5 Die duale Translationsgruppe

Bei den in den vorigen Abschnitten beschriebenen Konstruktionsmöglichkeiten divisibler Designs spielten die Automorphismengruppen der konstruierten divisiblen Designs eher eine untergeordnete Rolle bzw. wurden gar nicht erst erwähnt. In diesem Abschnitt wollen wir uns nun ein wenig näher damit auseinandersetzen, und wir werden sehen, dass einige der konstruierten DDs sehr interessante Automorphismengruppen besitzen.

Wir definieren zunächst, was wir unter einer *dualen Translationsgruppe* verstehen und werden später zeigen, welche Bedeutung sie als zugehörige Automorphismengruppe eines DDs haben kann. Der Begriff der dualen Translationsgruppe wurde von R.-H. Schulz eingeführt.

Definition 5.0.5 Sei $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ ein divisibles Design. Wir nennen die Gruppe T ein *(volle) duale Translationsgruppe* von $\mathcal{D}$, falls

(1) $T \leq \mathrm{Aut}\mathcal{D}$,

(2a) T alle Punktklassen von $\mathcal{D}$ fest lässt,

(2b) jede Punktklasse die Vereinigung von Orbits unter T der Länge l ($l \in \mathbb{N}$) ist,

(3) $T_P \neq T_Q$ für alle $P, Q \in \mathcal{P}$ aus verschiedenen Orbits unter T ist.

T wird *planar* genannt, falls zusätzlich gilt:

(4) $T = T_P \cdot T_Q$ und $T_P \cap T_Q = \mathrm{id}$ für geeignete $P, Q \in \mathcal{P}$ mit P, Q aus verschiedenen Orbits der Punktklassen;

(5) für jedes $\tau \in T$ existiert ein $P \in \mathcal{P}$ mit $\tau(P) = P$.

Betrachten wir die Beispiele 1-3 aus Abschnitt 3.1 sowie DDs, welche mit Konstruktion (A) erstellt wurden, so können wir feststellen (s.u.), dass die konstruierten t-DDs jeweils eine volle duale Translationsgruppe besitzen. Dies halten wir in folgendem Satz fest, der in Zusammenarbeit mit R.-H. Schulz entstanden ist.

Theorem 5.0.6 (Schulz, Giese) *Ist $\tilde{D}$ ein (nicht-triviales) divisibles Design, welches*

(a) wie in Beispiel 1, 2, oder 3 aus Abschnitt 3.1 oder in gleichartiger Weise mit Hilfe einer Translationsebene, eines 3- oder 4-dimensionalen affinen Raumes $\mathcal{A}$ mit Translationsgruppe $\mathcal{T}$ und jeweilig einer 2-homogenen Gruppe auf $\mathcal{O} \subseteq g_\infty$, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H}_\infty$ oder $\mathcal{O} \subseteq E_\infty$ konstruiert ist oder

(b) mit Konstruktion (A) erstellt wurde,

dann induziert $\mathcal{T}$ eine elementar abelsche (volle) duale Translationsgruppe T von $\tilde{D}$.
Ist der affine Raum $\mathcal{A}$ eine Translationsebene der Ordnung q und

(a') gilt zusätzlich $\mathcal{O} = g_\infty$, falls Speras Konstruktionsprinzip verwendet wird oder

(b') gilt zusätzlich $q+1 = |\mathcal{P}|$, falls Konstruktion (A) verwendet wird, wobei $\mathcal{P}$ die Punktmenge des Starter-Designs ist,

dann ist T planar.

Beweis: Zu Teil (a) und (b): Sowohl bei den DDs der Beispiele 1-3 aus Abschnitt 3.1 als auch bei DDs, die wir durch Konstruktion (A) erhalten, bekommen wir konstruktionsbedingt eine von der Translationsgruppe $\mathcal{T}$ des jeweils verwendeten affinen Raumes induzierte nicht-triviale Automorphismengruppe T des jeweilig konstruierten DDs (s. [82], Th. (2.3); [15], Bemerkung (3.2); Bemerkung (3.2.5)).

Es ist wohlbekannt, dass die Translationsgruppe einer endlichen affinen Ebene, sowie eines endlichen affinen Raumes elementar abelsch ist (s. z.B. [63], Th. (7.10)). Da die Punktklassen der konstruierten DDs jeweils aus paarweise gleichmächtigen Mengen voller Parallelenklassen affiner Hyperebenen bestehen, lässt $\mathcal{T}$ und damit auch T die Punktklassen jeweils fest und diese bestehen aus Bahnen gleicher Länge. Das ergibt insgesamt die ersten drei Bedingungen aus Definition 5.0.5. Je zwei beliebige Punkte von $\tilde{D}$ aus verschiedenen Bahnen sind nicht-parallele affine Hyperebenen. Da deren Stabilisatoren in der zugehörigen Translationsgruppe auch als Automorphismengruppen unterschiedlich sind, gilt Bedingung (3). T ist demnach eine (volle) duale Translationsgruppe.

