad + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|\nabla^{(m-2)}A|\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad \leq C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + c\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m-1)}A|^2|\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+1)}A||\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad \leq \varepsilon\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m+1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-1)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C(\varepsilon)\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad\quad + c\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2|\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt mit dem Term $\int \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A|^2$ wie in (3.37) verfahren und außerdem benutzt wurde, daß

$$\begin{aligned}
&C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A| |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq C \int_\Sigma \eta^{s-1} |\nabla^{(m+1)} A| |\nabla^{(m-2)} A| \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A| |\nabla^{(m-2)} A| \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C(\varepsilon) \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß für $m = 3$

$$\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) \,\mathrm{d}\mu,$$

folgt direkt die Behauptung.

Sei nun $m = 2$. Aus direkter Anwendung von Lemma B.10 ergibt sich explizit

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(4)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\leq \Pi_4 + c\Pi_3 |A| + C\Pi_2 \left(|\nabla A| + |A|^2 \right) \\
&\quad + c\Pi_1 \left(|\nabla^{(2)} A| + |\nabla A||A| + |A|^3 \right) \\
&\quad + c\Pi_0 \left(|\nabla^{(3)} A| + |\nabla^{(2)} A||A| + |\nabla A|^2 + |\nabla A||A|^2 + |A|^4 \right), \\
|\nabla^{(3)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\leq \Pi_3 + c\Pi_2 |A| + c\Pi_1 \left(|\nabla A| + |A|^2 \right) \\
&\quad + c\Pi_0 \left(|\nabla^{(2)} A| + |\nabla A||A| + |A|^3 \right), \\
|\nabla^{(2)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\leq \Pi_2 + c\Pi_1 |A| + c\Pi_0 \left(|\nabla A| + |A|^2 \right), \\
|\nabla (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| &\leq \Pi_1 + c\Pi_0 |A|
\end{aligned} \tag{3.38}$$

und wir erhalten nach Einsetzen und Zusammenfassen direkt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \\
&\quad \leq C(|\nabla^{(4)} A| + |\nabla^{(3)} A| + |\nabla^{(2)} A| + |\nabla A| + |A|) \\
&\qquad + C\Big[|\nabla^{(3)} A||A| + |\nabla^{(2)} A||\nabla A| + |\nabla^{(2)} A||A|^2 + |\nabla A|^2 |A| + |\nabla A|^2 \\
&\qquad\qquad + |A|^5 + |A|^3 + |A|^2 \Big],
\end{aligned}$$

wobei C nur von $\Pi_1, \ldots, \Pi_4$ abhängt. Einsetzen hiervon in das abzuschätzende Integral liefert nun, ausschließlich durch Anwendung der Young'schen Ungleichung, direkt

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m+2} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(4)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(3)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C(\varepsilon) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 |A|^4 \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß

$$
\begin{aligned}
c\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu + c\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(2)}A|^2|A|^4\,\mathrm{d}\mu \\
= \int_\Sigma \eta^s\left(\nabla^{(m)}A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\leq m}(A)\right)\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

so folgt die Behauptung durch Anwendung von Proposition B.19 auf die verbliebenen Terme $\int\eta^s|\nabla A|^2|A|^2$ und $\int\eta^s|A|^6$.

Sei $m=1$. Unter Benutzung von (3.38) erhalten wir nach Zusammenfassen und Young

$$
\begin{aligned}
\sum_{k+l=m+2}\nabla^{(k)}A*\nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \leq C(|\nabla^{(3)}A| + |\nabla^{(2)}A| + |\nabla A| + |A|) \\
+ C(|\nabla^{(2)}A||A| + |\nabla A||A|^2 + |\nabla A|^2 + |A|^4 + |A|^2)
\end{aligned}
$$

und damit nach Einsetzen in das abzuschätzende Integral für jedes $\varepsilon>0$ direkt

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s\nabla^{(m)}A*\sum_{k+l=m+2}\nabla^{(k)}A*\nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq \varepsilon\int_\Sigma\eta^s|\nabla^{(3)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma\eta^s|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + C(\varepsilon)\int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\int_\Sigma\eta^s|A|^2\,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma\eta^s|A|^6\,\mathrm{d}\mu + c\int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^4\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt nun mit Proposition B.19 und unter Beachtung von

$$
\int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^4\,\mathrm{d}\mu = \int_\Sigma\eta^s\nabla^{(m)}A*P_3^{m+2}(A)\,\mathrm{d}\mu\,.
$$

Sei abschließend $m=0$. Nach partieller Integration ergibt sich unter erneuter Benutzung von (3.38) und Proposition B.19 für jedes $\varepsilon>0$ direkt

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma\eta^s\nabla^{(m)}A*\sum_{k+l=m+2}\nabla^{(k)}A*\nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq \int_\Sigma\eta^sA*\left(\sum_{i=0}^{1}\nabla^{(2-i)}A*\nabla^{(i)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\right)\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + s\Lambda_1\int_\Sigma\eta^{s-1}\cdot A*A*\nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq c\int_\Sigma\eta^s|A|\left(|\nabla^{(2)}A|\Pi_0 + |\nabla A|(\Pi_1+\Pi_0|A|)\right)\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + s\Lambda_1\int_\Sigma\eta^{s-1}|A|^2(\Pi_1+\Pi_0|A|)\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq \varepsilon\int_\Sigma\eta^s|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + \Pi_1^{\frac{2}{3}}\int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s,\varepsilon)(\Pi_0^2+\Pi_1^{\frac{4}{3}}+\Lambda_1\Pi_1+\Lambda_1^4)\int_\Sigma\eta^{s-2}|A|^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + \varepsilon\int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^2|A|^2\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\int_\Sigma\eta^s|A|^6\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad\leq 2\varepsilon\int_\Sigma\eta^s|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon c(s)\Lambda_1^4\left(\int_{[\eta>0]}|A|^2\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \\
&\qquad + \Pi_1^{\frac{2}{3}}\int_\Sigma\eta^s|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu + c(s,\varepsilon)(\Pi_0^2+\Pi_1^{\frac{4}{3}}+\Lambda_1^4)\int_\Sigma\eta^{s-2}|A|^2\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.14. *Für alle $m \geq 1$ gilt in t_0 unter den Voraussetzungen von Lemma 3.11*

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \, \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-2)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) \, \mathrm{d}\mu \\
&\qquad + C\|A\|^4_{2,[\eta>0]} + C \int_\Sigma \eta^s \, \mathrm{d}\mu \, .
\end{aligned}$$

Für $m = 1$ entfällt der letzte Term in obiger Aussage, und für $m = 0$ gilt explizit

$$\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \, \mathrm{d}\mu \leq c\Pi_0^2 \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Beweis. Analog zu den Rechnungen (3.29) und (3.31) ist für $m \geq 4$ zunächst für ein von den Größen (3.24) abhängiges C

$$\begin{aligned}
\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) &= \sum_{i=0}^{1} \nabla^{(i)} A * P_2^{m-i}((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) + \sum_{i=2}^{m-3} \nabla^{(i)} A * P_2^{m-i}((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \\
&\quad + \sum_{i=m-2}^{m} \nabla^{(i)} A * P_2^{m-i}((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \\
&\leq C \left(\sum_{i=0}^{1} |P_2^{m-i}((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| + 1 + \sum_{i=m-2}^{m} |\nabla^{(i)} A| \right) .
\end{aligned}$$

Nun gilt wegen Proposition B.12 bzw. unter Benutzung der Abschätzungen (3.30)

$$\begin{aligned}
|P_2^m((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| &\leq c \sum_{i=0}^{m} |\nabla^{(i)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| |\nabla^{(m-i)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \\
&\leq C \left(\sum_{i=0}^{1} |\nabla^{(m-i)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + 1 + \sum_{i=m-1}^{m} |\nabla^{(i)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| \right) \\
&\leq C(1 + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|)
\end{aligned}$$

und analog

$$|P_2^{m-1}((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| \leq C(1 + |\nabla^{(m-2)} A|).$$

Insgesamt ergibt sich damit also

$$\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \leq C(1 + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|)$$

und nach Einsetzen hiervon in das abzuschätzende Integral mit Young direkt die Behauptung.

Sei nun $m = 3$. Direktes Ausschreiben liefert zunächst

$$\begin{aligned}
&\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \\
&\quad = A * P_2^3((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) + \nabla A * P_2^2((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) + \sum_{i=2}^{3} \nabla^{(i)} A * P_2^{m-i}((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) \\
&\quad \leq C \left(|P_2^3((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| + |\nabla A| |P_2^2((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| + \sum_{i=2}^{3} |\nabla^{(i)} A| \right) .
\end{aligned}$$

Da nun unter erneuter Benutzung der Abschätzungen (3.30)

$$\begin{aligned}|P_2^3((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| &\leq c|\nabla^{(3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}||(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|+c|\nabla^{(2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}||\nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|\\ &\leq C(|\nabla^{(3)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|+|\nabla^{(2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|)\\ &\leq C(1+|\nabla^{(2)}A|+|\nabla A|)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|P_2^2((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| &\leq c|\nabla^{(2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}||(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|+c|\nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|^2\\ &\leq C(1+|\nabla A|),\end{aligned}$$

ergibt sich insgesamt

$$\sum_{k+l=m}\nabla^{(k)}A*P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})\leq C(1+|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|)+C|\nabla A|^2$$

und damit ein Ausdruck wie oben mit dem Zusatzterm $C|\nabla A|^2$. Dieser lässt sich nach Einsetzen in das abzuschätzende Integral auf die Weise

$$\begin{aligned}C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A||\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu &\leq C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu+\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A|^2|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu\\ &= C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m-2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+\int_\Sigma \eta^s\nabla^{(m)}A*P_3^{m+2}(A)\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

behandeln; die Behauptung folgt.

Sei $m=2$. Zunächst ergibt sich direkt

$$\sum_{k+l=m}\nabla^{(k)}A*P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})\leq c|A||P_2^2((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})|+c|\nabla A||P_2^1((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})|+C|\nabla^{(2)}A|,$$

und da nach Lemma B.10 bzw. unter Benutzung der Formeln (3.38)

$$\begin{aligned}|P_2^2((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| &\leq c|\nabla^{(2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}||(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|+c|\nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|^2\\ &\leq C(1+|A|+|A|^2+|\nabla A|)+C(1+|A|)^2\\ &\leq C(1+|\nabla A|+|A|^2)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}|P_2^1((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| &\leq c|\nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}||(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}|\\ &\leq C(1+|A|),\end{aligned}$$

erhalten wir nach Einsetzen

$$\begin{aligned}\sum_{k+l=m}\nabla^{(k)}A*P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) &\leq C(|\nabla^{(m)}A|+|\nabla^{(m-1)}A|+|\nabla^{(m-2)}A|)\\ &\quad +C|\nabla A||A|+C|A|^3\end{aligned}$$

und damit wieder die bekannten mit der Young'schen Ungleichung zu behandelnden Terme sowie die Zusatzterme $C|\nabla A||A|$ und $C|A|^3$. Da aber nach Einsetzen in das abzuschätzende Integral nach Proposition B.19

$$\begin{aligned}&C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|\left(|\nabla A||A|+|A|^3\right)\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\leq C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+C\int_\Sigma \eta^s\left(|\nabla A|^2|A|^2+|A|^6\right)\,\mathrm{d}\mu\\ &\quad\leq C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+C\left(\int_{[\eta>0]}|A|^2\,\mathrm{d}\mu\right)^2,\end{aligned}$$

folgt direkt die Behauptung.

Sei $m = 1$. Zunächst gilt dann unter Benutzung von (3.38)

$$\begin{aligned}\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}) &\le c|A||P_2^1((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})| + C|\nabla A| \\ &\le C(|\nabla A| + |A|) + C|A|^2,\end{aligned}$$

und wir erhalten nach Young

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \eta^s \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * P_2^l((\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)})\, \mathrm{d}\mu \\ &\quad \le C\int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2\, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s |A|^2\, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s |\nabla A||A|^2\, \mathrm{d}\mu \\ &\quad \le C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2 |A|^2\, \mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit Proposition B.19.

Abschließend folgt die Behauptung für $m = 0$ durch direktes Einsetzen. □

Lemma 3.15. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.11 gilt in t_0 für alle $m \ge 1$*

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \eta^s * \theta * \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\, \mathrm{d}\mu \\ &\quad \le C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+1)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + (|\theta|^2 + C)\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2\, \mathrm{d}\mu \\ &\qquad + C\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m-1)} A|^2\, \mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m-2)} A|^2\, \mathrm{d}\mu \\ &\qquad + C\|A\|^4_{2,[\eta>0]} + C\int_\Sigma \eta^s\, \mathrm{d}\mu\,.\end{aligned}$$

Für $m = 1$ entfällt der letzte Term in obiger Aussage, und für $m = 0$ gilt explizit

$$\int_\Sigma \eta^s * \theta * \nabla^{(m)} A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\, \mathrm{d}\mu \le \left(|\theta|^2 + c\Pi_0^2\right)\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Wir können weitgehend analog zum Beweis von Lemma 3.14 vorgehen und verweisen für Details auf die dort ausgeführten Rechnungen. Für $m \ge 4$ ergibt sich unter der Benutzung von von Proposition B.12 bzw. der Abschätzungen (3.30) mit einem von den Größen (3.24) abhängigen C

$$\begin{aligned}\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} &\le C\left(\sum_{i=0}^{1} |\nabla^{(m-i)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + 1 + \sum_{i=m-2}^{m} |\nabla^{(i)} A|\right) \\ &\le C(1 + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|),\end{aligned}$$

nach Einsetzen in das zu untersuchende Integral folgt unter Benutzung der Young'schen Ungleichung sofort die Behauptung.

Sei $m = 3$. Direktes Ausschreiben und Benutzung der Abschätzungen (3.30) liefert nun

$$\begin{aligned}\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)} A * \nabla^{(l)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} &\le C\left(|\nabla^{(3)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + |\nabla A||\nabla^{(2)} (\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + \sum_{i=2}^{3} |\nabla^{(i)} A|\right) \\ &\le C(1 + |\nabla^{(m)} A| + |\nabla^{(m-1)} A| + |\nabla^{(m-2)} A|) + C|\nabla A|^2,\end{aligned}$$

nach Einsetzen hiervon in das abzuschätzende Integral lässt sich der zusätzlich auftretende Term mittels

$$\begin{aligned}
&C\int_\Sigma \eta^s|\theta||\nabla^{(3)}A||\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\le |\theta|^2\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(3)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^4 \,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\le |\theta|^2\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m-1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-2}|\nabla^{(m-2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

abschätzen, wobei im letzten Schritt wie in Rechnung (3.28) verfahren wurde. Die Behauptung folgt.

Für $m=2$ ergibt sich unter Benutzung der Formeln (3.38)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}\\
&\quad\le c|A||\nabla^{(2)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + c|\nabla A||\nabla(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)}| + C|\nabla^{(2)}A|\\
&\quad\le C(|\nabla^{(m)}A| + |\nabla^{(m-1)}A| + |\nabla^{(m-2)}A|) + C|\nabla A||A| + C|A|^3,
\end{aligned}$$

und da aufgrund von Proposition B.19

$$\begin{aligned}
&C\int_\Sigma \eta^s|\theta||\nabla^{(m)}A|\left(|\nabla A||A| + |A|^3\right) \mathrm{d}\mu\\
&\quad\le |\theta|^2\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s\left(|\nabla A|^2|A|^2 + |A|^6\right) \mathrm{d}\mu\\
&\quad\le (|\theta|^2 + C)\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^2,
\end{aligned}$$

folgt direkt die Behauptung.

Sei $m=1$. Mit (3.38) ergibt sich

$$\sum_{k+l=m} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \le C(|\nabla A| + |A|) + C|A|^2$$

und es folgt mit Young

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s * \theta * \nabla^{(m)}A * \sum_{k+l=m} \nabla^{(k)}A * \nabla^{(l)}(\overline{\mathrm{Rc}})^{(\nu)} \,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\le (|\theta|^2 + C)\int_\Sigma \eta^s|\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|A|^4 \,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\le (|\theta|^2 + C)\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|\nabla^{(m-1)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^s|A|^6 \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

die Behauptung folgt nun aus Proposition B.19.

Abschließend ergibt sich die Aussage für $m=0$ durch direktes Einsetzen. □

Die endgültigen Evolutionsgleichungen

Mit den bis hierher gewonnenen Erkenntnissen sind wir in der Lage, die Evolutionsgleichungen in Lemma 3.10 in eine für uns brauchbare Form zu zwängen. Wichtiges Werkzeug hierfür ist folgende Interpolationsungleichung, die sich aus Korollar B.21 mit $\phi = A, p = 2, s = s-2$ und $k = m+1$ nach Quadrieren ergibt.

Proposition 3.16. *Sei $\eta \in C^1(\Sigma), 0 \le \eta(\cdot) \le 1, |\nabla\eta| \le \Lambda_1$. Dann gilt für alle $m \ge 0, s \ge 2m+4$ und $\varepsilon > 0$*

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^2 \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \Lambda_1^4 \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
+ \Lambda_1^6 \int_\Sigma \eta^{s-6} |\nabla^{(m-1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \Lambda_1^8 \int_\Sigma \eta^{s-8} |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
\le \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(\varepsilon, s, m) \Lambda_1^{2m+4} \int_{[\eta>0]} \eta^{s-2m-4} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \,.
\end{aligned}$$

Für beliebige Konstanten $c_1, \ldots, c_4 \ge 0$ folgt

$$\begin{aligned}
c_1 \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c_2 \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
+ c_3 \int_\Sigma \eta^{s-6} |\nabla^{(m-1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c_4 \int_\Sigma \eta^{s-8} |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
\le \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(\varepsilon, s, m) \left(\Lambda_1 + c_1^{\frac12} + c_2^{\frac14} + c_3^{\frac16} + c_4^{\frac18} \right)^{2m+4} \|A\|_{2,[\eta>0]}^2 .
\end{aligned}$$

□

Satz 3.17 (Lokale Krümmungsevolution für $m \ge 1$)**.** *Sei Σ geschlossene 2-Fläche und $F(\Sigma,\cdot)$ Lösung von* (WF∗) *in* **M**. *Seien $\tilde\eta, \eta$ wie in* (3.20) *und zu einem festen Zeitpunkt t_0 die Voraussetzungen* (VΣ) *und* (Vη) *erfüllt. Sei $m \ge 1, s \ge 2m+4$, gelte $|\overline{\nabla}^{(k)} \overline{\mathrm{Rc}}|_g|_{[\tilde\eta>0]} \le \Pi_k \in \mathbf{R}$ für alle $k \le m+2$ und $\|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,[\eta>0]} < \infty$ für $k \le m-3$. Dann gibt es Konstanten*

$$C = C\big(m, s, \|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{k \le m+2} \Pi_k, \sum_{k \le m-3} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,[\eta>0]}\big),$$

die in monoton steigender Weise von ihren Argumenten abhängen, sodaß in t_0

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac12 \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
\le c(|\theta|^2 + \|A\|_{\infty,[\eta>0]}^4) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
+ C \int_\Sigma \eta^s \,\mathrm{d}\mu + C \left(1 + \|A\|_{\infty,[\eta>0]}^4\right) \|A\|_{2,[\eta>0]}^2 .
\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst liefert Kombination von Lemma 3.10 mit den Ergebnissen der Lemmata 3.11 bis 3.15 für alle $\varepsilon > 0$ direkt

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac34 \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
\le \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
+ C \int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C \int_\Sigma \eta^{s-6} |\nabla^{(m-1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
+ C \int_\Sigma \eta^{s-8} |\nabla^{(m-2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c|\theta|^2 \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
+ \int_\Sigma \eta^s \left(\nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\le m}(A) \right) \mathrm{d}\mu \\
+ C \int_\Sigma \eta^s \,\mathrm{d}\mu + C \|A\|_{2,[\eta>0]}^4 ,
\end{aligned}$$

die Konstanten C hängen von ε und den oben angegebenen Größen ab. Nun folgt unter Benutzung von Proposition B.23 vollkommen analog zum Vorgehen im Beweis zu [KS02, Proposition 4.5], daß für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \left(\nabla^{(m)} A * P_3^{m+2}(A) + P_6^{2m;\leq m}(A)\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq \varepsilon \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(\varepsilon)\|A\|^4_{\infty,[\eta>0]} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(\varepsilon)\left(\Lambda_1^{2m+4} + \Lambda_1^{2m}\|A\|^4_{\infty,[\eta>0]}\right)\|A\|^2_{2,[\eta>0]},
\end{aligned}$$

außerdem gilt wegen Proposition 3.16 für alle $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$\begin{aligned}
&C\int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla^{(m+1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-4} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad + C\int_\Sigma \eta^{s-6} |\nabla^{(m-1)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + C\int_\Sigma \eta^{s-8} |\nabla^{(m)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad \leq \tilde{\varepsilon} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(m+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(\tilde{\varepsilon}, s, m, C, \|\tilde{\eta}\|_{C^1})\|A\|^2_{2,[\eta>0]}.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen hiervon folgt für feste $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \ll 1$ die Behauptung. □

Für kleine m können wir uns die in den obigen Lemmata getroffenen präziseren Abschätzungen für diesen Fall zunutze machen. Zunächst folgt für $m = 1$ vollkommen analog zum Beweis von Satz 3.17

Proposition 3.18 (Lokale Krümmungsevolution für $m = 1$)**.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.17 gilt für $s \geq 6$*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(3)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq c(|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[\eta>0]}) \int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)\Pi_2^2 \int_\Sigma \eta^s \,\mathrm{d}\mu + C\left(1 + \|A\|^4_{\infty,[\eta>0]}\right)\|A\|^2_{2,[\eta>0]}
\end{aligned}$$

mit $C = C(s, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{k\leq 3} \Pi_k)$. □

Ist $m = 0$, so lassen sich durch Benutzung von Lemma B.18 ähnlich zum Vorgehen in [KS02, Proposition 4.4] zusätzliche gute Terme auf der linken Seite erzeugen.

Satz 3.19 (Lokale Krümmungsevolution für $m = 0$)**.** *Sei $F(\Sigma, \cdot)$ Lösung von* (WF$*$) *in* $\mathbf{M}$. *Seien $\tilde{\eta}, \eta$ wie in* (3.20) *und in t_0 die Voraussetzungen* ($\mathrm{V}\Sigma$) *und* ($\mathrm{V}\eta$) *erfüllt. Sei $s \geq 4$ und gelte $|\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}}|_g|_{[\tilde{\eta}>0]} \leq \Pi_k$ für $0 \leq k \leq 2$. Dann gilt in t_0*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma \eta^s \left(|\nabla^{(2)} A|^2 + |\nabla A|^2|A|^2 + |A|^6\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad \leq c|\theta|^2 \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(s)(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2)\|A\|^2_{2,[\eta>0]} \\
&\qquad + c(s)\int_\Sigma \eta^s |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \eta^s \left(A * P_3^2(A) + P_6^0(A)\right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad \le c \int_\Sigma \eta^s \left(|\nabla^{(2)} A||A|^3 + |\nabla A|^2 |A|^2 + |A|^6 \right) \mathrm{d}\mu \\
&\quad \le \frac{1}{8} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c \int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu + c \int_\Sigma \eta^s |A|^2 |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

und aus Lemma 3.10, den Lemmata 3.11…3.15 und Proposition B.19 folgt damit für alle $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac{3}{4} \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |A|^2 |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\quad \le \left(8^{-1} + \varepsilon\right) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c \int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu + c \int_\Sigma \eta^s |\nabla A|^2 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s)(\Lambda_1^2 + \Pi_1^{\frac{2}{3}}) \int_\Sigma \eta^{s-2} |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c|\theta|^2 \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s,\varepsilon)(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2) \int_\Sigma \eta^{s-4} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c(s,\varepsilon) \int_\Sigma \eta^s |\overline{\nabla}\, \overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \Lambda_1^4 c(s) \|A\|_{2,[\eta>0]}^4 \\
&\quad \le \left(8^{-1} + 2\varepsilon\right) \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c\varepsilon_0 \int_\Sigma \eta^s (|\nabla^{(2)} A|^2 + |A|^6) \,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad + c|\theta|^2 \int_\Sigma \eta^s |A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(s,\varepsilon)(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2) \|A\|_{2,[\eta>0]}^2 \\
&\qquad + c(s,\varepsilon) \int_\Sigma \eta^s |\overline{\nabla}\, \overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt Voraussetzung (Vη) sowie Proposition 3.16 und Lemma B.18 benutzt wurden. Die Behauptung folgt aufgrund der Annahmen an ε_0 für $\varepsilon \ll 1$ nach Absorbieren. $\square$

3.3 A-priori-Abschätzungen

Die in Abschnitt 3.2 bewältigten Abschätzungen ermöglichen es uns nun, ähnlich zur Vorgehensweise in [KS02, Proposition 4.6] lokale Krümmungsschranken unter (WF$*$) herzuleiten. Zunächst benötigen wir folgenden Hilfssatz.

Lemma 3.20. *Sei $\tilde{\eta} \in C^2(\mathbf{M})$ Abschneidefunktion auf $\mathbf{M}$, gelte $|\overline{\nabla}\, \tilde{\eta}| \le \Lambda_1, |\overline{\nabla}^{(2)}\, \tilde{\eta}| \le \Lambda_2$. Dann gibt es Abschneidefunktionen ${}^i\tilde{\eta}$, $i \in \mathbf{N}$, sodaß für alle $i \in \mathbf{N}$*

$$
\begin{aligned}
&[{}^i\tilde{\eta} > 0] \subset [\tilde{\eta} > 0], \\
&[{}^i\tilde{\eta} = 1] \supset [\tilde{\eta} = 1], \qquad\qquad (3.39)\\
&[{}^i\tilde{\eta} = 1] \supset [{}^{i+1}\tilde{\eta} > 0].
\end{aligned}
$$

Außerdem gibt es absolute Konstanten ${}^i c$, sodaß für alle i

$$\begin{aligned} |\overline{\nabla}\,{}^i\tilde{\eta}| &\leq {}^i c \cdot \Lambda_1, \\ |\overline{\nabla}^{(2)}\,{}^i\tilde{\eta}| &\leq {}^i c \cdot \left(\Lambda_1^2 + \Lambda_2\right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Beweis. Wir wählen feste Funktionen $\{{}^i f\}_{i \in \mathbf{N}} \subset C^2(\mathbf{R}, [0,1])$ mit ${}^i f|_{(-\infty,0]} \equiv 0$, ${}^i f|_{[1,\infty)} \equiv 1$ und $[{}^{i+1}f > 0] \subset [{}^i f = 1]$, und setzen ${}^i\tilde{\eta} := {}^i f \circ \tilde{\eta}$. Nach der Kettenregel folgt für jedes i

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_j\,{}^i\tilde{\eta} &= ({}^i f' \circ \tilde{\eta}) \cdot \overline{\nabla}_j\,\tilde{\eta}, \\ \overline{\nabla}_k\,\overline{\nabla}_j\,{}^i\tilde{\eta} &= ({}^i f'' \circ \tilde{\eta}) \cdot \overline{\nabla}_k\,\tilde{\eta} \cdot \overline{\nabla}_j\,\tilde{\eta} + ({}^i f' \circ \tilde{\eta}) \cdot \overline{\nabla}_k\overline{\nabla}_j\,\tilde{\eta}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit ${}^i c := \|{}^i f\|_{C^2(\mathbf{R})}$. □

Ein Kernstück der folgenden Beweise stellt die wiederholte Benutzung des Grönwallschen Lemmas dar, das in der hier angegebenen Form z.B. direkt aus [Die70, (10.5.1.3)] folgt.

Proposition 3.21 (Grönwalls Lemma)**.** *Seien $a \in \mathbf{R}$ und $u, w \in C^0([0,T))$ nichtnegativ und gelte für alle $t \in [0,T)$*

$$u(t) \leq a + \int_0^t (uw)(\xi)\; \mathrm{d}\xi\,.$$

Dann folgt für alle t

$$\begin{aligned} u(t) &\leq a + a \cdot \int_0^t w(\xi) \cdot \exp\left(\int_\xi^t w(\varphi)\;\; \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\xi \\ &\leq C(a, \int_0^T w(\xi)\; \mathrm{d}\xi). \end{aligned}$$

□

Generalvoraussetzungen

Seien im Folgenden $\tilde{\eta}, \eta$ wie in (3.20) und sei $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}$ Lösung von (WF∗). Um die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.2 nutzen zu können, fordern wir die Gültigkeit der Voraussetzungen (VΣ) und (Vη) auf dem gesamten betrachteten Zeitintervall $[0,T)$, d.h.

$$\begin{aligned} &r_{\min}(t) \geq r_0(m, \kappa, \sigma, \mathbf{W}(F(\Sigma,t))) \text{ für alle } t \in [0,T), \\ &\sup_{[0,T)} \int_{[\eta>0]} |A|^2\; \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon_0, \end{aligned}$$

mit r_0, ε_0 wie auf Seite 45. Wir bemerken hier, daß r_0 nach Lemma B.13 monoton steigend in $\mathbf{W}(F(\Sigma,\cdot))$ ist, und daher insbesondere unter den Flüssen (WF) und (WFF) auch die uniforme Forderung

$$r_{\min}(\cdot) \geq r_0(m, \kappa, \sigma, \mathbf{W}(F_0(\Sigma)))$$

zulässig wäre. Ferner fordern wir für die folgenden Rechnungen, daß

$$\|\theta\|^2_{2,[0,T)} := \int_0^T |\theta(\xi)|^2\; \mathrm{d}\xi$$

wohldefiniert und endlich ist.

3.3.1 Krümmungsschranken

Satz 3.22. *Sei Σ geschlossene 2-Fläche, $T < \infty$, und sei $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}$ Lösung von* (WF$*$). *Seien $\tilde{\eta}, \eta$ wie in* (3.20)*, seien* (VΣ) *und* (Vη) *auf $[0,T)$ erfüllt und $|\overline{\nabla}^{(k)}\,\overline{\mathrm{Rc}}\,|_g|_{[\tilde{\eta}>0]} \leq \Pi_k \in \mathbf{R}$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbf{N}$*

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|_{2,[\eta=1]} \leq C_k,$$
$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,[\eta=1]} \leq \tilde{C}_{k+2},$$

mit Konstanten C_k, $\tilde{C}_k$, die in monoton steigender Weise von den Größen

$$k, T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq k+2} \Pi_r, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \sup_{[0,T)} |[\eta > 0]|, \sum_{r\leq k} \|\nabla^{(r)} A\|_{2,[\eta>0]}\Big|_{t=0} \tag{3.41}$$

abhängen.

Beweis. Wir orientieren uns am Beweis zu [KS02, Proposition 4.6]. Seien die Funktionen ${}^i\tilde{\eta}$, $i \in \mathbf{N}$, wie in Lemma 3.20 gewählt. Durch Einschränkung auf Σ erhalten wir Funktionen ${}^i\eta$, die auf $[0,T)$ zu (3.39) analoge Inklusionsaussagen erfüllen – insbesondere sind für alle ${}^i\eta$ bzw. ${}^i\tilde{\eta}$ die Voraussetzungen für die Resultate aus Abschnitt 3.2.2 erfüllt und es gilt $|\overline{\nabla}^{(k)}\,\overline{\mathrm{Rc}}\,|_g|_{[{}^i\tilde{\eta}>0]} \leq \Pi_k$, $\sup_{t\in[0,T)} \|A\|^2_{2,[{}^i\eta>0]} \leq \varepsilon_0$ uniform in i. Anwendung von Satz 3.19 mit ${}^1\eta$ liefert damit unter Verwendung der Gradientenschranken (3.40) nach Aufintegration für alle $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma ({}^1\eta)^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\Big|_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Sigma ({}^1\eta)^4 \Big(|\nabla^{(2)} A|^2 + |\nabla A|^2 |A|^2 + |A|^6\Big) \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad \leq \int_\Sigma ({}^1\eta)^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\Big|_0 + c(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + {}^1c(\Lambda_1^4 + \Lambda_2^2)) \int_0^t \|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]} \,\mathrm{d}\xi \\
&\qquad + c\int_0^t |\theta|^2 \|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]} \,\mathrm{d}\xi + c\int_0^t \int_\Sigma ({}^1\eta)^4 |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}\,|_g^2 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad \leq C(\Pi_0, \Pi_1, \sup_{[0,T)} |[\eta > 0]|, T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

wobei benutzt wurde, daß

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Sigma ({}^1\eta)^4 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi &\leq T \cdot \sup_{[0,T)} |[{}^1\eta > 0]| \\
&\leq T \cdot \sup_{[0,T)} |[\eta > 0]|,
\end{aligned}$$

und es folgt insbesondere $\int_0^T \|\nabla^{(2)} A\|^2_{2,[{}^1\eta=1]} \,\mathrm{d}\xi \leq C$ mit C wie oben. Seien nun ${}^2\tilde{\eta}$, ${}^2\eta$ wie oben konstruiert. Es gilt $[{}^2\eta > 0] \subset [{}^1\eta = 1]$ sowie $|\nabla({}^2\tilde{\eta})| \leq c\Lambda_1$ und wir können nun durch Integration von (B.23) folgern, daß

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|A\|^4_{\infty,[{}^2\eta=1]} \,\mathrm{d}\xi &\leq c\int_0^T \|A\|^2_{2,[{}^2\eta>0]} \Big(\|\nabla^{(2)} A\|^2_{2,[{}^2\eta>0]} + \Lambda_1^4 \|A\|^2_{2,[{}^2\eta>0]}\Big) \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq c\Lambda_1^4 \cdot T + c\int_0^T \|\nabla^{(2)} A\|^2_{2,[{}^1\eta=1]} \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq C
\end{aligned} \tag{3.43}$$

mit C wie in (3.42). Damit erhalten wir aus Satz 3.17 unter Benutzung der Abschneidefunktionen ${}^3\eta$ und ${}^3\tilde{\eta}$ und der zugehörigen C^2-Schranken (3.40) nach Integration zunächst für alle $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma ({}^3\eta)^6 |\nabla A|^2 \, d\mu \Big|_t + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Sigma ({}^3\eta)^6 |\nabla^{(3)} A|^2 \, d\mu \, d\xi \\
&\quad \le \int_\Sigma ({}^3\eta)^6 |\nabla A|^2 \, d\mu \Big|_0 + c \int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[{}^3\eta>0]}) \int_\Sigma ({}^3\eta)^6 |\nabla A|^2 \, d\mu \, d\xi \\
&\qquad + C(\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le 3} \Pi_r) \int_0^T \int_\Sigma ({}^3\eta)^6 \, d\mu \, d\xi \\
&\qquad + C(\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le 3} \Pi_r) \varepsilon_0 \left(T + \int_0^T \|A\|^4_{\infty,[{}^3\eta>0]} \, d\xi \right) \\
&\quad \le C + c \int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[{}^2\eta=1]}) \int_\Sigma ({}^3\eta)^6 |\nabla A|^2 \, d\mu \, d\xi
\end{aligned} \tag{3.44}$$

mit

$$C = \|\nabla A\|^2_{2,[\eta>0]}\big|_0 + C(T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \sum_{r\le 3} \Pi_r, \sup_{[0,T)} |[\eta > 0]|).$$

Durch Grönwalls Lemma ergibt sich daraus insbesondere die uniforme Schranke

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla A\|^2_{2,[{}^3\eta=1]} \le C_1,$$

wobei C_1 nur von den in (3.41) aufgezählten Größen (mit $k = 1$) abhängt. Völlig analog ergibt sich aus Satz 3.17 auch die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma ({}^3\eta)^8 |\nabla^{(2)} A|^2 \, d\mu \Big|_t + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Sigma ({}^3\eta)^8 |\nabla^{(4)} A|^2 \, d\mu \, d\xi \\
&\quad \le C + c \int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[{}^2\eta=1]}) \int_\Sigma ({}^3\eta)^8 |\nabla^{(2)} A|^2 \, d\mu \, d\xi
\end{aligned}$$

mit

$$C = \|\nabla^{(2)} A\|^2_{2,[\eta>0]}\big|_0 + C(T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \sum_{r\le 4} \Pi_r, \sup_{[0,T)} |[\eta > 0]|),$$

und durch Grönwalls Lemma erhalten wir wieder wegen (3.43)

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(2)} A\|^2_{2,[{}^3\eta=1]} \le C_2,$$

mit C_2 wie oben definiert. Abschließend ergibt sich durch Anwendung von (B.23) unter Benutzung der Funktionen ${}^4\eta$, ${}^4\tilde{\eta}$ und der zugehörigen Abschätzungen aus Lemma 3.20 direkt

$$\begin{aligned}
\|A\|^4_{\infty,[{}^4\eta=1]} &\le c(\|\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})}) \varepsilon_0 \left(\|\nabla^{(2)} A\|^2_{2,[{}^4\eta>0]} + \varepsilon_0 \right) \\
&\le c(\|\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})}) (C_2 + \varepsilon_0) \\
&=: \tilde{C}_2.
\end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage, Abschätzungen an alle weiteren Krümmungsableitungen induktiv herzuleiten. Seien dazu $k \ge 3$, $j = j(k) \ge 3$ beliebig, fest. Wir nehmen an, daß für ${}^j\eta$, ${}^{j+1}\eta$

wie in Lemma 3.20

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(p)} A\|_{2,[^j\eta=1]} \le C_p, \quad 1 \le p \le k-1,$$

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(p)} A\|_{\infty,[^{j+1}\eta=1]} \le \tilde{C}_{p+2}, \quad 0 \le p \le k-3,$$

mit Konstanten $C_p, \tilde{C}_p$ wie oben. Sei $s = 2k+4$. Anwendung des Satzes 3.17 unter Benutzung der Funktionen ${}^{j+2}\eta$, ${}^{j+2}\tilde{\eta}$ liefert nach Integration analog zu (3.44) für alle $t \in [0,T)$ zunächst

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma ({}^{j+2}\eta)^s |\nabla^{(k)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \Big|_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Sigma ({}^{j+2}\eta)^s |\nabla^{(k+2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi \\
&\quad \le C + c\int_0^t \left(|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[^2\eta=1]}\right) \int_\Sigma ({}^{j+2}\eta)^s |\nabla^{(k)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
C = C(&\tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_{k-1}, k, T, \|{}^{j+2}\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \sum_{r \le k+2} \Pi_r, \sup_{[0,T)} |[\eta > 0]|) \\
&+ \|\nabla^{(k)} A\|^2_{2,[\eta>0]}\Big|_0.
\end{aligned}$$

Wegen $j = j(k)$ ist $\|{}^{j+2}\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})} \le C(k, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})})$, Grönwalls Lemma liefert damit

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|^2_{2,[^{j+2}\eta=1]} \le C_k,$$

wobei C_k nur von den in (3.41) aufgezählten Größen abhängt; hierbei ist zu beachten, daß dies auch für alle in der Induktionsvoraussetzung geforderten Schranken gilt. Dank der uns zur Verfügung stehenden L^∞-Abschätzungen an A lässt sich nun mit Hilfe von Korollar B.16 folgern, daß

$$\begin{aligned}
&\|\nabla^{(k-2)} A\|^4_{\infty,[^{j+3}\eta=1]} \\
&\quad \le c(\|{}^{j+3}\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})}) \|\nabla^{(k-2)} A\|^2_{2,[^{j+2}\eta=1]} \cdot \Big[\|\nabla^{(k)} A\|^2_{2,[^{j+2}\eta=1]} \\
&\qquad\qquad + \|H^2 |\nabla^{(k-2)} A|\|^2_{2,[^{j+2}\eta=1]} + \|\nabla^{(k-2)} A\|^2_{2,[^{j+2}\eta=1]} \Big] \\
&\quad \le c(k, \|\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})}) C_{k-2} \left(C_k + \tilde{C}_2 \cdot C_{k-2} + C_{k-2}\right) \\
&\quad =: \tilde{C}_k
\end{aligned} \tag{3.45}$$

und der Induktionsschritt damit erfolgreich zum Abschluss bringen.

