

### 3 Konstruktionen block-zerlegbarer divisibler Designs

In diesem Kapitel werden unterschiedliche Konstruktionsmöglichkeiten divisibler Designs vorgestellt. Mit den dargestellten Konstruktionen werden DDs erzeugt, welche eine starke innere Strukturierung aufweisen, in vielen Fällen sogar block-zerlegbar sind. Zunächst wird ein Konstruktionsprinzip vorgestellt, welches von A.G. Spera Anfang der 90'er Jahre des 20. Jahrhunderts eingeführt wurde ([86], Prop. (2.3)). Es stellt eine Verallgemeinerung von Resultaten über  $t$ -Designs von D.R. Hughes dar (s. z.B. [40], Th. (3.4); [39]; s. auch [5] Kap. III, (4.6)). In den folgenden vier Beispielen wird dieses Konstruktionsprinzip angewandt, wobei in den ersten drei Beispielen eine von R.-H. Schulz und A.G. Spera entwickelte Konstruktionsmethode Verwendung findet, während das vierte Beispiel auf einer Idee von H. Havlicek beruht. Anschließend wird eine Konstruktionsmethode für DDs vorgestellt, welche die Methode von Schulz und Spera in abgewandelter Form verallgemeinert und erweitert. Diese bietet den Vorteil, dass wir von jedem beliebigen  $t$ -DD (dem *Starter-Design*) ausgehend, Serien block-zerlegbarer DDs konstruieren können. Besitzt ein solches Starter-Design selbst schon spezielle innere Strukturen, ist es also beispielsweise  $\alpha$ -auflösbar, so wird das konstruierte DD in vielen Fällen ebenfalls eine solch spezielle innere Struktur aufweisen. Außerdem sind wir mit dieser Konstruktion unter bestimmten Umständen (die in Abschnitt 3.2.2 erläutert werden) in der Lage,  $t$ -DDs mit  $t \neq 2$  zu erstellen.

#### 3.1 Konstruktionen mit Speras Konstruktionsprinzip

In diesem Abschnitt wird das bereits erwähnte Konstruktionsprinzip für DDs von A.G. Spera (s. [86]) mit einer leichten Modifikation von H. Havlicek eingeführt [34].

Da hierzu Begriffe aus der Gruppentheorie benötigt werden, beginnen wir mit einigen grundlegenden Definitionen.

**Definition 3.1.1** Sei  $G$  eine auf einer Menge  $X$  operierende Gruppe und  $R$  eine  $G$ -invariante Äquivalenzrelation auf  $X$ , das heißt, es gilt

$$xRy \implies x^g R y^g \text{ (für alle } g \in G, x, y \in X),$$

dann wird  $\Lambda = (G, X, R)$  eine  $R$ -Gruppe genannt. (Die Gruppe  $G$  induziert eine Permutationsgruppe auf  $X$ , allerdings nicht notwendig treu.)

**Definition 3.1.2**  $\Lambda$  wird *t* – *R*-transitiv (*t* – *R*-homogen) genannt, wenn für je zwei *R*-transversale *t*-Tupel (*R*-transversale *t*-Teilmengen  $X_1, X_2$ )  $(x_1, \dots, x_t)$  und  $(y_1, \dots, y_t)$  aus Elementen von  $X$  ein  $g \in G$  existiert, so dass  $y_i = x_i^g$  für  $i = 1, 2, \dots, t$  ( $X_1^g = X_2$ ) gilt.

Dabei nennen wir ein *t*-Tupel  $(x_1, \dots, x_t) \in X^t$  (eine *t*-Teilmenge  $X_1 \subseteq X$ ) *R*-transversal, wenn dessen Einträge (deren Elemente) zu paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen von *R* gehören.

