4 Äussere DDs block-zerlegbarer divisibler Designs

Im vorangegangenen Kapitel haben wir uns mit der Konstruktion divisibler Designs beschäftigt. Dabei wies die Mehrzahl der vorgestellten DDs die Struktur der Block-Zerlegbarkeit auf. Ist ein DD block-zerlegbar, dann kann es eine weitere Struktur besitzen. Um diese zusätzliche Strukturierung zu formalisieren, führen wir nun den Begriff des *äußeren divisiblen Designs* ein.

4.1 Das Konzept

Definition 4.1.1 Sei D ein block-zerlegbares t-divisibles Design ($t \geq 2$).
Wir definieren die Punktmengen der inneren Designs als neue Blöcke und bezeichnen die Menge dieser Blöcke als $\mathcal{B}_O$.
Ist die aus der Punktmenge $\mathcal{P}$ (mit denselben Punktklassen wie in D) und der Blockmenge $\mathcal{B}_O$ bestehende Inzidenzstruktur D_O wieder ein t-divisibles Design, dann nennen wir D_O ein *äußeres t-divisibles Design von D.*

4.1.1 Charakterisierung von DDs mit äußerem DD

In der nächsten Proposition geben wir eine einfache Charakterisierung eines block-zerlegbaren t-divisiblen Designs mit äußerem t-divisiblen Design an.

Proposition 4.1.2 *Sei D ein block-zerlegbares t-divisibles Design ($t \geq 2$). D besitzt genau dann ein äußeres t-divisibles Design, wenn gilt:*

(a) Die inneren Designs sind nicht divisible, das heißt, ihre Punktklassen sind jeweils einelementig,

(b) je t transversale Punkte von D sind in derselben Anzahl innerer Designs enhalten und

(c) die Punktmengen der inneren Designs sind paarweise von gleicher Kardinalität.

Beweis: „⇒“
Sei D ein block-zerlegbares t-divisibles Design ($t \geq 2$) mit einem äußeren t-divisiblen Design. Die Blöcke des äußeren t-divisiblen Designs sind per definitionem die Punktmengen der inneren Designs von D. Ein Block eines divisiblen Designs ist eine transversale Teilmenge der Punktmenge. Also müssen

die Punktmengen der inneren Designs transversale Teilmengen der Punktmenge von D_O sein, da Punktmengen und Punktklassen von D und seinem äußeren DD D_O übereinstimmen. Folglich sind die Punktklassen der inneren Designs einelementig, was Teil (a) ergibt.
Da D ein äußeres t-divisibles Design besitzt, sind je t transversale Punkte in genau μ, $\mu \in \mathbb{N}$ Blöcken dieses äußeren t-divisiblen Designs enthalten, also in genau μ inneren Designs. Dies ergibt Teil (b).
Die letzte Bedingung resultiert direkt aus der Eigenschaft eines divisiblen Designs, Blöcke einer konstanten Größe zu besitzen und der Definition eines äußeren t-divisiblen Designs.

„$\Leftarrow$“
Sei nun D ein block-zerlegbares t-divisibles Design ($t \geq 2$), was die Bedingungen (a) bis (c) erfüllt. Die inneren Designs von D sind nicht divisible, das heißt, ihre Punktklassen sind einelementig. Da diese Punktklassen durch die Punktklassen von D induziert sind, müssen die Punktmengen der inneren Designs transversale Teilmengen der Punktmenge von D sein und, durch Eigenschaft (c) bedingt, paarweise von derselben Größe. Je t transversale Punkte sind in derselben Anzahl innerer Designs enthalten, also in der jeweiligen Punktmenge dieser inneren Designs. Definiert man die Punktmengen der inneren Designs als neue Blöcke, dann erfüllt die Inzidenzstruktur, die aus der Punktmenge von D mit ihren Punktklassen und diesen oben definierten neuen Blöcken besteht, die Bedingungen (1) bis (3) aus Definition 1.1.2. Man beachte, dass $t \geq v/s$ für D gilt und damit auch für die neue Inzidenzstruktur. Diese ist folglich ein t-divisibles Design und die Behauptung ist gezeigt. □

4.1.2 Inzidenzmatrizen äußerer divisibler Designs

Ebenso wie bei der Block-Zerlegbarkeit lässt sich bei einem t-divisiblen Design mit $t = 2$, anhand seiner Inzidenzmatrix erkennen, ob es ein äußeres divisibles Design besitzt.