Wir haben also für jedes $k \in \mathbf{N}$ Funktionen ${}^{j(k)}\eta$, ${}^{\tilde{j}(k)}\eta$ wie in Lemma 3.20 gefunden mit

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|_{2,[^{j(k)}\eta=1]} \le C_k,$$

$$\sup_{[0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,[^{\tilde{j}(k)}\eta=1]} \le \tilde{C}_{k+2}.$$

Da $[\eta = 1] \subset [^j\eta = 1]$ für alle j, folgt die Behauptung. □

Innere Abschätzungen

Der Ausbau des Beweises von Satz 3.22 durch Benutzung von Zeit-Abschneidefunktionen ermöglicht es uns, für positive Zeiten Gradientenschranken an die Krümmung zu gewinnen, die nicht mehr von Gradientenschranken zum Startzeitpunkt abhängen. Dies wird im Hinblick auf die Blowupanalyse im Kapitel 4.4, bei der wir keine Kontrolle über diese Größen haben, wesentlich sein.

Satz 3.23. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.22 gilt für jedes $t_0 \in (0,T)$ und alle $k \in \mathbf{N}$*

$$\begin{aligned} &\sup_{[t_0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|_{2,[\eta=1]} \le C_k, \\ &\sup_{[t_0,T)} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,[\eta=1]} \le \tilde{C}_{k+2}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

für $k=1$ gilt die lokale Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{[t_0,T)} \|\nabla A\|^2_{2,[\eta=1]} \le \hat{C}_2 \int_0^T &\left(1+|\theta|^2\right) \|A\|^2_{2,[\eta>0]} + \left(\Pi_1^2+\Pi_2^2\right) |[\eta>0]| \,\mathrm{d}\xi \\ &+ \hat{C}_2 \|A\|^2_{2,[\eta>0]}\big|_0. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Die Konstanten C_k, $\tilde{C}_k, \hat{C}_k$ sind in monoton steigender Weise abhängig von den Größen

$$t_0^{-1}, k, T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le k+2} \Pi_r, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \sup_{[0,T)} |[\eta>0]|. \tag{3.48}$$

Beweis. Wir orientieren uns grob am Beweis zu [KS01, Satz 3.5] und folgen der Argumentation im Beweis von Satz 3.22. Seien zunächst für alle $i \in \mathbf{N}$ monoton steigende Funktionen ${}^i f \in C^1(\mathbf{R},[0,1])$ fest gewählt mit ${}^i f|_{(-\infty,0]} \equiv 0$, ${}^i f|_{[1,\infty)} \equiv 1$ sowie $[{}^{i+1} f > 0] \subset [{}^i f = 1]$. Definieren wir für festes $t_0 \in (0,T)$ die Funktionen ${}^i\chi \in C^1([0,\infty),[0,1])$ durch ${}^i\chi(t) := {}^i f(\frac{t}{t_0})$, so ergibt sich für alle i

$$\begin{aligned} &0 \le {}^i\chi(\cdot) \le 1, \\ &{}^i\chi(0) = 0, \\ &{}^i\chi|_{[t_0,T)} \equiv 1, \\ &[{}^{i+1}\chi > 0] \subset [{}^i\chi = 1], \end{aligned} \tag{3.49}$$

und wir erhalten wegen $[{}^{i+1} f' > 0] \subset [{}^{i+1} f > 0] \subset [{}^i f = 1]$ direkt

$$0 \le {}^{i+1}\chi'(\cdot) \le \frac{c(i)}{t_0} \cdot {}^i\chi(\cdot). \tag{3.50}$$

Seien außerdem die Funktionen ${}^i\tilde{\eta}$ wie in Lemma 3.20 definiert, und ${}^i\eta := {}^i\tilde{\eta}|_\Sigma$. Für $t \in [0,T)$ setzen wir nun

$${}^i e_k(t) := {}^i\chi(t) \cdot \int_\Sigma ({}^i\eta)^{2k+4} |\nabla^{(k)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu$$

und bemerken, daß nach Konstruktion direkt

$$\sup_{[{}^i\chi=1]} \|\nabla^{(k)} A\|^2_{2,[{}^i\eta=1]} \le \sup_{[0,T)} {}^i e_k,$$

außerdem gilt wegen (3.49) und nach Lemma 3.20 ${}^{i}e_k(0)=0$ sowie ${}^{i}e_k(\cdot)\geq {}^{i+1}e_k(\cdot)$ für alle k,i. Vorbereitend halten wir außerdem fest, daß wegen Abschätzung (3.42)

$$\begin{aligned}
&{}^{1}e_0(t)+\frac{1}{2}\int_0^T {}^{1}e_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_\Sigma ({}^{1}\eta)^4|A|^2\,\mathrm{d}\mu\Big|_t+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Sigma ({}^{1}\eta)^4|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq c\|A\|^2_{2,[{}^{1}\eta>0]}\big|_0+c(\Pi_0,\Pi_1,\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})})\int_0^T\|A\|^2_{2,[{}^{1}\eta>0]}\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad +c\int_0^T|\theta|^2\|A\|^2_{2,[{}^{1}\eta>0]}\,\mathrm{d}\xi+c\int_0^T\int_{[{}^{1}\eta>0]}|\overline{\nabla}\overline{\mathrm{Rc}}|^2_g\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq C(T,\Pi_0,\Pi_1,\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})},\|\theta\|^2_{2,[0,T)},\sup_{[0,T)}|[\eta>0]|),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

nach Abschätzung (3.43) gilt desweiteren

$$\int_0^T\|A\|^4_{\infty,[{}^{2}\eta=1]}\,\mathrm{d}\xi\leq C \tag{3.52}$$

mit einer Konstante C wie in (3.51).

Nun gilt unter Benutzung von Satz 3.17 und Abschätzung (3.50) zunächst auf $[0,T)$

$$\begin{aligned}
\partial_t{}^{3}e_1+\frac{1}{2}{}^{3}e_3\leq{}& c(|\theta|^2+\|A\|^4_{\infty,[{}^{3}\eta>0]})\cdot{}^{3}e_1 \\
&+{}^{3}\chi\cdot C(\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})},\sum_{r\leq 3}\Pi_r,\sup_{[0,T)}|[\eta>0]|) \\
&+{}^{3}\chi\cdot C(\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})},\sum_{r\leq 3}\Pi_r)\varepsilon_0\|A\|^4_{\infty,[{}^{3}\eta>0]} \\
&+\frac{c}{t_0}{}^{2}\chi\int_\Sigma({}^{3}\eta)^6|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Da nach Proposition 3.16 außerdem

$$\begin{aligned}
{}^{2}\chi\int_\Sigma({}^{3}\eta)^6|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu&\leq{}^{2}\chi\int_\Sigma({}^{3}\eta)^8|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+c(\|\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})})\cdot\|A\|^2_{2,[{}^{3}\eta>0]} \\
&\leq{}^{1}\chi\int_\Sigma({}^{1}\eta)^8|\nabla^{(2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+c(\|\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})})\cdot\varepsilon_0 \\
&={}^{1}e_2+c(\|\tilde{\eta}\|_{C^1(\mathbf{M})},\varepsilon_0),
\end{aligned}$$

ergibt sich nach Integration unter Benutzung von (3.51) und (3.52) insgesamt für alle $t\in[0,T)$

$$\begin{aligned}
&{}^{3}e_1(t)+\frac{1}{2}\int_0^t{}^{3}e_3\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq c\int_0^t(|\theta|^2+\|A\|^4_{\infty,[{}^{2}\eta=1]})\cdot{}^{3}e_1\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad +C(t_0^{-1},T,\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})},\sum_{r\leq 3}\Pi_r,\sup_{[0,T)}|[\eta>0]|) \\
&\quad +C(\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})},\sum_{r\leq 3}\Pi_r,\varepsilon_0)\int_0^T\|A\|^4_{\infty,[{}^{2}\eta=1]}\,\mathrm{d}\xi+\frac{c}{t_0}\int_0^T{}^{1}e_2\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq c\int_0^t(|\theta|^2+\|A\|^4_{\infty,[{}^{2}\eta=1]})\cdot{}^{3}e_1\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad +C(t_0^{-1},T,\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})},\sum_{r\leq 3}\Pi_r,\sup_{[0,T)}|[\eta>0]|,\|\theta\|^2_{2,[0,T)},\varepsilon_0).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Nach Grönwalls Lemma, und da $\varepsilon_0 \leq 1$, erhalten wir daraus ${}^3e_1(t) \leq C_1$ für alle $t \in [0,T)$, wobei C_1 die Abhängigkeiten (3.48) mit $k = 1$ erfüllt. Durch erneutes Einsetzen hiervon in die rechte Seite von (3.53) ergibt sich sogar

$$
{}^3e_1(t) + \frac{1}{2}\int_0^T {}^3e_3 \,\mathrm{d}\xi \leq C_1. \tag{3.54}
$$

Ähnlich zu Rechnung (3.53) ergibt sich außerdem mit Satz 3.17 nach Integration für alle t

$$
\begin{aligned}
&{}^3e_2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t {}^3e_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad\leq c\int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[^2\eta=1]}) \cdot {}^3e_2 \,\mathrm{d}\xi \\
&\qquad + C(T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq 4}\Pi_r, \sup_{[0,T)}|[\eta > 0]|) \\
&\qquad + C(\|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq 4}\Pi_r, \varepsilon_0)\int_0^T \|A\|^4_{\infty,[^2\eta=1]}\,\mathrm{d}\xi + \frac{c}{t_0}\int_0^T {}^2e_2\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad\leq c\int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[^2\eta=1]}) \cdot {}^3e_2 \,\mathrm{d}\xi \\
&\qquad + C(t_0^{-1}, T, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq 4}\Pi_r, \sup_{[0,T)}|[\eta > 0]|, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \varepsilon_0),
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt wieder (3.51) und (3.52) benutzt wurden. Grönwalls Lemma und erneutes Einsetzen des Resultates in die rechte Seite liefert damit

$$
{}^3e_2(t) + \frac{1}{2}\int_0^T {}^3e_4 \,\mathrm{d}\xi \leq C_2, \tag{3.55}
$$

mit C_2 wie in (3.48), insbesondere folgt hieraus wegen $[^4\chi > 0] \subset [^3\chi = 1]$ unter Benutzung von (B.23) analog zum Vorgehen im Beweis zu Satz 3.22

$$
{}^4\chi\|A\|^4_{\infty,[^4\eta=1]} \leq \tilde{C}_2, \tag{3.56}
$$

mit $\tilde{C}_2$ wie oben beschrieben.

Für den Beweis von (3.46) lassen sich obige Schritte nun induktiv fortführen: Sei dazu angenommen, daß für beliebiges, festes $k \geq 3$ sowie $j = j(k) \geq 3$ uniform auf $[0,T)$

$$
\begin{aligned}
&{}^je_p(\cdot) + \frac{1}{2}\int_0^T {}^je_{p+2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq k-1, \\
&{}^{j+1}\chi\|\nabla^{(p)}A\|^4_{\infty,[^{j+1}\eta=1]}(\cdot) \leq \tilde{C}_{p+2}, \quad 0 \leq p \leq k-3,
\end{aligned}
$$

mit Konstanten $C_p, \tilde{C}_p$ wie oben – für $k = 3$ wird dies durch (3.54), (3.55) und (3.56) gewährleistet. Die Annahme impliziert für entsprechende p insbesondere uniforme L^2- bzw. L^∞-schranken an $\nabla^{(p)}A$ im Zeitraum $[^{j+1}\chi = 1]$; wegen $[^{j+2}\chi > 0] \subset [^{j+1}\chi = 1]$ bzw. $[^{j+2}\eta > 0] \subset [^{j+1}\eta = 1]$ ergibt sich damit nach Benutzung von Satz 3.17 und Integration analog zu

(3.53) für alle $t \in [0,T)$

$$
\begin{aligned}
&{}^{j+2}e_k(t) + \frac{1}{2}\int_0^t {}^{j+2}e_k \,\mathrm{d}\xi \\
&\quad \le c\int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[{}^2\eta=1]})\cdot {}^{j+2}e_k \,\mathrm{d}\xi \\
&\qquad + C(T,k,\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le k+2}\Pi_r, \sup_{[0,T)}|[\eta>0]|, \sum_{p=2}^{k-1}\tilde C_p) \\
&\qquad + C(k,\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le k+2}\Pi_r, \varepsilon_0)\int_0^T \|A\|^4_{\infty,[{}^2\eta=1]} \,\mathrm{d}\xi + \frac{c(k)}{t_0}\int_0^T {}^{j+1}e_k \,\mathrm{d}\xi \\
&\quad \le c\int_0^t (|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[{}^2\eta=1]})\cdot {}^{j+2}e_k \,\mathrm{d}\xi \\
&\qquad + C(T,k,\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le k+2}\Pi_r, \sup_{[0,T)}|[\eta>0]|, \sum_{p=2}^{k-1}\tilde C_p) \\
&\qquad + C(k,T,\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \|\theta\|^2_{2,[0,T)}, \sum_{r\le k+2}\Pi_r, \sup_{[0,T)}|[\eta>0]|, \varepsilon_0) + C(k,t_0^{-1},C_{k-2}),
\end{aligned}
$$

wobei $\|{}^{j+2}\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})} \le C(k,\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})})$ sowie im letzten Schritt (3.52) und der erste Teil der Induktionsvoraussetzung benutzt wurden. Anwendung von Grönwalls Lemma und erneutes Einsetzen des Ergebnisses liefert damit für alle t

$$
{}^{j+2}e_k(t) + \frac{1}{2}\int_0^T {}^{j+2}e_k \,\mathrm{d}\xi \le C_k,
$$

wobei C_k nur von den in (3.48) aufgezählten Größen abhängt. Insbesondere ist damit im Zeitraum $[{}^{j+2}\chi = 1]$ die Größe $\|\nabla^{(k)}A\|^2_{2,[{}^{j+2}\eta=1]}$ uniform durch C_k beschränkt – wir erhalten analog zu Rechnung (3.45) uniform auf $[0,T)$

$$
{}^{j+3}\chi\|\nabla^{(k-2)}A\|^4_{\infty,[{}^{j+3}\eta=1]}(\cdot) \le \tilde C_k
$$

und der Induktionsschritt ist erfolgreich durchgeführt. Aussage (3.46) folgt nun, da $[\eta = 1] \subset [{}^i\eta = 1]$ sowie $[t_0,T) \subset [{}^i\chi = 1]$ für alle i.

Für den Beweis von (3.47) benutzt man zunächst, daß wegen Proposition 3.18 aufgrund der Schranke (3.56) auf $[0,T)$

$$
\begin{aligned}
\partial_t {}^5e_1 &\le c(|\theta|^2 + \|A\|^4_{\infty,[{}^5\eta>0]})\cdot {}^5e_1 \\
&\quad + {}^5\chi C(\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le 3}\Pi_r)\left(1 + \|A\|^4_{\infty,[{}^5\eta>0]}\right)\|A\|^2_{2,[{}^5\eta>0]} \\
&\quad + c\,{}^5\chi\Pi_2^2\int_\Sigma ({}^5\eta)^6 \,\mathrm{d}\mu + {}^4\chi\frac{c}{t_0}\int_\Sigma ({}^5\eta)^6|\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(|\theta|^2 + \tilde C_2)\cdot {}^5e_1 + C(\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le 3}\Pi_r, \tilde C_2)\|A\|^2_{2,[{}^5\eta>0]} \\
&\quad + c\Pi_2^2|[{}^5\eta>0]| + {}^4\chi\frac{c}{t_0}\int_\Sigma ({}^5\eta)^6|\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\
&\le c(|\theta|^2 + \tilde C_2)\cdot {}^5e_1 + C(t_0^{-1},\|\tilde\eta\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\le 3}\Pi_r, \tilde C_2)\|A\|^2_{2,[{}^5\eta>0]} \\
&\quad + c\Pi_2^2|[{}^5\eta>0]| + {}^4\chi\frac{c}{t_0}\|\nabla^{(2)}A\|^2_{2,[{}^5\eta>0]},
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt die Interpolationsungleichung aus Proposition 3.16 benutzt wurde. Integration liefert unter Benutzung der Rechnung (3.51) für alle $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned}
{}^5e_1(t) &\leq c\int_0^t (|\theta|^2+\tilde{C}_2)\cdot {}^5e_1 \,\mathrm{d}\xi + C(t_0^{-1}, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq 3}\Pi_r, \tilde{C}_2)\int_0^T \|A\|^2_{2,[{}^5\eta>0]}\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + c\Pi_2^2\int_0^T |[{}^5\eta>0]|\,\mathrm{d}\xi + \frac{c}{t_0}\int_0^T {}^4\chi\|\nabla^{(2)}A\|^2_{2,[{}^5\eta>0]}\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq c\int_0^t (|\theta|^2+\tilde{C}_2)\cdot {}^5e_1 \,\mathrm{d}\xi + C(t_0^{-1}, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq 3}\Pi_r, \tilde{C}_2)\int_0^T \|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]}\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + c\Pi_2^2\int_0^T |[{}^5\eta>0]|\,\mathrm{d}\xi + ct_0^{-1}\int_0^T |\theta|^2\|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]}\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + t_0^{-1}c\Pi_1^2\int_0^T |[{}^1\eta>0]|\,\mathrm{d}\xi + ct_0^{-1}\|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]}\big|_0,
\end{aligned}$$

mit Grönwalls Lemma folgt auf $[0,T)$

$$\begin{aligned}
{}^5e_1 &\leq \left(1+c\int_0^t (|\theta|^2+\tilde{C}_2)\cdot\exp\left(\int_\xi^t c(|\theta|^2+\tilde{C}_2)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\xi\right) \\
&\quad \cdot C(t_0^{-1}, \|\tilde{\eta}\|_{C^2(\mathbf{M})}, \sum_{r\leq 3}\Pi_r, \tilde{C}_2)\Bigg[\|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]}\big|_0 \\
&\qquad + \int_0^T \|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]} + \Pi_2^2|[{}^5\eta>0]| + |\theta|^2\|A\|^2_{2,[{}^1\eta>0]} + \Pi_1^2|[{}^1\eta>0]|\,\mathrm{d}\xi\Bigg]
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

3.4 Untere Schranken an die Existenzzeit

Für eine sich unter dem Fluss (WF∗) bewegende Fläche $F:\Sigma\times[0,T)\to\mathbf{M}$ wollen wir nun die Größe des maximalen Existenzzeitintervalles $[0,T_{\max})$ quantisieren, da das aus Satz 3.2 resultierende bloße Wissen um die *Existenz* eines solchen Intervalles für viele Anwendungen nicht ausreichend ist.

Zunächst folgt aus dem Resultat in Satz 3.2 sofort, daß das Intervall $[0,T_{\max})$ mindestens den Zeitraum umfasst, auf dem wir die Glattheit der Flächen $F(\Sigma,\cdot)$ gewährleisten können. Im Beweis zu folgendem Lemma wird dieses Kriterium in die für uns besser überprüfbare Existenz von Schranken an alle $\nabla^{(k)}A$ umgeformt.

Lemma 3.24. *Sei $F:\Sigma\times[0,T)\to\mathbf{M}$ Lösung von* (WF∗)*, $T<\infty$, und sei* (VΣ) *auf* $[0,T)$ *erfüllt. Gelte*

$$\|\theta\|_{1,[0,T)} := \int_0^T |\theta(\xi)|\,\mathrm{d}\xi < \infty$$

und für alle $k\in\mathbf{N}_0$

$$\sup_{[0,T)}\|\nabla^{(k)}A\|_{\infty,\Sigma} =: C_k < \infty.$$

Dann ist T nicht maximal.

Beweis. Nach Definition von $\alpha_{\mathbf{W}}$ gilt zunächst nach Lemma 2.10 für beliebige $p \in \Sigma$ und $t_1, t_2 \in [0,T)$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(F(p,t_1),F(p,t_2))_{g^e} &\leq \Big| \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t F(p,\xi)\|_{g^e}\, \mathrm{d}\xi \,\Big| \\ &\leq c \Big| \int_{t_1}^{t_2} |(-\alpha_{\mathbf{W}} + H\theta)(p,\xi)|\, \mathrm{d}\xi \,\Big| \\ &\leq \big(|t_1 - t_2| + |\|\theta\|_{1,[t_1,t_2]}|\big) \cdot C(\sum_{r\leq 2} C_r, m, \kappa, \sigma), \end{aligned} \tag{3.57}$$

wobei $\sup_{\mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)} |\overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu}| \leq c(m,\kappa,\sigma)$ benutzt wurde. Es gibt also insbesondere eine kompakte Menge K mit

$$F(\Sigma,\cdot) \subset K \Subset \mathbf{M}$$

und wir können $\Pi_k := \sup_K |\overline{\nabla}^{(k)}\,\overline{\mathrm{Rc}}|$ setzen. Damit ergibt sich unter Benutzung von Proposition B.12 für alle $k \geq 0$ und $t \in [0,T)$

$$\|\nabla^{(k)}(-\alpha_{\mathbf{W}} + H\theta)\|_{\infty,\Sigma}(t) \leq C(k, \sum_{r\leq k+2} C_r, \sum_{p\leq k} \Pi_p) \cdot (1 + |\theta(t)|) \tag{3.58}$$

und wir können uns am Vorgehen im Beweis zu [KS02, Satz 1.2] orientieren: Wegen Lemma 2.3 und der Schranke (3.58) gilt für $\gamma(\cdot) = F(\Sigma,\cdot)^* g$, alle $k \in \mathbf{N}_0$ und $t \in [0,T)$

$$\|\nabla^{(k)}(\partial_t \gamma)\|_{\infty,\Sigma}(t) \leq C(k, \sum_{r\leq k+2} C_r, \sum_{p\leq k} \Pi_p) \cdot (1 + |\theta(t)|)$$

und insbesondere

$$\int_0^T \|\partial_t \gamma\|_{\infty,\Sigma}\, \mathrm{d}\xi \leq C(T, \|\theta\|_{1,[0,T)}, \sum_{r\leq k+2} C_r, \sum_{p\leq k} \Pi_p),$$

damit konvergieren nach [Ham82, Lemma 14.2] die Metriken $\gamma(t)$ für $t \nearrow T$ gegen einen positiv definiten metrischen Tensor γ_T und sind außerdem auf $[0,T)$ äquivalent. Genauer gilt zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T)$ und für jede r-Form $Z = Z(t)$ auf Σ

$$C^{-1}|Z(t)|^2_{\gamma(0)} \leq |Z(t)|^2_{\gamma(t)} \leq C|Z(t)|^2_{\gamma(0)},$$

mit $C = C(r, \int_0^T \|\partial_t \gamma\|_{\infty,\Sigma}\, \mathrm{d}\xi)$. Ist nun eine lokale, zeitunabhängige Karte $\psi : U \Subset \Sigma \to \mathbf{R}^2$ derart gewählt, daß in $t = 0$ auf U

$$\gamma_{ij}(\cdot) = \exp(\phi(\cdot))\delta_{ij}$$

für ein $\phi : U \to \mathbf{R}$, so folgt dort also insbesondere

$$\hat{C}^{-1} \cdot \sum (Z_{i_1\dots i_r})^2 \leq |Z|^2_{\gamma(t)} \leq \hat{C} \cdot \sum (Z_{i_1\dots i_r})^2, \tag{3.59}$$

mit $\hat{C} = \hat{C}(r, \int_0^T \|\partial_t \gamma\|_{\infty,\Sigma}\, \mathrm{d}\xi, \phi)$. Bezeichne ∂ die zu ψ gehörige Koordinatenableitung. Analog zum Vorgehen in [KS02] erhalten wir dann für alle $k \in \mathbf{N}_0$ und $t \in [0,T)$

$$|\partial^{(k)} Z| \leq C(k, \hat{C}, \Upsilon_{k-1}(t)) \cdot \sum_{r\leq k} |\nabla^{(r)} Z|_{\gamma(t)}, \tag{3.60}$$

wobei $|\partial^{(k)}Z|^2 := \sum(\partial_{i_1\ldots i_k}(Z_{j_1\ldots j_r}))^2$ und $\Upsilon_k(t) := \sum_{r\le k}|\partial^{(r)}\Gamma|(t)$. Wir können dies nun auf den Tensor $Z = \partial_t\Gamma$ anwenden – Zunächst gilt unter Benutzung von Lemma 2.3 und (3.58) für alle $k \ge 0$ und $t \in [0,T)$

$$\|\nabla^{(k)}(\partial_t\Gamma)\|_{\infty,\Sigma}(t) \le C(k, \sum_{r\le k+3} C_r, \sum_{p\le k+1}\Pi_p)\cdot(1+|\theta(t)|)$$

und nach Einsetzen hiervon in (3.60) lässt sich induktiv folgern, daß

$$\begin{aligned}
&|\partial^{(k)}(\partial_t\Gamma)|_{\infty,\Sigma}(t) \le C(k,T,\hat{C},\|\theta\|_{1,[0,T)},F_0(\Sigma), \sum_{r\le k+3} C_r, \sum_{p\le k+1}\Pi_p)\cdot(1+|\theta(t)|),\\
&|\partial^{(k)}\Gamma|_{\infty,\Sigma}(t) \le C(k,T,\hat{C},\|\theta\|_{1,[0,T)},F_0(\Sigma), \sum_{r\le k+3} C_r, \sum_{p\le k+1}\Pi_p),
\end{aligned} \tag{3.61}$$

insbesondere stehen uns nun zeitunabhängige Schranken an $\Upsilon_k(\cdot)$ zur Verfügung. Benutzung von (3.60) mit $Z = A$ liefert unter Benutzung dieser Schranken damit direkt

$$|\partial^{(k)}A|_{\infty,\Sigma} \le C(k,T,\hat{C},\|\theta\|_{1,[0,T)},F_0(\Sigma), \sum_{r\le k+2} C_r, \sum_{p\le k}\Pi_p). \tag{3.62}$$

Wir können nun Rückschlüsse auf Gradientenschranken an die Immersionen $F(\cdot,t)$ ziehen. Seien dazu euklidische Koordinaten auf $\mathbf{M}$ gewählt. Für beliebige $i \in \{1,2\}, \alpha \in \{1,2,3\}$ ergibt sich dann wegen der Vergleichbarkeit der Normen $|\cdot|_{g^e}$ und $|\cdot|_g$ auf $\mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)$ und wegen (3.59) uniform auf $U\times[0,T)$

$$\begin{aligned}
(\partial_i F^\alpha)^2 &\le \sum_{\beta=1}^{3}(\partial_i F^\beta)^2\\
&\le c\langle\partial_i F, \partial_i F\rangle_g\\
&= c\gamma_{ii}\\
&\le c\left(\sum \gamma_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le c\cdot\hat{C},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

analog folgt für die Komponenten des Normalenvektors ν

$$\begin{aligned}
(\nu^\alpha)^2 &\le c\langle\nu,\nu\rangle_g\\
&\le c.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Sei nun $\overline{\Upsilon}_p := \sum_{r\le p}\sup_K|\overline{\partial}^{(r)}\overline{\Gamma}|$, wobei $\overline{\partial}$ Koordinatenableitungen auf $\mathbf{M}$ bezeichnet und $K\subset\mathbf{M}$ wie oben definiert ist. Nach der Kettenregel folgt auf Σ

$$|\partial^{(k)}(\overline{\Gamma}\circ F)| \le C(k, \overline{\Upsilon}_k, \sum_{r\le k}\sum_\alpha|\partial^{(r)}F^\alpha|)$$

und wir erhalten aus den Gauß-Weingartengleichungen (2.7) für alle $\beta\in\{1,2,3\}$ und $k\ge 2$

$$|\partial^{(k)}F^\beta| \le C(k,\Upsilon_{k-2},\overline{\Upsilon}_{k-2}, \sum_{r\le k-2}|\partial^{(r)}A|, \sum_{r\le k-1}\sum_\alpha|\partial^{(r)}F^\alpha|, \sum_{r\le k-2}\sum_\alpha|\partial^{(r)}\nu^\alpha|)$$

sowie für $k\ge 1$

$$|\partial^{(k)}\nu^\beta| \le C(k,\overline{\Upsilon}_{k-1}, \sum_{r\le k-1}|\partial^{(r)}A|, \sum_{r\le k}\sum_\alpha|\partial^{(r)}F^\alpha|, \sum_{r\le k-1}\sum_\alpha|\partial^{(r)}\nu^\alpha|).$$

Daraus ergibt sich induktiv unter Benutzung der Abschätzungen (3.61) ... (3.64)

$$
\begin{aligned}
|\partial^{(k)} F^\beta| &\leq C(k, \Upsilon_{k-2}, \overline{\Upsilon}_{k-2}, \sum_{r\leq k-2} |\partial^{(r)} A|, \sum_\alpha |\partial F^\alpha|, \sum_\alpha |\nu^\alpha|) \\
&\leq C(k, \hat{C}, \overline{\Upsilon}_{k-2}, \|\theta\|_{1,[0,T)}, F_0(\Sigma), T, \sum_{p\leq k-1} \Pi_p, \sum_{r\leq k+1} C_r)
\end{aligned}
$$

und wir haben lokale uniforme C^k-Schranken an alle $F(\cdot,t)$ gefunden. Diese konvergieren für $t \nearrow T$ wegen (3.57) gleichmäßig gegen ein stetiges $F_T : \Sigma \to \mathbf{M}$. Nach Arzelà-Ascoli gilt aufgrund obiger Schranken sogar $F(\cdot,t) \to F_T$ in $C^\infty(\Sigma)$; man bemerke dazu, daß Σ sich mit endlich vielen Kartengebieten U wie oben überdecken lässt. Abschließend folgt in beliebigen lokalen Koordinaten auf Σ

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_i F_T, \partial_j F_T \rangle_g &\equiv \lim_{t\nearrow T} \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle_g |_t \\
&\equiv \lim_{t\nearrow T} \gamma_{ij} \\
&\equiv (\gamma_T)_{ij},
\end{aligned}
$$

damit ist $F_T(\Sigma)$ glatte, immersierte Hyperfläche in $\mathbf{M}$ und der Fluss lässt sich mit Satz 3.2 über den Zeitpunkt T hinaus fortsetzen. $\square$

Sofern sup-Schranken an θ existieren, können wir nun einen direkten Zusammenhang zwischen diesen Schranken und der minimalen Existenzzeit des Flusses (WF$*$) herleiten. Hier sei angemerkt, daß sich durch minimale Abänderungen des folgenden Beweises auch leicht eine analoge Aussage für (allgemeinere) $\theta \in L^2$ zeigen ließe. Für Details verweisen wir auf die Beweise zu den Sätzen 4.11 und A.6.