Nun folgt **Speras Konstruktionsprinzip** (s. [86]), in leicht abgewandelter Form nach H. Havlicek (s.[34]):

**Theorem 3.1.3** [34] Sei  $X$  eine endliche Menge mit einer Äquivalenzrelation  $R$ , deren zugehörige Partition mit  $S$  bezeichnet sei. Auf  $X$  operiere eine Gruppe  $G$ , und es seien folgende Bedingungen erfüllt:

- (a)  $\Lambda = (G, X, R)$  ist eine *R*-Gruppe.
- (b) Alle Äquivalenzklassen von  $R$  besitzen dieselbe Kardinalität  $||x|| =: s$  ( $x \in X$ ) mit  $s < v := |X|$ .
- (c) Die Gruppe  $G$  operiert auf der Menge der *R*-transversalen *t*-Teilmengen von  $X$  transitiv, wobei  $t \in \mathbb{N}$  mit  $t \leq |S|$  gilt.

Sei schließlich  $B$  eine *R*-transversale *k*-Teilmenge von  $X$  mit  $t \leq k < v$ . Dann ist die Inzidenzstruktur

$$D(\Lambda, B) = (X, B^G, S) \text{ mit } B^G = \{B^g \mid g \in G\}$$

ein  $t - (s, k, \lambda_t)$ -divisibles Design mit  $k = |B|$ ,  $b = \frac{|G|}{|G_B|}$  und

$$\lambda_t = |G| \binom{k}{t} \left( |G_B| \binom{v}{s} s^t \right)^{-1},$$

wobei  $G_B \subset G$  den Stabilisator der Menge  $B$  in  $G$  bezeichnet und  $b$  die Anzahl der Blöcke von  $D(\Lambda, B)$ . Darüber hinaus wird durch  $G$  eine punkt- und block-transitive Automorphismengruppe von  $D(\Lambda, B)$  induziert.

Der Beweis dieses Satzes kann ebenso in [34] gefunden werden wie der Beweis des nachfolgenden Korollars.

In der Originalfassung von Speras Konstruktionsprinzip ([86], Proposition (2.3)) ist Bedingung (b) nicht enthalten. Ohne diese oder als Alternative eine der im folgenden Korollar angegebenen Bedingungen ist es möglich, ein einfaches Beispiel anzugeben, welches der Behauptung des Satzes widerspricht (s. z.B. [34], (2.3.3)). Bei den in dieser Arbeit angeführten Konstruktionen,

in denen Speras Konstruktionsprinzip angewandt wird, ist jeweils Bedingung (b) oder eine der unten angeführten Alternativen gegeben, so dass hier kein Problem entsteht.

**Korollar 3.1.4** ([34]) *Satz 3.1.3 bleibt, mutatis mutandis, wahr,*

- *wenn Voraussetzung (b) fallengelassen und Voraussetzung (c) durch*
  - (c<sub>1</sub>) *Die Gruppe  $G$  operiert auf der Menge der  $R$ -transversalen  $t$ -Tupel von  $X$  transitiv, wobei  $t \in \mathbb{N}$  mit  $t \leq |S|$  gilt.**ersetzt wird,*
- *wenn Voraussetzung (b) durch folgendes ersetzt wird:*
  - (b<sub>1</sub>)  *$G$  operiert transitiv auf  $S$ .*
- *wenn Voraussetzung (b) fallengelassen und in Voraussetzung (c) die Bedingung zum Parameter  $t$  wie folgt ersetzt wird:*<sup>24</sup>
  - (c<sub>2</sub>) *Es gibt eine natürliche Zahl  $t$ , so dass  $t < |S|$  gilt (s.a. [82], Bemerkung (2.1)).*

**Bemerkung 3.1.5** Zur Konstruktion eines divisiblen Designs unter Verwendung von Speras Proposition brauchen wir eine endliche Menge  $X$  mit einer Äquivalenzrelation  $R$ , wobei  $|[x]| = s$  für alle  $x \in X$  gilt und eine endliche  $t$ - $R$ -transitive  $R$ -Permutationsgruppe, die auf dieser Menge operiert. Nach Wahl eines sogenannten *Startblocks*, müssen wir die Parameter berechnen.