Nach Satz 2.2.1 wissen wir, dass es zu einem gegebenen block-zerlegbaren divisiblen Design D, was 2-balancierte innere divisible Designs besitzt, eine Inzidenzmatrix M einer gewissen Form (s. Satz 2.2.1) gibt. Wir führen nun einige Transformationen daran durch: Wir ersetzen jede Zeile jeder Untermatrix M_{xy} von M durch eine Null, falls alle Einträge dieser Zeile gleich Null sind, ansonsten ersetzen wir sie durch eine Eins. Auf diese Weise erhalten wir eine $(v \times u)$-Matrix, die wir als M_o bezeichnen. Ist diese Matrix M_o eine Inzidenzmatrix eines divisiblen Designs, dann besitzt D ein äußeres divisibles Design und umgekehrt.

Diese Behauptung halten wir in der nächsten Proposition fest.

Proposition 4.1.3 *Sei D ein block-zerlegbares divisibles Design. D hat genau dann ein äußeres divisibles Design, wenn es eine Inzidenzmatrix M besitzt, dessen zugehörige Matrix M_o (wie oben konstruiert) eine Inzidenzmatrix eines divisiblen Designs ist.*

Beweis: Sei D ein block-zerlegbares divisibles Design D mit einer Inzidenzmatrix M, welche die in Satz 2.2.1 gegebene Form besitzt und deren zugehörige Matrix M_o wie oben konstruiert ist. Man betrachte die Spalten aus Untermatrizen von M. Jede von ihnen gehört zu einem inneren Design von D. Durch das Ersetzen der Zeilen jeweils durch Eins oder Null erhalten wir eine Inzidenzmatrix der Punkte von D und der Punktmengen der inneren Designs von D. Ist diese Inzidenzstruktur ein divisibles Design, dann ist es ein äußeres divisibles Design von D. Und umgekehrt, wenn D ein äußeres divisibles Design hat, dann ist eine der Inzidenzmatrizen des äußeren DDs gleich M_o, da die Punktmenge und Punktklassen nach Definition mit denen von D übereinstimmen und die Blockmenge aus den Punktmengen der inneren Designs besteht; und M_o besitzt die in Proposition 1.1.5 angegebene Form. □

4.1.3 Untersuchung zu äußeren DDs

Wir werden nun untersuchen, welche der DDs, die im vorigen Kapitel dargestellt wurden, ein äußeres DD besitzen. Dazu zeigen wir zunächst die folgende Proposition und erläutern anschließend, dass es zu jedem block-zerlegbaren t-DD, welches in den Beispielen 1 und 2 des letzten Kapitels dargestellt wurde, ein isomorphes t-DD gibt, welches den Bedingungen des 1. Teils dieser Proposition genügt. Die Proposition gilt daher auch für die nach Schulz und Spera [82] sowie nach Schulz und Cerroni [15] konstruierten block-zerlegbaren t-DDs.

Proposition 4.1.4 *(1) Sei $\tilde{D}$ ein mit Konstruktion (A) erstelltes t-DD, wobei*

(α) als Starter-Design ein t-Design $\hat{D}$ verwendet wird,

(β) Bedingung ($**$) (s. Lemma 3.2.12) sowie

(γ) Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 3.2.18

erfüllt sind oder

(2) sei $\tilde{D}$ ein nach Theorem 3.1.32 oder 3.1.38 erstelltes t-DD ($t = 3$),

dann besitzt $\tilde{D}$ ein äußeres t-divisibles Design.