Satz 3.25. *Sei Σ geschlossene* 2*-Fläche, $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ maximale Lösung von* (WF$*$)*, $T_{\max} \leq \infty$, sei θ beschränkt und gelte zum Zeitpunkt $t = 0$*

$$
r_{\min} \geq 3 r_0(m, \kappa, \sigma, \mathbf{W}(F_0(\Sigma)))
$$

mit r_0 wie in (VΣ) *definiert. Dann gilt*

$$
T_{\max} > t_* > 0, \tag{3.65}
$$

für ein t_*, das nur von

$$
F_0(\Sigma), \mathbf{M}, \|\theta\|_\infty \tag{3.66}
$$

abhängt und monoton fallend in $\|\theta\|_\infty$ ist. Auf $[0,t_*]$ gilt für ein $\rho = \rho(F_0(\Sigma)) > 0$

$$
\sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,\cdot)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon_0, \tag{3.67}
$$

wobei es sich bei ε_0 um das aus Bedingung (Vη) *handelt. Ferner ist Bedingung* (VΣ) *auf $[0,t_*]$ erfüllt, und es existiert ein $K = K(F_0(\Sigma), \mathbf{M}) \Subset \mathbf{M}$ mit*

$$
F(\Sigma, \cdot) \subset K. \tag{3.68}
$$

Beweis. Wir orientieren uns am Beweis von [KS02, Satz 1.2]. Sei $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ zunächst beliebig und fest, und $\rho = \rho(F_0(\Sigma), \varepsilon_1) > 0$ maximal gewählt mit

$$
\sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F_0(\Sigma)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon_1.
$$

Seien für alle $x \in \mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$ Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x \in C^2(\mathbf{M})$ fest gewählt mit

$$\begin{aligned} &\chi_{B_{\frac{\rho}{2}}(x)}(\cdot) \leq \tilde{\eta}_x(\cdot) \leq \chi_{B_\rho(x)}(\cdot), \\ &\sup_x |\overline{\nabla}^{(i)^{g^e}} \tilde{\eta}_x|_\infty \leq c\rho^{-i}, \quad i \in \{1,2\}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

und zugehörige Funktionen η_x wie in (3.20) definiert. Nach Lemma 2.11 ergibt sich dann für $\Lambda_i := |\overline{\nabla}^{(i)} \tilde{\eta}_x|_\infty$, $i \in \{1,2\}$, daß

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\leq c\rho^{-1}, \\ \Lambda_2 &\leq c\rho^{-2} + c\rho^{-1} |\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}| \\ &\leq c\rho^{-2} + c\kappa^2 r^{-6} + cm^2 r^{-4} \\ &\leq c\rho^{-2} + r^{-2} \cdot c_0(m,\kappa,\sigma). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &:= \sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t) \cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu, \\ \Phi(t) &:= \sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)} \eta_x^4 |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \,. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Die Funktion $\int_{F(\Sigma,t)} \eta_x^4 |A|^2 \, \mathrm{d}\mu$ ist stetig in (x,t) und hat auf jedem kompakten Zeitintervall in $[0,T_{\max})$ ihren Träger in einer festen, kompakten Menge $\tilde{K} \subset \mathbf{M}$, damit ist Φ als Maximum dieser Funktion über $\tilde{K}$ ebenfalls stetig. Zudem gilt nach Voraussetzung $\Phi(0) \leq \varepsilon(0) \leq \varepsilon_1$ sowie auf $[0,T_{\max})$

$$\Phi(\cdot) \leq \varepsilon(\cdot) \leq N\Phi(\cdot),$$

wobei $N \in \mathbf{N}$ als diejenige absolute Anzahl festgelegt ist, die man mindestens benötigt, um eine beliebige Kugel in $\mathbf{M}$ mit Kugeln von halbem euklidischen Radius zu überdecken. Wir setzen nun

$$\varepsilon_1 := \frac{1}{4N} \varepsilon_0 \tag{3.72}$$

und definieren die Menge $K \Subset \mathbf{M}$ durch

$$K := \{x \in \mathbf{M} : \mathrm{dist}(x, F_0(\Sigma)) \leq r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)))\}.$$

Sei nun $t_0 \in (0,T_{\max})$ der erste Zeitpunkt, an dem mindestens eines der Ereignisse

$$\Phi(t_0) = 4\varepsilon_1, \tag{3.73}$$

$$F(\Sigma,t_0) \not\subset K, \tag{3.74}$$

$$\mathbf{W}(F(\Sigma,t_0)) = 4\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \tag{3.75}$$

eintritt. Falls $T_{\max} < \infty$, so muss t_0 existieren: Wäre dies nicht der Fall, so impliziert die Stetigkeit von Φ sonst $\Phi(\cdot) < 4\varepsilon_1$ auf ganz $[0,T_{\max})$ und es folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon(\cdot) &\leq N\Phi(\cdot) \\ &< 4N\varepsilon_1 \\ &\leq \varepsilon_0, \end{aligned} \tag{3.76}$$

außerdem gilt bei Nichteintreten der Ereignisse (3.74) und (3.75) für alle $t \in [0, T_{\max})$

$$\begin{aligned} F(\Sigma,t) &\subset K \\ &\subset \mathbf{M} \setminus B_{2r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)))} \\ &\subset \mathbf{M} \setminus B_{r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F(\Sigma,t)))}, \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß $\mathbf{W}(F(\Sigma,t)) < 4\mathbf{W}(F_0(\Sigma))$ für diese t und damit nach Definition von r_0 in Lemma B.13

$$r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F(\Sigma,t))) < 2r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma))).$$

Damit wären aber die Voraussetzungen (Vη) und (VΣ) auf $[0, T_{\max})$ für jedes η_x erfüllt. Mit Satz 3.22 ergeben sich dann aber für jedes $k \in \mathbf{N}$ und jedes η_x

$$\sup_{[0,T_{\max})} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,[\eta_x=1]} \leq C,$$

mit Konstanten C, die von den in (3.41) aufgeführten Größen mit $\Pi_k := \sup_K |\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}}|$ abhängen. Bemerkt man nun, daß die C^2-Schranken aller $\tilde{\eta}_x$ sich wegen (3.70) für alle $x \in K$ uniform beschränken lassen, sowie daß wegen Lemma 2.18

$$\sup_{x\in K} \sup_{[0,T_{\max})} |[\eta_x > 0]| \leq c\rho^2 \mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \tag{3.77}$$

ergibt sich sogar

$$\sup_{[0,T_{\max})} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,\Sigma} \leq C,$$

woraus sich mit Lemma 3.24 ein Widerspruch zur Maximalität von $T_{\max}$ ergibt. Wir erhalten $T_{\max} > t_0$, und da sich analog zu Rechnung (3.76) auf $[0,t_0]$ ergibt, daß $\varepsilon(\cdot) < 4N\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, sind die Behauptungen (3.65) und (3.67) gezeigt, sobald sich zeigen lässt, daß t_0 sich von unten durch ein t_* mit den oben aufgeführten Eigenschaften beschränken lässt. Für die folgenden Rechnungen sei festgehalten, daß analog zu obigen Überlegungen wieder sowohl (VΣ) als auch (Vη) für jedes η_x auf $[0,t_0]$ erfüllt sind.

Sei nun angenommen, daß in t_0 Ereignis (3.73) eintritt. Nach Aufintegration des Resultates aus Satz 3.19 ergibt sich für alle $t \in [0,t_0]$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \eta_x^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \Big|_t \leq{}& \int_\Sigma \eta_x^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \Big|_0 + c\int_0^t |\theta|^2 \|A\|^2_{2,[\eta_x>0]} \,\mathrm{d}\xi \\ &+ c\int_0^t (\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2) \|A\|^2_{2,[\eta_x>0]} \,\mathrm{d}\xi \\ &+ c\int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi \\ \leq{}& \varepsilon_1 + 4N\varepsilon_1 \cdot c\|\theta\|^2_\infty \cdot t \\ &+ 4N\varepsilon_1 \cdot c\left(\rho^{-4} + (\inf r_{\min})^{-4} c_0(m,\kappa,\sigma)\right) \cdot t \\ &+ c\int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{3.78}$$

wobei die Schranken an Λ_1, Λ_2 aus (3.70) sowie die aus Definition 2.8 resultierenden Schranken an Π_1 und Π_2 benutzt wurden. Da außerdem aus Nichteintreten von (3.75) auf $[0,t_0)$ mit

Lemma 2.14 für alle η_x folgt, daß

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \eta_x^4 |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu &\le c_0(m,\kappa,\sigma)\int_\Sigma r^{-6}\,\mathrm{d}\mu \\ &\le r_{\min}^{-4} c_0(m,\kappa,\sigma)\mathbf{W}(F_0(\Sigma)),\end{aligned}$$

erhalten wir aus (3.78) damit insbesondere

$$\begin{aligned}\Phi(t_0) \le\ & \varepsilon_1 + 4N\varepsilon_1 \cdot c\|\theta\|_\infty^2 \cdot t_0 \\ & + 4N\varepsilon_1 \cdot c\rho^{-4} \cdot t_0 \\ & + c_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma))) \cdot (r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma))))^{-4} \cdot t_0 \\ =\ & \varepsilon_1 + c(m,\kappa,\sigma,F_0(\Sigma)) \cdot t_0 + c\|\theta\|_\infty^2 \cdot t_0,\end{aligned}$$

was bei Nichterfüllung von

$$t_0 \ge \min\left\{c(m,\kappa,\sigma,F_0(\Sigma))^{-1}, c\|\theta\|_{C^0([0,t_0])}^{-2}\right\} =: C_a$$

einen Widerspruch zur Definition von t_0 darstellt.

Trete nun in t_0 das Ereignis (3.74) ein. Nach Definition von K hat damit mindestens ein Punkt auf Σ mindestens die Strecke $r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)))$ zurückgelegt; da aber nach Definition des Flusses (WF$*$) und den Ergebnissen aus Satz 3.22 auf $\Sigma \times [0,t_0]$

$$\begin{aligned}\|\partial_t F\|_{g^e} &\le c\|\alpha_{\mathbf{W}}\|_{\infty,\Sigma} + c\|\theta\|_\infty \|A\|_{\infty,\Sigma} \\ &\le C\end{aligned}$$

für eine Konstante C, die von den in (3.41) angegebenen Größen mit $k = 4$ und insbesondere monoton steigend von $\|\theta\|_\infty$ abhängt, folgt in diesem Fall

$$t_0 \ge C_b,$$

für ein C_b abhängig von den Argumenten in (3.66) und monoton fallend in $\|\theta\|_\infty$.

Sei abschließend in t_0 das Eintreten von Ereignis (3.75) angenommen. Dies impliziert mit Proposition 2.6

$$\exp\left(\frac{1}{2}\|\theta\|_\infty^2 \cdot t_0\right) \ge 4$$

und damit $t_0 \ge C_c$ für ein C_c monoton fallend in $\|\theta\|_\infty$.

Wir erhalten insgesamt

$$T_{\max} > t_0 \ge \min\{C_a, C_b, C_c\} =: t_*,$$

die Behauptung folgt.

Falls abschließend $T_{\max} = \infty$, ist die Behauptung (3.65) klar erfüllt. Existiert nun ein $t_0 \in [0,\infty)$ wie oben definiert, so ergeben sich vollkommen analog zu obiger Argumentation die Aussagen (3.67) und (3.68) auf $[0,t_*]$. Lässt sich kein derartiges t_0 finden, ergibt sich die Gültigkeit der Aussage sofort auf ganz $[0,\infty)$. $\square$

Kapitel 4

Flächeninhaltserhaltender Willmore-Fluss

4.1 Kurzzeitexistenz

In den folgenden Abschnitten wollen wir das Problem der Kurzzeitexistenz von (WFF) auf zwei verschiedene Weisen behandeln: Abschnitt 4.1.1 befasst sich mit der Nutzbarmachung des bereits aufgestellten Existenzresultates für den Fluss (WF$*$) in Satz 3.2 mit Hilfe eines Fixpunktargumentes, wie es in ähnlicher Form z.B. auch in [McC05, §7] zum Nachweis der Kurzzeitexistenz von Verallgemeinerungen des volumenerhaltenden mittleren Krümmungsflusses angewandt wurde. Als Vorteil dieser Methode kann ihre verhältnismäßig große Transparenz und ihre enge Verknüpfung zu bereits aufgestellten Krümmungs- und Existenzzeitabschätzungen für (WF$*$) angesehen werden – ihr großes Manko ist jedoch, daß die Eindeutigkeit der resultierenden Lösung nicht gewährleistet werden kann.

Den Gegensatz dazu stellt in vielen Hinsichten der in Abschnitt 4.1.2 gewählte Weg dar. Dieser orientiert sich an dem in [ES98, §2] durchgeführten Existenzbeweis für den volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss und bedient sich ungeachtet aller bereits für (WF$*$) aufgestellten Resultate erneut der abstrakten Lösungstheorie in [Ama95], die in diesem Fall ihre volle Mächtigkeit ausspielen kann und insbesondere auch die Eindeutigkeit jeder Lösung zu (WFF) gewährleistet.

4.1.1 Kurzzeitexistenz über Fixpunktmethoden

Die Funktion $\lambda(\cdot)$ wie in (2.9) lässt sich formal für jede beliebige Variation $F(\Sigma,\cdot)$ definieren, insbesondere für jede Lösung des Flusses (WF$*$) zu vorgegebenem θ. Lässt sich also ein θ finden, das auf einem kurzen Zeitraum mit dem zu ihm assoziierten λ übereinstimmt, so ist die Lösung von (WF$*$) *zu diesem* θ auch Lösung von (WFF).

Satz 4.1. *Sei Σ geschlossene 2-Fläche und erfülle $F_0(\Sigma)$ $r_{\min} \geq 3r_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)))$ mit r_0 wie in Satz 3.25. Dann existiert ein $T>0$ und eine Lösung $F:\Sigma\times[0,T)\to\mathbf{M}$ zu* (WFF) *mit* $F(\Sigma,0)=F_0(\Sigma)$.

Beweis. Sei $P>0$ beliebiger, noch festzulegender Parameter, und sei $\theta\in C^{0,1}([0,\infty))$ beliebig mit $\sup_{[0,\infty)}|\theta|\leq P$. Nach den Resultaten in Abschnitt 3.1 gibt es eine Zeit $T_{\max}\leq\infty$ und eine Lösung $F_\theta:\Sigma\times[0,T_{\max})\to\mathbf{M}$ von (WF$*$) bezüglich θ zu den Startwerten F_0. Nach Satz 3.25 gilt

$$T_{\max} > t_*(F_0(\Sigma),\mathbf{M},P)$$

monoton fallend in P; damit lässt sich das Existenzintervall *jeder* zu einem wie oben beschränkten θ gehörigen Lösung uniform nach unten durch t_* beschränken.

Sei nun ρ wie in Satz 3.25, und seien für jedes $x \in \mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$ die Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x$ bzw. η_x wie in (3.69) festgelegt. Nach Resultat (3.67) ist Bedingung ($\mathrm{V}\eta$) für jedes η_x auf $[0,t_*]$ erfüllt, und mit Satz 3.22 ergeben sich die Schranken

$$\sup_{[0,t_*]} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,\Sigma} \leq C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma), k, t_*, P), \tag{4.1}$$

wobei zur Kontrolle der in (3.41) aufgeführten Größen sowohl benutzt wurde, daß für alle $\tilde{\eta}_x$ analog zu (3.70) uniforme C^2-Schranken gefunden werden können, sowie daß nach Lemma 2.18 und Proposition 2.6 für alle x

$$\begin{aligned}\sup_{[0,t_*]} |[\eta_x > 0]| &\leq C(\rho, t_*, P, \mathbf{W}(F_0(\Sigma))) \\ &= C(F_0(\Sigma), P, t_*).\end{aligned}$$

Ebenfalls mit Proposition 2.6 und mit Lemma 2.17 ergibt sich auf $[0,t_*]$

$$\begin{aligned}|F_\theta(\Sigma,\cdot)| &\leq \mathrm{diam}(F_\theta(\Sigma,\cdot))^2 \cdot C(t_*, P, \mathbf{W}(F_0(\Sigma))) \\ &\leq C(t_*, P, F_0(\Sigma), \mathbf{M}),\end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei der Durchmesser der Fläche durch den der Menge K aus Satz 3.25 abgeschätzt wurde.

Sei nun $\lambda_\theta : [0,t_*] \to \mathbf{R}$ analog zu (2.9) definiert durch

$$\lambda_\theta(\cdot) := \frac{1}{2\mathbf{W}(F_\theta(\Sigma,\cdot))} \int_\Sigma |\nabla H|^2 - H^2 \left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right) \,\mathrm{d}\mu,$$

wobei alle geometrischen Größen als die durch F_θ induzierten zu verstehen sind. Es gilt unabhängig von θ

$$\lambda_\theta(0) = \lambda(F_0(\Sigma)),$$

außerdem liegt λ_θ in $C^{1,1}([0,t_*])$: Zunächst gilt unter (WF$*$) nach den Resultaten aus Lemma 2.3 und [LMS11, §2] mit $\alpha = -\alpha_{\mathbf{W}} + \theta H$

$$\begin{aligned}\partial_t |\nabla H|^2 = 2\alpha_{\mathbf{W}} A(\nabla H, \nabla H) &- 2\gamma(\nabla H, \nabla L\alpha_{\mathbf{W}}) \\ &+ \theta\big(-2HA(\nabla H,\nabla H) + 2\gamma(\nabla H, \nabla LH)\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right) = -\alpha_{\mathbf{W}} \overline{\nabla}_\nu \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) &+ 2\overline{\mathrm{Rc}}(\nabla\alpha_{\mathbf{W}}, \nu) \\ &+ \theta\left(H\overline{\nabla}_\nu \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) - 2\overline{\mathrm{Rc}}(\nabla H,\nu)\right),\end{aligned}$$

analog lässt sich auch die Zeitableitung jeder übrigen geometrischen Größe als Summe zweier rein geometrischer Ausdrücke schreiben, von denen genau einer den Vorfaktor θ trägt. Es ergibt sich

$$\partial_t \lambda_\theta(t) = Q(t) + \theta R(t) \tag{4.3}$$

für Integralgrößen Q und R, die nur von $\mathbf{M}$ und $F(\Sigma,t)$ abhängen und die aufgrund von (4.1) und (4.2) den Schranken

$$\sup_{[0,t_*]} |Q|,\ \sup_{[0,t_*]} |R| \leq C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma), P, t_*)$$

genügen. Nach obiger Argumentation lassen sich zudem die Zeitableitungen der Ausdrücke Q und R selbst in einer zu (4.3) analogen Form ausdrücken und insbesondere auf $[0,t_*]$ uniform beschränken. Nach dem Mittelwertsatz ergibt sich damit für beliebige $r,s \in [0,t_*]$

$$\begin{aligned}
|\partial_t \lambda_\theta(r) - \partial_t \lambda_\theta(s)| &= |Q(r) - Q(s) + \theta R(r) - \theta R(s)| \\
&\leq |Q(r) - Q(s)| + |\theta(r) - \theta(s)||R(r)| + |\theta(s)||R(r) - R(s)| \\
&\leq \left(\|\partial_t Q\|_{C^0([0,t_*])} + [\theta]_{1,[0,t_*]}|R(r)| + |\theta(s)|\|\partial_t R\|_{C^0([0,t_*])}\right) \cdot |r-s| \\
&\leq C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma), P, [\theta]_{1,[0,t_*]}, t_*) \cdot |r-s|,
\end{aligned}$$

wobei $[\,\cdot\,]_1$ die Hölderhalbnorm zum Exponenten 1 bezeichnet. Insgesamt erhalten wir wie behauptet $\lambda_\theta \in C^{1,1}([0,t_*])$ mit

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t \lambda_\theta\|_{C^0([0,t_*])} \leq C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma), P, t_*), \\
&[\partial_t \lambda_\theta]_{1,[0,t_*]} \leq C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma), P, [\theta]_{1,[0,t_*]}, t_*).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Wir sind nun in der Lage, die $C^{0,1}$-Norm von λ_θ auf einem hinreichend kurzen Zeitintervall durch eine Schranke zu kontrollieren, in die (im Gegensatz zur $C^{1,1}$-Schranke) die Funktion θ nur mit ihrem Wert zum Zeitpunkt 0 eingeht. Genauer gilt für alle $t \in [0,t_*]$ wegen (4.3)

$$\begin{aligned}
\|\lambda_\theta\|_{C^{0,1}([0,t])} &= \|\lambda_\theta\|_{C^0([0,t])} + [\lambda_\theta]_{1,[0,t]} \\
&\leq |\lambda(F_0(\Sigma))| + C \cdot t + \|\partial_t \lambda_\theta\|_{C^0([0,t])} \\
&\leq |\lambda(F_0(\Sigma))| + C \cdot t + |\partial_t \lambda_\theta(0)| + [\partial_t \lambda_\theta]_{1,[0,t_*]} \cdot t \\
&\leq |\lambda(F_0(\Sigma))| + |Q(0)| + |\theta(0)||R(0)| + C \cdot t,
\end{aligned}$$

und es lässt sich ein $t' \leq t_*$ finden mit

$$\begin{aligned}
\|\lambda_\theta\|_{C^{0,1}([0,t'])} &\leq |\lambda(F_0(\Sigma))| + |Q(0)| + |\theta(0)||R(0)| + 1 \\
&=: \hat{C}(F_0(\Sigma), \mathbf{M}, |\theta(0)|).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Wir fordern abschließend

$$\theta(0) = \lambda(F_0(\Sigma))$$

und setzen

$$P := \hat{C},$$

wobei $\hat{C}$ wie in (4.5) gewählt ist und nun nur noch von $F_0(\Sigma)$ und $\mathbf{M}$ abhängt.

Sei nun die Menge $\mathscr{A} \subset C^{0,1}([0,t'])$ definiert als

$$\mathscr{A} := \left\{\theta \in C^{0,1}([0,t']) \,:\, \theta(0) = \lambda(F_0(\Sigma)),\, \|\theta\|_{C^{0,1}([0,t'])} \leq \hat{C}\right\}$$

und der Operator Φ auf $\mathscr{A}$ definiert als

$$\Phi : \theta \mapsto \lambda_\theta.$$

Wegen Schranke (4.5) gilt $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, und da wegen (4.4) außerdem

$$\sup_{\theta \in \mathscr{A}} \|\Phi(\theta)\|_{C^{1,1}([0,t'])} \leq C$$

für ein $C < \infty$, ist $\Phi(\mathscr{A})$ sogar *relativ kompakt* in $\mathscr{A}$ enthalten, d.h. jede Folge in $\Phi(\mathscr{A})$ hat eine in $\mathscr{A}$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{0,1}([0,t'])}$ konvergente Teilfolge.

Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz (vgl. [Zei99, §1.15, Satz 1.C]) besitzt Φ damit (mindestens) einen Fixpunkt $\theta_0 \in \mathscr{A}$; dies bedeutet aber

$$\theta_0 = \Phi(\theta_0) = \lambda_{\theta_0},$$

damit ist die zu θ_0 gehörige Variation F_{θ_0} Lösung von (WFF) auf $[0,t']$. $\square$

4.1.2 Kurzzeitexistenz aus abstrakter Lösungstheorie

Bedient man sich nun wie angekündigt nicht nur der *Ergebnisse*, sondern auch der *Methoden* aus Abschnitt 3.1, so lässt sich ein Kurzzeitexistenzresultat für (WFF) auch ohne den Umweg über ein Fixpunktargument herleiten, und damit auch die Eindeutigkeit der resultierenden Lösung wahren. Hierfür übernehmen wir die Notationen und Konventionen aus Abschnitt 3.1 und betrachten das zu (WFF) duale Funktionsgraphenproblem

$$\begin{aligned} &\partial_t f = \tilde{Q}(f), \\ &f(\cdot,0) \equiv 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

mit

$$\tilde{Q}(f) := \left(-\alpha \mathbf{w}_f + H_f \lambda\right) L_f,$$

wobei die Funktion $L_f : \Sigma \to \mathbf{R}$ durch Vorschrift (3.4) festgelegt und jede weitere Größe $\cdot_f$ wie in Abschnitt 3.1 durch die dort definierte Parametrisierung G_f induziert ist, und sich der Term $\lambda = \lambda(f)$ über diese Größen wie in (2.9) definiert.

Die Möglichkeit, ein Problem dieser Form auch abstrakt als gewöhnliche Differentialgleichung in einem geeigneten Funktionenraum aufzufassen, liefert uns ein mächtiges Werkzeug im Umgang mit nichtlokalen Termen wie λ. Alle auftretenden Differentialoperatoren agieren nun als Abbildungen zwischen Funktionenräumen, und die Hinzunahme nichtlokaler Terme stellt nichts weiter als das Stören dieser Abbildungen dar. Unter geeigneten Voraussetzungen bleibt unter derartigen Störungen die „Klasse“ der Operatoren unverändert. Insgesamt führt diese Herangehensweise auf folgende Variante von Lemma 3.1.

Lemma 4.2. *Für $\tilde{Q}$ wie oben und $0 < \alpha < \beta_0 < 1$ existieren $\tilde{P} \in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, \mathscr{H}(h^{4,\alpha}, h^{0,\alpha})\right)$ und $\tilde{B} \in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, h^{0,\beta_0}\right)$ mit*

$$\tilde{Q}(f) = -\tilde{P}(f)f + \tilde{B}(f)$$

für jedes $f \in \mathfrak{A}^{4,\alpha}$.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 3.1 ergibt sich zunächst direkt die Existenz von $P \in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, \mathscr{H}(h^{4,\alpha}, h^{0,\alpha})\right)$ und $B \in C^\infty\left(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, h^{0,\beta_0}\right)$ mit

$$\begin{aligned} -\alpha \mathbf{w}_f L_f &= \left(\triangle_f H_f + H_f \left(|\mathring{A}_f|^2 + G_f^* \overline{\mathrm{Rc}}(\nu_{G_f(\Sigma)}, \nu_{G_f(\Sigma)})\right)\right) L_f \\ &= -P(f)f + B(f), \end{aligned} \tag{4.7}$$

und es ist zu zeigen, daß die Hinzunahme des Terms $H_f \lambda L_f$ keine grundlegende Änderung dieser Aussage nach sich zieht. Nach Definition von λ gilt wegen (4.7) direkt

$$\begin{aligned} H_f \lambda L_f &= \frac{H_f L_f}{\int_\Sigma H_f^2 \, \mathrm{d}\mu_f} \int_\Sigma \alpha \mathbf{w}_f H_f \, \mathrm{d}\mu_f \\ &= \frac{H_f L_f}{\int_\Sigma H_f^2 \, \mathrm{d}\mu_f} \int_\Sigma H_f L_f^{-1} P(f) f \, \mathrm{d}\mu_f + \frac{H_f L_f}{\int_\Sigma H_f^2 \, \mathrm{d}\mu_f} \int_\Sigma -H_f L_f^{-1} B(f) \, \mathrm{d}\mu_f \\ &=: \hat{P}(f) f + \hat{B}(f), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß wegen [EMS98, (2.3)] uniform $L_f \geq 1$. Ebenfalls nach [EMS98, (2.3)] sowie nach [ES98, (2.3)] gilt, daß

$$\begin{aligned} &f \mapsto L_f \in C^\infty(\mathfrak{A}^{1,\beta_0}, h^{0,\beta_0}), \\ &f \mapsto H_f \in C^\infty(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, h^{0,\beta_0}), \end{aligned}$$

außerdem hängt auch das (über lokale Koordinaten s^1, s^2 definierte) Flächenelement $\mathrm{d}\mu_f = \det(\gamma_{f\,ij})^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s^1 \wedge \mathrm{d}s^2$ in glatter Weise von $f \in \mathfrak{A}^{1,\beta_0}$ ab; es ergibt sich insgesamt

$$\hat{B} \in C^\infty(\mathfrak{A}^{2,\beta_0}, h^{0,\beta_0}),$$

und wir können

$$\tilde{B} := B + \hat{B}$$

setzen.

Sei nun $f \in \mathfrak{A}^{2,\beta_0}$ fest. Aufgrund der Linearität von $P(f)$ ist auch $\hat{P}(f)$ lineare Abbildung auf $h^{4,\alpha}$ mit Bild in $h^{0,\beta_0} \subset h^{0,\alpha}$; darüberhinaus gilt für beliebige $\rho \in h^{4,\alpha}$ und jedes $\alpha' \leq \alpha$ mit $C = C(f)$

$$\begin{aligned} \|\hat{P}(f)\rho\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma)} &\leq c \|H_f L_f\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma)} \int_\Sigma |H_f L_f^{-1} P(f)\rho| \, \mathrm{d}\mu_f \\ &\leq C \int_\Sigma |H_f| \, \mathrm{d}\mu_f \cdot \|P(f)\rho\|_{C^{0,\alpha'}(\Sigma)} \\ &\leq C \|\rho\|_{C^{4,\alpha'}(\Sigma)}, \end{aligned}$$

woraus sich (mit $\alpha' = \alpha$) sofort die Stetigkeit von $\hat{P}(f)$ und damit

$$\hat{P}(f) \in \mathscr{L}(h^{4,\alpha}, h^{0,\alpha}) \tag{4.8}$$

ergibt. Für $\alpha' < \alpha$ und jedes feste $\varepsilon > 0$ liefert obige Rechnung zusammen mit der Interpolationsungleichung [GT83, Lemma 6.35] sogar

$$\begin{aligned} \|\hat{P}(f)\rho\|_{C^{0,\alpha}(\Sigma)} &\leq C \|\rho\|_{C^{4,\alpha'}(\Sigma)} \\ &\leq C(\varepsilon, \alpha', \alpha) \|\rho\|_{C^0(\Sigma)} + \varepsilon \|\rho\|_{C^{4,\alpha}(\Sigma)}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

wobei C auch von f und der (fest gewählten) Kartenüberdeckung von Σ abhängt. Mit (4.8) und (4.9) sind aber gerade die Voraussetzungen zur Anwendung der Störungsaussage [Ama95, Satz 1.3.1] erfüllt und es ergibt sich direkt

$$\tilde{P}(f) := P(f) + \hat{P}(f) \in \mathscr{H}(h^{4,\alpha}, h^{0,\alpha}).$$

Die Glattheit der Abbildung $f \mapsto \tilde{P}(f)$ folgt analog zur Argumentation für $\tilde{B}$. $\square$

Benutzung von Lemma 4.2 anstelle von Lemma 3.1 im Beweis zu Satz 3.2 liefert uns direkt folgende Variante dieses Satzes für (WFF).

Satz 4.3. *Sei $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ glatte Immersion einer geschlossenen 2-Fläche Σ. Dann existiert ein $T > 0$, eine eindeutige Lösung $f : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{R}$ zu (4.6) und eine eindeutige Lösung $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}$ von (WFF) zu Startwerten $F_0(\Sigma)$. Für jedes $\beta \in (0,1)$ gilt*

$$[t \mapsto f(\cdot,t)] \in C([0,T), \mathfrak{A}^{2,\beta}).$$

□

4.2 L^2-Schranken an λ

Will man die in Abschnitt 3.3.1 aufgestellten Krümmungsabschätzungen auf den Fluss (WFF) übertragen, so ergibt sich die Notwendigkeit, den Term $\|\lambda\|_2^2$ auf dem betrachteten Zeitintervall kontrollieren zu können. Diese Kontrolle wird, eine hinreichende Zentrierung der Flächen $F(\Sigma,\cdot)$ in $\mathbf{M}$ vorausgesetzt, durch ein Argument gewährleistet, das im Wesentlichen das unterschiedliche Skalierungsverhalten von Flächeninhalt und Willmorefunktional für Flächen im $\mathbf{R}^3$ ausnutzt und in ähnlicher Form im Beweis zu [DKS02, Satz 3.2] eingesetzt wird, um Resultate über den Krümmungsdiffusionsfluss von Kurven im $\mathbf{R}^n$ aufzustellen.

Für die folgenden Rechnungen betrachten wir $(\mathbf{M},g)$ in festen, globalen euklidischen Koordinaten. Wir bezeichnen die induzierten euklidischen Basisvektorfelder von $T\mathbf{M}$ mit $\{\tau_\alpha\}_{1\le\alpha\le 3}$ und definieren das „Positionsvektorfeld“ $X : \mathbf{M} \to T\mathbf{M}$ für jedes $q = (q^1,q^2,q^3) \in \mathbf{M}$ durch

$$X(q) := q^\alpha \tau_\alpha(q) \in T_q\mathbf{M}.$$

Abschließend wählen wir eine beliebige, feste Immersion $F : \Sigma \to \mathbf{M}$ mit Einheitsnormalenvektorfeld ν und setzen für alle $p \in \Sigma$

$$f(p) := g(X(q),\nu(q))|_{q=F(p)},$$

damit entspricht f gerade dem Normalenanteil des Geschwindigkeitsvektors, der durch die (in euklidischen Koordinaten definierte) Variation $s \mapsto s \cdot F(\Sigma)$ an $F(\Sigma)$ induziert wird.

Aufgrund des Skalierungsverhaltens von Flächen- und Willmorefunktional bezüglich der euklidischen Metrik g^e ergeben sich nun, unter Benutzung von Lemma 2.3 und mit $\alpha_{\mathbf{W}}$ wie in Abschnitt 2.2 definiert, direkt die Identitäten

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_s(s^{-2}|s \cdot F(\Sigma)|_{g^e})|_{s=1} \\ &= -2|F(\Sigma)|_{g^e} + \int_{F(\Sigma)} fH \,\mathrm{d}\mu^e \end{aligned} \tag{4.10}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_s(\mathbf{W}(s \cdot F(\Sigma))_{g^e})|_{s=1} \\ &= \int_{F(\Sigma)} f\alpha_{\mathbf{W}} \,\mathrm{d}\mu^e, \end{aligned} \tag{4.11}$$

die den wichtigsten Schlüssel zum Nachweis von $\|\lambda\|_2^2$-Schranken unter (WFF) im $\mathbf{R}^3$ darstellen, der hier aber zunächst nicht weiter ausgeführt und erst am Ende dieses Abschnittes mit Proposition 4.8 wieder aufgegriffen wird. Stattdessen werden wir uns in den nächsten

Lemmata mit Analoga von (4.10) und (4.11) bezüglich der asymptotisch schwarzschildschen Metrik g befassen; diese müssen über direkte Rechnungen nachgewiesen werden, da uns ein Skalierungsargument wie oben in diesem Fall nicht mehr zur Verfügung steht.

In den folgenden Rechnungen wählen wir beliebige lokale Koordinaten auf Σ und bezeichnen die zugehörigen Tangentialvektoren mit $\{e_i\}_{1\le i\le 2}$. Griechische Indizes verstehen sich bezüglich der Vektoren $\{\tau_\alpha\}$, lateinische Indizes bezüglich $\{e_i\}$.

Lemma 4.4. *Sei* $\mathbf{M}$ (m,κ,σ)*-asymptotisch schwarzschildsch,* $F:\Sigma\to\mathbf{M}$ *und* f *wie oben definiert. Dann gilt für* $r_{\min} > r_0(m,\kappa,\sigma)$

$$|F(\Sigma)| \le \int_{F(\Sigma)} fH \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Zunächst gilt für X wie oben, $q = F(p)\in\mathbf{M}$ und jedes $e_i \in T_p\Sigma$

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{F_*e_i} X\right)(q) &= (F_*e_i)\,(X^\alpha)|_q\cdot\tau_\alpha(q) + \left(X^\alpha\,\overline{\nabla}_{F_*e_i}\,\tau_\alpha\right)(q)\\ &= \partial_i(X^\alpha\circ F)|_p\cdot\tau_\alpha(q) + \left(X^\alpha\cdot(F_*e_i)^\beta\cdot\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha\right)(q)\\ &= \partial_i F^\alpha|_p\cdot\tau_\alpha(q) + \left(X^\alpha\cdot(F_*e_i)^\beta\cdot\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha\right)(q)\\ &= (F_*e_i)\,(q) + \left(X^\alpha\cdot(F_*e_i)^\beta\cdot\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha\right)(q).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Für die folgenden Rechnungen übernehmen wir die Konventionen und Definitionen aus Abschnitt 2.1.1 und werden insbesondere zwecks besserer Lesbarkeit nicht mehr explizit zwischen Vektoren $V\in T_p\Sigma$ und $F_*V\in T_q\mathbf{M}$ unterscheiden.

Für die Projektion

$$\begin{aligned}X^\top &:= X - g(X,\nu)\nu\\ &= X - f\nu\end{aligned}$$

erhalten wir dann mit (4.12) punktweise auf Σ

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^\Sigma(X^\top) &= \gamma^{ij}\gamma\left(\nabla_i(X^\top),e_j\right)\\ &= \gamma^{ij}g\left(\overline{\nabla}_i(X-f\nu),e_j\right)\\ &= \gamma^{ij}g\left(\overline{\nabla}_iX - f\overline{\nabla}_i\,\nu,e_j\right)\\ &= \gamma^{ij}(\gamma_{ij}-fA_{ij}) + \gamma^{ij}g\left(X^\alpha(e_i)^\beta\left(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha\right),e_j\right)\\ &= 2 - fH + X^\alpha\gamma^{ij}(e_i)^\beta(e_j)^\theta g_{\psi\theta}\,\overline{\Gamma}^\psi_{\beta\alpha}\,.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Nun gilt es, den letzten Term in (4.13) auf geeignete Weise abzuschätzen. Dieser entspricht gerade dem Tensorskalarprodukt

$$\langle\gamma^{ij}\cdot X\otimes e_i\otimes e_j, Z\rangle_g,$$

wobei beide Argumente als $(3,0)$-Tensoren auf $\mathbf{M}$ aufzufassen sind und sich der Tensor Z über die Koeffizienten

$$Z^{\alpha\beta\theta} := g^{\phi\alpha}g^{\psi\beta}\,\overline{\Gamma}^\theta_{\psi\phi}$$

definiert.