Die eigentliche Schwierigkeit bei dieser Art der Konstruktion liegt neben der Bereitstellung einer geeigneten Permutationsgruppe einer entsprechenden endlichen Menge in der Berechnung der Parameter des zu konstruierenden DDs. Insbesondere ist die Berechnung von  $|G_B|$  in der Regel nicht trivial. Um Speras Konstruktionsprinzip anwenden zu können, muss demnach eine günstige Ausgangssituation geschaffen werden bzw. vorhanden sein. Diese fanden R.-H. Schulz und A.G. Spera mit der Verwendung von Translationsebenen ([82], [83], [88]). Dabei haben sie eine Konstruktionsmethode eingeführt, die im ersten der folgenden vier Beispiele vorgestellt wird. Das zweite und dritte Beispiel enthält jeweils eine Verallgemeinerung dieser Konstruktionsmethode für höher dimensionale projektive Räume, während im vierten Beispiel eine Konstruktion divisibler Designs unter Verwendung einer Laguerre Geometrie

---

<sup>24</sup>Nach S. G. wird nur die Bedingung zum Parameter  $t$  und nicht ganz (c) ersetzt.

durchgeführt wird. Es wird sich zeigen, dass auch zwischen dem zweiten und vierten Beispiel ein enger Zusammenhang besteht, obwohl die Ansätze der beiden Konstruktionen sehr unterschiedlich sind.

### 3.1.1 Beispiel 1: Konstruktion divisibler Designs mit Hilfe von Translationsebenen

Bei dieser Art der Konstruktion von DDs werden (affine) Geraden einer endlichen Translationsebene  $\mathcal{T}$  als Punktmenge  $X$  des DDs und die übliche Parallelität affiner Geraden als darauf vorhandene Äquivalenzrelation  $R$  betrachtet. Nach der Wahl einer geeigneten Permutationsgruppe sowie eines Startblocks kann dann das Konstruktionsprinzip von Spera angewandt werden. Die Punktclassen des konstruierten DDs werden dabei den vollen Parallelenklassen der affinen Geraden entsprechen. In [88] und [83] wird eine affine Kollineationsgruppe  $G$  als Permutationsgruppe verwendet, die zweifach transitiv auf den Punkten der uneigentlichen Geraden (und  $2$ - $R$ -transitiv auf den Geraden von  $\mathcal{T}$ ) operiert. Nach einem Ergebnis von Schulz [79] und Czerwinski [21] (s.a. [53], [64]) ist man dabei in der Wahl von  $\mathcal{T}$  entweder auf eine endliche desarguesche Ebene oder eine Lüneburgebene beschränkt, da dies die einzigen endlichen Translationsebenen sind, die eine solche Kollineationsgruppe besitzen. In [83] verwenden Schulz und Spera die Geraden einer Lüneburgebene  $\pi(L)$  der Ordnung  $q^2$  mit  $q = 2^{2t+1}$ ,  $t > 1$  und das Produkt der Translationsgruppe von  $\pi(L)$  und der Suzukigruppe  $S(q)$  in ihrer Darstellung auf der Lüneburgebene als Gruppe  $G$ , während in [88] zusätzlich zu einer ähnlichen Konstruktion wie in [83] auch zwei Klassen DDs erstellt werden, deren Ausgangspunkt jeweils eine endliche desarguesche Ebene bildet. Hier wird als Gruppe  $G$  das Produkt der zugehörigen Translationsgruppe und  $\text{GL}(2, q)$  bzw.  $\text{SL}(2, q)$  verwendet, wobei  $q$  eine Primzahlpotenz ist.

Schulz und Spera erweiterten diesen Ansatz, indem sie nun endliche Translationsebenen betrachteten, die eine Kollineationsgruppe besitzen, welche zweifach transitiv auf einer Teilmenge der Punkte der uneigentlichen Geraden operiert [82]. Dies hat eine deutliche Erweiterung der verwendbaren Translationsebenen zur Folge. Daher betrachten wir nun ihre grundlegende Proposition zu einer solchen Konstruktion.

