Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

An dieser Stelle sollen die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit noch einmal kurz dargestellt werden. Wir beschäftigen uns mit der Block-Zerlegbarkeit divisibler Designs, einer Zerlegung in kleinere divisible Designs, deren Punktklassen von denen des Ausgangsdesigns induziert und deren Blockmengen paarweise disjunkte Teilmengen des Ausgangsdesigns sind. Auch eine etwas abgeschwächte Form, die sogenannte fast Block-Zerlegbarkeit, wird hier eingeführt.

Mehrere bereits bekannte Strukturen divisibler Designs erweisen sich als Spezialfälle einer Block-Zerlegung: Summen divisibler Designs, $\mathcal{A}$-auflösbare DDs, $(\lambda, \alpha; k)$-Frames, (k, λ)-Semiframes, ein durch ein generalized Frame induziertes DD sowie Large sets of disjoint DDs.

In keines dieser genannten bereits bekannten Konzepte passen die im dritten Kapitel vorgestellten DDs. Trotzdem sind sie mindestens fast-, in den meisten Fällen sogar block-zerlegbar. In den ersten vier Beispielen wird ein Konstruktionsprinzip verwendet, welches von A. G. Spera eingeführt wurde [86] und eine Verallgemeinerung einer Methode von D. Hughes darstellt [39].

Wir zeigen[62], dass das zweite und vierte Beispiel in gewisser Form dual zueinander sind, obwohl die Konstruktionen von vollkommen unterschiedlichen Ansätzen ausgehen. Dabei werden einerseits ein 3-dimensionaler affiner Raum mit der zugehörigen uneigentlichen Hyperebene und andererseits eine Laguerre Geometrie über dem Ring der dualen Zahlen über dem endlichen Körper GF(q) verwendet.

Es zeichnet sich ab, dass diese „duale Sichtweise“ auch weiterhin die Bearbeitung dieses interessanten Gebietes aus unterschiedlichen Blickwinkeln ermöglicht und unter Umständen reizvolle Aspekte beleuchtet werden [33].

Im zweiten Teil des dritten Kapitels wird eine Konstruktionsmöglichkeit divisibler Designs eingeführt, die ohne Speras Konstruktionsprinzip auskommt. Hier werden Eigenschaften eines affinen Raumes genutzt, insbesondere verwenden wir dessen Translationsgruppe zur Konstruktion eines divisiblen Designs, indem wir ein sogenanntes *Starter-Design* in eine Hyperebene eines geeigneten projektiven Raumes einbetten und dann gewisse (zum Starter-Design isomorphe) Transalate zu einem DD vereinigen. In der Wahl des Starter-Designs sind wir vollkommen frei. Es handelt sich bei dieser Konstruktion um eine Verallgemeinerung und deutliche Erweiterung der Konstruktionsmethode, welche von R.-H. Schulz und A. G. Spera in [82] eingeführt und hier in Beispiel 1 dargestellt wurde. Zu jedem DD, welches nach ihrer Methode konstruiert wurde, kann mit der hier neu eingeführten sogenannten *Konstruktion (A)* ein isomorphes DD erstellt werden. Dies gilt für

[62](in Zusammenarbeit mit H. Havlicek und R.-H. Schulz)

alle DDs der Beispiele 1 bis 3. Konstruktion (A) erweist sich als vielseitig einsetzbares Werkzeug:

Zu jedem beliebigen $t-(s,k,\lambda)$-DD D (dem Starter-Design) mit v Punkten und b Blöcken können ganze Serien divisibler Desings konstruiert werden, genauer, es gibt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein

$$(s \cdot q^i, k, \lambda \cdot q^{i\,(n-2-d)}) - \text{DD } \tilde{D}^i \text{ mit } v \cdot q^i \text{ Punkten und } b \cdot q^{i\,(n-d)} \text{ Blöcken,}$$

wobei wir in der Wahl der Parameter $q, n, d \in \mathbb{N}$ nur insofern beschränkt sind, als dass q eine Primzahlpotenz sein und $(q^{n+1}-1)(q-1)^{-1} \geq v$ gelten muss. Der Parameter d ergibt sich aus der Konstruktion (s. S. 71). Es gibt Parameterkombinationen aus q, n und d, für die eine Konstruktion immer möglich ist (vgl. Bem. 3.2.8). Nun folgen einige Ergebnisse zu den erstellten DDs, wobei diese jeweils von der verwendeten Einbettung bzw. den Starter-Designs abhängen.