Nach den Resultaten aus Abschnitt 2.3 gilt damit für $r_{\min} > r(m,\kappa,\sigma)$ insbesondere

$$\begin{aligned}|Z|_g &= |\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^{g^e}|_g\\ &\leq c\cdot(\kappa r^{-3} + mr^{-2})\end{aligned}$$

sowie nach Definition von X für jedes $q \in F(\Sigma)$

$$\begin{aligned}|X(q)|_g &\leq c|X(q)|_{g^e}\\ &= c\big(\sum_\alpha (q^\alpha)^2\big)^{\frac{1}{2}}\\ &= cr(q).\end{aligned}$$

Da außerdem

$$\begin{aligned}|\gamma^{ij}\cdot e_i\otimes e_j|_g^2 &= \gamma^{ij}\gamma^{kl}\langle e_i\otimes e_j, e_k\otimes e_l\rangle_g\\ &= \gamma^{ij}\gamma^{kl}g_{\alpha\theta}g_{\beta\psi}(e_i)^\alpha(e_j)^\beta(e_k)^\theta(e_l)^\psi\\ &= \gamma^{ij}\gamma^{kl}g(e_i,e_k)g(e_j,e_l)\\ &= 2,\end{aligned}$$

erhalten wir nach Cauchy-Schwarz insgesamt

$$\begin{aligned}|X^\alpha\gamma^{ij}(e_i)^\beta(e_j)^\theta g_{\psi\theta}\overline{\Gamma}^\psi_{\beta\alpha}| &\leq |X|_g|\gamma^{ij}\cdot e_i\otimes e_j|_g|Z|_g\\ &\leq c\cdot(\kappa r^{-2} + mr^{-1}).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Einsetzen hiervon in (4.13) liefert

$$|\operatorname{div}^\Sigma(X^\top) - (2 - fH)| \leq c\cdot(\kappa r^{-2} + mr^{-1})\tag{4.15}$$

und damit für hinreichend große r insbesondere

$$\operatorname{div}^\Sigma(X^\top) \geq 1 - fH.$$

Das Ergebnis folgt nun nach Integration über Σ mit dem Gauß'schen Divergenzsatz. □

Lemma 4.5. *Seien* $\mathbf{M}, F, f$ *wie in Lemma 4.4. Dann gilt für* $r_{\min} > r_0(m,\kappa,\sigma)$

$$|\int_\Sigma f\alpha_{\mathbf{W}}\,\mathrm{d}\mu| \leq c(\kappa r_{\min}^{-2} + mr_{\min}^{-1})(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + \operatorname{genus}(\Sigma)).$$

Beweis. Wir folgen den Konventionen aus dem Beweis zu Lemma 4.4.

Nach Definition von $\alpha_{\mathbf{W}}$ gilt

$$\begin{aligned}|\int_\Sigma f\alpha_{\mathbf{W}}\,\mathrm{d}\mu| &= |-\int_\Sigma f\left(\triangle H + H\left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right)\right)\mathrm{d}\mu|\\ &= |\int_\Sigma H\triangle f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma Hf\left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right)\mathrm{d}\mu|,\end{aligned}\tag{4.16}$$

und das Problem überträgt sich zunächst auf die Bestimmung von $\triangle f$: Aus Rechnung (4.12) ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla_i f &= \partial_i(g(X,\nu))\\ &= g(\overline{\nabla}_i X,\nu) + g(X,\overline{\nabla}_i\nu)\\ &= g(e_i + X^\alpha\overline{\nabla}_i\tau_\alpha,\nu) + A_i^k g(X,e_k)\\ &= g(X^\alpha\overline{\nabla}_i\tau_\alpha,\nu) + A_i^k g(X^\top,e_k)\\ &=: P_i + Q_i,\end{aligned}$$

und da

$$\begin{aligned}
\nabla_j P_i &= g(\partial_j(X^\alpha)\,\overline{\nabla}_i\,\tau_\alpha,\nu) + g(X^\alpha\,\overline{\nabla}_j(\overline{\nabla}_i\,\tau_\alpha),\nu)\\
&\quad + g(X^\alpha\,\overline{\nabla}_i\,\tau_\alpha,\overline{\nabla}_j\,\nu) - g(X^\alpha\,\overline{\nabla}_{\nabla_j e_i}\,\tau_\alpha,\nu)\\
&= g((e_j)^\alpha\,\overline{\nabla}_i\,\tau_\alpha,\nu) + g\big(X^\alpha\big(\overline{\nabla}_j(\overline{\nabla}_i\,\tau_\alpha) - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_j e_i}\,\tau_\alpha\big),\nu\big)\\
&\quad + A^k_j g(X^\alpha\,\overline{\nabla}_i\,\tau_\alpha,e_k) - A_{ji} g(X^\alpha\,\overline{\nabla}_\nu\,\tau_\alpha,\nu)\\
&= (e_j)^\alpha(e_i)^\beta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,\nu) + X^\alpha(e_j)^\beta(e_i)^\theta g\big(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\overline{\nabla}_{\tau_\theta}\,\tau_\alpha,\nu\big)\\
&\quad + A^k_j X^\alpha(e_i)^\beta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,e_k) - A_{ji}X^\alpha g(\overline{\nabla}_\nu\,\tau_\alpha,\nu)
\end{aligned}$$

sowie nach (4.12)

$$\begin{aligned}
\nabla_j Q_i &= (\nabla_j A)(X^\top,e_i) + A(\nabla_j(X^\top),e_i)\\
&= (\nabla_j A)^k_i g(X^\top,e_k) + A^k_i g(\overline{\nabla}_j(X^\top),e_k)\\
&= (\nabla_j A)^k_i g(X^\top,e_k) + A^k_i g(\overline{\nabla}_j X - f\,\overline{\nabla}_j\,\nu,e_k)\\
&= (\nabla_j A)^k_i g(X^\top,e_k) + A_{ij} + A^k_i X^\alpha(e_j)^\beta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,e_k) - fA^k_i A_{jk},
\end{aligned}$$

erhalten wir insgesamt den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\triangle f &= \gamma^{ij}\,\nabla_j\nabla_i f\\
&= \gamma^{ij}\,(\nabla_j P_i + \nabla_j Q_i)\\
&= \Big[\gamma^{ij}(e_j)^\alpha(e_i)^\beta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,\nu) + X^\alpha\gamma^{ij}(e_j)^\beta(e_i)^\theta g\big(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\overline{\nabla}_{\tau_\theta}\,\tau_\alpha,\nu\big)\\
&\qquad + 2A^{kl}X^\alpha(e_k)^\beta(e_l)^\theta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,\tau_\theta) - HX^\alpha g(\overline{\nabla}_\nu\,\tau_\alpha,\nu)\Big]\\
&\qquad + \Big[(\operatorname{div}A)^k g(X^\top,e_k) + H - f|A|^2\Big]\\
&=: R + S.
\end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage, den Ausdruck $\int H\triangle f\,\mathrm{d}\mu = \int HR\,\mathrm{d}\mu + \int HS\,\mathrm{d}\mu$ termweise zu untersuchen. Zunächst lassen sich die Terme in R direkt abschätzen: Den Überlegungen folgend, die zu Abschätzung (4.14) geführt haben, erhalten wir direkt

$$\begin{aligned}
&|\gamma^{ij}(e_j)^\alpha(e_i)^\beta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,\nu)| \le c(\kappa r^{-3} + mr^{-2}),\\
&|A^{kl}X^\alpha(e_k)^\beta(e_l)^\theta g(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\tau_\alpha,\tau_\theta)| \le c|A|_\gamma(\kappa r^{-2} + mr^{-1}),\\
&|HX^\alpha g(\overline{\nabla}_\nu\,\tau_\alpha,\nu)| \le c|H|(\kappa r^{-2} + mr^{-1}),
\end{aligned}$$

und, da nach den Annahmen an g gilt, daß $|\overline{\nabla}^2 - \overline{\nabla}^{S^2}| \le c\kappa r^{-4}$,

$$|X^\alpha\gamma^{ij}(e_j)^\beta(e_i)^\theta g\big(\overline{\nabla}_{\tau_\beta}\,\overline{\nabla}_{\tau_\theta}\,\tau_\alpha,\nu\big)| \le c(\kappa r^{-3} + mr^{-2}).$$

Damit ergibt sich nach Lemma 2.14 und Korollar 2.16 für $r_{\min} > r(m,\kappa,\sigma)$

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Sigma HR\,\mathrm{d}\mu\Big| &\le c\int_\Sigma |H|(\kappa r^{-3} + mr^{-2})\,\mathrm{d}\mu + c\int_\Sigma |A|^2(\kappa r^{-2} + mr^{-1})\,\mathrm{d}\mu\\
&\le c(\kappa r_{\min}^{-2} + mr_{\min}^{-1})(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + \operatorname{genus}(\Sigma)).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Für die Betrachtung von $\int HS\,\mathrm{d}\mu$ beachten wir zunächst, daß nach (2.4)

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma H(\operatorname{div} A)^k g(X^\top, e_k)\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad= \int_\Sigma H(\nabla^k H + \gamma^{ik}\overline{\mathrm{Rc}}_{i\nu})\gamma_{kl}(X^\top)^l\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad= \int_\Sigma \frac{1}{2}\gamma(X^\top, \nabla(H^2)) + H\,\overline{\mathrm{Rc}}(X^\top,\nu)\,\mathrm{d}\mu \\
&\quad= \int_\Sigma -\frac{1}{2}H^2 \operatorname{div}^\Sigma(X^\top) - Hf\,\overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) + H\,\overline{\mathrm{Rc}}(X,\nu)\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

womit sich direkt die Identität

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma HS\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Sigma H^2 - \frac{1}{2}H^2\operatorname{div}^\Sigma(X^\top) - Hf|A|^2 - Hf\,\overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu) + H\,\overline{\mathrm{Rc}}(X,\nu)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Sigma \frac{1}{2}H^2\left(2 - fH - \operatorname{div}^\Sigma(X^\top)\right) + H\,\overline{\mathrm{Rc}}(X,\nu)\,\mathrm{d}\mu \\
&\qquad - \int_\Sigma Hf\left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right)\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

ergibt. Mit Abschätzung (4.15) folgt dann aber insbesondere

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Sigma HS\,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma Hf\left(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)\right)\mathrm{d}\mu\right| \\
&\quad\le c\int_\Sigma H^2\cdot(\kappa r^{-2} + mr^{-1})\,\mathrm{d}\mu + \left|\int_\Sigma H\,\overline{\mathrm{Rc}}(X,\nu)\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\quad\le c(\kappa r_{\min}^{-2} + mr_{\min}^{-1})\mathbf{W}(F(\Sigma)),
\end{aligned}\tag{4.18}$$

wobei im letzten Schritt die Abschätzung $|H\,\overline{\mathrm{Rc}}(X,\nu)| \le c|H|(\kappa r^{-3} + mr^{-2})$ und Lemma 2.14 benutzt wurden. Die Behauptung folgt nach Benutzung der Dreiecksungleichung durch Einsetzen von (4.17) und (4.18) in (4.16). □

Mit Hilfe der Lemmata und 4.4 und 4.5 können wir die nun folgende allgemeine Aussage für Flächen in $\mathbf{M}$ aufstellen, die der Forderung

$$r_{\max} \le \operatorname{diam}(F(\Sigma)) \tag{4.19}$$

gerecht werden. Dies umfasst insbesondere alle eingebetteten $F(\Sigma)$, die eine beliebige, um den Nullpunkt zentrierte Kugel $B_r(0) \subset \mathbf{M}$ umschließen; präzisiert wird diese Beobachtung in Lemma 4.10.

Lemma 4.6. *Sei $\mathbf{M}$ (m,κ,σ)-asymptotisch schwarzschildsch, und $F : \Sigma \to \mathbf{M}$ Immersion mit $r_{\min} > r_0(m,\kappa,\sigma)$, $r_{\max} \le \operatorname{diam}(F(\Sigma))$. Dann gilt für jedes $K \in \mathbf{R}$*

$$K^2 \le c\mathbf{W}(F(\Sigma))\cdot\int_\Sigma(-\alpha_{\mathbf{W}} + KH)^2\,\mathrm{d}\mu + c_0(m,\kappa,\sigma)\left(\frac{\mathbf{W}(F(\Sigma)) + \operatorname{genus}(\Sigma)}{|F(\Sigma)|}\right)^2.$$

Beweis. Wir setzen $G := \operatorname{genus}(\Sigma)$. Sei zunächst $K \ge 0$. Mit Lemma 4.4 und der Schranke an

$\int f\alpha_{\mathbf{W}}$ aus Lemma 4.5 ergibt sich für die dort behandelte Funktion f

$$\begin{aligned} K|F(\Sigma)| &\le K\int_\Sigma fH \,\mathrm{d}\mu \\ &\le K\int_\Sigma fH\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma f\alpha_{\mathbf{W}}\,\mathrm{d}\mu + c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + G) \\ &= \int_\Sigma f(-\alpha_{\mathbf{W}} + KH)\,\mathrm{d}\mu + c_0(m,\kappa,\sigma)(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + G) \\ &\le \left(\int_\Sigma f^2\,\mathrm{d}\mu \cdot \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + KH)^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} + c_0(m,\kappa,\sigma)(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + G), \end{aligned} \tag{4.20}$$

analog ergibt sich für negative K mit der Schranke an $-\int f\alpha_{\mathbf{W}}$

$$\begin{aligned} &K|F(\Sigma)| \\ &\quad\ge K\int_\Sigma fH\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma f\alpha_{\mathbf{W}}\,\mathrm{d}\mu - c(\kappa r_{\min}^{-2} + m r_{\min}^{-1})(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + G) \\ &\quad\ge -\left(\int_\Sigma f^2\,\mathrm{d}\mu \cdot \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + KH)^2\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} - c_0(m,\kappa,\sigma)(\mathbf{W}(F(\Sigma)) + G). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nun gilt nach Annahme an $r_{\max}$

$$\begin{aligned} \sup_\Sigma |f| &\le c\sup_\Sigma |r| \\ &\le c\,\mathrm{diam}(F(\Sigma)), \end{aligned}$$

damit resultiert Quadrieren sowohl von (4.20) als auch von (4.21) direkt in

$$K^2 \le c\frac{\mathrm{diam}(F(\Sigma))^2}{|F(\Sigma)|}\cdot \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + KH)^2\,\mathrm{d}\mu + c_0(m,\kappa,\sigma)\left(\frac{\mathbf{W}(F(\Sigma)) + G}{|F(\Sigma)|}\right)^2.$$

Die Behauptung folgt nun mit Lemma 2.17. □

Lemma 4.6 ermöglicht uns nun den Beweis der Kernaussage dieses Abschnittes.

Satz 4.7. *Sei* $\mathbf{M}$ (m,κ,σ)*-asymptotisch schwarzschildsch,* $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}$ *Lösung von* (WFF) *zu Startwerten* $F_0 : \Sigma \to \mathbf{M}$ *und gelte* $r_{\min} > r_0(m,\kappa,\sigma)$ *sowie* $r_{\max} < \mathrm{diam}(F(\Sigma))$ *für alle* t*. Dann gilt für alle* $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned} \|\lambda\|^2_{2,[0,t)} \le c\big(&\mathbf{W}(F_0(\Sigma))^2 - \mathbf{W}(F(\Sigma,t))^2\big) \\ &+ \frac{c_0(m,\kappa,\sigma)}{|F_0(\Sigma)|^2}\int_0^t (\mathbf{W}(F(\Sigma,\xi)) + \mathrm{genus}(\Sigma))^2\,\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $t_0 \in [0,T)$ beliebig, fest. Dann gilt für die Fläche $F(\Sigma,t_0)$ nach Lemma 4.6 mit $K = \lambda(t_0)$ zunächst

$$\begin{aligned} \lambda(t_0)^2 \le\; & c\mathbf{W}(F(\Sigma,t_0))\cdot \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + \lambda H)^2\,\mathrm{d}\mu\,\Big|_{t_0} \\ &+ c_0(m,\kappa,\sigma)\left(\frac{\mathbf{W}(F(\Sigma,t_0)) + \mathrm{genus}(\Sigma)}{|F(\Sigma,t_0)|}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Beachtet man nun, daß nach Konstruktion von $\lambda(t_0)$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + \lambda H)^2\,\mathrm{d}\mu\,\Big|_{t_0} &= -\int_\Sigma \alpha_{\mathbf{W}}(-\alpha_{\mathbf{W}} + \lambda H)\,\mathrm{d}\mu\,\Big|_{t_0} \\ &= -\partial_t \mathbf{W}(F(\Sigma,t_0)), \end{aligned}$$

so folgt die Behauptung wegen $|F(\Sigma,\cdot)| \equiv |F_0(\Sigma)|$ direkt aus (4.22) nach Integration über alle $t_0 \in [0,t)$. $\square$

L^2-Schranken im $\mathbf{R}^3$

Die in diesem Abschnitt benutzten Argumente lassen sich auch auf (WFF) im Euklidischen anwenden – hier jedoch kann anstelle der Lemmata 4.4 und 4.5 nun auf die (schärferen) Identitäten (4.10) und (4.11) zurückgegriffen werden. Aufgrund der Translationsinvarianz aller auftretenden Größen im $\mathbf{R}^3$ kann außerdem auf Forderung (4.19) verzichtet werden. Insgesamt ergibt sich folgende

Proposition 4.8. *Für jede Lösung $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{R}^3$ von* (WFF) *gilt für alle $t \in [0,T)$*

$$\|\lambda\|^2_{2,[0,t)} \leq c\big(\mathbf{W}(F_0(\Sigma))^2 - \mathbf{W}(F(\Sigma,t))^2\big).$$

$\square$

4.3 Untere Schranken an die Existenzzeit

Ziel dieses Abschnittes ist das Aufstellen eines Existenzzeitresultates für (WFF), so wie es in Abschnitt 3.4 für den Fluss (WF$*$) getan wurde. Wurde in Abschnitt 3.4 allerdings noch besonderes Augenmerk auf den Einfluss von sup-Schranken an θ auf die Größe t_* gelegt, verschiebt sich der Schwerpunkt nun, im Hinblick auf eine Blowupanalyse bei endlicher Existenzzeit, auf die Untersuchung des Einflusses hoher Krümmungskonzentration der Anfangsfläche, d.h. des Einflusses kleiner Bereiche mit verhältnismäßig großer L^2-Norm der zweiten Fundamentalform. Unser Hauptresultat in Satz 4.11 wird damit weniger als Variante von Satz 3.25, sondern vielmehr als Analogon zur Kernaussage in [KS02] zu deuten sein, in der der Einfluss hoher Krümmungskonzentration auf das Existenzintervall des Willmore-Flusses im $\mathbf{R}^n$ quantifiziert wurde.

Um die Forderungen an die von uns im Folgenden betrachteten Flächen auf sinnvolle Weise bündeln zu können, nutzen wir folgende

Definition 4.9 (Innerhalb von $F(\Sigma)$)**.** *Sei $F : \Sigma \to \mathbf{M}$ Einbettung und $\Omega \subset \mathbf{M}$. Wir sagen, Ω liegt* innerhalb von *$F(\Sigma)$, falls Ω in der beschränkten Zusammenhangskomponente von $(\mathbf{M} \cup \{0\}) \setminus F(\Sigma)$ liegt.*

Lemma 4.10. *Sei $F : \Sigma \to \mathbf{M}$, $r > 0$, und liege $B_r(0)$ innerhalb von $F(\Sigma)$. Dann gilt*

$$r_{\max} < \operatorname{diam}(F(\Sigma)),$$
$$F(\Sigma) \subset \overline{B_{\operatorname{diam}(F(\Sigma))}(0)},$$
$$r_{\min} > r,$$

insbesondere gelten bei hinreichend großem r die Voraussetzungen von Satz 4.7 und Eigenschaft (VΣ)*.*

Beweis. Es ist nur die erste Aussage zu zeigen; die weiteren Aussagen folgen direkt aus den jeweiligen Definitionen. Zunächst erhalten wir aus der Definition von $\operatorname{diam}(F(\Sigma))$ direkt, daß

$$F(\Sigma) \subset \overline{B_{\operatorname{diam}(F(\Sigma))}(x)}$$

für jedes $x \in F(\Sigma)$. Nach Forderung gilt damit aber insbesondere $0 \in B_{\operatorname{diam}(F(\Sigma))}(x)$ und wir erhalten $|x| = |x - 0| < \operatorname{diam}(F(\Sigma))$ für jedes x. Die Behauptung folgt nach Definition von $r_{\max}$. $\square$

Wir können nun eine Variante der Existenzzeitaussage [KS02, Satz 1.2] herleiten:

Satz 4.11. *Sei Σ geschlossene 2-Fläche, $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ maximale Lösung von* (WFF), *$T_{\max} \leq \infty$, sei r_0 wie in* ($\mathrm{V}\Sigma$) *auf Seite 45 und liege $B_{r_0}(0)$ auf $[0, T_{\max})$ innerhalb von $F(\Sigma, \cdot)$.*

Dann existieren absolute Konstanten $\varepsilon_1, \delta > 0$, sodaß, falls die Bedingungen

$$\|\lambda\|^2_{2,[0,T_{\max})} \leq \delta$$

und

$$\sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F_0(\Sigma) \cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big|_{t=0} \leq \varepsilon'$$

für ein $\rho > 0$ und ein $\varepsilon' \leq \varepsilon_1$ erfüllt sind, gilt, daß

$$T_{\max} > t_* > 0, \tag{4.23}$$

wobei

$$t_* := \min \left\{ c\rho^4, \frac{c_0(m, \kappa, \sigma)}{\mathbf{W}(F_0(\Sigma))} \left(\inf_{[0,T_{\max})} r_{\min} \right)^4 \cdot \varepsilon' \right\}. \tag{4.24}$$

Auf $[0, t_*]$ gilt für eine absolute Konstante c

$$\sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,\cdot) \cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu < c\varepsilon' \leq \varepsilon_0, \tag{4.25}$$

wobei es sich bei ε_0 um das aus Bedingung ($\mathrm{V}\eta$) *handelt.*

Beweis. Wir können auf große Teile des Beweises zu Satz 3.25 zurückgreifen. Zunächst gilt nach Lemma 2.17 $\operatorname{diam}(F(\Sigma, \cdot)) \leq c(F_0(\Sigma))$ auf $[0, T_{\max})$. Nach Lemma 4.10 existiert damit ein $K \Subset \mathbf{M}$ (auf dem insbesondere uniform $|\overline{\nabla}^{(k)} \overline{\mathrm{Rc}}|_g < \infty$ für alle k gilt) mit $F(\Sigma, \cdot) \subset K$.

Seien $N \in \mathbf{N}$ und $\varepsilon_1 := (4N)^{-1} \varepsilon_0$ wie im Beweis zu Satz 3.25 definiert, $\varepsilon' \leq \varepsilon_1$ und $\rho > 0$ wie in der Voraussetzung gewählt sowie $\delta > 0$ zunächst beliebig und fest. Seien außerdem die Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x$ und die Größen $\varepsilon(\cdot), \Phi(\cdot)$ wie in (3.69) bzw. (3.71) festgelegt, und $t_0 \in [0, T_{\max})$ der erste Zeitpunkt mit

$$\Phi(t_0) = 4\varepsilon'.$$

Analog zur Argumentation in Satz 3.25 muss t_0 existieren, falls $T_{\max} < \infty$: Wie in Rechnung (3.76) folgt sonst auf ganz $[0, T_{\max})$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\cdot) &< 4N\varepsilon' \\ &\leq \varepsilon_0, \end{aligned}$$

damit ist dort Bedingung ($\mathrm{V}\eta$) für jedes η_x erfüllt, und da nach Annahme $\|\lambda\|^2_{2,[0,T_{\max})} < \delta$, ergibt sich mit Satz 3.22 und Lemma 3.24 ein Widerspruch zur Maximalität von $T_{\max}$.

Wir erhalten $T_{\max} > t_0$, und Behauptungen (4.23) bzw. (4.25) lassen sich nun durch den Beweis von $t_0 \geq t_*$ zeigen, wobei t_* wie in (4.24) festgelegt ist. Dies ergibt sich wieder aus Satz 3.19: Für jedes η_x ist ($\mathrm{V}\eta$) auf $[0, t_0]$ erfüllt, und wie in Rechnung (3.78) ergibt sich für alle $t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \eta_x^4 |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big|_t \leq \varepsilon' &+ 4Nc\varepsilon' \int_0^t |\lambda|^2 \, \mathrm{d}\xi \\ &+ 4Nc\varepsilon' \left(\rho^{-4} + (\inf r_{\min})^{-4} c_0(m, \kappa, \sigma) \right) \cdot t \\ &+ c \int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 |\overline{\nabla} \overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\xi \,. \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von $\mathbf{W}(F(\Sigma,\cdot))$ folgt außerdem für alle η_x

$$\int_\Sigma \eta_x^4 |\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g^2 \,\mathrm{d}\mu \le r_{\min}^{-4} c_0(m,\kappa,\sigma)\mathbf{W}(F_0(\Sigma)),$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi(t_0) \le\ & \varepsilon' + \varepsilon' \cdot 4Nc\delta \\ & \quad + \left(c\rho^{-4} + (\inf r_{\min})^{-4} c_0(m,\kappa,\sigma)\right)\varepsilon' \cdot t_0 \\ & \quad + (\inf r_{\min})^{-4} c_0(m,\kappa,\sigma)\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \cdot t_0 \\ \le\ & (1+4Nc\delta)\varepsilon' + c\rho^{-4}\varepsilon' \cdot t_0 \\ & \quad + (\inf r_{\min})^{-4} c_0(m,\kappa,\sigma)\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \cdot t_0,\end{aligned} \tag{4.26}$$

was mit $\delta := (4Nc)^{-1}$ und $t_0 < t_*$ einen Widerspruch zur Definition von t_0 darstellt. Wir erhalten

$$T_{\max} > t_0 \ge t_*,$$

die Behauptung folgt.

Falls $T_{\max} = \infty$, so folgt die Behauptung analog zur Argumentation in Satz 3.25. □

4.3.1 Krümmungskonzentration bei endlicher Existenzzeit

Existiert der Fluss (WFF) nur eine begrenzte Zeit, so können wir nun auf die Herausbildung und Art von Singularitäten schließen. Hierfür werden die Existenzzeitabschätzungen aus Satz 4.11 und die in Abschnitt 4.2 hergeleiteten Schranken an $\|\lambda\|_{2,[0,T)}^2$ von zentraler Bedeutung sein. Den im Folgenden maßgeblichen Singularitätenbegriff bündelt folgende

Definition 4.12 (L^2-Krümmungskonzentration auf β bei T)**.** *Sei $F : \Sigma \times [0,T_{\max}) \to \mathbf{M}$ Lösung von* (WFF)*, $T_{\max} \le \infty$, $T \in (0,T_{\max}]$ und $\beta > 0$. Wir sagen, die Krümmung von Σ (L^2-)konzentriert sich bei T auf β, falls es Folgen $(t_i)_{i\in\mathbf{N}} \subset (0,T)$ mit $t_i \nearrow T$ sowie $(\rho_i)_{i\in\mathbf{N}}$ mit $\rho_i \searrow 0$ gibt, sodaß für alle i*

$$\beta \le \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t_i)\cap B_{\rho_i}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{4.27}$$

Zunächst impliziert die Herausbildung einer L^2-Konzentration der Krümmung direkt die anschaulichere „Explosion" derselben.

Proposition 4.13. *Mit Lemma 2.18 ergibt sich unter den Flüssen* (WF) *und* (WFF) *in $\mathbf{M}$ für β, ρ_i, t_i wie in Definition 4.12 direkt*

$$\begin{aligned}\beta &\le \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t_i)\cap B_{\rho_i}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\le c\|A\|_{\infty,F(\Sigma,t_i)}^2 \cdot \rho_i^2 \mathbf{W}(F_0(\Sigma))\end{aligned}$$

und damit für $i \to \infty$

$$\|A\|_{\infty,F(\Sigma,t_i)}^2 \ge c(\beta,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)))\rho_i^{-2} \longrightarrow \infty.$$

□

Wir wollen nun zeigen, daß es sich beim Auftreten einer Krümmungskonzentration im Sinne obiger Definition gerade um das bei endlicher Existenzzeit des Flusses (WFF) zu erwartende Ereignis handelt.

Lemma 4.14 (L^2-Krümmungskonzentration bei $T_{\max} < \infty$). *Sei Σ geschlossene 2-Fläche und $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ maximale Lösung von* (WFF), *$T_{\max} < \infty$, sei r_0 wie in* (VΣ) *auf Seite 45 und liege $B_{r_0}(0)$ innerhalb von $F(\Sigma, t)$ für alle $t \in [0, T_{\max})$.*

Dann gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, sodaß sich die Krümmung von Σ für jedes $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_2]$ im Sinne von Definition 4.12 bei $T_{\max}$ auf ε' konzentriert.

Beweis. Zunächst existiert nach Anwendung von Lemma B.13 mit $f \equiv 1$

$$\begin{aligned} |F(\Sigma, \cdot)|^{\frac{1}{2}} &\le c \int_\Sigma |H| \, \mathrm{d}\mu \\ &\le c |F(\Sigma, \cdot)|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{W}(F(\Sigma, \cdot))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.28}$$

und wir erhalten wegen $|A|^2 \ge cH^2$ ein $c_0 > 0$, sodaß uniform auf $[0, T_{\max})$

$$\int_{F(\Sigma, \cdot)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu > c_0. \tag{4.29}$$

Wir setzen

$$\varepsilon_2 := \min\{N^{-1} c_0, N^{-2} \varepsilon_1\},$$

wobei ε_1 das in Satz 4.11 behandelte und N wie im dortigen Beweis festgelegt ist. Sei nun $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_2]$ fest gewählt und $t_0 \in [0, T_{\max})$ beliebig und fest. Wir setzen nun

$$\rho(t_0) := \sup \left\{ \rho \,:\, \sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma, t_0) \cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu < N\varepsilon' \right\}. \tag{4.30}$$

Wegen (4.29) existiert $\rho(t_0)$ und ist außerdem nichtnegativ. Da $F(\Sigma, t_0)$ glatt und kompakt ist, gilt sogar $\rho(t_0) > 0$; wäre dies nicht der Fall, so gibt es für alle $k \in \mathbf{N}$ Punkte $x_k \in \mathbf{M} \setminus B_{r_0}(0)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{N\varepsilon'}{2} &\le \int_{F(\Sigma, t_0) \cap B_{\frac{1}{k}}(x_k)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \|A\|^2_{\infty, F(\Sigma, t_0)} \cdot |F(\Sigma, t_0) \cap B_{\frac{1}{k}}(x_k)|, \end{aligned}$$

was für $k \to \infty$ einen Widerspruch zu Lemma 2.18 darstellt. Abschließend erhalten wir nach Definition von $\rho(t_0)$

$$\begin{aligned} \varepsilon' &\le N^{-1} \sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma, t_0) \cap B_{2\rho(t_0)}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma, t_0) \cap B_{\rho(t_0)}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\ &\le N \sup_{x \in \mathbf{M}} \int_{F(\Sigma, t_0) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(t_0)}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \\ &< N^2 \varepsilon', \end{aligned} \tag{4.31}$$

insbesondere gilt

$$\sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t_0)\cap B_{\rho(t_0)}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon_1.$$

Außerdem gilt nach Lemma 4.10 und Satz 4.7

$$\|\lambda\|^2_{2,[0,T_{\max})} \le C(\mathbf{M}, F_0(\Sigma), \mathrm{genus}(\Sigma), T_{\max}) < \infty$$

und daher $\|\lambda\|^2_{2,[t,T_{\max})} \to 0$ für $t \nearrow T_{\max}$; ist also t_0 hinreichend nah an $T_{\max}$ gewählt, ergibt sich damit insbesondere

$$\|\lambda\|^2_{2,[t_0,T_{\max})} \le \delta$$

mit δ wie in Satz 4.11. Anwendung dieses Satzes auf den Fluss zur Startzeit t_0 liefert dann direkt

$$\begin{aligned} T_{\max} - t_0 &> \min\left\{ c\rho(t_0)^4, \frac{c_0(m,\kappa,\sigma)}{\mathbf{W}(F(\Sigma,t_0))} \left(\inf_{[t_0,T_{\max})} r_{\min} \right)^4 \cdot \varepsilon_1 \right\} \\ &\ge \min\left\{ c\rho(t_0)^4, \frac{c_0(m,\kappa,\sigma)}{\mathbf{W}(F_0(\Sigma))} \left(\inf_{[0,T_{\max})} r_{\min} \right)^4 \cdot \varepsilon_1 \right\}, \end{aligned}$$

und wir bemerken, daß der zweite Term positiv ist und nicht von t_0 oder $\rho(t_0)$ abhängt.

Sei nun $t_i \nearrow T_{\max}$ beliebige, feste Folge, und $\rho_i := \rho(t_i)$ für jedes i analog zu (4.30) definiert. Nach obigen Überlegungen erhalten wir für hinreichend große i

$$T_{\max} - t_i > c\rho_i^4$$

und damit $\rho_i \to 0$ für $i \to \infty$. Eigenschaft (4.27) folgt aus Abschätzung (4.31). □

4.4 Blowupanalyse bei Krümmungskonzentration

Hauptzweck dieses Abschnittes ist die weitergehende Untersuchung einer sich unter (WFF) bewegenden Fläche zum Zeitpunkt der Herausbildung einer L^2-Krümmungskonzentration – wie sie nach Lemma 4.14 insbesondere bei endlicher Existenzzeit des Flusses auftritt – um diese im Idealfall ausschließen zu können. Zentralen Bestandteil dieser Untersuchungen wird hierbei die Konstruktion einer Blowupfläche bilden, für die zunächst etwas Vorarbeit zu leisten ist.

Zunächst müssen wir aus dem bloßen Wissen um das Auftreten einer L^2-Krümmungskonzentration auf die Existenz einer für die Konstruktion einer Blowupsequenz geeigneten Zeitfolge schließen. „Geeignet“ bedeutet hier, daß die Krümmungskonzentration zu jedem dieser Zeitpunkte ihren Höhepunkt über alle früheren Zeiten erreicht; dies äußert sich in Eigenschaft (4.34) und wird die Herleitung uniformer Krümmungsschranken zu diesen Zeitpunkten aus den inneren Abschätzungen in Abschnitt 3.3.1 ermöglichen.

Lemma 4.15. *Sei Σ geschlossene 2-Fläche, $F : \Sigma \times [0,T_{\max}) \to \mathbf{M}$ Lösung von (WFF), $T_{\max} \le \infty$, sei r_0 wie in (VΣ) auf Seite 45 und liege $B_{r_0}(0)$ innerhalb von $F(\Sigma,t)$ für alle $t \in [0,T_{\max})$. Konzentriere sich die Krümmung von Σ bei $T \in (0,T_{\max}]$ im Sinne von Definition 4.12 auf ein $\beta > 0$.*

Dann gilt

$$T = T_{\max}$$

und es gibt für jedes $\beta' \in (0,\beta]$ *eine Folge* $(\rho_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *mit* $\rho_i \searrow 0$, *und Zeiten* $(t_i)_{i\in\mathbf{N}} \subset (0,T_{\max})$, *sodaß für alle i und eine absolute Konstante* $c>0$

$$t_i < t_{i+1}, \quad t_i \nearrow T_{\max}, \tag{4.32}$$

$$c^{-1}\beta' \le \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t_i)\cap B_{\rho_i}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \le c\beta', \tag{4.33}$$

$$\sup_{t\in[0,t_i]} \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_{\rho_i}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \le c\beta'. \tag{4.34}$$

Beweis. Seien β', T wie oben, und sei $\rho_j \searrow 0$ beliebige, feste Folge mit $\rho_j > \rho_{j+1}$. Wir setzen für alle $j \in \mathbf{N}$

$$I_j := \left\{ t\in[0,T) \,:\, \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_{\rho_j}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu > \frac{1}{2}\beta' \right\}.$$

Nach Voraussetzung bzw. Definition 4.12 sind alle I_j nichtleer und wir können

$$t_j := \inf I_j$$

setzen. Seien nun für jedes $j\in\mathbf{N}$ und alle $x \in \mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)$ Abschneidefunktionen $\tilde\eta_{j,x} \in C^2(\mathbf{M})$ fest gewählt mit

$$\chi_{B_{\frac{1}{2}\rho_j}(x)}(\cdot) \le \tilde\eta_{j,x}(\cdot) \le \chi_{B_{\rho_j}(x)}(\cdot)$$

sowie $\eta_{j,x} := \tilde\eta_{j,x}|_\Sigma$. Sei außerdem

$$\varepsilon_j(t) := \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_{\rho_j}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu,$$

$$\Phi_j(t) := \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)} \eta_{j,x}^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu,$$

und $N\in\mathbf{N}$ wie im Beweis zu Satz 4.11 definiert. Nach der dortigen Argumentation ist Φ_j für jedes j stetig und es gilt $\Phi_j(\cdot) \le \varepsilon_j(\cdot) \le N\Phi_j(\cdot)$.