**Proposition 3.1.6** ([82], Proposition (2.3)) *Sei  $\mathcal{T}$  eine endliche Translationsebene der Ordnung  $q$ , die eine Kollineationsgruppe  $G$  besitzt, welche  $2$ -homogen auf einem Orbit  $\Omega$  (mit  $|\Omega| \geq 2$ ) der uneigentlichen Geraden  $l_\infty$  operiert. Sei  $\mathcal{L}(\Omega)$  die Menge aus Geraden von  $\mathcal{T}$ , die  $l_\infty$  in  $\Omega$  schneidet und  $R$  die Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{L}(\Omega)$ , die durch die (gewöhnliche) Parallelität in  $\mathcal{T}$  induziert wird und sei  $S$  die Menge der zugehörigen Parallelenklassen.*

- (a) Dann induziert  $\hat{G} = G \cdot T$  (wobei  $T$  die Translationsgruppe von  $\mathcal{T}$  bezeichnet)  $\Lambda = (\hat{G}, \mathcal{L}(\Omega), R)$ , eine 2- $R$ -homogene  $R$ -Gruppe auf  $\mathcal{L}(\Omega)$ .
- (b) Man wähle eine  $R$ -transversale  $k$ -Teilmenge  $B$  von  $\mathcal{L}(\Omega)$  mit  $2 \leq k \leq |\Omega|$ . Dann ist  $\mathcal{D}(\Lambda, B) := (\mathcal{L}(\Omega), B^{\hat{G}}, S)$  ein  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design mit Parametern  $s = q, k$  wie gewählt, sowie  $\lambda = \frac{k(k-1)b}{q^2|\Omega|(|\Omega|-1)}$ ,  $v = q \cdot |\Omega|$  und  $b = \frac{|\hat{G}|}{|\hat{G}_B|}$ .
- (c) Sei  $P$  ein (affiner) Punkt von  $\mathcal{T}$  und man wähle  $B_0 = \{l \in \mathcal{L}(\Omega) \mid P \in l\}$ . Dann ist  $\mathcal{D}(\Lambda, B_0)$  ein transversales  $(s, k, \lambda)$ -DD mit den Parametern  $s = q, k = |\Omega|, \lambda = 1, b = q^2, v = q \cdot |\Omega|$  und  $r = q$ .

Der Beweis findet sich in [82].

Mit Hilfe dieser Proposition konstruierten Schulz und Spera in [82] DDs, indem sie von einer desargueschen Translationsebene, einer Heringebene oder einer Ott-Schäferenebene jeweils mit der Ordnung  $q^2$  ausgegangen sind ([82], Th. 1 (3.3)). Als weitere Translationsebenen kamen die Kantorebene vom Typ II, die Dye-Kantorebene der Ordnung  $8^3$ , sowie die Bartolone-Ostromebene zur Konstruktion DDs zum Einsatz ([82], Th. 2 (3.6)). Anschließend verwendeten C. Cerroni und A.G. Spera für ihre Konstruktionen außer einer desargueschen Translationsebene auch eine Translationsebene über einem „twisted field“ [16].

In jeder hier beschriebenen Konstruktion wurde ein Startblock gewählt, dessen Elemente genau einen affinen Punkt gemeinsam haben. Dies erleichtert uns, wie wir gleich sehen werden, die Beschreibung ihrer inneren Strukturen.

### 3.1.1.1 Untersuchung zur Block-Zerlegbarkeit

Wie bereits erwähnt, weisen DDs, welche auf die oben beschriebene Art konstruiert wurden, unter Umständen eine starke innere Strukturierung auf. Folgendes Lemma verdeutlicht dies.

**Lemma 3.1.7** *Seien  $\mathcal{T}, G, \Omega, \mathcal{L}(\Omega), R$  und  $S$  wie in Proposition 3.1.6 gegeben und sei  $\mathcal{D}(\Lambda, B) = (\mathcal{L}(\Omega), B^{\hat{G}}, S)$  ein nach Wahl einer  $R$ -transversalen  $k$ -Teilmenge  $B$  von  $\mathcal{L}(\Omega)$  nach Teil (b) konstruiertes  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design, wobei  $\Lambda$  die nach Teil (a) von  $\hat{G} = G \cdot T$  induzierte 2- $R$ -homogene  $R$ -Gruppe auf  $\mathcal{L}(\Omega)$  ist. Haben die Elemente von  $B$  einen affinen Punkt  $P$  gemeinsam, dann ist  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$  ein block-zerlegbares DD mit Wurzel<sup>25</sup>  $(\mathcal{L}(\Omega)_P, B^{\hat{G}_P}, \epsilon)$  und einer von  $T$  induzierten Gruppe  $\hat{T}$ .*