Zu Teil (a') und (b'): In Beispiel 1 (aus Abschnitt 3.1) wird die Translationsgruppe einer affinen Ebene verwendet und die Punkte des konstruierten DDs sind affine Geraden. Ebensolches gilt, wenn Konstruktion (A) mit einer Einbettung in eine projektive Gerade beginnt. Sei also $\mathcal{A}$ eine Translationsebene der Ordnung q, wobei entweder Bedingung (a') oder (b') aus Satz 5.0.6 erfüllt ist. Es gibt außer der Identität keine Translation, die zwei nicht-parallele affine Geraden gleichzeitig fest lässt. Daher gilt für je zwei Punkte P, Q aus verschiedenen Bahnen unter T, dass ihr Stabilisator in T ebenfalls nur die Identität sein kann. Da $\tilde{D}$ als nicht-trivial vorausgesetzt wurde, gibt es mindestens zwei Punktklassen. Es gilt folglich

$$T_P \cap T_Q = \mathrm{id} \text{ für alle } P, Q \in \mathcal{P} \text{ aus verschiedenen Bahnen.}$$

Man sieht also, dass T treu durch $\mathcal{T}$ induziert ist. Wir können daher T mit $\mathcal{T}$ und T_P mit $\mathcal{T}_{P'}$ identifizieren, wobei P' die affine Gerade ist, die wir mit dem Punkt P des DDs $\tilde{D}$ identifizieren. Wir wissen, die Ordnung des Stabilisators einer affinen Geraden in $\mathcal{A}$ ist gleich q. Wir können also insgesamt für alle P, Q aus verschiedenen Bahnen folgern:

$$|T_P \cdot T_Q| = |T_P| \cdot |T_Q| = q^2 = |T| = |\mathcal{T}|.$$

Damit gilt auch Bedingung (4) aus Definition 5.0.5. Gilt zusätzlich bei der Verwendung von Speras Konstruktionsprinzip $\mathcal{O} = g_\infty$, bzw. umfasst bei Konstruktion (A) die Einbettung der Punkte des Starter-Designs die gesamte Punktmenge der verwendeten projektiven Geraden, so gibt es zu jeder Translation der zugehörigen affinen Ebene einen Punkt des DDs, also eine affine Gerade, deren Schnitt mit der idealen Hyperebene genau das Zentrum dieser Translation ist und daher von dieser Translation fest gelassen wird. Folglich gilt auch Bedingung (5) aus Definition 5.0.5 und T ist demnach planar. □

Nachdem wir festgestellt haben, dass eine Vielzahl der DDs, welche durch die beschriebenen Konstruktionsmöglichkeiten erstellt wurden, eine duale Translationsgruppe besitzen, widmen wir uns nun der Frage, welche Rückschlüsse wir aus dem Vorhandensein einer solchen Automorphismengruppe bei einem DD ziehen können. Dazu werden wir folgenden Satz zeigen:

Theorem 5.0.7 (Schulz, Giese) *Sei $\tilde{D}$ ein (nicht-triviales) divisibles Design auf dem eine elementar abelsche Gruppe $\hat{T}$ operiert, die eine volle duale Translationsgruppe T von $\tilde{D}$ induziert.*

(a) *Dann ist $\tilde{D}$ isomorph zu einem divisiblen Design $\tilde{D}'$, dessen Punkte (einige) affine Unterräume derselben Dimension eines affinen Raumes $\mathcal{A}$ und dessen Punktklassen Vereinigungen voller Parallelenklassen sind und T ist durch die Translationsgruppe von $\mathcal{A}$ induziert.*

(b) *Wenn T zusätzlich planar ist, dann kann $\mathcal{A}$ als eine Translationsebene angesehen werden, die Punkte von $\tilde{D}'$ als Geraden von $\mathcal{A}$, die Punktklassen als Parallelenklassen von $\mathcal{A}$ und T als die volle Translationsgruppe von $\mathcal{A}$.*

Beweis: Zu Teil (a): Es sei $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$ ein DD mit einer dualen Translationsgruppe T, welche durch eine elementar abelsche Gruppe $\hat{T}$ wie folgt induziert ist: $T \cong \hat{T}/\mathrm{Kern}\,\pi$, wobei π der Kern der Operation von $\hat{T}$ auf $\tilde{\mathcal{P}}$ ist. Als homomorphes Bild einer elementar abelschen Gruppe besitzt T ebenfalls diese Eigenschaft.