Ist $t_j \in I_j$, so gilt direkt nach Definition $\varepsilon_j(t_j) > \frac{1}{2}\beta'$. Falls $t_j \notin I_j$, so muss t_j zumindest Berührpunkt von I_j sein – aus der Stetigkeit von Φ_j und nach Definition von I_j erhalten wir dann aber direkt

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(t_j) &\ge \Phi_j(t_j) \\ &= \lim_{t\to t_j, t\in I_j} \Phi_j(t) \\ &\ge N^{-1} \liminf_{t\to t_j, t\in I_j} \varepsilon_j(t) \\ &\ge N^{-1}\frac{1}{2}\beta' \end{aligned} \tag{4.35}$$

und die untere Schranke in Behauptung (4.33) ist für alle j gezeigt.

Wir betrachten nun den Fall $T < \infty$. Da $I_j \supset I_{j+1}$ für alle j, ist die Folge $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$ monoton steigend und konvergiert somit gegen ein $\tilde{t} \le T \le T_{\max}$. Nimmt man an, daß $\tilde{t} < T_{\max}$, so folgt, da wegen (4.35) für alle $j \ge k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} c^{-1}\beta' &\le \varepsilon_j(t_j) \\ &\le \varepsilon_k(t_j), \end{aligned}$$

daß für beliebige, feste k

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(\tilde{t}) &\ge \Phi_k(\tilde{t}) \\ &= \lim_{j\to\infty} \Phi_k(t_j) \\ &\ge N^{-1} \liminf_{j\to\infty} \varepsilon_k(t_j) \\ &\ge N^{-1} c^{-1}\beta', \end{aligned}$$

und es ergibt sich mit Lemma 2.18

$$\begin{aligned} N^{-1}c^{-1}\beta' &\le \varepsilon_k(\tilde{t}) \\ &\le \|A\|^2_{\infty,F(\Sigma,\tilde{t})} \cdot \sup_{x\in\mathbf{M}} |F(\Sigma,\tilde{t}) \cap B_{\rho_k}(x)| \\ &\le \|A\|^2_{\infty,F(\Sigma,\tilde{t})} \cdot c\rho_k^2 \mathbf{W}(F(\Sigma,\tilde{t})), \end{aligned} \tag{4.36}$$

was für $k \to \infty$ einen Widerspruch zur Glattheit von $F(\Sigma,\tilde{t})$ darstellt. Wir erhalten

$$\tilde{t} = T = T_{\max},$$

können insbesondere eine streng monotone Teilfolge $(t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ mit zugehörigen Radien $(\rho_i)_{i\in\mathbf{N}}$ finden und darüberhinaus annehmen, daß alle t_i positiv sind. Dies ist fraglos auch im Fall $T = \infty$ möglich und Behauptung (4.32) ist damit gezeigt.

Für die übrigen Aussagen bemerken wir, daß für jedes $i \in \mathbf{N}$ auf $[0, t_i)$ nach Definition

$$\varepsilon_i(\cdot) \le \frac{1}{2}\beta'.$$

Damit folgt aber mit Φ_i wie oben definiert, daß

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t_i) &\le N\Phi_i(t_i) \\ &= N \lim_{t\nearrow t_i} \Phi_i(t) \\ &\le N \limsup_{t\nearrow t_i} \varepsilon_i(t) \\ &\le N\frac{1}{2}\beta' \end{aligned}$$

und wir erhalten sowohl die obere Schranke in Behauptung (4.33) als auch Aussage (4.34). □

sup-Schranken an $|\lambda|$

Als abschließende technische Vorbereitung wird ein Mittel benötigt, um die Geschwindigkeit $(-\alpha_{\mathbf{W}} + H\lambda)(t)$ einer sich unter (WFF) bewegenden Fläche $F(\Sigma,t)$ auf eine Weise abzuschätzen, die dem angestrebten Reskalierungsprozess in Satz 4.18 standhält; insbesondere zur Beschränkung von $|\lambda|(t)$ ist ein Ansatz notwendig, der über das naheliegende Abschätzen dieses Terms durch die Suprema $|\nabla^{(k)}A|_{\infty,\Sigma}(t)$ und den Flächeninhalt $|F(\Sigma,\cdot)|$ hinausgeht.

Den zentralen Schritt hierfür stellt die Herleitung einer globalen L^2-Schranke an $|\nabla A|$ aus den in Abschnitt 3.3.1 aufgeführten *lokalen* Abschätzungen dar.

Lemma 4.16. *Sei* $F : \Sigma \times [0,T) \to \mathbf{M}$ *Lösung von* (WFF), $T < \infty$, *und sei* (VΣ) *auf* $[0,T)$ *erfüllt. Sei* $\sup_{[0,T)} |\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}}|_g|_{F(\Sigma,\cdot)} \le \Pi_k < \infty$ *für alle* $k \le 4$, *sowie für ein* $\rho > 0$

$$\sup_{[0,T)}\sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon_0,$$

mit ε_0 *wie in Bedingung* (Vη) *festgelegt. Dann gilt für jedes* $t_0 > 0$

$$\sup_{[t_0,T)} \|\nabla A\|_{2,\Sigma}^2 \le C + C\left(\Pi_1^2 + \Pi_2^2\right)|F_0(\Sigma)|,$$

mit

$$C = C(t_0^{-1}, c_\rho, T, \sum_{r\le 4}\Pi_r, \mathbf{W}(F_0(\Sigma)), \mathrm{genus}(\Sigma), \|\lambda\|_{2,[0,T)}^2),$$

wobei $c_\rho := (\rho + \rho^{-1})$.

Beweis. Seien zunächst für alle $x \in \mathbf{M}\setminus B_{r_0}(0)$ Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x \in C^2(\mathbf{M})$ mit

$$\chi_{B_{\rho/2}(x)} \le \tilde{\eta}_x(\cdot) \le \chi_{B_\rho(x)}$$

wie im Beweis zu Satz 4.11 festgelegt, und zugehörige Funktionen η_x wie in (3.20) definiert. Nach Voraussetzung ist (Vη) für jedes η_x auf $[0,T)$ erfüllt. Wie in Rechnung (3.70) ergeben sich außerdem uniforme C^2-Schranken an alle $\tilde{\eta}_x$, und nach Lemma 2.18 gilt für alle x

$$\sup_{[0,T)} |[\eta_x > 0]| \le c\rho^2\mathbf{W}(F_0(\Sigma)).$$

Damit erhalten wir aus Aussage (3.47) in Satz 3.23 für jedes x die Ungleichung

$$\begin{aligned}\sup_{[t_0,T)} &\|\nabla A\|_{2,F(\Sigma,\cdot)\cap B_{\frac{\rho}{2}}(x)}^2 \\ &\le C\int_0^T \left(1+|\lambda|^2\right)\|A\|_{2,F(\Sigma,\xi)\cap B_\rho(x)}^2 + \left(\Pi_1^2+\Pi_2^2\right)|F(\Sigma,\xi)\cap B_\rho(x)|\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad + C\|A\|_{2,F_0(\Sigma)\cap B_\rho(x)}^2\big|_0,\end{aligned} \tag{4.37}$$

die Konstante C hängt von den oben aufgeführten Größen ab.

Sei nun das Raster $Z_\rho \subset \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$Z_\rho := \frac{\rho}{2}\mathbf{Z}^3 = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : \frac{2}{\rho}x \in \mathbf{Z}^3\right\}.$$

Dann ist $\{B_{\frac{\rho}{2}}(z) : z \in Z_\rho\}$ Überdeckung des $\mathbf{R}^3$ und es gibt darüberhinaus eine absolute Konstante $\overline{N}$, sodaß jeder Punkt des $\mathbf{R}^3$ in höchstens $\overline{N}$ verschiedenen Kugeln $B_\rho(z)$, $z \in Z_\rho$, liegt.

Durch Summation von (4.37) ergibt sich damit auf $[t_0,T)$ direkt

$$\begin{aligned}
&\|\nabla A\|^2_{2,F(\Sigma,\cdot)}\\
&\quad\le \sum_{z\in Z_\rho}\|\nabla A\|^2_{2,F(\Sigma,\cdot)\cap B_{\frac{\rho}{2}}(z)}\\
&\quad\le C\sum_{z\in Z_\rho}\int_0^T \left(1+|\lambda|^2\right)\|A\|^2_{2,F(\Sigma,\xi)\cap B_\rho(z)}+\left(\Pi_1^2+\Pi_2^2\right)|F(\Sigma,\xi)\cap B_\rho(z)|\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad +C\sum_{z\in Z_\rho}\|A\|^2_{2,F_0(\Sigma)\cap B_\rho(z)}\big|_0\\
&\quad\le C\overline{N}\|A\|^2_{2,F_0(\Sigma)}\big|_0+C\overline{N}\int_0^T\left(1+|\lambda|^2\right)\|A\|^2_{2,F(\Sigma,\xi)}+\left(\Pi_1^2+\Pi_2^2\right)|F(\Sigma,\xi)|\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

man beachte dazu, daß aufgrund der Kompaktheit von $F(\Sigma,\cdot)$ in allen auftretenden Summen nur endlich viele Summanden ungleich null sind. Mit Korollar 2.16 folgt

$$\begin{aligned}
\|\nabla A\|^2_{2,F(\Sigma,\cdot)} &\le C(\mathbf{W}(F_0(\Sigma))+\mathrm{genus}(\Sigma))\\
&\quad +C\int_0^T\left(1+|\lambda|^2\right)(\mathbf{W}(F_0(\Sigma))+\mathrm{genus}(\Sigma))+\left(\Pi_1^2+\Pi_2^2\right)|F_0(\Sigma)|\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Mit Lemma 4.16, Satz 3.23, und einer z.B. aus (4.28) folgenden uniformen unteren Schranke an $\mathbf{W}(F(\Sigma,\cdot))$ erhalten wir nach Definition von λ sofort

Proposition 4.17. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.23 gilt für jedes $t_0\in(0,T)$*

$$\begin{aligned}
\sup_{[t_0,T)}|\lambda(\cdot)| &\le c\sup_{[t_0,T)}\|\nabla A\|_{2,\Sigma}+c\big(\sup_{[t_0,T)}\|\mathring{A}\|^2_{\infty,\Sigma}+\Pi_0\big)\cdot\mathbf{W}(F_0(\Sigma))\\
&\le C+C\left(\Pi_1^2+\Pi_2^2\right)|F_0(\Sigma)|
\end{aligned}$$

mit $C=C(t_0^{-1},c_\rho,T,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)),\mathrm{genus}(\Sigma),\sum_{r\le 4}\Pi_r,\|\lambda\|^2_{2,[0,T)})$. □

4.4.1 Konstruktion einer Blowupfläche

Nun verfügen wir über die nötigen Werkzeuge, um die zentrale Konstruktion einer Blowupfläche und die Herleitung grundlegender Eigenschaften derselben durchführen zu können.

Satz 4.18. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.15 existieren Folgen $t_j\nearrow T_{\max},\rho_j\searrow 0$, Punkte $x_j\in\mathbf{M}$ und eine eigentlich immersierte 2-Fläche $\hat{F}(\hat{\Sigma})\subset\mathbf{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *$\hat{\Sigma}$, $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ sind nichtkompakt,*
- *Die Flächen*

$$F_j^e(\Sigma,0):=\rho_j^{-1}\,\mathrm{id}(F(\Sigma,t_j))-\mathrm{id}(x_j)\subset\mathbf{R}^3 \tag{4.38}$$

  konvergieren für jedes $k\ge 0$ in $C^k_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$ gegen $\hat{F}(\hat{\Sigma})$, wobei $\mathrm{id}:\mathbf{M}\to\mathbf{R}^3$ die euklidische Koordinatenabbildung bezeichnet,

- *$\hat{F}(\hat{\Sigma})$ ist eine Willmorefläche im $\mathbf{R}^3$, d.h. es gilt für die durch $\hat{F}$ auf $\hat{\Sigma}$ induzierten geometrischen Größen*

$$\hat{\alpha}_{\mathbf{W}}:=-\hat{\triangle}\hat{H}-\hat{H}|\hat{\mathring{A}}|^2_{\hat{\gamma}}\equiv 0, \tag{4.39}$$

- *es gilt*

$$\int_{\hat{F}(\hat{\Sigma})\cap\overline{B_1(0)}} |\hat{A}|^2_{\hat{\gamma}}\,\mathrm{d}\hat{\mu} > 0. \tag{4.40}$$

Beweis. Wir orientieren uns grob am Vorgehen in [KS01, §4]. Sei β wie in der Voraussetzung, $\beta' \in (0,\beta]$ zunächst beliebig, fest. Nach Lemma 4.15 existieren von β' abhängige Radien $\rho_i \searrow 0$ und Zeiten $t_i \nearrow T_{\max}$ mit den Eigenschaften (4.33) und (4.34).

Seien zunächst für jedes $i \in \mathbf{N}$ die Flüsse $\tilde{F}_i : \Sigma \times [-t_i, T_{\max} - t_i) \to \mathbf{M}$ durch $\tilde{F}_i(\cdot,t) := F(\cdot, t+t_i)$ definiert. Diese lassen sich nun mit den Methoden aus Abschnitt B.1 umskalieren: Definiert man analog zu den Definitionen B.1 bzw. B.5 für jedes i die Metrik g_i auf $\mathbf{M}$ durch

$$g_i := {}_{\rho_i^{-1}}g$$

und den Fluss $F_i : \Sigma \times \left[-\rho_i^{-4}t_i, \rho_i^{-4}(T_{\max} - t_i)\right) \to (\mathbf{M}, g_i)$ durch $F_i := \left(\tilde{F}_i\right)_{\rho_i^{-1}}$, d.h.

$$F_i(x,t) := \mathrm{id}^{-1}\left(\rho_i^{-1}\,\mathrm{id}(F_i(x, t_i + \rho_i^4 t))\right),$$

so ist nach Satz B.7 jedes F_i Lösung von (WFF) in $(\mathbf{M}, g_i)$. Außerdem folgt aus Lemma B.6 und den Aussagen (4.33) und (4.34) für jedes i

$$c^{-1}\beta' \le \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F_i(\Sigma,0)\cap B_1(x)} |A_i|^2_{\gamma_i}\,\mathrm{d}\mu_i \le c\beta', \tag{4.41}$$

$$\sup_{t\in\left[-\rho_i^{-4}t_i,0\right]} \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F_i(\Sigma,t)\cap B_1(x)} |A_i|^2_{\gamma_i}\,\mathrm{d}\mu_i \le c\beta', \tag{4.42}$$

wobei alle auftretenden geometrischen Größen $(\cdot)_i$ als die durch F_i und g_i auf Σ induzierten zu verstehen sind.

Sei nun β' so klein gewählt, daß für die in (4.41) und (4.42) auftretenden (absoluten) Konstanten c

$$c\beta' \le \varepsilon_1,$$

wobei ε_1 wie in Satz 4.11 festgelegt ist.

Wir nehmen nun zunächst an, daß $T_{\max} < \infty$. Für die in Satz 4.11 festgelegte Konstante δ lässt sich dann wegen Satz 4.7 und $t_i \to T_{\max}$ ein $i_0 = i_0(\lambda)$ finden mit

$$\|\lambda\|^2_{2,[t_i,T_{\max})} \le \delta$$

für alle $i \ge i_0$. Wegen (B.12) gilt für diese i aber insbesondere

$$\begin{aligned} \|\lambda_i\|^2_{2,\left[0,\rho_i^{-4}(T_{\max}-t_i)\right)} &= \int_0^{\rho_i^{-4}(T_{\max}-t_i)} |\lambda_i(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^{\rho_i^{-4}(T_{\max}-t_i)} |\rho_i^2\lambda(t_i + \rho_i^4\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \|\lambda\|^2_{2,[t_i,T_{\max})} \\ &\le \delta, \end{aligned} \tag{4.43}$$

somit sind zusammen mit (4.41) die Voraussetzungen von Satz 4.11 für jedes F_i mit $\rho = 1$ erfüllt. Anwendung dieses Satzes liefert für jedes $i \ge i_0$

$$\rho_i^{-4}(T_{\max} - t_i) > \min\left\{c, \frac{c_0(m,\kappa,\sigma)}{\mathbf{W}(F_i(\Sigma,0))}\left(\inf_{\left[0,\rho_i^{-4}(T_{\max}-t_i)\right)} (r_{\min})_i\right)^4 \cdot \beta'\right\}. \tag{4.44}$$

Beachtet man nun, daß für alle i

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(F_i(\Sigma,0)) &= \mathbf{W}(F(\Sigma,t_i))\\ &\le \mathbf{W}(F_0(\Sigma))\end{aligned}$$

sowie für $i \to \infty$

$$\begin{aligned}&\inf_{\left[0,\rho_i^{-4}(T_{\max}-t_i)\right)} (r_{\min})_i \ge \rho_i^{-1} \inf_{[0,T_{\max})} r_{\min} \longrightarrow \infty,\\ &-\rho_i^{-4} t_i < -\rho_i^{-4} t_1 \longrightarrow -\infty,\end{aligned}$$

so folgt aus (4.44) die Existenz eines $\zeta > 0$, für das für alle $i \ge i_0(\lambda, \beta', \mathbf{W}(F_0(\Sigma)), \inf r_{\min})$ die uniforme Existenzzeitabschätzung

$$\left[-\rho_i^{-4} t_i, \rho_i^{-4}(T_{\max} - t_i)\right) \supset [-1, \zeta] \tag{4.45}$$

gilt. Für diese i ergibt sich aus (4.42) und (4.25) nach Wahl von β' (und nach Konstruktion von ε_1 in Satz 4.11) außerdem die Abschätzung

$$\sup_{t\in[-1,\zeta]} \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F_i(\Sigma,t)\cap B_1(x)} |A_i|^2_{\gamma_i}\, \mathrm{d}\mu_i \le \max\{\varepsilon_1, c\varepsilon_1\} \le \varepsilon_0 \tag{4.46}$$

mit ε_0 wie in Bedingung (Vη), d.h. wie in den Voraussetzungen zu Satz 3.23.

Auch im Fall $T_{\max} = \infty$ ist für hinreichend große i die Inklusion (4.45) klar erfüllt. Die Schranke (4.46) behält ebenfalls ihre Gültigkeit: Zunächst lässt sich $\|\lambda_i\|^2_{2,[0,\zeta]} < \delta$ annehmen, da analog zu Rechnung (4.43) sowie nach Satz 4.7

$$\begin{aligned}\|\lambda_i\|^2_{2,[0,\zeta]} &= \|\lambda\|^2_{2,\left[t_i,t_i+\rho_i^4\zeta\right)}\\ &\le c\left(\mathbf{W}(F(\Sigma,t_i))^2 - \mathbf{W}(F(\Sigma,t_i+\rho_i^4\zeta))^2\right)\\ &\quad + \frac{c_0(m,\kappa,\sigma)}{|F_0(\Sigma)|^2}(\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) + \mathrm{genus}(\Sigma))^2 \cdot \rho_i^4\zeta\\ &\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned} \tag{4.47}$$

wobei die Schranke $\mathbf{W}(F(\Sigma,\cdot)) \le \mathbf{W}(F_0(\Sigma))$ sowie die Existenz von $\lim_{t\nearrow T_{\max}} \mathbf{W}(F(\Sigma,t))$ benutzt wurden. Aussage (4.46) folgt nun aus (4.42) und einer zu (4.26) analogen Rechnung.

Es ließen sich nun mit Satz 3.23, nach Wahl geeigneter Abschneidefunktionen, innere Krümmungsschranken an die Flächen $F_i(\Sigma,\cdot)$ bestimmen. Diese können sogar uniform in i gefunden werden, wie eine Untersuchung der in (3.48) aufgeführten Größen zeigt:

Zunächst existiert analog zur Argumentation in Satz 4.11 ein $K \Subset \mathbf{M}$ mit $F(\Sigma,\cdot) \subset K$; für jedes i befinden sich damit alle Flächen $F_i(\Sigma,\cdot)$ in der Menge $K_i := \rho_i^{-1} K \Subset (\mathbf{M}, g_i)$. Da aber nach Proposition B.4 für jedes $k \ge 0$

$$\sup_{K_i} |(\overline{\nabla}^{(k)}\, \overline{\mathrm{Rc}})_i|_{g_i} = \rho_i^{2+k} \sup_K |\overline{\nabla}^{(k)}\, \overline{\mathrm{Rc}}|_g, \tag{4.48}$$

ergeben sich mit $\Pi_k := \sup_K |\overline{\nabla}^{(k)}\, \overline{\mathrm{Rc}}|_g$ insbesondere die in i uniformen Schranken

$$\sup_{K_i} |(\overline{\nabla}^{(k)}\, \overline{\mathrm{Rc}})_i|_{g_i} \le \Pi_k.$$

Wählt man außerdem für alle $x \in \mathbf{M}$ Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x \in C^2(\mathbf{M})$ mit $\chi_{B_{1/2}(x)}(\cdot) \leq \tilde{\eta}_x(\cdot) \leq \chi_{B_1(x)}(\cdot)$ und $\sup_{x\in\mathbf{M}} \|\tilde{\eta}_x\|_{C^2(\mathbf{M},g^e)} \leq C$, so ergeben sich analog zu Rechnung (3.70) für alle i die Schranken

$$\sup_{x\in K_i} \|\tilde{\eta}_x\|_{C^2(\mathbf{M},g_i)} \leq C$$

sowie nach Lemma 2.18 für die Einschränkungen der $\tilde{\eta}_x$ auf die Flächen $F_i(\Sigma,\cdot)$

$$\sup_{[-1,\zeta]} \sup_{x\in K_i} |[\eta_x > 0]|_{\gamma_i} \leq c\mathbf{W}(F_0(\Sigma)).$$

Abschließend lässt sich annehmen, daß $\|\lambda_i\|^2_{2,[-1,\zeta]} < c$, da völlig analog zu Rechnung (4.47)

$$\|\lambda_i\|^2_{2,[-1,\zeta]} \xrightarrow{i\to\infty} 0,$$

und es ergeben sich damit durch Satz 3.23 für alle $i \geq i_0$ die uniformen Krümmungsschranken

$$\sup_{[0,\zeta]} \|(\nabla^{(k)} A)_i\|_{\infty,\Sigma} \leq C(k,\zeta,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)), \sum_{r\leq k+4} \Pi_r). \tag{4.49}$$

Nun lässt sich wegen (4.41) für jedes i ein Punkt $x_i \in K_i$ derart finden, daß

$$0 < c(\beta') \leq \int_{F_i(\Sigma,0)\cap B_1(x_i)} |A_i|^2_{\gamma_i}\, \mathrm{d}\mu_i,$$

und die Variation $F_i^e : \Sigma \times [0,\zeta] \to \mathbf{R}^3$ definieren durch

$$\begin{aligned} F_i^e(x,t) &:= \mathrm{id}(F_i(x,t)) - \mathrm{id}(x_i) \\ &= \rho_i^{-1}\,\mathrm{id}(F(x,t_i+\rho_i^4 t)) - \mathrm{id}(x_i). \end{aligned}$$

Da nach Lemma 2.12, Korollar 2.13 und Lemma 2.18

$$\begin{aligned} \int_{F_i(\Sigma,0)\cap B_1(x_i)} |A_i|^2_{\gamma_i}\, \mathrm{d}\mu_i &< c\int_{F_i(\Sigma,0)\cap B_1(x_i)} |A_i^e|^2_{\gamma_i^e}\, \mathrm{d}\mu_i^e + c_0(m,\kappa,\sigma)\int_{F_i(\Sigma,0)\cap B_1(x_i)} r^{-2}\, \mathrm{d}\mu \\ &\leq c\int_{F_i^e(\Sigma,0)\cap B_1(0)} |A_i^e|^2_{\gamma_i^e}\, \mathrm{d}\mu_i^e + (r_{\min})_i^{-2} c_0(m,\kappa,\sigma)\mathbf{W}(F_0(\Sigma)), \end{aligned}$$

lässt sich insbesondere festhalten, daß für $i \geq i_0(m,\kappa,\sigma,\mathbf{W}(F_0(\Sigma)),\beta')$

$$c(\beta') \leq \int_{F_i^e(\Sigma,0)\cap B_1(0)} |A_i^e|^2_{\gamma_i^e}\, \mathrm{d}\mu_i^e. \tag{4.50}$$

Wir wollen nun den Kompaktheitssatz [Bre12, Satz 1.3], der eine Variante von [KS01, Satz 4.2] darstellt, auf die Flächen $F_i^e(\Sigma,0)$ anwenden, und benötigen dazu uniforme Schranken an die zweiten Fundamentalformen A_i^e und ihre Ableitungen sowie uniforme lokale Schranken an den Flächeninhalt.

Zunächst existiert für jedes $R > 0$ ein $i_0(R)$, sodaß, falls $i \geq i_0$, für die zweite Fundamentalform A_N jeder glatten Hyperfläche $N \subset (\mathbf{M},g_i)$

$$\|(\nabla^{(k)} A_N)^e\|_{\infty,N\cap B_R(x_i)} \leq C(R,k,\sum_{r\leq k} \|\nabla^{(r)} A_N\|_{\infty,N}, \sum_{r\leq k} \sup_{B_R(x_i)} |\overline{\nabla}^{(r)}\, \overline{\mathrm{Rc}}|_{g_i}), \tag{4.51}$$

dies folgt aus der Potenzreihenentwicklung von g_i in Gauß'schen Normalkoordinaten um den Punkt x_i; man beachte dazu, daß der Injektivitätsradius von g aufgrund der Kompaktheit von K $\mathrm{inj}_g(K) \geq c > 0$ erfüllt und damit

$$\mathrm{inj}_{g_i}(K_i) \geq c\rho_i^{-1} \xrightarrow{i\to\infty} \infty.$$

Aus den Schranken (4.49) ergibt sich damit für $R > 0$, $i \geq i_0(R)$ und alle $k \geq 0$ insgesamt

$$\sup_{[0,\zeta]} \|(\nabla^{(k)} A)_i^e\|_{\infty, F_i^e(\Sigma,\cdot)\cap B_R(0)} \leq C(R,k,\mathbf{M},F_0(\Sigma),\zeta). \tag{4.52}$$

Nach Korollar 2.13 und Lemma 2.18 gilt außerdem für jedes $R > 0$ uniform in i

$$\begin{aligned} |F_i^e(\Sigma,0) \cap B_R(0)|_{g^e} &\leq c|F_i(\Sigma,0)\cap B_R(x_i)|_{g_i} \\ &\leq cR^2\mathbf{W}(F_0(\Sigma)). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Abschließend gilt nach Konstruktion $F_i^e(\Sigma,0)\cap B_1(0) \neq \emptyset$ für alle i; damit sind mit (4.52) und (4.53) die Voraussetzungen von [Bre12, Satz 1.3] (in der allgemeineren Variante auf [Bre12, S. 34]) erfüllt.

Anwendung auf die Immersionen $F_i^e(\cdot,0)$ liefert nun eine Teilfolge $(F_j^e(\cdot,0))_{j\in\mathbf{N}}$, eine (kompakte oder nichtkompakte) eigentlich immersierte 2-Fläche $\hat{F} : \hat{\Sigma} \to \mathbf{R}^3$ und Diffeomorphismen

$$\phi_j : U_j \subset \hat{\Sigma} \longrightarrow V_j \subset \Sigma$$

zwischen offenen Mengen U_j, V_j mit

$$\begin{aligned} &V_j := \left\{x \in \Sigma : F_j^e(x,0) \in B_j(0) \subset \mathbf{R}^3\right\}, \\ &U_j \Subset U_{j+1}, \quad \hat{\Sigma} = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} U_j, \end{aligned} \tag{4.54}$$

sodaß

$$\|\hat{F}(\cdot) - F_j^e(\phi_j(\cdot),0)\|_{\infty,U_j} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \tag{4.55}$$

und für jedes $k \in \mathbf{N}_0$

$$F_j^e(\phi_j(\cdot),0) \xrightarrow{j\to\infty} \hat{F}(\cdot) \text{ in } C^k_{\mathrm{loc}}(\hat{\Sigma}). \tag{4.56}$$

Mit Hilfe obiger Resultate lässt sich zunächst direkt zeigen, daß die Fläche $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ Eigenschaft (4.40) erfüllt. Hierbei ist zu beachten, daß die Anwendung von Konvergenzaussage (4.56) nur auf fest gewählten, beschränkten Teilmengen von $\hat{\Sigma}$ zulässig ist. Sei daher zunächst $\upsilon > 0$ fest, und die Menge $G = G(\upsilon) \subset \hat{\Sigma}$ definiert durch $G := \hat{F}^{-1}(\overline{B_{1+\upsilon}(0)})$. Dann existiert ein $j_0 \in \mathbf{N}$ mit

$$F_j^e(\phi_j(U_j),0) \cap B_1(0) \subset F_j^e(\phi_j(G),0) \tag{4.57}$$

für alle $j \geq j_0$: Gäbe es eine Teilfolge $(F_k^e(\cdot,0))_{k\in\mathbf{N}}$, die für jedes k die Inklusion (4.57) durch die Existenz eines $x_k \in \{F_k^e(\phi_k(U_k),0) \cap B_1(0)\} \setminus \{F_k^e(\phi_k(G),0)\}$ verletzt, so lässt sich für jedes dieser x_k ein $y_k \in V_k = \phi_k(U_k)$ finden mit $F_k^e(y_k,0) = x_k$. Mit $z_k := \phi_k^{-1}(y_k) \in U_k$ folgt dann aber mit (4.55) direkt

$$\begin{aligned} |\hat{F}(z_k) - x_k| &= |\hat{F}(z_k) - F_k^e(\phi_k(z_k),0)| \\ &\leq \|\hat{F}(\cdot) - F_k^e(\phi_k(\cdot),0)\|_{\infty,U_k} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

wir erhalten $\lim_k |\hat{F}(z_k)| \leq 1$ und damit $z_k \in G$ für hinreichend große k; dies ist ein Widerspruch zur Wahl der x_k und (4.57) ist gezeigt.

Damit ergibt sich für alle $j \geq j_0$ die Inklusion

$$\begin{aligned} F_j^e(\Sigma,0) \cap B_1(0) &= F_j^e(V_j,0) \cap B_1(0) \\ &= F_j^e(\phi_j(U_j),0) \cap B_1(0) \\ &\subset F_j^e(\phi_j(G),0), \end{aligned}$$

es ergibt sich mit (4.50) und (4.56)

$$\begin{aligned} c(\beta') &\leq \int_{F_j^e(\Sigma,0)\cap B_1(0)} |A_j^e|^2_{\gamma_j^e}\, \mathrm{d}\mu_j^e \\ &\leq \int_{F_j^e(\phi_j(G),0)} |A_j^e|^2_{\gamma_j^e}\, \mathrm{d}\mu_j^e \xrightarrow{j\to\infty} \int_{\hat{F}(G)} |\hat{A}|^2_{\hat{\gamma}}\, \mathrm{d}\hat{\mu} \end{aligned}$$

und wir erhalten nach Definition von G

$$c(\beta') \leq \int_{\hat{F}(\hat{\Sigma})\cap \overline{B_{1+\upsilon}(0)}} |\hat{A}|^2_{\hat{\gamma}}\, \mathrm{d}\hat{\mu}\,.$$

Behauptung (4.40) folgt nun für $\upsilon \to 0$.

Nun ist Behauptung (4.39) zu zeigen, wofür die Flusseigenschaften der Flächen $F_j(\Sigma,\cdot)$ ausgenutzt werden müssen. Sei dazu $j_0 \in \mathbf{N}$ beliebig, fest. Für die Einschränkungen der Variationen F_j auf $V_{j_0} \times [0,\zeta]$ ergibt sich dann nach den Definitionen in Abschnitt 2.2 zunächst

$$\begin{aligned} &\int_0^\zeta \int_{V_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}_j^2\, \mathrm{d}\mu_j\, \mathrm{d}\xi \\ &\quad\leq \int_0^\zeta \int_\Sigma \alpha_{\mathbf{W}}{}_j^2\, \mathrm{d}\mu_j\, \mathrm{d}\xi \\ &\quad= \int_0^\zeta \left(-\partial_t \mathbf{W}(F_j(\Sigma,\cdot)) + \int_\Sigma H_j \lambda_j \alpha_{\mathbf{W}\,j}\, \mathrm{d}\mu_j\right) \mathrm{d}\xi \\ &\quad= \mathbf{W}(F_j(\Sigma,0)) - \mathbf{W}(F_j(\Sigma,\zeta)) + \int_0^\zeta \left(\lambda_j^2 \int_\Sigma H_j^2\, \mathrm{d}\mu_j\right) \mathrm{d}\xi \\ &\quad\leq \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j)) - \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j+\rho_j^4\zeta)) + c\mathbf{W}(F_0(\Sigma))\|\lambda_j\|^2_{2,[0,\zeta]} \\ &\quad\xrightarrow{j\to\infty} 0, \end{aligned} \tag{4.58}$$

wobei wieder die Existenz von $\lim_{t\nearrow T_{\max}} \mathbf{W}(F(\Sigma,t))$ benutzt und mit dem Term $\|\lambda_j\|^2_{2,[0,\zeta]}$ wie in (4.47) verfahren wurde. Aus dieser (Zeit-)L^1-Konvergenz ist nun auf punktweise Konvergenz der Integranden $\int_{V_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}_j^2\, \mathrm{d}\mu_j$ zu schließen; hierfür genügt es, die ersten Zeitableitungen derselben uniform in j beschränken. Zunächst gilt wegen (4.48)

$$|F_j(\Sigma,0)|_{\gamma_j} \cdot \left(\sup_{K_j} |(\overline{\nabla}\,\overline{\mathrm{Rc}})_j|^2_{g_j} + \sup_{K_j} |(\overline{\nabla}^{(2)}\,\overline{\mathrm{Rc}})_j|^2_{g_j}\right) \longrightarrow 0,$$

und es ergibt sich für alle $j \geq j_0(|F_0(\Sigma)|)$ mit Proposition 4.17 die uniforme Schranke

$$\sup_{[0,\zeta]} |\lambda_j| \leq C. \tag{4.59}$$

Außerdem gelten weiterhin die Krümmungsschranken (4.49). Wir erhalten unter Verwendung der Evolutionsgleichungen in Lemma 2.3 direkt

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{V_{j_0}} \mathrm{d}\mu_j &= \int_{V_{j_0}} (-\alpha_{\mathbf{W}\,j} + \lambda_j H_j) H_j \,\mathrm{d}\mu_j \\ &\leq C \int_{V_{j_0}} \mathrm{d}\mu_j\end{aligned}$$

und damit nach Definition von V_{j_0} für alle $t \in [0,\zeta]$

$$\begin{aligned}\int_{V_{j_0}} \mathrm{d}\mu_j\,\big|_t &\leq C \int_{V_{j_0}} \mathrm{d}\mu_j\,\big|_0 \\ &= C|F_j(\Sigma,0) \cap B_{j_0}(x_j)|_{g_j} \\ &\leq j_0^2 \cdot C\mathbf{W}(F_0(\Sigma)).\end{aligned} \tag{4.60}$$

Durch Kombination der Schranken (4.49), (4.59) und (4.60) ergeben sich nun für hinreichend große j wie gewünscht uniforme Schranken an alle $|\partial_t \int_{V_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}_j^2 \,\mathrm{d}\mu_j|$, aus denen wir nun mit (4.58) für jedes $t \in [0,\zeta]$ auf die punktweise Konvergenz

$$\int_{V_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}_j^2 \,\mathrm{d}\mu_j\,\big|_t \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4.61}$$

schließen können.

Sei nun $j \geq j_0$. Da nach (4.48) $\sup_{K_j} |(\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}})_j|_{g_j} \longrightarrow 0$ für jedes k, laufen analog zu der Argumentation, die auf die Schranken (4.52) geführt hat, alle auf U_{j_0} durch die Immersionen $F_j(\phi_j(\cdot),0) : U_{j_0} \to (\mathbf{M}, g_j)$ induzierten geometrischen Größen $(\cdot)_{F_j(\phi_j(\cdot),0)}$ gleichmäßig gegen die durch $F_j^e(\phi_j(\cdot),0)$ induzierten. Da diese translationsinvariant sind, ergibt sich durch die auf $\hat{F}(U_{j_0}) \subset \mathbf{R}^3$ induzierten Größen $\hat{(\cdot)}$ wegen $F_j^e(\phi_j(\cdot),0) \longrightarrow \hat{F}$ insgesamt

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{V_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}_j^2 \,\mathrm{d}\mu_j\,\big|_{t=0} - \int_{U_{j_0}} \hat{\alpha}_{\mathbf{W}}^2 \,\mathrm{d}\hat{\mu}\Big| \\ &\quad= \Big|\int_{U_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}^2_{F_j(\phi_j(\cdot),0)} \,\mathrm{d}\mu_{F_j(\phi_j(\cdot),0)} - \int_{U_{j_0}} \hat{\alpha}_{\mathbf{W}}^2 \,\mathrm{d}\hat{\mu}\Big| \\ &\quad\leq \Big|\int_{U_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}^2_{F_j(\phi_j(\cdot),0)} \,\mathrm{d}\mu_{F_j(\phi_j(\cdot),0)} - \int_{U_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}^2_{F_j^e(\phi_j(\cdot),0)} \,\mathrm{d}\mu_{F_j^e(\phi_j(\cdot),0)}\Big| \\ &\qquad + \Big|\int_{U_{j_0}} \alpha_{\mathbf{W}}{}^2_{F_j^e(\phi_j(\cdot),0)} \,\mathrm{d}\mu_{F_j^e(\phi_j(\cdot),0)} - \int_{U_{j_0}} \hat{\alpha}_{\mathbf{W}}^2 \,\mathrm{d}\hat{\mu}\Big| \\ &\quad\overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

wir erhalten mit (4.61)

$$\int_{U_{j_0}} \hat{\alpha}_{\mathbf{W}}^2 \,\mathrm{d}\hat{\mu} = 0$$

und damit insbesondere

$$\hat{\alpha}_{\mathbf{W}} \equiv 0 \text{ auf } \hat{F}(U_{j_0}).$$

Behauptung (4.39) folgt nun für $j_0 \to \infty$.