*Beweis:* Es werden dieselben Bezeichnungen wie in Proposition 3.1.6 verwendet. Sei also  $\mathcal{D}(\Lambda, B) = (\mathcal{L}(\Omega), B^{\hat{G}}, S)$  ein DD, welches nach Proposition 3.1.6 konstruiert wurde, mit  $\Lambda = (\hat{G}, \mathcal{L}(\Omega), R)$ , wobei  $\hat{G} = G \cdot T$ . Nach Voraussetzung ist  $G$  eine Kollineationsgruppe der Translationsebene  $\mathcal{T}$ , die 2-fach homogen auf einem Orbit  $\Omega$  der uneigentlichen Geraden  $l_\infty$  operiert und  $T$  die Translationsgruppe von  $\mathcal{T}$ . Der Startblock  $B$  ist eine  $R$ -transversale Teilmenge von  $\mathcal{L}(\Omega)$ , besteht also aus paarweise nicht-parallelen Geraden, die einen affinen Punkt  $P$  gemeinsam haben. Nun gilt jedoch  $\hat{G} = G \cdot T = \hat{G}_P \cdot T$ . Dabei verhält sich  $\hat{G}_P$  auf  $\Omega$  wie  $G$ , also 2-fach homogen und da  $P$  fest gelassen wird, operiert  $\hat{G}_P$  auf  $\mathcal{L}(\Omega)_P := \{l \in \mathcal{L}(\Omega) \mid P \in l\}$  ebenfalls 2-fach homogen. Man beachte, dass  $\mathcal{L}(\Omega)_P$  eine  $R$ -transversale Teilmenge von  $\mathcal{L}(\Omega)$  ist. Nach Hughes [40] ist die Inzidenzstruktur  $(\mathcal{L}(\Omega)_P, B^{\hat{G}_P}, \epsilon)$  ein 2-Design. Wegen  $\mathcal{L}(\Omega)_P \subset \mathcal{L}(\Omega)$  und  $B^{\hat{G}_P} \subset B^{\hat{G}}$  ist dies ein Unterdesign von  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$ . Jedes Translat  $(\mathcal{L}(\Omega)_P^t, B^{\hat{G}_P \cdot t}, \epsilon)$  mit  $t \in \mathcal{T}$  dieses Unterdesigns ist nach Konstruktion ebenfalls ein Unterdesign von  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$ . Wegen  $\mathcal{L}(\Omega)_P^T = \mathcal{L}(\Omega)$  und  $B^{\hat{G}_P \cdot T} = B^{\hat{G}}$  ergibt die Vereinigung der Punkt- bzw. Blockmengen aller dieser Unterdesigns die Punkt- bzw. Blockmenge von  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$ . Wir werden nun zeigen, dass die Blockmengen der Unterdesigns paarweise disjunkt sind, woraus die Block-Zerlegbarkeit von  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$  folgt. Da der Startblock  $B$  so gewählt war, dass dessen Elemente genau einen affinen Punkt gemeinsam hatten, besitzt jeder Block von  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$  diese Eigenschaft. Die Blöcke eines beliebigen Unterdesigns  $(\mathcal{L}(\Omega)_P^t, B^{\hat{G}_P \cdot t}, \epsilon)$  mit  $t \in \mathcal{T}$  besitzen jeweils denselben affinen Punkt als gemeinsamen Punkt ihrer Elemente, nämlich jeweils den affinen Punkt  $P^t$ . Die Translationsgruppe operiert regulär auf den affinen Punkten von  $\mathcal{T}$ , daher gilt  $P^t \neq P^{t'}$  für alle  $t, t' \in \mathcal{T}$  mit  $t \neq t'$ . Die Blockmengen der Unterdesigns müssen also paarweise disjunkt sein.  $\mathcal{D}(\Lambda, B)$  ist also block-zerlegbar mit den Unterdesigns  $(\mathcal{L}(\Omega)_P^t, B^{\hat{G}_P \cdot t}, \epsilon)$ , mit  $t \in \mathcal{T}$  als inneren Designs. Es handelt sich also nach Definition 2.1.5 um ein block-zerlegbares DD mit Wurzel  $(\mathcal{L}(\Omega)_P, B^{\hat{G}_P}, \epsilon)$  und einer von  $T$  induzierten Gruppe, die wir als  $\hat{T}$  bezeichnen.  $\square$