- Jedes konstruierte DD ist mindestens fast-block-zerlegbar (s. Bemerkung 3.2.11). Bei geeigneter Anfangskonfiguration ist das erste DD einer solchen Serie (also $\tilde{D}^i$ für $i=1$) sogar block-zerlegbar mit einer Wurzel (s. Lemma 3.2.12). Eine solche Konfiguration ist immer herstellbar (s. Lemma 3.2.14).

- Ist $\tilde{D}^i$ block-zerlegbar, dann gilt dies auch für alle nachfolgenden DDs dieser Serie, da Konstruktion (A) bezüglich der Block-Zerlegbarkeit strukturerhaltend ist. Dies gilt in vielen Fällen sogar für spezielle Block-Zerlegungen (s.u.). Wir erhalten also ganze Serien block-zerlegbarer divisibler Designs.

- Ist das Starter-Design eine Summe divisibler Designs, so gilt dies auch für jedes der $\tilde{D}^i$, $i \in \mathbb{N}$ (nach Lemma 3.2.23, 1. Teil und Lemma 3.2.27).

- Ist das Starter-Design $\mathcal{A}$-auflösbar mit $\mathcal{A} = \{\alpha_j \mid \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, m\}$, dann ist jedes der $\tilde{D}^i$, $i \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_i$-auflösbares DD, wobei $\mathcal{A}_i = \{\alpha_j \cdot q^{i(n-1-d)} \mid \alpha_j \in \mathcal{A}\}$ gilt (Satz 3.2.31).

- Ist das Starter-Design ein $(\lambda, \alpha; k)$-Frame mit m partiellen α-Parallelenklassen, dann ist jedes der $\tilde{D}^i$, $i \in \mathbb{N}$ ein $(\lambda \cdot q^{i(n-2-d)}, \alpha \cdot q^{i(n-1-d)}; k)$-Frame mit m partiellen $(\alpha \cdot q^{i(n-1-d)})$-Parallelenklassen (Satz 3.2.34).

- Ist das Starter-Design ein (k, λ)-Semiframe, dann erhalten wir eine Struktur, welche wir als verallgemeinerten Semiframe ansehen können und hier als $(\lambda, \alpha; k)$-Semiframe bezeichnen (s. Def. 3.2.35). Eine Serie, deren Starter-Design ein $(\lambda, \alpha; k)$-Semiframe ist, besteht aus DDs

$\tilde{D}^i$, $i \in \mathbb{N}$, die selbst wiederum $(\lambda \cdot q^{n-2-d}, q^{n-1-d}; k)$-Semiframes sind (Lemma 3.2.36).

- Ist das Starter-Design ein Large set of disjoint DDs $LGDD(t, k, ws; w\{s\})$, und gelten die beiden Bedingungen aus Lemma 3.2.40, dann ist das erste DD einer solchen Serie (also $\tilde{D}^i$ für $i = 1$) ein $LGDD(t, k, wsq; w\{sq\})$ (Lemma 3.2.40). Bei jeder weiteren Iteration muss erst die Gültigkeit von Bedingung (i) überprüft werden, bevor eine Aussage über die Struktur gemacht werden kann.

Neben der Konstruktion von 2-DDs kann man mit Konstruktion (A) unter geeigneten Umständen auch (fast)-block-zerlegbare t-DD mit $t > 2$ erstellen:

- Ist das Starter-Design ein $\mathrm{t} - (s, k, \lambda)$-DD ($t \geq 2$) mit v Punkten und b Blöcken und gelten die beiden Bedingungen aus Lemma 3.2.18, dann erhalten wir durch Konstruktion (A) ein (fast)-block-zerlegbares $\mathrm{t} - (s \cdot q, k, \lambda \cdot q^{\tilde{d}_\mathrm{t}-d-1})$-DD mit $v \cdot q$ Punkten und $b \cdot q^{\tilde{d}_\mathrm{t}-d+1}$ Blöcken (Proposition 3.2.19). Dabei gelten für die Parameter $q, n, d \in \mathbb{N}$ dieselben Bedingungen wie im 2-balancierten Fall und $\tilde{d}_\mathrm{t}$ ergibt sich aus der Konstruktion[63].