Sei abschließend zum Nachweis der Nichtkompaktheit von $\hat{F}(\hat{\Sigma})$ angenommen, es existiere ein $R > 0$ mit $\hat{F}(\hat{\Sigma}) \subset B_R(0) \Subset \mathbf{R}^3$. Da $\hat{F}$ eigentliche Abbildung ist, folgt Kompaktheit von $\hat{\Sigma}$ und damit die Existenz eines $j_0 \in \mathbf{N}$, sodaß für alle wie in (4.54) definierten Mengen U_j mit $j \geq j_0$

$$\hat{\Sigma} = U_j.$$

Damit sind alle zugehörigen $V_j = \phi_j(U_j)$ offen und abgeschlossen in Σ und es ergibt sich für diese j

$$\hat{\Sigma} \simeq \Sigma \text{ mittels } \phi_j.$$

Aus (4.55) folgt dann aber nach Annahme an $\hat{F}_0(\hat{\Sigma})$ für hinreichend große j

$$F_j^e(\Sigma, 0) = F_j^e(\phi_j(\hat{\Sigma}), 0) \subset B_{2R}(0)$$

und wir erhalten insbesondere eine uniforme Durchmesserschranke an alle $F_j^e(\Sigma, 0)$. Da aber nach Lemma 2.17 aufgrund der Flusseigenschaften von (WFF)

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(F_j^e(\Sigma,0)) &= \operatorname{diam}(F_j(\Sigma,0)) \\
&= \rho_j^{-1} \operatorname{diam}(F(\Sigma,t_j)) \\
&> c\rho_j^{-1} \left(\frac{|F(\Sigma,t_j)|}{\mathbf{W}(F(\Sigma,t_j))} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq c\rho_j^{-1} \left(\frac{|F_0(\Sigma)|}{\mathbf{W}(F_0(\Sigma))} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\xrightarrow{j\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

folgt ein Widerspruch und damit die Behauptung. □

4.4.2 Langzeitexistenz bei kleiner Willmoreenergie

Unter Zusatzannahmen an die Topologie von Σ sind wir nun in der Lage, bei hinreichend kleiner Willmoreenergie der Startfläche $F_0(\Sigma)$ und ausreichender Zentrierung aller $F(\Sigma,\cdot)$ die Herausbildung von L^2-Krümmungskonzentrationen unter (WFF) in $\mathbf{M}$ ausschließen und damit insbesondere ein Langzeitexistenzresultat aufstellen zu können. Zentrale Werkzeuge hierfür sind das in [KS04, Lemma 5.1] aufgestellte Kompaktheitsresultat sowie die durch [Bry84, (4.4)] gegebene Klassifikation von Willmoresphären im $\mathbf{R}^3$, mit deren Hilfe wir unter obigen Voraussetzungen auf die Unmöglichkeit der Existenz einer wie in Satz 4.18 konstruierten Blowupfläche schließen können.

Galten die Resultate bis zu diesem Punkt für beliebige geschlossene 2-Flächen Σ, so schränken wir unsere Betrachtungen im Folgenden auf *sphärische* Σ ein, die also insbesondere der Forderung

$$\operatorname{genus}(\Sigma) = 0$$

genügen.

Lemma 4.19 (Ausbleiben von Krümmungskonzentrationen). *Sei Σ sphärisch und sei $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \mathbf{M}$ maximale Lösung von* (WFF) *mit*

$$\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \leq 16\pi - \zeta$$

für ein $\zeta > 0$. Dann existiert ein $r_0(m, \kappa, \sigma, \zeta^{-1})$, sodaß, falls $B_{r_0}(0)$ innerhalb aller $F(\Sigma,\cdot)$ liegt, keine L^2-Krümmungskonzentration im Sinne von Definition 4.12 auftritt.

Beweis. Wir folgen der Argumentation in [KS04, Satz 5.2]. Sei F wie oben und r_0 zunächst wie in (VΣ) gewählt. Nehmen wir an, daß sich die Krümmung von Σ bei einem $T \in [0, T_{\max}]$ konzentriert, so existieren nach Satz 4.18 wie in (4.38) definierte Flächen $F_j^e(\Sigma, 0) \subset \mathbf{R}^3$, $j \in \mathbf{N}$, und eine nichtkompakte Willmorefläche $\hat{F}(\hat{\Sigma}) \subset \mathbf{R}^3$, die Eigenschaft (4.40) erfüllt.

Nun gilt nach Voraussetzung an F und wegen Korollar 2.15 für alle $t \in [0, T_{\max})$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(F(\Sigma,t))_{g^e} &\leq (1 + c(mr_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2}))\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) \\ &\leq 16\pi - \zeta + c(mr_{\min}^{-1} + \kappa r_{\min}^{-2}), \end{aligned}$$

woraus sich für hinreichend großes $r_0(m, \kappa, \zeta^{-1})$ die Relation $\mathbf{W}(F(\Sigma,t))_{g^e} \leq 16\pi - \zeta/2$ und damit insbesondere für alle $j \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{W}(F_j^e(\Sigma, 0))_{g^e} \leq 16\pi - \frac{\zeta}{2} \tag{4.62}$$

ergibt. Ist nun für ein festes $x_0 \notin \hat{F}(\hat{\Sigma})$ die Abbildung $I : \mathbf{R}^3 \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ durch

$$I(x) := \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2}$$

definiert, so ist nach [KS04, Lemma 5.1] die Menge

$$\Omega := I(\hat{F}(\hat{\Sigma})) \cup \{0\} \subset \mathbf{R}^3$$

eine glatte, kompakte Willmorefläche, die wegen (4.62) und [KS04, (5.5)]

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\Omega)_{g^e} &\leq \liminf_{j\to\infty} \mathbf{W}(F_j^e(\Sigma, 0))_{g^e} \\ &< 16\pi \end{aligned} \tag{4.63}$$

sowie nach [KS04, (5.6)]

$$\begin{aligned} \operatorname{genus}(\Omega) &\leq \liminf_{j\to\infty} \operatorname{genus}(F_j^e(\Sigma, 0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt. Damit ist Ω Willmoresphäre im $\mathbf{R}^3$; nach [Bry84, (4.4)] gilt dann aber $\mathbf{W}(\Omega)_{g^e} = 8k\pi$ für ein $k \in \mathbf{N}$ (genauer gilt $k = 1$ oder $k \geq 4$), woraus sich wegen (4.63)

$$\mathbf{W}(\Omega)_{g^e} = 8\pi$$

ergibt. Die Menge Ω stellt also eine Koordinatensphäre durch den Ursprung dar, woraus sich schließen lässt, daß die Fläche $\hat{F}(\hat{\Sigma}) = I^{-1}(\Omega \setminus \{0\})$ eine Ebene im $\mathbf{R}^3$ beschreibt. Es ergibt sich $\hat{A} \equiv 0$ auf $\hat{\Sigma}$ und damit ein Widerspruch zu Eigenschaft (4.40). □

Aus obigem Resultat ergibt sich sofort die Kernaussage dieses Abschnittes.

Satz 4.20 (Langzeitexistenz)**.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.19 gilt*

$$T_{\max} = \infty \tag{4.64}$$

und für jedes $\beta > 0$ existiert ein $\rho > 0$ mit

$$\sup_{t\in[0,T_{\max})} \sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \, d\mu < \beta. \tag{4.65}$$

Beweis. Aussage (4.64) folgt direkt aus Lemma 4.14 und Lemma 4.19. Zum Beweis von (4.65) nehmen wir an, es gäbe ein $\beta > 0$, sodaß für jedes $\rho_i := \frac{1}{i}$ ein $t_i \in [0, T_{\max})$ existiert mit

$$\sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,t_i)\cap B_{\rho_i}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \geq \beta.$$

Besitzt die Folge $(t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ eine streng monoton steigende Teilfolge, so impliziert dies im Sinne von Definition 4.12 direkt eine L^2-Krümmungskonzentration auf β bei einem $T \in (0, T_{\max}]$ und damit abermals einen Widerspruch zu Lemma 4.19. Existiert *keine* solche Teilfolge, so sind alle t_i uniform beschränkt und es gibt insbesondere ein (endliches) $\tilde{t} \in [0, T_{\max})$ und eine Teilfolge $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$ mit

$$t_j \xrightarrow{j\to\infty} \tilde{t}.$$

Völlig analog zur Argumentation, die im Beweis von Lemma 4.15 auf Aussage (4.36) geführt hat, ergibt sich daraus aber für alle j

$$\rho_j^2 \cdot \|A\|^2_{\infty,F(\Sigma,\tilde{t})} \geq C(\beta, \mathbf{W}(F_0(\Sigma))^{-1}) > 0$$

und für $j \to \infty$ ein Widerspruch zur Glattheit von $F(\Sigma, \tilde{t})$. Die Behauptung folgt. □

4.5 Langzeitverhalten

Mit Satz 4.20, d.h. dem Beweis von Langzeitexistenz des Flusses (WFF) bei hinreichend weit vom Ursprung entfernten Flächen, sind nun die Weichen für die Untersuchung des Verhaltens dieser Flächen für $t \nearrow \infty$ gestellt. Mit den uns zur Verfügung stehenden Techniken und Argumenten können wir unter (WFF) in $\mathbf{M}$ relativ einfach auf Teilfolgenkonvergenz der Flächen gegen stationäre Flächen schließen.

Unter Hinzunahme der Methoden aus [KS01, Lemma 5.5] lassen sich zumindest im $\mathbf{R}^3$ noch weitaus bessere Resultate erzielen – hierfür verweisen wir auf Abschnitt A.1.

4.5.1 Teilfolgenkonvergenz

Lemma 4.21. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.19 gibt es für jede Folge $(t_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $t_i \nearrow \infty$ eine Teilfolge $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$ und eine Immersion $F_\infty : \Sigma \to \mathbf{M}$ mit*

- *$F_\infty(\Sigma)$ ist stationäre Fläche unter* (WFF)*, d.h. für die durch F_∞ induzierten geometrischen Größen $(\cdot)_\infty$ gilt*

$$\alpha_{\mathbf{W}\infty} = -\triangle_\infty H_\infty - H_\infty \left(|\mathring{A}_\infty|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}_\infty(\nu,\nu) \right) = H_\infty \lambda_\infty, \tag{4.66}$$

- *die Flächen $F(\Sigma, t_j)$ konvergieren für jedes $k \geq 0$ in $C^k(\mathbf{M})$ gegen $F_\infty(\Sigma)$.*

Beweis. Nach Satz 4.20 existiert zunächst ein $\rho > 0$, sodaß für ε_0 wie in Bedingung (Vη)

$$\sup_{x\in\mathbf{M}} \int_{F(\Sigma,\cdot)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon_0,$$

damit ist (Vη) für alle $\tilde{\eta}_x \in C^2(\mathbf{M})$ mit $\chi_{B_{\rho/2}(x)}(\cdot) \leq \tilde{\eta}_x(\cdot) \leq \chi_{B_\rho(x)}(\cdot)$ bzw. die durch Einschränkung induzierten Abschneidefunktionen η_x erfüllt. Außerdem existiert wie im Beweis zu Satz 4.18 ein kompaktes $K \subset \mathbf{M}$ mit $F(\Sigma,\cdot) \subset K$ und wir können $\Pi_k := \sup_K |\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}}|$ für alle $k \in \mathbf{N}$ setzen. Mit Satz 3.23 ergibt sich nun auf dem Zeitintervall $[1,\infty)$ uniform

$$\|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,\Sigma} \leq C(k,\mathbf{M},F_0(\Sigma)), \tag{4.67}$$

wobei von uniformen Schranken an alle $\|\tilde{\eta}_x\|_{C^2(\mathbf{M})}$ ausgegangen wurde und benutzt, daß

$$|[\eta_x > 0]| \leq |F_0(\Sigma)|$$

sowie nach Satz 4.7 für alle $t \geq 1$

$$\|\lambda\|^2_{2,[t-1,t]} \leq C(F_0(\Sigma),\mathbf{M}).$$

Wir können uns nun konzeptuell am Beweis von Satz 4.18 orientieren. Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Indexmenge J und eine Überdeckung $\bigcup_{j\in J} U_j \supset K$, sodaß für die zweite Fundamentalform A_N jeder glatten Hyperfläche $N \subset K$ und jedes $j \in J$

$$\|(\nabla^{(k)} A_N)^e\|_{\infty,N\cap U_j} \leq C(U_j,k,\sum_{r\leq k}\|\nabla^{(r)} A\|_{\infty,N},\sum_{r\leq k}\Pi_r),$$

Kombination hiervon mit (4.67) liefert auf $[1,\infty)$ sofort

$$\|(\nabla^{(k)} A)^e\|_{\infty,\Sigma} \leq C(k,\mathbf{M},F_0(\Sigma)).$$

Sei nun die Folge $(t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ wie oben gegeben und $F_i(\Sigma,t) := F(\Sigma,t+t_i)$. Alle Flächen $F_i(\Sigma,0)$ genügen nach Lemma 2.18 einer uniformen Durchmesserschranke; damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung von [Bre12, Satz 1.1] auf die Flächen $F_i^e(\Sigma,0) := \mathrm{id}(F_i(\Sigma,0)) \subset \mathbf{R}^3$ erfüllt und es existieren eine Teilfolge $(F_j^e(\Sigma,0))_{j\in\mathbf{N}}$, Diffeomorphismen $\phi_j : \Sigma \to \Sigma$ und eine Immersion $F_\infty^e : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ mit

$$F_j^e(\phi_j(\cdot),0) \to F_\infty^e \text{ in } C^k(\Sigma)$$

für alle $k \geq 0$. Damit ergibt sich insbesondere für die Immersion $F_\infty := \mathrm{id}^{-1} \circ F_\infty^e$

$$F_j(\phi_j(\cdot),0) \to F_\infty \text{ in } C^k(\Sigma) \tag{4.68}$$

und es bleibt nur noch Aussage (4.66) zu zeigen: Ähnlich zu Rechnung (4.60) erfüllen die durch die Variationen $F_j(\Sigma,\cdot)$ induzierten geometrischen Größen $(\cdot)_j$ zunächst

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_\Sigma(-\alpha_{\mathbf{W}\,j}+\lambda_j H_j)^2\,\mathrm{d}\mu_j\,\mathrm{d}\xi &= \int_{t_j}^{t_j+1}\int_\Sigma(-\alpha_{\mathbf{W}}+\lambda H)^2\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{t_j+1}^{t_j}\int_\Sigma(-\alpha_{\mathbf{W}}+\lambda H)\alpha_{\mathbf{W}}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi\\ &= \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j))-\mathbf{W}(F(\Sigma,t_j+1))\\ &\overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned} \tag{4.69}$$

woraus wir analog zum Vorgehen im Beweis zu Satz 4.18 durch uniforme Beschränkung von $|\partial_t\int_\Sigma(-\alpha_{\mathbf{W}\,j}+\lambda_j H_j)^2\,\mathrm{d}\mu_j|$ mit Hilfe der Schranken (4.67) und der uniformen Schranke an alle $|F_j(\Sigma,\cdot)|$ auf die *punktweise* Konvergenz

$$\int_\Sigma(-\alpha_{\mathbf{W}\,j}+\lambda_j H_j)^2\,\mathrm{d}\mu_j\Big|_t \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für alle $t \in [0,1]$ schließen können. Da wegen (4.68) außerdem

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}\,j} + \lambda_j H_j)^2 \, \mathrm{d}\mu_j \Big|_{t=0} - \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}\infty} + \lambda_\infty H_\infty)^2 \, \mathrm{d}\mu_\infty \Big| \\
&\quad = \Big| \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}} + \lambda H)^2_{F_j(\phi_j(\cdot),0)} \, \mathrm{d}\mu_{F_j(\phi_j(\cdot),0)} - \int_\Sigma (-\alpha_{\mathbf{W}\infty} + \lambda_\infty H_\infty)^2 \, \mathrm{d}\mu_\infty \Big| \\
&\quad \xrightarrow{j \to \infty} 0,
\end{aligned}$$

ergibt sich abschließend

$$-\alpha_{\mathbf{W}\infty} + \lambda_\infty H_\infty \equiv 0$$

und damit die Behauptung. $\square$

Anhang A

Flächeninhaltserhaltender Willmore–Fluss in weiteren Mannigfaltigkeiten

A.1 Langzeitexistenz und glatte Konvergenz im $\mathbf{R}^3$

Betrachten wir den Fluss (WFF) nicht in $\mathbf{M}$, sondern für Hyperflächen im $\mathbf{R}^3$, so lassen sich die bisherigen aufgestellten Resultate problemlos übertragen, ohne auf eine hinreichende Zentrierung der Flächen Rücksicht nehmen zu müssen; insbesondere ergibt sich wie in Abschnitt 4.4 Langzeitexistenz des Flusses für alle sphärischen Startflächen $F_0(\Sigma) \subset \mathbf{R}^3$ mit hinreichend kleiner Willmoreenergie.

Proposition A.1 (Langzeitexistenz)**.** *Sei $F_0 : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ glatte Immersion einer Sphäre mit*

$$\mathbf{W}(F_0(\Sigma)) < 16\pi.$$

Dann gilt für die maximale Existenzzeit $T_{\max}$ des Flusses (WFF) *zu Startwerten $F_0(\Sigma)$*

$$T_{\max} = \infty$$

und für jedes $\beta > 0$ existiert ein $\rho > 0$ mit

$$\sup_{t\in[0,T_{\max})} \sup_{x\in\mathbf{R}^3} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_\rho(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu < \beta. \tag{A.1}$$

□

Ebenfalls ließe sich nun Lemma 4.21 übertragen und damit wie bei (WFF) in $\mathbf{M}$ Teilfolgenkonvergenz der Flächen für $t \to \infty$ gewährleisten. Im $\mathbf{R}^3$ lässt sich dieses Ergebnis jedoch stark verbessern:

Zentraler Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist, daß bei der Übertragung von Lemma 4.21 in den $\mathbf{R}^3$ benutzt werden kann, daß nach Proposition 4.8 unter (WFF) für $t \to \infty$

$$\|\lambda\|^2_{2,[t,\infty)} \longrightarrow 0,$$

und damit jede analog zum Vorgehen wie in Lemma 4.21 konstruierte Grenzfläche eine (kompakte) Willmorefläche im $\mathbf{R}^3$ darstellt, die sich mit den Resultaten aus [Bry84] als runde Sphäre vorgegebener Größe identifizieren lässt. Hiervon ausgehend lässt sich nun weitgehend wie in [KS01, Lemma 5.5] verfahren, um exponentiell schnellen Abfall von $\mathring{A}$ und damit zusammenhängend aller $\nabla^{(k)}A$ herzuleiten. Diese Schritte bündelt folgender

Satz A.2. *Unter den Voraussetzungen von Proposition A.1 gilt unter* (WFF)

$$\|\mathring{A}\|^2_{2,\Sigma}(t) \le C\exp(-ct) \xrightarrow{t\to\infty} 0, \tag{A.2}$$
$$\|\mathring{A}\|_{\infty,\Sigma}(t) \le C\exp(-ct) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \tag{A.3}$$

und für $k \ge 1$

$$\|\nabla^{(k)} A\|^2_{2,\Sigma}(t) \le C\exp(-ct) \xrightarrow{t\to\infty} 0, \tag{A.4}$$
$$\|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,\Sigma}(t) \le C\exp(-ct) \xrightarrow{t\to\infty} 0, \tag{A.5}$$

mit $C = C(k, F_0(\Sigma))$ *und einer absoluten Konstante c.*

Beweis. Durch Argumentation wie im Beweis zu Lemma 4.21 existieren zunächst für jede Folge $t_i \nearrow \infty$ eine Teilfolge $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$, Punkte $x_j \in \mathbf{R}^3$ und eine Immersion $F_\infty : \Sigma \to \mathbf{R}^3$ mit den Eigenschaften

- $F_\infty(\Sigma)$ ist Willmorefläche im $\mathbf{R}^3$, d.h. $\alpha_{\mathbf{W}\infty} = -\triangle_\infty H_\infty - H_\infty|\mathring{A}_\infty|^2 \equiv 0$,
- die Flächen $F(\Sigma, t_j) - x_j$ konvergieren für jedes $k \ge 0$ in $C^k(\mathbf{R}^3)$ gegen $F_\infty(\Sigma)$,

wobei Rechnung (4.69) unter Benutzung von Proposition 4.8 durch die stärkere Aussage

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_j+1}\int_\Sigma {\alpha_{\mathbf{W}}}^2 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\xi &= \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j)) - \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j+1)) + \int_{t_j}^{t_j+1}\left(\lambda^2\int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\xi\\ &\le \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j)) - \mathbf{W}(F(\Sigma,t_j+1)) + c\mathbf{W}(F_0(\Sigma))\|\lambda\|^2_{2,[t_j,\infty)}\\ &\xrightarrow{j\to\infty} 0\end{aligned}$$

ersetzt wurde.

Aufgrund der C^k-Konvergenz der Flächen $F(\Sigma,t_j) - x_j$ gilt aber zusätzlich

$$\mathbf{W}(F_\infty(\Sigma)) < 16\pi$$

sowie

$$|F_\infty(\Sigma)| = |F_0(\Sigma)|,$$

damit ist $F_\infty(\Sigma)$ nach [Bry84, (4.4)] runde Sphäre im $\mathbf{R}^3$ mit Flächeninhalt $|F_0(\Sigma)|$, und wir erhalten insbesondere für die durch $F(\cdot,t_j)$ und F_∞ induzierten mittleren Krümmungen $H(t_j)$ bzw. H_∞ gleichmäßig auf Σ

$$H(t_j) \xrightarrow{j\to\infty} H_\infty \equiv \left(\frac{16\pi}{|F_0(\Sigma)|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Eigenschaft gilt *unabhängig* von der eingangs gewählten Folge $(t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ – wir können also schließen, daß es ein $t' \in [0,\infty)$ gibt mit

$$\inf_\Sigma H(t) > c > 0 \tag{A.6}$$

für alle $t \ge t'$. Analog lässt sich argumentieren, daß für $t \nearrow \infty$

$$\|\mathring{A}\|_{\infty,\Sigma}(t) \to 0$$

und damit für hinreichend großes t (d.h. ohne Einschränkung wieder für $t \geq t'$) die Voraussetzungen zu [KS01, Proposition 2.6] erfüllt sind; diese liefert auf $[t',\infty)$ direkt

$$\int_\Sigma |\nabla^{(2)}A|^2 + |\nabla A|^2|A|^2 + |A|^4|\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq c\int_\Sigma {\alpha_{\mathbf{W}}}^2 \,\mathrm{d}\mu$$

mit $\alpha_{\mathbf{W}}$ wie in Abschnitt 2.2 definiert, und durch Kombination mit (A.6) insgesamt die technische Abschätzung

$$\int_\Sigma |\nabla^{(2)}A|^2 + |\nabla A|^2 + |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq c\int_\Sigma {\alpha_{\mathbf{W}}}^2 \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{A.7}$$

Wir nutzen nun aus, daß sich das Willmorefunktional nach Proposition 2.2 im $\mathbf{R}^3$ nur um die topologische Konstante $\int_\Sigma \mathrm{Sc}\,\mathrm{d}\mu = 8\pi$ von $\|\mathring{A}\|^2_{2,\Sigma}$ unterscheidet, und rechnen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2 zunächst

$$\begin{aligned}\partial_t \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu &= \partial_t \mathbf{W}(F(\Sigma,t))\\ &= -\int_\Sigma {\alpha_{\mathbf{W}}}^2 \,\mathrm{d}\mu + \lambda(t)\int_\Sigma H\alpha_{\mathbf{W}} \,\mathrm{d}\mu\\ &\leq -\int_\Sigma {\alpha_{\mathbf{W}}}^2 \,\mathrm{d}\mu + c\lambda(t)^2\mathbf{W}(F(\Sigma,t)).\end{aligned} \tag{A.8}$$

Beachtet man nun, daß außerdem nach Proposition 4.8 wegen der gleichmäßigen Schranken an $\mathbf{W}(F(\Sigma,\cdot))$ für ein $c > 0$

$$\begin{aligned}\lambda(t)^2 &\leq -c\partial_t(\mathbf{W}(F(\Sigma,t))^2)\\ &\leq -c\partial_t \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

so ergibt sich aus (A.8) und nach Einsetzen von (A.7) auf $[t',\infty)$

$$\partial_t \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq -c\int_\Sigma |\nabla^{(2)}A|^2 + |\nabla A|^2 + |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu - c\partial_t \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu,$$

und wir erhalten nach Umformen abschließend

$$\partial_t \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu + c\int_\Sigma |\nabla^{(2)}A|^2 + |\nabla A|^2 + |\mathring{A}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq 0, \tag{A.9}$$

woraus sich insbesondere Aussage (A.2) auf $[t',\infty)$, und, nach eventueller Anpassung der Konstante C, für alle $t \geq 0$ ergibt.

Nun existiert nach Aussage (A.1) ein festes $\rho > 0$, sodaß Eigenschaft (Vη) für jede Abschneidefunktion $\tilde{\eta}_x \in C^2(\mathbf{R}^3)$ mit $\operatorname{spt}\tilde{\eta}_x \subset B_\rho(x) \subset \mathbf{R}^3$ erfüllt ist. Die C^2-Normen aller $\tilde{\eta}_x$ lassen sich uniform in x wählen und wir erhalten mit einem Analogon von Satz 3.23 für alle $k \geq 0$ die inneren Krümmungsschranken

$$\sup_{[t',\infty)} \|\nabla^{(k)}A\|_{\infty,\Sigma} \leq C_k(k,\rho^{-1},F_0(\Sigma)),$$

wobei zur Abschätzung der in (3.48) auftretenden $\|\lambda\|_2$-Terme wieder Proposition 4.8 benutzt wurde. Es ergeben sich insbesondere auch sup-Schranken an $|\lambda|$ und wir erhalten aus Lemma 3.10 (mit $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Pi = 0$) vollkommen analog zur Argumentation in [KS01, Lemma 5.5] auf $[t',\infty)$ für jedes $k \geq 1$ die Evolutionsgleichung

$$\partial_t \int_\Sigma |\nabla^{(k)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla^{(k+2)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C\sum_{r=1}^{k+1}\int_\Sigma |\nabla^{(r)}A|^2 \,\mathrm{d}\mu, \tag{A.10}$$

wobei C von allen Krümmungsschranken $C_0,\dots,C_{k+1}$ abhängt.

Wir können nun durch geschickte Kombination der Ungleichungen (A.9) und (A.10) auf Aussage (A.4) schließen. Sei dazu $k\geq 1$ beliebig, fest, und Koeffizienten $K_0,K_1,\dots,K_k>0$ zunächst beliebig gewählt. Bezeichne $\tilde{c}$ die Konstante in (A.9) und gelte ohne Einschränkung $\tilde{c}\leq 1/2$. Dann ergibt sich aus (A.9) und (A.10) direkt

$$\begin{aligned}
&K_0\Big(\partial_t\int_\Sigma|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu+\tilde{c}\int_\Sigma|\nabla^{(2)}A|^2+|\nabla A|^2+|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu\Big)\\
&\quad+\sum_{r=1}^{k}K_r\Big(\partial_t\int_\Sigma|\nabla^{(r)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+\tilde{c}\int_\Sigma|\nabla^{(r+2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\Big)\\
&\qquad\leq\hat{C}\sum_{r=1}^{k}K_r\sum_{p=1}^{r+1}\int_\Sigma|\nabla^{(p)}A|^2\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

für ein $\hat{C}$ abhängig von $C_0,\dots,C_{k+1}$, woraus sich durch Umordnung der Summenterme

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big(K_0\int_\Sigma|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu+\sum_{r=1}^{k}K_r\int_\Sigma|\nabla^{(r)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\Big)+\tilde{c}K_0\int_\Sigma|\nabla^{(2)}A|^2+|\nabla A|^2+|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\leq-\tilde{c}\sum_{r=1}^{k}K_r\int_\Sigma|\nabla^{(r+2)}A|^2\,\mathrm{d}\mu+\hat{C}\sum_{r=1}^{k}K_r\sum_{p=1}^{r+1}\int_\Sigma|\nabla^{(p)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\leq\sum_{r=3}^{k+1}\Big(-\tilde{c}K_{r-2}+\hat{C}\sum_{p=r-1}^{k}K_p\Big)\int_\Sigma|\nabla^{(r)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\\
&\qquad+\hat{C}\sum_{r=1}^{k}K_r\int_\Sigma|\nabla^{(2)}A|^2+|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

ergibt. Wir erhalten abschließend

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big(K_0\int_\Sigma|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu+\sum_{r=1}^{k}K_r\int_\Sigma|\nabla^{(r)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\Big)\\
&\quad\leq-\tilde{c}K_0\int_\Sigma|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu+\Big(-\tilde{c}K_0+\hat{C}\sum_{r=1}^{k}K_r\Big)\int_\Sigma|\nabla^{(2)}A|^2+|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu\\
&\qquad+\sum_{r=3}^{k+1}\Big(-\tilde{c}K_{r-2}+\hat{C}\sum_{p=r-1}^{k}K_p\Big)\int_\Sigma|\nabla^{(r)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\\
&\quad=-\frac{\tilde{c}}{2}\Big[2K_0\int_\Sigma|\mathring{A}|^2\,\mathrm{d}\mu+\Big(2K_0-\frac{2\hat{C}}{\tilde{c}}\sum_{r=1}^{k}K_r\Big)\int_\Sigma|\nabla^{(2)}A|^2+|\nabla A|^2\,\mathrm{d}\mu\\
&\qquad\qquad+\sum_{r=3}^{k+1}\Big(2K_{r-2}-\frac{2\hat{C}}{\tilde{c}}\sum_{p=r-1}^{k}K_p\Big)\int_\Sigma|\nabla^{(r)}A|^2\,\mathrm{d}\mu\Big].
\end{aligned}\tag{A.11}$$

Sei nun $K_k:=1$ und die Koeffizienten $K_{k-1},\dots,K_0$ induktiv festgelegt über

$$\begin{cases}2K_{k-1}-2\hat{C}\tilde{c}^{-1}K_k\geq 0,\\ 2K_{r-2}-2\hat{C}\tilde{c}^{-1}\sum_{p=r-1}^{k}K_p\geq K_r\quad\text{für }k\geq r\geq 3,\\ 2K_0-2\hat{C}\tilde{c}^{-1}\sum_{r=1}^{k}K_r\geq K_0.\end{cases}$$

Für *diese* K_i folgt dann aus (A.11) auf $[t', \infty)$

$$\partial_t \Big(K_0 \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \, \mathrm{d}\mu + \sum_{r=1}^{k} K_r \int_\Sigma |\nabla^{(r)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big)$$
$$\leq -\frac{\tilde{c}}{2} \Big(K_0 \int_\Sigma |\mathring{A}|^2 \, \mathrm{d}\mu + \sum_{r=1}^{k} K_r \int_\Sigma |\nabla^{(r)} A|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big)$$

und (A.4) ist gezeigt. Die Aussagen (A.3) und (A.5) folgen nun direkt aus Korollar B.16. □

A.2 Untere Schranken an die Existenzzeit in allgemeinen Mannigfaltigkeiten

Beim Beweis der Resultate in den Abschnitten 3.1 und 4.1.2 und damit der Existenz von Kurzzeitlösungen der Flüsse (WF$*$) bzw. (WFF) in $(\mathbf{M}, g)$ wurde von der asymptotisch schwarzschildschen Gestalt der Metrik g kein Gebrauch gemacht, und es lassen sich daher direkt zu den Sätzen 3.2 und 4.3 analoge Resultate in allgemeinen Riemannschen 3-Mannigfaltigkeiten $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$ beweisen.

Proposition A.3. *Sei $F_0(\Sigma) \subset \tilde{\mathbf{M}}$ glatte Immersion. Dann existiert existiert ein $T_1 > 0$ und eine eindeutige Lösung $F : \Sigma \times [0, T_1) \to \tilde{\mathbf{M}}$ des Flusses* (WFF).

Für eine gegebene Funktion $\theta \in C^{0,1}([0, T'))$, $T' > 0$, existiert ein $T_2 \in (0, T']$ und eine eindeutige Lösung $F : \Sigma \times [0, T_2) \to \tilde{\mathbf{M}}$ des Flusses (WF$*$) *bezüglich θ.* □

Es stellt sich die Frage, ob auch eine Verallgemeinerung der Ergebnisse der Abschnitte 3.4 und 4.3 und damit die Herleitung eines Existenzzeitresultates für die Flüsse (WF$*$) bzw. (WFF) in allgemeinen Mannigfaltigkeiten möglich ist. Problematisch hierbei ist die Abhängigkeit der Evolutionsgleichungen in Abschnitt 3.2.2 von der Gültigkeit der Sobolevungleichung (B.20) aus Lemma B.13 (implizit also vom Abfallverhalten der Metrik und Forderung (VΣ)) – eine Abhängigkeit, die sich damit auch auf die in den Abschnitten 3.4 und 4.3 verwendeten Krümmungsabschätzungen ausweitet.

Abhilfe schafft die Sobolevungleichung [HS74, Satz 2.1], die eine zu Lemma B.13 analoge Aussage auch in $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$ zur Verfügung stellt – dies jedoch nur unter Einfluss der Geometrie von $\tilde{\mathbf{M}}$ auf die Menge der zugelassenen Funktionen f.