Zu manchen divisiblen Designs, welche wir ausgehend von einer Translationsebene mit obiger Konstruktionsmethode erhalten, können wir in gewisser Weise komplementäre DDs konstruieren, was folgende Proposition zeigt.

**Proposition 3.1.8** *[[16], (2.3)] Sei  $\mathcal{T}$  eine endliche Translationsebene und  $T$  ihre Translationsgruppe. Angenommen,  $\mathcal{T}$  lässt eine Kollineationsgruppe  $G$  zu, die 2-homogen auf einem Orbit  $\Omega$  auf der uneigentlichen Geraden  $l_\infty$  operiert.*

---

<sup>25</sup>(Definition von  $(\mathcal{L}(\Omega)_P, B^{\hat{G}_P}, \epsilon)$  s.u.)

Sei  $\Lambda = (TG, \mathcal{L}(\Omega), R)$ , wobei  $\mathcal{L}(\Omega)$  die Menge der Geraden von  $\mathcal{T}$  ist, die  $\Omega$  schneidet,  $|\Omega| = \bar{k}$  und sei  $\Omega'$  eine Teilmenge von  $\Omega$  der Größe  $k \geq 2$  mit  $\bar{k} - k \geq 2$ .

Darüberhinaus sei  $P$  ein fester (affiner) Punkt von  $\mathcal{T}$  und seien  $B = \mathcal{L}_P(\Omega')$  und  $B' = \mathcal{L}_P(\Omega - \Omega')$  mit  $\mathcal{L}_P(\bar{\Omega}) := \{l \in \mathcal{L}(\bar{\Omega}) \mid P \in l\}$ , wobei  $\bar{\Omega}$  eine Teilmenge von  $\Omega$  ist.

Ist  $D(\Lambda, B)$  ein  $(s, k, \lambda)$ -DD mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken, dann ist  $D(\Lambda, B')$  ein  $(s', k', \lambda')$ -DD, welches jeweils die gleiche Anzahl von Punkten und Blöcken wie  $D(\Lambda, B)$  besitzt, wobei  $s' = s$ ,  $k' = \bar{k} - k$  und  $\lambda' = \lambda + b \frac{\bar{k}^2 - 2\bar{k}k - \bar{k} + 2k}{v(v-s)}$  ist.

Der Beweis kann in [16] nachgelesen werden.

Die „komplementären“ divisiblen Designs  $D(\Lambda, B) = (\mathcal{L}(\Omega), B^{TG}, S)$  und  $D(\Lambda, B') = (\mathcal{L}(\Omega), B'^{TG}, S)$  ( $S$  beschreibt die Menge der Punktclassen) sind nach Lemma 3.1.7 jeweils block-zerlegbar, wenn ihre Startblöcke jeweils einen affinen Punkt als gemeinsamen Punkt ihrer Elemente aufweisen. Besitzen sie zusätzlich dieselbe Blockgröße und sind nicht gleich, dann gilt das auch für deren Summe  $(\mathcal{L}(\Omega), B^{TG} \cup B'^{TG}, S)$ . Dies halten wir im nächsten Lemma fest.

**Lemma 3.1.9** *Angenommen,  $\mathcal{T}$  ist eine endliche Translationsebene und  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$ , mit  $D(\Lambda, B) \neq D(\Lambda, B')$  sind wie oben in Proposition 3.1.8 gegeben und ihre Startblöcke enthalten einen gemeinsamen affinen Punkt. Wenn  $k = k'$ , dann ist die Summe  $(\mathcal{L}(\Omega), B^{TG} \cup B'^{TG}, S)$  von  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$  ein block-zerlegbares DD, in welchem mehrere Block-Zerlegungen möglich sind. Deren innere divisible Designs sind:*

- (a)  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$ , oder
- (b) die inneren Designs von  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$  oder
- (c) jeweils die Summe eines inneren Designs von  $D(\Lambda, B)$  und eines inneren Designs von  $D(\Lambda, B')$ .