Wir wählen aus jeder Bahn jeder Punktklasse $[P]$ $(P \in \tilde{\mathcal{P}})$ von $\tilde{D}$ einen Punkt P_O aus und definieren die Menge dieser ausgewählten Punkte als $\hat{O}$. Nun definieren wir

$$\hat{G} := \{\tau T_{P_O} \mid \tau \in T \text{ und } P_O \in \hat{O}\}.$$

Wir werden nun zeigen, dass die Inzidenzstruktur $(T, \hat{G}, \in)$ aus Punkten und affinen Unterräumen eines affinen Raumes $\mathcal{A}$ besteht. Nach Voraussetzung ist T eine elementar abelsche p-Gruppe. Bekannterweise[55] können die Elemente einer solchen Gruppe als Menge von Vektoren eines Vektorraumes über dem endlichen Körper GF(p) interpretiert werden, wobei die Hintereinanderausführung der Elemente von T der additiven Verknüpfung entspricht, während man das Produkt eines Gruppenelements $\tau \in T$ mit $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ als die i-te Potenz von τ auffassen kann: $i \cdot \tau := \tau^i$.
Die Elemente von T können daher als die Vektoren eines Vektorraumes interpretiert werden. Die Untergruppe T_{P_O} $(P_O \in \hat{O})$ ist ein Unterraum des Vektorraumes T, da für $\tau \in T_{P_O}$ und $i \in \text{GF}(p)$ gilt: $i \cdot \tau(P_O) = \tau^i(P_O) = P_O$, woraus $i \cdot \tau \in T_{P_O}$ folgt. Dies zeigt, dass die Elemente von $\hat{G}$ affine Unterräume von T sind.

Sei nun $P \in \tilde{\mathcal{P}}$, dann wissen wir wegen Bedingung (2b) (aus Definition 5.0.5), dass ein $\tau \in T$ und ein $P_O \in \hat{O}$ existiert, für welches $\tau(P_O) = P$ gilt. Definieren wir

$$\overline{P} = \overline{\tau(P_O)} := \tau T_{P_O},$$

dann gilt $\overline{P} \in \hat{G}$. Nun werden wir zeigen, dass die Abbildung

$$\rho : \tilde{\mathcal{P}} \to \hat{G} \text{ und } P \mapsto \overline{P}$$

eine Bijektion ist. Jeder Punkt P bestimmt eine Bahn einer Punktklasse und nach Definition eindeutig einen Punkt $P_O \in \tilde{\mathcal{P}}$. Nach Bedingung (2b) existiert ein $\tau \in T$ mit $\tau(P_O) = P$. Seien τ_1 und τ_2 verschiedene Elemente aus T, für die $\tau_i(P_O) = P$ $(i = 1, 2)$ gilt. Dann haben wir $\tau_1(P_O) = P = \tau_2(P_O)$ und somit $P_O = \tau_1^{-1}\tau_2(P_O)$, was $\tau_1^{-1}\tau_2 \in T_{P_O}$ ergibt und folglich gilt $\tau_1 T_{P_O} = \tau_2 T_{P_O}$. Die Abbildung ρ ist daher wohldefiniert.
Sei $\overline{P} = \tau T_{P_O} \in \hat{G}$ gegeben, dann ist $P = \tau(P_O)$ ein Urbild von $\overline{P}$, was die Surjektivität von ρ zeigt. Nun werden wir noch die Injektivität von ρ zeigen. Sei

$$\overline{P} = \overline{\tau_1(P_O)} = \tau_1 T_{P_O} = \tau_2 T_{Q_O} = \overline{\tau_2(Q_O)} = \overline{Q}.$$

Mit der Theorie über lineare Mannigfaltigkeiten erhält man $T_{P_O} = T_{Q_O}$ und folglich $\tau_2^{-1}\tau_1 \in T_{P_O}$. Mit Eigenschaft (3) (aus Definition 5.0.5) gilt $P_O = Q_O$

[55](S. z.B. [58])

und damit $\tau_1 T_{P_O} = \tau_2 T_{P_O}$. Dies zeigt, dass

$$P = \tau_1(P_O) = \tau_2(Q_O) = Q$$

das eindeutig bestimmte Urbild ist, was die Injektivität und insgesamt die Bijektivität der Abbildung ρ zeigt.