Im Folgenden steht $\overline{\sec}$ stellvertretend für alle Schnittkrümmungen von $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$. Mit Proposition 2.1 lassen sich direkt für eine beliebige $\tilde{g}$-Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $T_p\tilde{\mathbf{M}}$

$$\overline{\sec}(\operatorname{span}\{e_1, e_2\}) = \frac{1}{2} \big(\overline{\mathrm{Rc}}(e_1, e_1) + \overline{\mathrm{Rc}}(e_2, e_2) - \overline{\mathrm{Rc}}(e_3, e_3) \big)$$

und Analoga für alle weiteren $e_i \neq e_j$ zeigen. Hiermit ergibt sich insbesondere die Relation

$$|\overline{\sec}| < |\overline{\mathrm{Rc}}|_{\tilde{g}}$$

sowie für eine beliebige Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von $T_p\Sigma$

$$\overline{\mathrm{Rc}}(\nu, \nu) = \overline{\sec}(\operatorname{span}\{e_1, \nu\}) + \overline{\sec}(\operatorname{span}\{e_2, \nu\}).$$

Satz A.4 ([HS74, Satz 2.1] mit $m = 2, n = 3, \alpha = 3/4$)**.** *Sei $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$ Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit, $F : (\Sigma, \gamma) \to (\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$ isometrische Immersion.*

Existiert ein $b = b(\tilde{\mathbf{M}}) > 0$ *mit*

$$\begin{aligned} &\overline{\sec} \le b^2, \\ &\pi b^{-1} \le \operatorname{inj}_{\tilde{g}}(F(\Sigma)), \end{aligned} \tag{A.12}$$

wobei $\operatorname{inj}_{\tilde{g}}(F(\Sigma)) := \inf\{\operatorname{inj}_{\tilde{g}}(p) : p \in F(\Sigma) \subset \tilde{\mathbf{M}}\}$*, so gilt Ungleichung* (B.20) *mit einer absoluten Konstante c für jedes nichtnegative* $f \in C^1(\Sigma)$ *mit*

$$3b^2 |\operatorname{spt} f|_\gamma \le \pi. \tag{A.13}$$

Gelten anstelle von (A.12) *die (stärkeren) Eigenschaften*

$$\begin{aligned} &\overline{\sec} \le 0, \\ &\operatorname{inj}_{\tilde{g}}(F(\Sigma)) = \infty, \end{aligned} \tag{A.14}$$

so kann formal $b = 0$ *gewählt werden – Ungleichung* (B.20) *gilt damit unabhängig von Voraussetzung* (A.13). □

Unter den Voraussetzungen von Satz A.4 ergibt sich sofort ein Analogon von Korollar B.15 für alle f, die der Voraussetzung (A.13) genügen. Bei der Übertragung aller weiteren in Abschnitt B.3 aufgestellten Resultate können wir uns ihre lokale Natur zunutze machen, um Forderung (A.13) direkt in eine Forderung an die Abschneidefunktionen η umzuwandeln:

Proposition A.5. *Seien* $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$*,* (Σ, γ)*, F und* $b \ge 0$ *wie in Satz A.4, und* $\eta \in C^1_c(\Sigma)$ *Abschneidefunktion mit* $|\nabla \eta| \le \Lambda < \infty$ *sowie*

$$3b^2 |\operatorname{spt} \eta|_\gamma \le \pi. \tag{A.15}$$

Dann gilt Ungleichung (B.21) *für alle nichtnegativen* $f \in C^1(\Sigma)$*. Für dieses* η *ergibt sich außerdem die Gültigkeit der Ungleichung aus Lemma B.18, und es existiert eine absolute Konstante* $\tilde{\varepsilon}_0 \in (0,1)$*, sodaß unter der Voraussetzung*

$$\|A\|^2_{2,[\eta>0]} < \tilde{\varepsilon}_0$$

die Ungleichungen aus Proposition B.19 gültig sind. □

Sei im Folgenden $F_0 : \Sigma \to \tilde{\mathbf{M}}$ beliebige, feste Immersion, und eine kompakte Umgebung $V \subset \tilde{\mathbf{M}}$ von $F_0(\Sigma)$ fest gewählt, die für ein geeignetes $\rho_0 > 0$, ein festes, minimal gewähltes $N \in \mathbf{N}$, und alle *metrischen* Kugeln $B^{\tilde{g}}_\rho(x)$ mit $x \in V$ und $\rho < \rho_0$ der Forderung

$$\text{Es gibt } x_1, \ldots, x_N \in V \text{ mit } B^{\tilde{g}}_\rho(x) \subset \bigcup_i B^{\tilde{g}}_{\rho/2}(x_i) \tag{A.16}$$

genügt. Damit lässt sich N in Überdeckungsargumenten einsetzen, die denen im Beweis zu Satz 3.25 entsprechen. Sei außerdem $b = b(V) \ge 0$ explizit durch

$$b := \begin{cases} 0, & \overline{\sec} \le 0 \text{ und } \operatorname{inj}_{\tilde{g}}(\tilde{\mathbf{M}}) = \infty, \\ \max\left\{ \sup_V |\overline{\mathrm{Rc}}|^{\frac{1}{2}}, \pi(\operatorname{inj}_{\tilde{g}}(V))^{-1} \right\}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.17}$$

festgelegt; dies stellt eine zur Verwendung in Satz A.4 bzw. Proposition A.5 geeignete Wahl von b für *alle* Immersionen $F(\Sigma) \subset V$ dar. Wir bemerken, daß für jedes kompakte V Konstanten ρ_0, N wie oben existieren und darüberhinaus $b(V) < \infty$ gilt; die Wahl

$$V = \tilde{\mathbf{M}}$$

ist damit bei allen kompakten $\tilde{\mathbf{M}}$ zulässig und allgemeiner bei allen $\tilde{\mathbf{M}}$, für die alle auf den folgenden Seiten auftretenden Ausdrücke wohldefiniert sind.

Für $b \geq 0$ wie in (A.17) definieren wir im Folgenden die Größe $\zeta_0 = \zeta_0(V) \in \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ formal durch

$$\zeta_0 := \frac{\pi}{3b^2} \tag{A.18}$$

und können somit Bedingung (A.15) äquivalent durch

$$|\operatorname{spt}\eta|_\gamma \leq \zeta_0 \tag{A.19}$$

formulieren. Seien nun für $x \in V$ und $\rho > 0$ die Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x$ bezüglich der metrischen Kugeln $B^{\tilde{g}}_\rho(x)$ über die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\chi_{B^{\tilde{g}}_{\rho/2}(x)}(y) \leq \tilde{\eta}_x(y) \leq \chi_{B^{\tilde{g}}_{\rho}(x)}(y), \\ &\Lambda_i := \sup_{x\in V} |\overline{\nabla}^{(i)}\eta_x|_{\tilde{g}} < \infty \text{ für } i \in \{1,2\} \end{aligned} \tag{A.20}$$

festgelegt, und $\eta_x(\cdot,t) := \tilde{\eta}_x|_{F(\Sigma,t)}$ analog zu (3.20). Bei hinreichend kleinem ρ ist Bedingung (A.19) auf $F_0(\Sigma)$ für jedes η_x erfüllt; durch Adaption der Methoden aus Abschnitt 3.4 lässt sich gewährleisten, daß dies unter dem Fluss (WF$*$) auch auf einem kurzen Zeitintervall gewährleistet ist und wir erhalten ein Analogon zu Satz 4.11.

Wir bemerken, daß ein ähnliches Resultat für (WF) in $(\tilde{\mathbf{M}},\tilde{g})$ kürzlich in [MWW13] aufgestellt wurde; der Verzicht auf die kompakte Umgebung $V \supset F_0(\Sigma)$ und auf die damit verbundenen Ungenauigkeiten bei der Quantifizierung des Zeitintervalls wurde dort durch die Forderung nach globaler Erfüllbarkeit der Eigenschaften (A.12) erkauft. Insbesondere in kompakten $\tilde{\mathbf{M}}$ jedoch relativiert sich dieser Unterschied.

Satz A.6. *Sei* $(\tilde{\mathbf{M}},\tilde{g})$ *Riemannsche* 3*-Mannigfaltigkeit,* Σ *geschlossene* 2*-Fläche,* $F : \Sigma \times [0,T_{\max}) \to \tilde{\mathbf{M}}$ *maximale Lösung von* (WF$*$) *zu Startwerten* $F_0(\Sigma)$ *und sei* V *feste, kompakte Umgebung von* $F_0(\Sigma)$*. Dann existiert eine absolute Konstante* $\delta > 0$ *und Konstanten* $\tilde{\varepsilon}_1(V), N(V), \rho_0(V) > 0$, $\zeta_1(V) \in (0,\infty)$*, sodaß, falls die Bedingung*

$$\|\theta\|^2_{2,[0,T_{\max})} < \delta$$

und für $\rho < \rho_0$ *sowie* $\tilde{\varepsilon}' \leq \min\{\tilde{\varepsilon}_1, \zeta_1\}$ *die Bedingungen*

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in V} \int_{F_0(\Sigma)\cap B^{\tilde{g}}_\rho(x)} |A|^2 \, d\mu \leq \tilde{\varepsilon}', \\ &\sup_{x\in V} |F_0(\Sigma) \cap B^{\tilde{g}}_\rho(x)| \leq \zeta_1 \end{aligned}$$

erfüllt sind,

$$T_{\max} > t_* := \min\{(cN(\Lambda_1^4 + \Lambda_2^2))^{-1}, \tilde{\varepsilon}'(\Pi_1^2\zeta_1)^{-1}, t_{\tilde{\mathbf{M}}}, t_V\},$$

wobei Λ_i *für* $i \in \{1,2\}$ *wie in* (A.20) *definiert ist,* $\Pi_i := \sup_V |\overline{\nabla}^{(i)}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_{\tilde{g}}$,

$$t_V = \begin{cases} \infty, & F(\Sigma,t) \subset V \textit{ für alle } t \in [0,T_{\max}), \\ \inf\{t \leq T_{\max} : F(\Sigma,t) \not\subset V\}, & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$t_{\tilde{\mathbf{M}}} = c \cdot \min\{(N(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}}))^{-1}, N^{-1}, \Pi_1^{-2}\}.$$

Auf $[0,t_*]$ *gilt*

$$\sup_{x\in V} \int_{F(\Sigma,\cdot)\cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \le cN\tilde{\varepsilon}' \le \tilde{\varepsilon}_0$$

sowie

$$\sup_{x\in V} |F(\Sigma,\cdot)\cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)| \le \zeta_0$$

für $\tilde{\varepsilon}_0, \zeta_0$ *wie in Proposition A.5 bzw.* (A.18). *Unter Reskalierungen* $\tau \mapsto \tau^2\tilde{g}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
&N(\tau) \equiv N(1),\\
&\rho_0(\tau) \equiv \rho_0(1),\\
&\tilde{\varepsilon}_1(\tau) \equiv \tilde{\varepsilon}_1(1),\\
&\zeta_1(\tau) = \tau^2\zeta_1(1).
\end{aligned}$$

Ist t_V *wie oben definiert endlich, so hängt* t_V *in monoton steigender Weise von* $\mathrm{dist}(F_0(\Sigma), \partial V)$ *sowie* $\sum_{k\le 2} \sup_{[0,t_*]} \|\nabla^{(k)}A\|_{\infty,\Sigma}^{-1}$ *ab.*

Beweis. Wir können uns an der Argumentation in den Beweisen der Sätze 3.25 bzw. 4.11 orientieren. Wir wählen $\rho_0(V), N(V)$ und $\zeta_0(V)$ entsprechend zu (A.16) bzw. (A.18), $\tilde{\varepsilon}_0$ wie in Proposition A.5 und $\delta > 0$ zunächst beliebig, fest. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_1 &:= \frac{1}{4N}\tilde{\varepsilon}_0,\\
\zeta_1 &:= \begin{cases} \frac{1}{5N}\zeta_0, & \zeta_0 < \infty,\\ |F_0(\Sigma)|, & \zeta_0 = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{\varepsilon}' \le \min\{\tilde{\varepsilon}_1, \zeta_1\}$ sowie $\rho < \rho_0$ wie oben angenommen. Für Abschneidefunktionen $\tilde{\eta}_x$ wie in (A.20) setzen wir nun in Analogie zu (3.71)

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &:= \sup_{x\in V} \int_{F(\Sigma,t)\cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu,\\
\Phi(t) &:= \sup_{x\in V} \int_{F(\Sigma,t)} \eta_x^4 |A|^2 \, \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &:= \sup_{x\in V} |F(\Sigma,t)\cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)|,\\
\Psi(t) &:= \sup_{x\in V} \int_{F(\Sigma,t)} \eta_x^4 \, \mathrm{d}\mu\,.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ergeben sich damit die Relationen $\varepsilon(0) \le \tilde{\varepsilon}'$, $\zeta(0) \le \zeta_1$, sowie für alle $t \in [0, T_{\max})$

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &\le \varepsilon(t) \le N\Phi(t),\\
\Psi(t) &\le \zeta(t) \le N\Psi(t).
\end{aligned}$$

Sei nun $t_0 \in [0, T_{\max})$ als der erste Zeitpunkt definiert, an dem mindestens eines der Ereignisse

$$\Phi(t_0) = 4\tilde{\varepsilon}',$$
$$\Psi(t_0) = 5\zeta_1,$$
$$F(\Sigma, t_0) \not\subset \mathring{V}$$

eintritt. Falls $T_{\max} < \infty$, so folgt bei Nichtexistenz von t_0 wie in Rechnung (3.76)

$$\begin{aligned}\varepsilon(\cdot) &< 4N\tilde{\varepsilon}'\\ &\leq \tilde{\varepsilon}_0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\zeta(\cdot) &\leq N\Psi(\cdot)\\ &< 5N\zeta_1\\ &= \zeta_0,\end{aligned} \tag{A.21}$$

damit sind für alle $t \in [0, T_{\max})$ und alle $\eta_x(\cdot, t)$ die Voraussetzungen von Proposition A.5 erfüllt. Dies ermöglicht uns, in den Rechnungen in Kapitel 3.3 auf die Forderung (VΣ) zu verzichten, und wir erhalten analog zur Argumentation in Satz 3.25 für jedes $k \in \mathbf{N}$ die uniformen Schranken

$$\sup_{[0,T_{\max})} \|\nabla^{(k)} A\|_{\infty,\Sigma} < C,$$

wobei Rechnung (3.77) hier durch die aus (A.21) folgende uniforme Schranke

$$|[\eta_x > 0]| \leq N\Psi(\cdot) < 5N\zeta_1$$

ersetzt werden konnte. Da außerdem $\|\theta\|_{1,[0,T_{\max})} < \infty$, ergibt sich damit ein Widerspruch zur Maximalität von $T_{\max}$; Lemma 3.24 lässt sich hierfür direkt übernehmen.

Es bleibt nun die Aufgabe, t_0 auf geeignete Weise nach unten zu beschränken, wofür wir uns wiederholt der aus Satz 3.19 für alle $(x,t) \in V \times [0, t_0]$ folgenden Abschätzung

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \eta_x^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\Big|_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 \left(|\nabla^{(2)} A|^2 + |A|^6\right) \mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\leq \int_\Sigma \eta_x^4 |A|^2 \,\mathrm{d}\mu\Big|_0 + c\tilde{\varepsilon}' \int_0^t |\theta|^2 \,\mathrm{d}\xi\\ &\qquad + cN\tilde{\varepsilon}'(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2)\cdot t + c\Pi_1^2 \int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\leq \tilde{\varepsilon}' + c\delta\tilde{\varepsilon}' + cN\tilde{\varepsilon}'(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2)\cdot t + c\Pi_1^2 \int_0^t \Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{A.22}$$

bedienen werden. Wählen wir nun δ derart, daß

$$c\delta \leq 1,$$

so ergibt sich hieraus direkt

$$\Phi(t_0) < 2\tilde{\varepsilon}' + cN\tilde{\varepsilon}'(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2)\cdot t_0 + c\Pi_1^2 \zeta_1 \cdot t_0$$

und damit $\Phi(t_0) < 4\tilde{\varepsilon}'$, falls $t_0 < t_*$ wie oben festgelegt. Auch das Wachstum von Ψ lässt sich kontrollieren; zunächst ergibt sich unter Verwendung der Evolutionsgleichungen in Lemma 2.3 für alle $(x,t) \in V \times [0,t_0]$ direkt

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \eta_x^4 \,\mathrm{d}\mu\Big|_t &= \int_\Sigma \eta_x^4 \,\mathrm{d}\mu\Big|_0 + \int_0^t \partial_t \int_\Sigma \eta_x^4 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi \\
&\le \Psi(0) + c\int_0^t \int_\Sigma |\eta_x^3 \Lambda_1 + \eta_x^4 H|\,|\triangle H + H(|\mathring{A}|^2 + \overline{\mathrm{Rc}}_{\nu\nu} + \theta)| \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi \\
&\le \zeta_1 + c\int_0^t \int_\Sigma \eta_x^2 \Lambda_1^2 + \eta_x^4 (1+\Pi_0^2) H^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 \Big(|\nabla^{(2)} A|^2 + |A|^6 + H^2|\theta|^2 \Big) \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi \\
&\le \zeta_1 + cN\Lambda_1^2 \zeta_1 \cdot t + c(1+\Pi_0^2)\tilde{\varepsilon}' \cdot t + \delta\tilde{\varepsilon}' \\
&\quad + \int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 \Big(|\nabla^{(2)} A|^2 + |A|^6 \Big) \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{A.23}$$

woraus mit (A.22) nach Wahl von δ und wegen $\tilde{\varepsilon}' \le \zeta_1$

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &\le \zeta_1 + cN\Lambda_1^2 \zeta_1 \cdot t + c(1+\Pi_0^2)\tilde{\varepsilon}' \cdot t + 3\tilde{\varepsilon}' \\
&\quad + cN\tilde{\varepsilon}'(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2) \cdot t + c\Pi_1^2 \zeta_1 \cdot t \\
&\le 4\zeta_1 + cN\zeta_1 \cdot t + cN\zeta_1(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2) \cdot t + c\Pi_1^2 \zeta_1 \cdot t
\end{aligned}$$

ergibt. Für $t_0 < t_*$ wie oben festgelegt ergibt sich also $\Psi(t_0) < 5\zeta_1$; die Behauptung folgt. Die Monotonie von t_V ergibt sich abschließend analog zu Rechnung (3.57). □

Falls in $\tilde{\mathbf{M}}$ zusätzlich die Eigenschaften (A.14) erfüllt sind, bzw. in (A.18)

$$\zeta_0 = \infty$$

wählbar ist, so gilt folgende Variante von Satz A.6, die zusätzlich eine quantitative Aussage über lokale Flächeninhaltsschranken liefert.

Satz A.7. *Sei* $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{g})$ *Riemannsche* 3*-Mannigfaltigkeit mit*

$$\begin{aligned}
&\overline{\sec} \le 0, \\
&\mathrm{inj}_{\tilde{g}}(\tilde{\mathbf{M}}) = \infty,
\end{aligned}$$

sei Σ *geschlossene* 2*-Fläche,* $F : \Sigma \times [0, T_{\max}) \to \tilde{\mathbf{M}}$ *maximale Lösung von* (WF∗) *zu Startwerten* $F_0(\Sigma)$ *und* V *feste, kompakte Umgebung von* $F_0(\Sigma)$*. Dann existiert eine absolute Konstante* $\delta > 0$ *und Konstanten* $\tilde{\varepsilon}_1(V), N(V), \rho_0(V) > 0$*, sodaß, falls die Bedingung*

$$\|\theta\|^2_{2,[0,T_{\max})} < \delta$$

und für $\rho < \rho_0$ *sowie* $\tilde{\varepsilon}' \le \tilde{\varepsilon}_1$ *die Bedingung*

$$\sup_{x \in V} \int_{F_0(\Sigma) \cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \le \tilde{\varepsilon}'$$

erfüllt ist,

$$T_{\max} > t_* := \min\{(cN(\Lambda_1^4 + \Lambda_2^2))^{-1}, \tilde{\varepsilon}'\big(\Pi_1^2 \zeta'\big)^{-1}, t_{\tilde{\mathbf{M}}}, t_V\},$$

wobei

$$\zeta' := \sup_{x\in V} |F_0(\Sigma) \cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)|,$$

die Größen Λ_i, Π_i *und* t_V *wie in Satz A.6 festgelegt sind, sowie*

$$t_{\tilde{\mathbf{M}}} = c \cdot \min\{1, (N(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}}))^{-1}, \Pi_1^{-2}\}.$$

Auf $[0, t_*]$ *gilt*

$$\sup_{x\in V} \int_{F(\Sigma,\cdot)\cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)} |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \le cN\tilde{\varepsilon}' \le \tilde{\varepsilon}_0$$

für $\tilde{\varepsilon}_0$ *wie in Proposition A.5 sowie*

$$\sup_{x\in V} |F(\Sigma,\cdot) \cap B_\rho^{\tilde{g}}(x)| \le cN(\zeta' + \tilde{\varepsilon}').$$

Beweis. Es sind nur kleine Änderungen am Beweis zu Satz A.6 notwendig; wir wählen $\rho_0(V), N(V), \tilde{\varepsilon}_1$, sowie $\varepsilon(t), \Phi(t), \zeta(t), \Psi(t)$ wie dort.

Ist nun $t_0 \in [0, T_{\max})$ als der erste Zeitpunkt definiert, an dem eines der Ereignisse

$$\Phi(t_0) = 4\tilde{\varepsilon}',$$
$$\Psi(t_0) = 2\Psi(0) + 6\tilde{\varepsilon}',$$
$$F(\Sigma, t_0) \not\subset \mathring{V}$$

eintritt, so ergibt sich wie im Beweis zu Satz A.6 die Existenz von t_0 bei endlichem $T_{\max}$.

Ist δ wie dort gewählt, so ergibt sich analog zu (A.22) für $(x,t) \in V \times [0, t_0]$

$$\int_\Sigma \eta_x^4 |A|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big|_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Sigma \eta_x^4 \left(|\nabla^{(2)} A|^2 + |A|^6 \right) \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\xi$$
$$\le 2\tilde{\varepsilon}' + cN\tilde{\varepsilon}'(\Pi_0^2 + \Pi_1^{\frac{4}{3}} + \Lambda_1^4 + \Lambda_2^2) \cdot t + c\Pi_1^2(\Psi(0) + \tilde{\varepsilon}') \cdot t$$

und damit $\Phi(t_0) < 4\tilde{\varepsilon}'$, falls $t_0 < t_*$ wie oben.

Für $t \le t_0 < t_*$ ergibt sich damit analog zu Rechnung (A.23) direkt

$$\int_\Sigma \eta_x^4 \, \mathrm{d}\mu \Big|_t \le \Psi(0) + cN(\Lambda_1^4 + 1)(\Psi(0) + \tilde{\varepsilon}') \cdot t + c(1 + \Pi_0^2)\tilde{\varepsilon}' \cdot t + 5\tilde{\varepsilon}',$$

und damit insbesondere $\Psi(t_0) < 2\Psi(0) + 6\tilde{\varepsilon}'$; die Behauptung folgt. □

Anhang B

Dinge von Interesse

B.1 Umskalieren in M

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine sinnvolle und für unsere Zwecke brauchbare Skalierungsmethode einzuführen.

Wir betrachten im Folgenden $(\mathbf{M}, g)$ mit (m, κ, σ)-asymptotisch schwarzschildscher Metrik g in globalen euklidischen Standardkoordinaten $\mathrm{id} : \mathbf{M} \to \mathbf{R}^3$, deren Anwendung wir hinsichtlich der besseren Lesbarkeit nicht explizit erwähnen oder kennzeichnen werden.

B.1.1 Anpassung der Hintergrundmetrik

Anders als beim Reskalieren geometrischer Flüsse von Hyperflächen im $\mathbf{R}^n$ reicht es in gekrümmten Räumen nicht mehr aus, sich nur auf die Flächen selbst zu konzentrieren; im Allgemeinen stehen der Normalenvektor und damit sämtliche extrinsischen Krümmungsgrößen einer umskalierten Fläche in keinem Zusammenhang mehr zu denen der ursprünglichen Fläche.

Vorbereitend zur eigentlichen Umskalierung des Flusses muss daher die Hintergrundmetrik g geeignet angepasst werden.

Definition B.1. *Sei für jedes $r > 0$ die Abbildung $S_\tau : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ definiert über $S_r(p) := r \cdot p$. Wir setzen für jedes $\tau > 0$*

$$_\tau g := \tau^2 S_{\tau^{-1}}{}^* g.$$

Unter dieser Definition weist $(\mathbf{M}, {}_\tau g)$ weiterhin ein im Rahmen unserer Voraussetzungen liegendes asymptotisches Verhalten auf.

Lemma B.2. *Sei g (m, κ, σ)-asymptotisch schwarzschildsch, ${}_\tau g$ wie in Definition B.1. Dann ist ${}_\tau g$ $(\tau m, \tau^2 \kappa, \tau\sigma)$-asymptotisch schwarzschildsch und es gilt für die durch ${}_\tau g$ induzierten Größen ${}_\tau\overline{\Gamma}_{ij}^k$ und ${}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}$*

$$\begin{aligned} {}_\tau\overline{\Gamma}_{ij}^k(p) &= \tau^{-1}\,\overline{\Gamma}_{ij}^k(\tau^{-1}p), \\ {}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}_{ij}(p) &= \tau^{-2}\,\overline{\mathrm{Rc}}_{ij}(\tau^{-1}p), \\ {}_\tau\overline{\nabla}_l\,{}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}_{ij}(p) &= \tau^{-3}\,\overline{\nabla}_l\,\overline{\mathrm{Rc}}_{ij}(\tau^{-1}p). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Beweis. Analog zur Definition von ${}_\tau g$ setzen wir zunächst

$$_\tau g^S := \tau^2 S_{\tau^{-1}}{}^* g^S.$$

Nun gilt in jedem $p \in \mathbf{M}$ für die Matrixdarstellung $DS_{\tau^{-1}}(p)$ des Differentials $dS_{\tau^{-1}}(p) : T_p\mathbf{M} \to T_{\tau^{-1}p}\mathbf{M}$

$$DS_{\tau^{-1}}(p) = \tau^{-1}E_3,$$

E_3 bezeichnet hier die 3×3-Einheitsmatrix, es ergibt sich insbesondere für jeden Vektor $X = X^k(p)e_k(p) \in T_p\mathbf{M}$

$$dS_{\tau^{-1}}X = \tau^{-1}X^k(p)e_k(\tau^{-1}p)$$

und wir erhalten mit $r = r(p)$

$$\begin{aligned} {}_\tau g^S_{ij}(p) &= g^S_{ij}(\tau^{-1}p) \\ &= \left(1 + \frac{m\tau}{2r}\right)^4 \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Damit ist ${}_\tau g^S$ Schwarzschildmetrik zur Masse $m\tau$ und darüberhinaus folgt nach der Kettenregel für die durch ${}_\tau g^S$ induzierten Größen ${}^S_\tau\overline{\Gamma}^k_{ij}$ und ${}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}^S$

$$\begin{aligned} {}^S_\tau\overline{\Gamma}^k_{ij}(p) &= \tau^{-1}\,{}^S\overline{\Gamma}^k_{ij}(\tau^{-1}p), \\ {}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}^S_{ij}(p) &= \tau^{-2}\,\overline{\mathrm{Rc}}^S_{ij}(\tau^{-1}p), \\ {}_\tau\overline{\nabla}^S_l\,{}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}^S_{ij}(p) &= \tau^{-3}\,\overline{\nabla}^S_l\overline{\mathrm{Rc}}^S_{ij}(\tau^{-1}p). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Nach obiger Argumentation ist außerdem ${}_\tau g_{ij}(p) = g_{ij}(\tau^{-1}p)$, und Aussage (B.1) folgt analog.

Insgesamt erhalten wir nach Voraussetzung an g für jedes $p \in \mathbf{M} \setminus B_{\tau\sigma}(0)$

$$\begin{aligned} |{}_\tau g - {}_\tau g^S|(p) &= |g - g^S|(\tau^{-1}p) \\ &\le \kappa(\tau^{-1}r)^{-2} \\ &= \kappa\tau^2 r^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |{}_\tau\overline{\nabla} - {}_\tau\overline{\nabla}^S|(p) &= \tau^{-1}|\overline{\nabla} - \overline{\nabla}^S|(\tau^{-1}p) \\ &\le \tau^{-1}\kappa(\tau^{-1}r)^{-3} \\ &= \kappa\tau^2 r^{-3}, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} &|{}_\tau\overline{\mathrm{Rc}} - {}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}^S|(p) \le \kappa\tau^2 r^{-4}, \\ &|{}_\tau\overline{\nabla}_\tau\overline{\mathrm{Rc}} - {}_\tau\overline{\nabla}^S_\tau\overline{\mathrm{Rc}}^S|(p) \le \kappa\tau^2 r^{-5}. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt. □

Aus der einfachen Gestalt von $DS_{\tau^{-1}}$ erhalten wir außerdem durch wiederholte Anwendung der Kettenregel und Benutzung von Aussage (B.1) über die Christoffelsymbole

Proposition B.3. *Für jede r-Form ϕ auf $\mathbf{M}$ und $p \in \mathbf{M}$ gilt für alle $k \ge 0$*

$$\left({}_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\left(S_{\tau^{-1}}{}^*\phi\right)\right)_{j_1,\dots,j_k,i_1,\dots,i_r}(p) = \tau^{-(r+k)}\left(\overline{\nabla}^{(k)}\phi\right)_{j_1,\dots,j_k,i_1,\dots,i_r}(\tau^{-1}p).$$

Wir erhalten daraus

$$_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\,(S_{\tau^{-1}}{}^*\phi) = S_{\tau^{-1}}{}^*\left(\overline{\nabla}^{(k)}\,\phi\right)$$

sowie

$$|_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\,(S_{\tau^{-1}}{}^*\phi)\,|_{\tau g}(p) = \tau^{-(r+k)}|\,\overline{\nabla}^{(k)}\,\phi|_g(\tau^{-1}p).$$

□

Ebenfalls aus der Kettenregel und dem in (B.1) angegebenen Transformationsverhalten der Krümmung ergibt sich

Proposition B.4. *Für alle $k \geq 0$ gilt*

$$\left(_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\,_\tau\overline{\mathrm{Rc}}\right)_{j,l,i_1,\ldots,i_k}(p) = \tau^{-(2+k)}\left(\overline{\nabla}^{(k)}\,\overline{\mathrm{Rc}}\right)_{j,l,i_1,\ldots,i_k}(\tau^{-1}p).$$

Es folgt

$$_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\,_\tau\overline{\mathrm{Rc}} = S_{\tau^{-1}}{}^*\left(\overline{\nabla}^{(k)}\,\overline{\mathrm{Rc}}\right)$$

sowie

$$|_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\,_\tau\overline{\mathrm{Rc}}|_{\tau g}(p) = \tau^{-(2+k)}|\,\overline{\nabla}^{(k)}\,\overline{\mathrm{Rc}}|_g(\tau^{-1}p).$$

□

B.1.2 Umskalierter Willmore-Fluss

Wir sind nun in der Lage, den Fluss (WFF) ähnlich zur Vorgehensweise beim Willmore-Fluss im $\mathbf{R}^n$ umzuskalieren.

Definition B.5. *Sei $F : \Sigma \times [0,T) \to (\mathbf{M}, g)$ Lösung von* (WFF)*, $\tau > 0$ und S_τ wie in Definition B.1. Wir definieren die Variation $F_\tau : \Sigma \times [0, \tau^4 T) \to (\mathbf{M}, {}_\tau g)$ durch*

$$F_\tau(x,t) := S_\tau\left(F(x, \tau^{-4}t)\right).$$

Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, induziert F_τ für jedes $t \in [0, \tau^4 T)$ eine Metrik und andere geometrische Größen auf Σ. Das genaue Verhältnis dieser Größen zu den von F induzierten liefert uns folgendes

Lemma B.6. *Auf Σ gilt für die von F_τ durch $_\tau g$ bzw. die von F durch g induzierten geometrischen Größen für alle $t \in [0, \tau^4 T)$ und $s := \tau^{-4}t$*

$$_\tau\gamma|_t \equiv \tau^2\gamma|_s, \tag{B.3}$$

$$_\tau\,\mathrm{d}\mu\,|_t \equiv \tau^2\,\mathrm{d}\mu\,|_s, \tag{B.4}$$

$$_\tau\nu(F_\tau)|_t \equiv \tau^{-1}dS_\tau(\nu(F))|_s, \tag{B.5}$$

$$_\tau A|_t \equiv \tau A|_s, \tag{B.6}$$

$$_\tau H|_t \equiv \tau^{-1}H|_s, \tag{B.7}$$

$$|_\tau A|_{\tau\gamma}|_t \equiv \tau^{-1}|A|_\gamma|_s, \tag{B.8}$$

$$|P_j^k(_\tau A)|_{\tau\gamma}|_t \equiv \tau^{-(k+j)}|P_j^k(A)|_\gamma|_s, \tag{B.9}$$

$$_\tau\nabla|_t \equiv \nabla|_s, \tag{B.10}$$

$$_\tau\triangle|_t \equiv \tau^{-2}\triangle|_s. \tag{B.11}$$

Beweis. Wir rechnen in einem beliebigen, festen Punkt $x \in \Sigma$. Da $F_\tau{}^*|_t = (S_\tau \circ F)^*|_s = F^* S_\tau{}^*|_s$, gilt dort

$$\begin{aligned}
{}_\tau\gamma|_t &= (F_\tau{}^* {}_\tau g)\,|_t \\
&= \tau^2\,(F^* S_\tau{}^* S_{\tau^{-1}}{}^* g)\,|_s \\
&= \tau^2 \gamma|_s,
\end{aligned}$$

und es folgen direkt (B.3), (B.4), (B.10) und (B.11).

Sei nun ${}_\tau\nu$ wie in (B.5) definiert. Man rechnet direkt

$$\begin{aligned}
{}_\tau g\langle {}_\tau\nu(F_\tau), {}_\tau\nu(F_\tau)\rangle|_t &= \tau^{-2}\,(S_\tau{}^* {}_\tau g)\,\langle \nu(F), \nu(F)\rangle|_s \\
&= (S_\tau{}^* S_{\tau^{-1}}{}^* g)\,\langle \nu(F), \nu(F)\rangle|_s \\
&= 1,
\end{aligned}$$

und analog für jedes $V \in T_x\Sigma$

$$\begin{aligned}
{}_\tau g\langle {}_\tau\nu(F_\tau), dF_\tau(V)\rangle|_t &= \tau^{-1}\,(S_\tau{}^* {}_\tau g)\,\langle \nu(F), dF(V)\rangle|_s \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da abschließend für alle $V, W \in T_x\Sigma$

$$\operatorname{sgn}\det\Big(dF_\tau(V), dF_\tau(W), {}_\tau\nu(F_\tau)\Big)\Big|_t = \tau^2 \operatorname{sgn}\det\Big(dF(V), dF(W), \nu(F)\Big)\Big|_s,$$

erhält ${}_\tau\nu$ auch die die Orientierung der Fläche und (B.5) ist gezeigt.

Für Gleichung (B.6) beachtet man zunächst, daß für die Christoffelsymbole auf $\mathbf{M}$ wegen (B.1) in jedem beliebigen $p \in \mathbf{M}$

$$\tau^{-1}\,\overline{\Gamma}_{ij}^k(p) = {}_\tau\overline{\Gamma}_{ij}^k(\tau p).$$

Daraus ergibt sich für jedes Vektorfeld X auf $\mathbf{M}$ mit $S_\tau{}^* X := dS_{\tau^{-1}}(X \circ S_\tau)$

$$\begin{aligned}
\Big(\overline{\nabla}_i(S_\tau{}^* X)\Big)(p) &= \Big(\overline{\nabla}_i\Big(\tau^{-1}(X^k \circ S_\tau)e_k\Big)\Big)(p) \\
&= \tau^{-1}\Big(\partial_i(X^k \circ S_\tau)e_k + (X^k \circ S_\tau)\,\overline{\Gamma}_{ik}^r e_r\Big)(p) \\
&= \partial_i X^k(\tau p)e_k(p) + X^k(\tau p)\,{}_\tau\overline{\Gamma}_{ik}^r(\tau p)e_r(p) \\
&= \tau dS_{\tau^{-1}}\Big(\Big(\partial_i X^k e_k + X^k\,{}_\tau\overline{\Gamma}_{ik}^r e_r\Big)(\tau p)\Big) \\
&= \tau dS_{\tau^{-1}}\Big(({}_\tau\overline{\nabla}_i X)(\tau p)\Big),
\end{aligned}$$

und wir erhalten in jedem $x \in \Sigma$ für beliebige $V, W \in T_x\mathbf{M}$ wegen $dS_\tau(e_i(p)) = \tau e_i(\tau p)$

$$\begin{aligned}
&dS_{\tau^{-1}}\Big(\Big({}_\tau\overline{\nabla}_{dF_\tau(V)}\,dF_\tau(W)\Big)(F_\tau(x,t))\Big) \\
&\quad= dF(V)^i \cdot \tau dS_{\tau^{-1}}\Big(\Big({}_\tau\overline{\nabla}_i S_{\tau^{-1}}{}^* dF(W)\Big)(\tau F(x,s))\Big) \\
&\quad= dF(V)^i\Big(\overline{\nabla}_i S_\tau{}^* S_{\tau^{-1}}{}^* dF(W)\Big)(F(x,s)) \\
&\quad= \Big(\overline{\nabla}_{dF(V)}\,dF(W)\Big)(F(x,s)).
\end{aligned}$$

Abschließend ergibt sich also

$$\begin{aligned}
{}_\tau A(V,W)|_t &= -{}_\tau g\langle {}_\tau\nu(F_\tau), {}_\tau\overline{\nabla}_{dF_\tau(V)} dF_\tau(W)\rangle|_t \\
&= -\tau^2 g\langle dS_{\tau^{-1}}\left({}_\tau\nu(F_\tau)\right), dS_{\tau^{-1}}\left({}_\tau\overline{\nabla}_{dF_\tau(V)} dF_\tau(W)\right)\rangle|_t \\
&= -\tau g\langle \nu(F), \overline{\nabla}_{dF(V)}\, dF(W)\rangle|_s \\
&= \tau A(V,W)|_s
\end{aligned}$$

und (B.6) ist gezeigt; Gleichungen (B.7), (B.8) und (B.9) folgen sofort. □

Satz B.7. *F_τ wie in Definition B.5 löst* (WFF) *in* $(\mathbf{M}, {}_\tau g)$ *auf* $\Sigma \times [0, \tau^4 T)$.