- Speziell kann zu jedem beliebigen 3-balancierten (s, k, λ)-DD mit Konstruktion (A) ein $3-(s \cdot q, k, \lambda)$-DD mit $v \cdot q$ Punkten und $b \cdot q^2$ Blöcken erstellt werden, wobei q Primzahlpotenz mit $q + 1 \geq v$ ist (Beispiel auf S. 83).

Auch bei 3-DDs ist Konstruktion (A) weitgehend strukturerhaltend, was wir uns in bezug auf generalized Frames zunutze machen.

- Ist das Starter-Design ein durch einen generalized Frame $F(3, k, w\{s\})$ induziertes $3-(s, k, 1)$-DD, dann erhalten wir durch Konstruktion (A) eine Struktur, die eine natürliche Verallgemeinerung eines generalized Frames darstellt. Allgemein für $t \in \mathbb{N}$ formuliert, bezeichnen wir diese als *generalized* λ*-Frame* $F(t, k, w\{s\})_\lambda$ (vgl. Def. 3.2.38). Wir erhalten hier durch Konstrution (A) einen generalized q-Frame $F(3, k, w\{s \cdot q\})_q$ (Lemma 3.2.39).

Das Starter-Design ist bei Konstruktion (A) immer isomorph zu den inneren Designs des erstellten DDs. Daher gilt:

[63](S. Lemma 3.2.18, Teil (ii) zur Definition von $\tilde{d}_\mathrm{t}$.)

- Zu jeglicher Eigenschaft, die ein existierendes DD aufweist, beispielsweise t-balanciert zu sein, kann ein DD konstruiert werden, dessen innere Designs diese Eigenschaft ebenfalls besitzen.

Konstruktion (A) kann also in vielen Fällen zur gezielten Erstellung divisibler Designs mit bestimmter innerer Strukturierung eingesetzt werden, wobei sich dies einerseits auf die Eigenschaften der inneren Designs (s.o. letzter Punkt), andererseits aber auch auf die gesamte Struktur bezieht (s.o. Spezialfälle der Block-Zerlegung).

Interessant wäre sicherlich die Untersuchung hinsichtlich der Strukturerhaltung bezüglich weiterer Strukturierungen divisibler Designs, wie es zum Beispiel bereits für die Zerlegung in „stark induzierte symmetrische Unterdesigns“ geschehen ist (vgl. Abschnitt 3.2.3.8).

Auch die konkrete Bestimmung von Situationen, in denen mit Konstruktion (A) t-balancierte DDs mit $t > 2$ erstellt werden können (also die beiden Bedingungen aus Lemma 3.2.18 erfüllt sind), erscheint mir lohnenswert.

Ein block-zerlegbares DD kann eine weitere Strukturierung aufweisen, die wir in der vorliegenden Arbeit als *„äußeres divisibles Design“* bezeichnen.
Mit Hilfe einer einfachen Charakterierung (s. Proposition 4.1.2) stellen wir fest, dass jedes block-zerlegbare DD,

- welches mit Konstruktion (A) erstellt wurde (oder isomorph zu einem solchen ist) und eine zum Starter-Design isomorphe Wurzel (mit Gruppe $\mathcal{T}$) besitzt, die selbst ein einfaches t-Design ist oder
- welches nach Theorem 3.1.32 oder 3.1.38 mit Hilfe einer Laguerre Geometrie erstellt wurde,

ein äußeres divisibles Design besitzt (Proposition 4.1.4).

Nach R.-H. Schulz wird der Begriff der *„(vollen) dualen Translationsgruppe“* eingeführt. Auch der Spezialfall einer *„planaren“* dualen Translationsgruppe wird nach R.-H. Schulz definiert und in Zusammenarbeit konnte festgestellt werden:

- Jedes mit Konstruktion (A) erstellte DD und sämtliche DDs der Beispiele 1 bis 3 besitzen eine elementar abelsche (volle) duale Translationsgruppe (Satz 5.0.6).
- Wurde bei der Konstruktion der oben genannten DDs eine Translationsebene der Ordnung q verwendet und gilt die jeweils zugehörige, in Satz 5.0.6 angebene Bedingung ((a') oder (b')), dann ist die duale Translationsgruppe planar (Satz 5.0.6).