T operiert auf $(T, \hat{G}, \in)$ als Automorphismengruppe. Man definiere $\hat{\tau}$ für $\tau \in T$ als Linkstranslation $\hat{\tau}(\tau_1) := \tau\tau_1$. Dann ist $\hat{\tau}$ eine Translation des affinen Raumes $\mathcal{A}$ und T kann als Translationsgruppe von $\mathcal{A}$ angesehen werden. Die Elemente von $\hat{G}$ werden unter sich permutiert. Wenn τ_1 alle Elemente von $\hat{G}$ fix lässt, dann gilt $\hat{\tau}_1(\tau T_{P_O}) = \tau T_{P_O}$ für alle $\mathcal{P}_O \in \hat{O}$ und $\tau \in T$. Daraus folgt

$$\tau_1 \in \bigcap_{P_O \in \hat{O}} T_{P_O} =: H.$$

Nun zeigen wir: Wenn es ein $\tau_1 \in H$ mit $\tau_1 \neq \mathrm{id}$ gibt, werden nicht nur alle Elemente aus $\hat{O}$ von diesem fest gelassen, sondern auch alle anderen Punkte aus $\tilde{\mathcal{P}}$. Da wir wissen, dass T auf den Punkten von $\tilde{D}$ treu operiert, können wir aus diesem Widerspruch folgern, dass $H = \mathrm{id}$ gelten muss.

Sei $\tau_1 \in H$ mit $\tau_1 \neq \mathrm{id}$. Angenommen, es gibt einen Punkt $P \in \tilde{\mathcal{P}}$ für den

$$\tau_1(P) = P' \text{ mit } P \neq P' \quad (P' \in \tilde{\mathcal{P}}) \tag{16}$$

gilt. Da T die Punktklassen fest lässt (Bedingung (2a)) und P, P' in der gleichen Bahn liegen, gilt $[P] = [P']$. Nach Definition gibt es einen Punkt $P_O \in \hat{O}$ und $\tau, \tau' \in T$, so dass $\tau(P_O) = P$ und $\tau'(P_O) = P'$ gilt. Zusammen mit (16) erhalten wir demnach

$$\tau'(P_O) = P' = \tau_1(P) = \tau_1(\tau(P_O)).$$

Da T abelsch ist, gilt

$$\tau\tau_1(P_O) = \tau'(P_O),$$

was wegen $\tau_1 \in T_{P_O}$

$$\tau(P_O) = \tau'(P_O) \quad \text{und folglich} \quad P = P'$$

ergibt.
Insgesamt können wir demnach festhalten, dass H nur aus der Identität besteht und T auf den Elementen von $\hat{G}$ treu operiert.

Nun möchten wir zeigen, dass alle Elemente von $\hat{G}$ die gleiche Dimension besitzen. Sei $P_O \in \hat{O}$. Wegen $|T| = |T_{P_O}| \cdot |P_O^T|$ und der Voraussetzung über die Bahnlänge folgt

$$|\overline{P_O}| = |T_{P_O}| = |T|/|P_O^T| = |T|/l \text{ für alle } P_O \in \hat{O}.$$

Ist $|T|/l = p^t$, so hat jedes Element von $\hat{G}$ die Dimension t über GF(p).

Zu Teil (b): Sei T nun planar. $\tilde{D}$ ist nach Teil (a) isomorph zu einem DD $\tilde{D}'$, dessen Punkte affine Unterräume derselben Dimension und dessen Punktklassen Vereinigung voller Parallelenklassen eines affinen Raumes $\mathcal{A}$ sind. Außerdem kann T als Translationsgruppe von $\mathcal{A}$ aufgefaßt werden.
Nach Bedingung (4) schneiden sich je zwei der Unterräume T_{P_O} mit $P_O \in \hat{O}$ nur in der id, welche dem Nullpunkt entspricht und nach (5) fixiert jedes $\tau \in T$ ein Element $P = \tau_1(P_O) \in \tilde{\mathcal{P}}$ (mit $P_O \in \hat{O}$ und $\tau_1 \in T$ geeignet) und wegen

$$\tau_1(P_O) = P = \tau(P) = \tau\tau_1(P_O) = \tau_1\tau(P_O)$$

auch P_O. Es gilt demnach $\tau \in T_{P_O}$.
Die Menge $\{T_{P_O} \mid P_O \in \hat{O}\}$ bildet also eine nicht-triviale[56] Partition von T und wegen Bedingung (4) einen Spread von T.

Nach J. André [1] (s. auch [64], Th. 1.4) kann T als Translationsebene $\mathcal{A}$ angesehen werden, $\hat{G}$ als Menge der Geraden von $\mathcal{A}$, die Punktklassen als Vereinigung von Parallelenklassen und T als die volle Translationsgruppe von $\mathcal{A}$. □

Ein DD mit einer elementar abelschen dualen Translationsgruppe besitzt demnach einen starken Bezug zur affinen Geometrie - es lässt sich als Unterstruktur eines affinen Raumes ansehen. Ebenfalls einen engen Zusammenhang gibt es zwischen DDs und Codes konstanten Gewichts. Diesem werden wir uns nun im folgenden Kapitel widmen.

[56] Da $\tilde{D}$ als nicht-trivial vorausgesetzt ist, gibt es mindestens zwei verschiedene Punktklassen und daher mindestens zwei verschiedene Elemente in dieser Menge.