Beweis. Analog zu den Definitionen in Abschnitt 2.2 definieren wir ${}_\tau\alpha_{\mathbf{W}}(x,t)$ und ${}_\tau\lambda(t)$ durch

$$\begin{aligned}
{}_\tau\alpha_{\mathbf{W}} &:= -{}_\tau\triangle_\tau H - {}_\tau H\left(|{}_\tau\mathring{A}|^2 + {}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}({}_\tau\nu, {}_\tau\nu)\right), \\
{}_\tau\lambda &:= \frac{1}{\int_\Sigma {}_\tau H^2{}_\tau\, \mathrm{d}\mu} \int_\Sigma |{}_\tau\nabla\, {}_\tau H|^2 - {}_\tau H^2\left(|{}_\tau\mathring{A}|^2 + {}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}({}_\tau\nu, {}_\tau\nu)\right){}_\tau\, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Da nach Proposition B.4 und Lemma B.6 für $t \in [0, \tau^4 T)$ und $s = \tau^{-4} t$ gilt, daß

$${}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}({}_\tau\nu, {}_\tau\nu)|_t \equiv \tau^{-2}\,\overline{\mathrm{Rc}}(\nu,\nu)|_s,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
{}_\tau\alpha_{\mathbf{W}}|_t &\equiv \tau^{-3}\alpha_{\mathbf{W}}|_s, \\
{}_\tau\lambda(t) &= \tau^{-2}\lambda(s).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Da F nach Voraussetzung (WFF) in $(\mathbf{M}, g)$ löst, folgt direkt

$$\begin{aligned}
\partial_t F_\tau|_t &= dS_\tau\left(\tau^{-4}\partial_s F\right)|_s \\
&= \tau^{-4}(-\alpha_{\mathbf{W}} + H\lambda)\, dS_\tau(\nu(F))|_s \\
&= \tau^{-3}(-\tau^3{}_\tau\alpha_{\mathbf{W}} + \tau^3{}_\tau H_\tau\lambda)_\tau\nu(F_\tau)|_t \\
&= (-{}_\tau\alpha_{\mathbf{W}} + {}_\tau H_\tau\lambda)_\tau\nu(F_\tau)|_t
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Mit Hilfe von Lemma B.6 können wir abschließend eine Aussage über das Zusammenspiel des umskalierten Flusses mit Formen auf bzw. Krümmungen von **M** formulieren.

Proposition B.8. *Wegen Proposition B.3 und Relation* (B.3) *ergibt sich für jede r-Form ϕ auf* **M** *mit F, F_τ, t, s wie oben für alle $k \geq 0$*

$$\begin{aligned}
\left|\left({}_\tau\overline{\nabla}^{(k)}(S_{\tau^{-1}}{}^*\phi)\right)^\top\right|_{{}_\tau\gamma}\Big|_t &\equiv \left|F_\tau{}^*\left({}_\tau\overline{\nabla}^{(k)}(S_{\tau^{-1}}{}^*\phi)\right)\right|_{{}_\tau\gamma}\Big|_t \\
&\equiv \tau^{-(r+k)}\left|F^*\left(\overline{\nabla}^{(k)}\phi\right)\right|_\gamma\Big|_s \\
&\equiv \tau^{-(r+k)}\left|\left(\overline{\nabla}^{(k)}\phi\right)^\top\right|_\gamma\Big|_s
\end{aligned} \tag{B.13}$$

sowie wegen (B.10)

$$\left|{}_\tau\nabla^{(k)}\left((S_{\tau^{-1}}{}^*\phi)^\top\right)\right|_{{}_\tau\gamma}\Big|_t \equiv \tau^{-(r+k)}\left|\nabla^{(k)}\left(\phi^\top\right)\right|_\gamma\Big|_s. \tag{B.14}$$

Analog folgt mit Proposition B.4

$$\left|\left({}_\tau\overline{\nabla}^{(k)}\,{}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}\right)^\top\big|_{\tau\gamma}\right|_t \equiv \tau^{-(2+k)}\left|\left(\overline{\nabla}^{(k)}\overline{\mathrm{Rc}}\ \right)^\top\big|_\gamma\right|_s \tag{B.15}$$

und

$$\left|{}_\tau\nabla^{(k)}\left({}_\tau\overline{\mathrm{Rc}}^\top\right)\big|_{\tau\gamma}\right|_t \equiv \tau^{-(2+k)}\left|\nabla^{(k)}\left(\overline{\mathrm{Rc}}^\top\right)\big|_\gamma\right|_s. \tag{B.16}$$

□

B.2 Strukturgleichungen

Wir betrachten Hyperflächen $F(\Sigma)$ in einer beliebigen 3-Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathbf{M}}$ und folgen den Notationen in Abschnitt 2.1.1; wir halten außerdem fest, daß die im Folgenden aufgestellten Betrachtungen auch auf Hyperflächen in allgemeineren n-Mannigfaltigkeiten ohne Einschränkung ihre Gültigkeit behalten. Zur Motivation folgendes

Lemma B.9. *Sei* $\tilde{f} \in C^2(\tilde{\mathbf{M}})$ *sowie* $f := \tilde{f}|_\Sigma$. *Dann gilt auf* Σ

$$\begin{aligned}
&|\nabla f| \le |\overline{\nabla}\tilde{f}|,\\
&|\nabla^{(2)} f| \le |\overline{\nabla}^{(2)}\tilde{f}| + |A||\overline{\nabla}\tilde{f}|.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen um einen festen Punkt $p \in \Sigma$ in Koordinaten $\{x^1, x^2, x^\nu\}$ von $\mathbf{M}$, sodaß lokal $\Sigma = \{x^\nu = 0\}$, $\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}|_\Sigma$, sowie $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$. Die Einschränkung $\{x^1, x^n\}$ liefert auf Σ ein Koordinatensystem mit $\gamma_{ij}(p) = \delta_{ij}$. Für $i \in \{1,2\}$ folgt $\nabla_i f = \frac{\partial}{\partial x^i} f = \overline{\nabla}_i\tilde{f}$ auf Σ und damit in p

$$\begin{aligned}
|\nabla f|^2 &= \sum_i (\overline{\nabla}_i \tilde{f})^2\\
&\le (\nabla_\nu \tilde{f})^2 + \sum_i (\overline{\nabla}_i \tilde{f})^2\\
&= |\overline{\nabla}\tilde{f}|^2,
\end{aligned}$$

die erste Aussage folgt. Für $i, j \in \{1,2\}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j f &= \overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \tilde{f} + \overline{\nabla}_{(\overline{\nabla}-\nabla)_i e_j}\tilde{f}\\
&= \overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \tilde{f} - A_{ij}\overline{\nabla}_\nu \tilde{f}
\end{aligned}$$

und wir erhalten in p

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(2)} f|^2 &= \sum_{i,j} (\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \tilde{f} - A_{ij}\overline{\nabla}_\nu \tilde{f})^2\\
&\le \sum_{i,j}\Big((\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \tilde{f})^2 + 2|A_{ij}\overline{\nabla}_\nu \tilde{f}| + (A_{ij}\overline{\nabla}_\nu \tilde{f})^2\Big)\\
&\le |\overline{\nabla}^{(2)}\tilde{f}|^2 + 2|A||\overline{\nabla}\tilde{f}| + |A|^2|\overline{\nabla}\tilde{f}|^2\\
&= (|\overline{\nabla}^{(2)}\tilde{f}| + |A||\overline{\nabla}\tilde{f}|)^2.
\end{aligned}$$

□

Unser Ziel ist nun, Lemma B.9 auf Einschränkungen beliebiger Tensoren und beliebig hohe Ableitungen zu verallgemeinern. Sei dazu $s \in \mathbf{N}_0$, und ϕ eine beliebige s-Form auf $\tilde{\mathbf{M}}$. Im Folgenden bedienen wir uns in großem Maße der in Abschnitt 2.1.3 eingeführten $(\cdot)^{(\nu)}$-Notation.

Lemma B.10. *Für ϕ wie oben und beliebige $k \in \mathbf{N}_0$ gilt*

$$\nabla^{(k)}(\phi)^{(\nu)} = (\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a}(A)\right).$$

Beweis. Wir führen eine Induktion über k durch. Für $k=0$ ist die Behauptung klar. Im Fall $k=1$ rechnen wir in Koordinaten wie im Beweis zu Lemma B.9 und nehmen ohne Einschränkung an, daß $(\phi)^{(\nu)}_{i_1,\dots,i_r} = \phi_{\nu,\dots,\nu,i_1,\dots,i_r}$, $0 \le r \le s$ fest. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla_j\left((\phi)^{(\nu)}\right)_{i_1,\dots,i_r} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\phi_{\nu,\dots,\nu,i_1,\dots,i_r} - \sum_q \phi(\nu,\dots,\nu,e_{i_1},\dots,\nabla_j e_{i_q},\dots,e_{i_r})\\
&= (\overline{\nabla}_j\phi)(\nu,\dots,\nu,e_{i_1},\dots,e_{i_r})\\
&\quad + \sum \phi(\nu,\dots,\overline{\nabla}_j\nu,\dots,\nu,e_{i_1},\dots,e_{i_r})\\
&\quad + \sum_q \phi(\nu,\dots,\nu,e_{i_1},\dots,(\overline{\nabla}-\nabla)_j e_{i_q},\dots,e_{i_r})\\
&= (\overline{\nabla}\phi)^{(\nu)}_{j,i_1,\dots,i_r} + \left((\phi)^{(\nu)} * A\right)_{j,i_1,\dots,i_r},
\end{aligned} \tag{B.17}$$

dies entspricht dem gewünschten Ausdruck für $k=1$. Nimmt man nun an, die Behauptung gilt für ein beliebiges, festes $k \in \mathbf{N}$, so erhält man unter erneuter Anwendung von (B.17)

$$\begin{aligned}
\nabla^{(k+1)}(\phi)^{(\nu)} &= \nabla\left((\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a}(A)\right)\right)\\
&= (\overline{\nabla}^{(k+1)}\phi)^{(\nu)} + (\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} * A\\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\left((\overline{\nabla}^{(j+1)}\phi)^{(\nu)} + (\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * A\right) * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a}(A)\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k+1-j-a}(A)\right)\\
&= (\overline{\nabla}^{(k+1)}\phi)^{(\nu)} + (\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} * A\\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-(j-1)} P_a^{k-(j-1)-a}(A)\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=2}^{k+1-j} P_a^{k-j-(a-1)}(A)\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k+1-j-a}(A)\right)\\
&= (\overline{\nabla}^{(k+1)}\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{k}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k+1-j} P_a^{k+1-j-a}(A)\right)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $k+1$. □

Wir wollen nun das Resultat aus Lemma B.10 auf die Potenzen der implizit enthaltenen Gradiententerme von A untersuchen, und richten unser Augenmerk dabei vor allem auf die höchsten auftretenden Ableitungen.

Korollar B.11. *Seien $k,b \geq 1$ und gelte $2b \leq k+1$. Dann gilt für $\phi, (\cdot)^{(\nu)}$ wie oben*

$$\begin{aligned}\nabla^{(k)}(\phi)^{(\nu)} = (\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} &+ \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a;\leq k-b-1}(A)\right)\\ &+ \nabla^{(k-1)}A * (\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=1}^{b-1}\nabla^{(k-j-1)}A * \Bigg[(\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)}\\ &+ \sum_{p=1}^{j}\left((\overline{\nabla}^{(j-p)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{p} P_a^{p-a;\leq k-b-1}(A)\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst folgt aus Lemma B.10 durch Aufspalten der Summenterme direkt

$$\begin{aligned}\nabla^{(k)}(\phi)^{(\nu)} &= (\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=b}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a}(A)\right)\\ &\quad + \sum_{j=0}^{b-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=b-j+1}^{k-j} P_a^{k-j-a}(A)\right)\\ &\quad + \sum_{j=0}^{b-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{b-j} P_a^{k-j-a}(A)\right)\\ &= (\overline{\nabla}^{(k)}\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a;\leq k-b-1}(A)\right)\\ &\quad + \sum_{j=0}^{b-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{b-j} P_a^{k-j-a}(A)\right),\end{aligned} \tag{B.18}$$

da nur die P-Terme in der letzten Summe Ableitungen höher oder gleich $\nabla^{(k-b)}A$ enthalten können. Genauer gilt für $j \in \{0,\dots,b-2\}$, $a \in \{2,\dots,b-j\}$, daß

$$\begin{aligned}P_a^{k-j-a}(A) &= \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_a=k-j-a\\ i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_a}} \nabla^{(i_1)}A * \ldots * \nabla^{(i_a)}A\\ &= \left(\sum_{r=0}^{b-a-j}\nabla^{(k-j-a-r)}A * P_{a-1}^{r}(A)\right) + P_a^{k-j-a;\leq k-b-1}(A),\end{aligned}$$

Summieren des ersten Terms über all solche a ergibt

$$\begin{aligned}&\sum_{a=2}^{b-j}\left(\sum_{r=0}^{b-a-j}\nabla^{(k-j-a-r)}A * P_{a-1}^{r}(A)\right)\\ &\quad = \sum_{p=2}^{b-j}\left(\nabla^{(k-j-p)}A * \sum_{a=2}^{b-j}\sum_{r=0}^{b-a-j} P_{a-1}^{r}(A)\cdot\delta_{p-a}^{r}\right)\\ &\quad = \sum_{p=2}^{b-j}\left(\nabla^{(k-j-p)}A * \sum_{a=1}^{p-1} P_a^{p-a-1}(A)\right).\end{aligned}$$

Setzt man dies nun in (B.18) ein, ergibt sich also insgesamt

$$\begin{aligned}
\nabla^{(k)}(\phi)^{(\nu)} &= (\overline{\nabla}^{(k)}\,\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a;\le k-b-1}(A)\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{b-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \nabla^{(k-j-1)}A\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{b-2}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=2}^{b-j} P_a^{k-j-a}(A)\right)\\
&= (\overline{\nabla}^{(k)}\,\phi)^{(\nu)} + \sum_{j=0}^{k-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{k-j} P_a^{k-j-a;\le k-b-1}(A)\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{b-1}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \nabla^{(k-j-1)}A\right)\\
&\quad + \sum_{j=0}^{b-2}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{p=2}^{b-j}\left(\nabla^{(k-j-p)}A * \sum_{a=1}^{p-1} P_a^{p-a-1}(A)\right)\right),
\end{aligned}\tag{B.19}$$

der neu hinzugekommene $\sum_a P_a^{k-j-a;\le k-b-1}(A)$-Term wurde hier bereits in den vorhandenen Summenterm absorbiert. Beachtet man nun, daß

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{b-2}\left((\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{p=2}^{b-j}\left(\nabla^{(k-j-p)}A * \sum_{a=1}^{p-1} P_a^{p-a-1}(A)\right)\right)\\
&= \sum_{q=2}^{b}\nabla^{(k-q)}A * \sum_{p=2}^{b-j}\sum_{j=0}^{b-2}\left(\delta^j_{q-p}\cdot(\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{p-1} P_a^{p-a-1}(A)\right)\\
&= \sum_{q=2}^{b}\nabla^{(k-q)}A * \sum_{p=2}^{q}\sum_{j\in\mathbf{N}}\left(\delta^j_{q-p}\cdot(\overline{\nabla}^{(j)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{p-1} P_a^{p-a-1}(A)\right)\\
&= \sum_{q=2}^{b}\nabla^{(k-q)}A * \sum_{p=2}^{q}\left((\overline{\nabla}^{(q-p)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{p-1} P_a^{p-a-1}(A)\right)\\
&= \sum_{q=1}^{b-1}\nabla^{(k-q-1)}A * \sum_{p=1}^{q}\left((\overline{\nabla}^{(q-p)}\,\phi)^{(\nu)} * \sum_{a=1}^{p} P_a^{p-a}(A)\right),
\end{aligned}$$

so folgt nach den Voraussetzungen an k und b in der letzten Summe $P_a^{p-a} = P_a^{p-a;\le k-b-1}$, und nach Einsetzen in (B.19) die Behauptung. □

Da immer $|(\phi)^{(\nu)}|_\gamma \le |\phi|_g$, erhalten wir sofort

Proposition B.12 (Allgemeine Strukturformel)**.** *Sei* $|\overline{\nabla}^{(k)}\,\phi|_g \le \Pi_k \in \mathbf{R}$ *für alle* $k \in \mathbf{N}_0$. *Dann folgt auf* Σ *unter den Voraussetzungen von Korollar B.11 punktweise*

$$\begin{aligned}
|\nabla^{(k)}(\phi)^{(\nu)}| &\le c\Pi_0|\nabla^{(k-1)}A|\\
&\quad + c\sum_{j=1}^{b-1}|\nabla^{(k-j-1)}A|\sum_{p=1}^{j}\sum_{a=1}^{p}\left(\Pi_j + \Pi_{j-p}|P_a^{p-a;\le k-b-1}(A)|\right)\\
&\quad + \Pi_k + c\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{a=1}^{k-j}\Pi_j|P_a^{k-j-a;\le k-b-1}(A)|.
\end{aligned}$$

□

B.3 Sobolevungleichungen

Sei im Folgenden $(\mathbf{M},g)$ (m,κ,σ)-asymptotisch schwarzschildsch wie in Abschnitt 2.3 festgelegt, und $F(\Sigma)$ immersierte Hyperfläche in $\mathbf{M}$.

Zunächst erhalten wir wie in [HY96, Proposition 5.4] eine Variante der Michael-Simon-Sobolevungleichung für Flächen in asymptotisch schwarzschildschen Metriken.

Lemma B.13. *Seien $\mathbf{M},F,\Sigma$ wie oben. Dann gibt es ein $\tilde{r}_0(m,\kappa,\sigma)$ und eine absolute Konstante c, sodaß, falls*

$$r_{\min} > r_0 := \tilde{r}_0 \cdot \|H\|_{2,\Sigma},$$

für alle lipschitzstetigen $f:\Sigma\to\mathbf{R}$

$$\|f\|_{L^2(\Sigma)} \le c\int_\Sigma |Hf| + |\nabla f|\,\mathrm{d}\mu\,. \tag{B.20}$$

Beweis. Dies folgt analog zum Beweis von [HY96, Proposition 5.4] unter Benutzung von Lemma 2.14 statt [HY96, Lemma 5.2 (ii)]; die a-priori-Schranke [HY96, (5.7)] an $\|H\|_{2,\Sigma}$ steht uns nicht zur Verfügung und muss daher gesondert in r_0 einfließen. □

Durch Umskalieren der Immersion in Lemma B.13 (siehe Abschnitt B.1) erhalten wir unter Benutzung von Lemma B.2 direkt

Proposition B.14. *Für das $\tilde{r}_0$ in Lemma B.13 gilt für alle $\tau>0$*

$$\tilde{r}_0(m,\kappa,\sigma) = \tau^{-1}\tilde{r}_0(\tau m,\tau^2\kappa,\tau\sigma).$$

□

Folgendes Korollar stellt eine direkte Verallgemeinerung von [KS02, Satz 5.6] dar.

Korollar B.15. *Unter den Voraussetzungen von Lemma B.13 gilt für $2<p\le\infty$, $0\le q\le\infty$ und $0<\alpha\le 1$ mit $\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)q+1$*

$$\|f\|_{\infty,\Sigma} \le c(p,q,\alpha)\|f\|_{q,\Sigma}^{1-\alpha}\left(\|Hf\|_{p,\Sigma}+\|\nabla f\|_{p,\Sigma}\right)^{\alpha}.$$

Beweis. Der Beweis von [KS02, Satz 5.6] für Flächen im $\mathbf{R}^n$ benutzt nur die Gültigkeit von (B.20) und lässt sich somit direkt übernehmen. □

Korollar B.16. *Unter den Voraussetzungen von Lemma B.13 gibt es eine absolute Konstante c, sodaß für jede Abschneidefunktion $\eta\in C^1_c(\Sigma)$ mit $\sup_\Sigma|\nabla\eta|\le\Lambda<\infty$ und alle $s\ge 2$*

$$\|\eta^s f\|^4_{\infty,\Sigma} \le c\|\eta^s f\|^2_{2,\Sigma}\cdot\left(\|\eta^s\nabla^{(2)}f\|^2_{2,\Sigma}+\|\eta^s H^2 f\|^2_{2,\Sigma}+c(s)\Lambda^4\|f\|^2_{2,[\eta>0]}\right). \tag{B.21}$$

Beweis. Dies folgt für $s=2$ direkt aus Korollar B.15, vgl. [KS01, Lemma 2.8]. Für $s>2$ rechnet man mit $\eta_s:=\eta^{\frac{s}{2}}$ und benutzt $|\nabla\eta_s|\le c(s)\Lambda$. □

Bemerkung B.17. *Wegen Katos Ungleichung*

$$|\nabla|\phi||\le|\nabla\phi|$$

gilt Lemma B.13 und somit auch Korollar B.16 auch für beliebige Formen ϕ.

Lemma B.18 (Multiplikative Sobolevungleichung für A)**.** *Unter den Voraussetzungen von Lemma B.13 gibt es eine absolute Konstante c, sodaß für jede Abschneidefunktion* $\eta \in C_c^1(\Sigma)$ *mit* $\sup_\Sigma |\nabla\eta| \le \Lambda < \infty$ *und alle* $s \ge 4$

$$\int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |A|^2 |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu$$
$$\le c \int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \cdot \int_\Sigma \eta^s (|\nabla^{(2)} A|^2 + |A|^6) \,\mathrm{d}\mu + c(s)\Lambda^4 \left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \right)^2.$$

Beweis. Für $s = 4$ folgt dies aus Lemma B.13 nach Einsetzen von $f = \eta^2 |A||\nabla A|$ und $f = \eta^2 |A|^3$ analog zum Beweis von [KS02, Lemma 4.2] unter genauer Beachtung der $|\nabla\eta|$-Terme. Für $s > 4$ setzt man $\eta_s := \eta^{\frac{s}{4}}$ und benutzt $|\nabla\eta_s| \le c(s)\Lambda$. □

Ist der Term $\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu$ in Lemma B.18 klein genug, so ergibt sich nach Absorbieren direkt

Proposition B.19 (Integralungleichungen bei L^2-kleiner Krümmung)**.** *Es gibt absolute Konstanten* $c > 0, \varepsilon_0 \in (0,1)$*, sodaß unter den Voraussetzungen von Lemma B.18 und der Zusatzbedingung*

$$\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon_0$$

für alle $s \ge 4$ *gilt, daß*

$$\int_\Sigma \eta^s |A|^6 \,\mathrm{d}\mu + \int_\Sigma \eta^s |A|^2 |\nabla A|^2 \,\mathrm{d}\mu$$
$$\le \int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(2)} A|^2 \,\mathrm{d}\mu + c(s)\Lambda^4 \left(\int_{[\eta>0]} |A|^2 \,\mathrm{d}\mu \right)^2. \tag{B.22}$$

Einsetzen von $f = A$ *in Korollar B.16 liefert unter Benutzung von* (B.22) *für* $s \ge 4$

$$\|\eta^s A\|_{\infty,\Sigma}^4 \le c \|\eta^s A\|_{2,\Sigma}^2 \left(\|\eta^s \nabla^{(2)} A\|_{2,\Sigma}^2 + \Lambda^4 \|A\|_{2,[\eta>0]}^2 \right). \tag{B.23}$$

□

B.4 Lokale Interpolationsungleichungen

Bei folgender Interpolationsungleichung handelt es sich um eine skalierungsinvariante Form der in [KS02, Korollar 5.3] zu findenden, die auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten und damit insbesondere auf beliebigen Hyperflächen $F(\Sigma) \subset \tilde{\mathbf{M}}$ gültig ist.

Proposition B.20 ([KS02, Korollar 5.3])**.** *Sei* η *Abschneidefunktion auf* Σ *mit* $\sup_\Sigma |\nabla\eta| \le \Lambda$, $\Lambda > 0$. *Sei* $k \in \mathbf{N}_0$, $p \in [2,\infty)$, $s \ge kp$, *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt für jede beliebige Form* ϕ *auf* Σ

$$\left(\int_\Sigma \eta^s |\nabla^{(k)} \phi|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon\Lambda^{-1} \left(\int_\Sigma \eta^{s+p} |\nabla^{(k+1)} \phi|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ c(\varepsilon,s,p,k)\Lambda^k \left(\int_{[\eta>0]} \eta^{s-kp} |\phi|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Sukzessives Anwenden von Proposition B.20 ergibt folgendes

Korollar B.21. *Unter den Voraussetzungen von Proposition B.20 gilt*

$$\sum_{r=0}^{k}\Lambda^{k-r}\left(\int_\Sigma \eta^{s-kp+rp}|\nabla^{(r)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon\Lambda^{-1}\left(\int_\Sigma \eta^{s+p}|\nabla^{(k+1)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + c(\varepsilon,s,p,k)\Lambda^k\left(\int_{[\eta>0]}\eta^{s-kp}|\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Für $k=0$ ist die Behauptung klar erfüllt. Gelte die Behauptung also für ein $k\in\mathbf{N}$ und sei $s\ge (k+1)p$. Dann gilt $s-p\ge kp$ und damit nach Voraussetzung mit $\varepsilon=1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k+1}\Lambda^{k+1-r}\left(\int_\Sigma \eta^{s-(k+1)p+rp}|\nabla^{(r)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad= \left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(k+1)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \Lambda\sum_{r=0}^{k}\Lambda^{k-r}\left(\int_\Sigma \eta^{(s-p)-kp+rp}|\nabla^{(r)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\le \left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(k+1)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Sigma \eta^{(s-p)+p}|\nabla^{(k+1)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad + c(s,p,k)\Lambda^{k+1}\left(\int_{[\eta>0]}\eta^{(s-p)-kp}|\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad= 2\left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(k+1)}\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + c(s,p,k)\Lambda^{k+1}\left(\int_{[\eta>0]}\eta^{s-(k+1)p}|\phi|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Anwendung von Proposition B.20 auf den vorderen Term liefert die Behauptung für $k+1$. □

Lemma B.22. *Sei η Abschneidefunktion auf Σ mit $\sup_\Sigma|\nabla\eta|\le\Lambda$. Dann gilt für alle $k\in\mathbf{N}$, $s\ge 2k$ und alle $i\in\{1,\dots,k\}$*

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(i)}\phi|^{\frac{2k}{i}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{i}{2k}}\\
&\quad\le c(s,k)\|\phi\|_{\infty,[\eta>0]}^{1-\frac{i}{k}}\left(\left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(k)}\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}} + \Lambda^k\left(\int_{[\eta>0]}|\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{i}{k}}.
\end{aligned}$$

Beweis. Dies ist eine lokale Version von [KS02, Satz 5.4] und folgt vollkommen analog zum dortigen Beweis mit $a_0=b_0:=\|\phi\|_{\infty,[\eta>0]}$ und

$$a_i := \left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(i)}\phi|^{\frac{2k}{i}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{i}{2k}}, \quad b_i := \Lambda^i\left(\int_{[\eta>0]}|\phi|^{\frac{2k}{i}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{i}{2k}}$$

für $i\in\{1,\dots,k\}$. □

Benutzung von Lemma B.22 wie im Beweis zu [KS02, Korollar 5.5] ergibt direkt

Proposition B.23. *Seien η,ϕ wie oben, seien $i_1,\dots,i_r\in\{1,\dots,k\}$ mit $i_1+\dots+i_r=2k$ und $s\ge 2k$ für ein $k\in\mathbf{N}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Sigma \eta^s\,\nabla^{(i_1)}\phi * \dots * \nabla^{(i_r)}\phi \,\mathrm{d}\mu\right|\\
&\quad\le c(s,k)\|\phi\|_{\infty,[\eta>0]}^{r-2}\left(\int_\Sigma \eta^{s}|\nabla^{(k)}\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \Lambda^{2k}\int_{[\eta>0]}|\phi|^2 \,\mathrm{d}\mu\right).
\end{aligned}$$

□

Anhang C

(Kurze) Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit geschlossenen 2-Flächen in einer umgebenden 3-Mannigfaltigkeit $\mathbf{M}$ und dem *Willmorefunktional* $\mathbf{W}$, das grob gesprochen jeder dieser Flächen die (quadrierte) L^2-Norm ihrer mittleren Krümmung H zuordnet. Betrachtet man $\mathbf{W}$ auf Flächen im euklidischen Raum $\mathbf{M} = \mathbf{R}^3$, so handelt es sich bei Minimierern gerade um runde, beliebige Koordinatensphären; Minimierer unter *vorgegebenem Flächeninhalt* sind Koordinatensphären mit passend gewähltem Radius. In allgemeinen $\mathbf{M}$ lassen sich derartige Minimierer als „nichteuklidische Analoga zu Koordinatensphären“ auffassen, was sie für eine Vielzahl von Anwendungen interessant erscheinen lässt.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Minimierer mit Hilfe des flächeninhaltserhaltenden Willmore-Flusses (WFF) gesucht. Unter diesem Fluss, der aus dem klassischen Gradientenfluss (WF) von $\mathbf{W}$ konstruiert wird, bleibt der Flächeninhalt der sich bewegenden Flächen unverändert, während der Wert von $\mathbf{W}$ monoton fällt. Der Raum $\mathbf{M}$ ist im überwiegenden Teil dieser Arbeit *asymptotisch schwarzschildsch* gewählt; das heißt, er modelliert modulo kleiner Störungen die Umgebung eines isolierten stationären schwarzen Loches.

Den Kern der bewältigten Arbeit bildet die notwendige Übertragung der von E. Kuwert und R. Schätzle in [KS02],[KS01] und [KS04] erarbeiteten Theorie für (WF) im $\mathbf{R}^n$. Hierfür sind große analytische Hürden, vor allem durch die Kontrolle eines durch die Konstruktion von (WFF) erzeugten nichtlokalen Terms, und große algebraische Hürden durch die Struktur der durch die Krümmung von $\mathbf{M}$ induzierten Zusatzterme in den Evolutionsgleichungen zu bewältigen. Darüberhinaus ist die Entwicklung geeigneter Techniken notwendig, um in nichteuklidischen Räumen eine Blowupanalyse von Singularitäten auf sinnvolle Weise durchführen zu können.

Als Hauptresultate der Arbeit sind das Aufstellen eines Kurzzeitexistenzresultates für (WFF) anzusehen, sowie die Herleitung einer unteren Schranke an die maximale Existenzzeit des Flusses, die nur vom Grad der lokalen „Konzentration“ der Krümmung der Startfläche abhängt. Darüberhinaus wird ein Langzeitexistenzresultat aufgestellt, das besagt, daß eine hinreichend kleine Willmoreenergie der Startfläche ausreichend ist, um die Herausbildung von Singularitäten unter (WFF) auszuschließen und Teilfolgenkonvergenz der Lösung zu einer der oben angesprochenen sphären-artigen Flächen zu erhalten. Hierfür ist zu gewährleisten, daß die Flächen nicht in den stark gekrümmten Bereich nahe des Zentrums von $\mathbf{M}$ eindringen; es sei angemerkt, daß der Beweis derartiger Positionsabschätzungen noch nicht durchgeführt wurde, und diese daher in den Voraussetzungen zu obigen Resultaten gesondert gefordert werden müssen.

Als Nebenprodukt der aufgestellten Resultate ergibt sich im Fall $\mathbf{M} = \mathbf{R}^3$ außerdem die *glatte* Konvergenz einer großen Klasse von Flächen unter (WFF) zu runden Koordinatensphären und damit die volle Übertragbarkeit der Resultate aus [KS02] und [KS04].

Literaturverzeichnis

[Ama93] H. Amann, Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems, in *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis*, herausgegeben von H.-J. Schmeißer und H. Triebel, Band 133 aus *Teubner-Texte zur Mathematik*, Seiten 9–126, Teubner Stuttgart / Leipzig, 1993.

[Ama95] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Volume I: Abstract Linear Theory*, Band 89 aus *Monographs in Mathematics*, Birkhäuser, 1995.

[BK03] M. Bauer und E. Kuwert, *Existence of minimizing Willmore surfaces of prescribed genus*, International Mathematics Research Notices **2003**(10), 553–576 (2003), http://imrn.oxfordjournals.org/content/2003/10/553.full.pdf+html.

[Bre12] P. Breuning, *Immersions with bounded second fundamental form*, arXiv e-prints (2012), arXiv:1201.4562v1.

[Bry84] R. L. Bryant, *A duality theorem for Willmore surfaces*, J. Differential Geom. **20**(1), 23–53 (1984).

[Die70] J. A. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Band 10-I aus *Pure and applied Mathematics*, Academic Press, dritte Auflage, 1970.

[DKS02] G. Dziuk, E. Kuwert und R. Schätzle, *Evolution of Elastic Curves in* $\mathbf{R}^n$*: Existence and Computation*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **33**(5), 1228–1245 (2002), http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0036141001383709.

[EMS98] J. Escher, U. Mayer und G. Simonett, *The Surface Diffusion Flow for Immersed Hypersurfaces*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **29**(6), 1419–1433 (1998), http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0036141097320675.

[ES98] J. Escher und G. Simonett, *The volume preserving mean curvature flow near spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **126**(9), 2789–2796 (1998).

[GT83] D. Gilbarg und N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Band 224 aus *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Berlin / Heidelberg, zweite Auflage, 1983.

[Ham82] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17**, 255–306 (1982).

[HP99] G. Huisken und A. Polden, Geometric evolution equations for hypersurfaces, in *Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems*, Band 1713 aus *Lecture Notes in Mathematics*, Seiten 45–84, Springer Berlin / Heidelberg, 1999, 10.1007/BFb0092669.

[HS74] D. Hoffman und J. Spruck, *Sobolev and Isoperimetric Inequalities for Riemannian Submanifolds*, Communications on Pure and Applied Mathematics **27**(6), 715–727 (1974), Erratum: Communications on Pure and Applied Mathematics **28**(6), 765–766 (1975).

[Hui86] G. Huisken, *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature*, Invent. Math. **84**, 463–480 (1986), 10.1007/BF01388742.

[HY96] G. Huisken und S.-T. Yau, *Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature*, Invent. Math. **124**, 281–311 (1996).

[KS01] E. Kuwert und R. Schätzle, *The Willmore Flow with small initial energy*, J. Differential Geom. **57**(3), 409–441 (2001).

[KS02] E. Kuwert und R. Schätzle, *Gradient flow for the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom. **10**(2), 307–339 (2002).

[KS04] E. Kuwert und R. Schätzle, *Removability of Point Singularities of Willmore Surfaces*, Annals of Mathematics **160**(1), 315–357 (2004).

[LMS11] T. Lamm, J. Metzger und F. Schulze, *Foliations of asymptotically flat manifolds by surfaces of Willmore type*, Mathematische Annalen **350**(1), 1–78 (2011), 10.1007/s00208-010-0550-2.

[LY82] P. Li und S.-T. Yau, *A New Conformal Invariant and Its Applications to the Willmore Conjecture and the First Eigenvalue of Compact Surfaces*, Inventiones Mathematicae **69**, 269–291 (1982), 10.1007/BF01399507.

[McC05] J. A. McCoy, *Mixed volume preserving curvature flows*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **24**, 131–154 (2005), 10.1007/s00526-004-0316-3.

[Met04] J. Metzger, *Foliations of asymptotically flat 3-manifolds by 2-surfaces of prescribed mean curvature*, arXiv e-prints (2004), arXiv:math/0410413v2.

[MN12] F. C. Marques und A. Neves, *Min-Max theory and the Willmore conjecture*, arXiv e-prints (2012), arXiv:1202.6036.

[MWW13] J. Metzger, G. Wheeler und V. Wheeler, *Willmore flow of surfaces in Riemannian spaces I: Concentration-compactness*, arXiv e-prints (2013), arXiv:1308.6024v1.

[Pet06] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Band 171 aus *Graduate texts in Mathematics*, Springer-Verlag, zweite Auflage, 2006.

[Sim93] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom. **1**(2), 281–326 (1993).

[Sim01] G. Simonett, *The Willmore flow near spheres*, Differential and Integral Equations **14**, 1005–1014 (2001).

[Tho24] G. Thomsen, *Grundlagen der konformen Flächentheorie*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **3**(1), 31–56 (1924).

[Wil96] T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1996.

[Zei99] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis: Applications To Mathematical Physics*, Band 108 aus *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, dritte Auflage, 1999.