Und umgekehrt:

- Ein DD, welches eine elementar abelsche Automorphismengruppe besitzt, die eine volle duale Translationsgruppe T induziert, ist isomorph zu einem DD, dessen Punkte (einige) affine Unterräume derselben Dimension eines affinen Raumes $\mathcal{A}$ und dessen Punktklassen Vereinigungen voller Parallelenklassen sind, und T ist durch die Translationsgruppe von $\mathcal{A}$ induziert (Satz 5.0.7).

- Ist T zusätzlich planar, dann kann $\mathcal{A}$ als eine Translationsebene angesehen werden, die Punkte des divisiblen Designs als Geraden von $\mathcal{A}$, die Punktklassen als Parallelenklassen von $\mathcal{A}$ und T als die volle Translationsgruppe von $\mathcal{A}$ (Satz 5.0.7).

Eine genauere Untersuchung der Orbits der Blöcke unter einer dualen Translationsgruppe erscheint mir durchaus interessant.

Zu jedem DD kann nach einem Verfahren von R.-H. Schulz und A. G. Spera ein zugehöriger *assoziierter CW-Code* erstellt werden [80]. Daher können Ergebnisse zu DDs auf ihre zugehörigen CW-Codes übertragen werden.

Zur Existenz von CW-Codes:

- Zu einem gegebenen $(s+1)$-nären CW-Code $C_0 \subseteq (\mathbb{Z}_{s+1}^{vs^{-1}})$ der Länge vs^{-1} und vom Gewicht k, der zu einem DD assoziiert ist[64] und b Codewörter enthält, gibt es ganze Serien zugehöriger CW-Codes $C_i \subseteq (\mathbb{Z}_{sq^i+1}^{vs^{-1}})$ derselben Länge und desselben Gewichts, welche ebenfalls zu DDs assoziiert sind und $b \cdot q^{i(n-d)}$ Codewörter enthalten. Dabei gelten für die Parameter $q, n, d \in \mathbb{N}$ dieselben Bedingungen wie für die Erstellung von DDs mit Konstruktion (A) (Proposition 6.1.4).

Zur Zerlegbarkeit von CW-Codes:

- Ist ein CW-Code zu einem block-zerlegbaren DD assoziiert, dann existiert eine Zerlegung der Menge der Codewörter derart, dass jeder dieser Teilcodes selbst ein zu einem DD assoziierter CW-Code ist (vgl. Satz 6.1.6).

Zu Automorphismengruppen:

Eigenschaften einer dualen Translationsgruppe eines DDs können auch bei dem zugehörigen assoziierten CW-Code verwendet werden, da zwischen den

[64](also die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus 6.1.1 erfüllt)

Automorphismengruppen divisibler Designs und deren Codes eine enge Verbindung besteht [84].

- Wissen wir, dass das zu einem CW-Code $C(\tilde{D})$ gehörige DD $\tilde{D}$ blockzerlegbar mit Wurzel und Gruppe T ist, wobei T duale Translationsgruppe und die Wurzel ein Design ist, dann lässt sich auf sehr einfache Weise ein binärer CW-Code erstellen, der isomorph zu einem zur Wurzel (bezüglich der Punktklassenmenge von $\tilde{D}$) assoziierten CW-Code ist (vgl. Lemma 6.1.9 und Verfahren zur Erzeugung des binären Codes auf Seite 116).

Zum Minimalabstand:

- Der Minimalabstand eines zu einem DD assoziierten CW-Codes kann mit Hilfe des Abstandes der zugehörigen Blöcke bestimmt und ausgedrückt werden (vgl. Lemmata 6.1.17, 6.1.18 und Korollar 6.1.19).
- Besitzt das Starter-Design von Konstruktion (A) einen bestimmten Minimalabstand, so kann durch gezielte Einbettung der Minimalabstand des zugehörigen assoziierten CW-Codes beeinflusst sowie leicht bestimmt werden (vgl. Abschnitt 6.1.6).

So, wie der Zusammenhang zur Codierungstheorie im letzten Kapitel dieser Arbeit genutzt wurde, um Aussagen zu bestimmten Codes zu machen, ist es durchaus vorstellbar, dass auch Zusammenhänge zu weiteren Gebieten der Mathematik, wie beispielsweise der Graphentheorie oder Kryptographie, bestehen, durch welche die in der vorliegenden Arbeit erzielten Ergebnisse dort ebenfalls Verwendung finden könnten.