Beweis: Zu (1): Sei $\tilde{D}$ ein mit Konstruktion (A) erstelltes t-DD, wobei die Bedingungen (α) bis (γ) erfüllt sind. Nach Lemma 3.2.18 ist $\tilde{D}$ ein block-zerlegbares t-DD mit zu $\hat{D}$ isomorpher Wurzel und Gruppe $\mathcal{T}$.[53] Es gibt eine Wurzel, daher folgt mit der Isomorphie der inneren Designs sofort Punkt (c) der Proposition 4.1.2 und zusammen mit (α) erhalten wir auch Punkt (a), weshalb lediglich Punkt (b) zu zeigen bleibt.

Die Anzahl innerer Designs von $\tilde{D}$ entspricht genau $[\mathcal{T} : \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}] = |\tilde{\mathcal{T}}|$ (s. Def. 3.2.10 und Lemma 3.2.12), d.h. jede Nebenklasse von $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}$ in $\mathcal{T}$ bestimmt genau ein inneres Design. Wegen (γ) besitzt $\mathcal{T}_Y$ für jede beliebige transversale t-Teilmenge Y der Punktmenge von $\tilde{D}$ konstante Ordnung. Nach Konstruktion gilt[54] $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} = \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}}$, damit ist $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}$ Untergruppe von $\mathcal{T}_Y$ und wir erhalten $[\mathcal{T}_Y : \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}]$ unterschiedliche innere Designs, die die transversalen Punkte aus Y enthalten. Da Y beliebig gewählt war, gilt dies für jede transversale t-Teilmenge der Punkte.

Zu (2): Sei $\tilde{D}$ ein nach Theorem 3.1.32 oder 3.1.38 erstelltes DD, dann ist dies nach 3.1.39 block-zerlegbar, wobei die Punktmengen der inneren Designs jeweils genau einer Kette der verwendeten Kettengeometrie entsprechen. Die Punkte einer Kette sind transversal ([34], Th. (3.4.5) oder [3]), woraus Punkt (a) von Proposition 4.1.1 folgt. Als Bilder der Standardkette unter einer bijektiven Abbildung (s. [34], Def. (3.4.3), [3]) besitzen alle Ketten dieselbe Mächtigkeit. Damit gilt Punkt (c) und es bleibt wiederum lediglich Punkt (b) (aus Proposition 4.1.1) zu zeigen. Dieser ergibt sich jedoch sofort aus der Tatsache, dass je drei transversale Punkte von $\tilde{D}$ in genau einer Kette gemeinsam liegen ([34], (3.4.8) und (3.4.9) (a)), also in genau einem inneren Design enthalten sind. □

Nach Bemerkung 3.2.20 kann man zu jedem in den Beispielen 1 und 2 dargestellten t-divisiblen Design D mit Konstruktion (A) ein dazu isomorphes t-DD $\tilde{D}$ herstellen. Ist D block-zerlegbar mit einer Wurzel, die ein t-Design ist, und einer Gruppe T, so muss dies entsprechend für $\tilde{D}$ ebenfalls gelten. Da die Wurzel isomorph zum Starter-Design ist, gilt Bedingung (α) und wegen der Block-Zerlegbarkeit gelten nach Lemma 3.2.18 (bei $t = 2$ auch nach Lemma 3.2.12) die Bedingungen (β) und (γ).

Nun werden wir uns einer weiteren Gemeinsamkeit der in dieser Arbeit dargestellten divisiblen Designs zuwenden - der dualen Translationsgruppe.

---

[53]Man beachte, dass (γ) für $t = 2$ immer gültig ist und in diesem Fall $\tilde{D}$ daher auch nach Lemma 3.2.12 block-zerlegbar ist.

[54]Man beachte, dass mit $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ der punktweise Stabilisator von $\tilde{\mathcal{P}}$ in $\mathcal{T}$ gemeint ist. Die Menge $\tilde{\mathcal{P}}$ wird nach Konstruktion von jedem $t \in \mathcal{T}$ fest gelassen.