*Beweis:* Seien  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$  wie oben gegeben.

Gilt  $k = k'$ , so besitzen die Blöcke von  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$  dieselbe Größe. Nach Konstruktion sind die Punktclassen dieser beiden DDs identisch, was daher auch für deren Summe gelten muss. Nach Lemma 2.1.7 ist diese Summe demnach ein block-zerlegbares DD mit  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$  als inneren DDs. Dies ergibt Teil (a).

Nach Lemma 3.1.7 sind  $D(\Lambda, B)$  und  $D(\Lambda, B')$  selbst block-zerlegbare DDs. Zusammen mit Teil (a) folgt damit sofort Teil (b).

Nach Konstruktion besteht jedes innere Design von  $D(\Lambda, B)$  bzw. von  $D(\Lambda, B')$  aus Geraden, die genau einen affinen Punkt gemeinsam haben. Dabei gibt es zu jedem affinen Punkt jeweils genau ein inneres Design von  $D(\Lambda, B)$  bzw.  $D(\Lambda, B')$ . Betrachtet man nun an einem affinen Punkt die Summe der beiden zugehörigen inneren Designs, erhält man wiederum ein Design, dessen Punkte aus den affinen Geraden aus  $\mathcal{L}(\Omega)$  bestehen, die sich genau in diesem Punkt schneiden. Dies gilt für jeden affinen Punkt von  $\mathcal{T}$ . Man erhält also eine weitere Block-Zerlegung, nämlich die Zerlegung von Teil (c).  $\square$

Die in diesem Abschnitt beschriebene Konstruktionsmethode wurde von C. Cerroni und R.-H. Schulz für 3-dimensionale projektive Räume verallgemeinert [15]. Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit dieser Verallgemeinerung.

### 3.1.2 Beispiel 2: Konstruktion divisibler Designs mit Hilfe eines 3-dimensionalen projektiven Raumes

In [15] konstruierten C. Cerroni und R.-H. Schulz unter Verwendung von Sperras Konstruktionsprinzip Serien 2- und 3-divisibler Designs. Dabei verwendeten sie eine für 3-dimensionale projektive Räume verallgemeinerte Version der im ersten Beispiel beschriebenen Konstruktionsmethode. Ihre Konstruktion, sowie ihre Ergebnisse werden an dieser Stelle recht ausführlich behandelt werden, da die erhaltenen DDs teilweise in engem Zusammenhang zu DDs stehen, welche in Beispiel 4 mit einem völlig anderen Konstruktionsansatz erstellt werden. Es wird sich außerdem zeigen, dass auch diese DDs eine starke innere Struktur besitzen.

Für die nun folgende Konstruktion betrachten wir den 3-dimensionalen projektiven Raum  $\text{PG}(3, q)$  über dem Körper  $K = \text{GF}(q)$  mit  $q = p^e$ ,  $p$  Primzahl. In diesem zeichnen wir die Ebene, welche die Gleichung  $X_3 = 0$  besitzt, als uneigentliche Ebene  $E$  aus und betrachten den zugehörigen affinen Raum  $\text{AG}(3, q)$ , der diese Ebene als ideale Hyperebene besitzt. Analog zur Konstruktion in Beispiel 1 werden wir eine Kollineationsgruppe benötigen, die auf einer Teilmenge  $\Omega$  der Geraden von  $E$   $t$ -transitiv ( $t = 2, 3$ ) operiert, um damit eine Permutationsgruppe zu finden, die auf der Menge  $\Pi(\Omega)$  der affinen Ebenen von  $\text{AG}(3, q)$ , deren Schnitt mit  $E$  ein Element von  $\Omega$  ist,  $t - R$ -transitiv operiert und die Parallelitätsrelation  $R$  berücksichtigt. Hierfür wird eine geeignete Untergruppe der Kollineationsgruppe  $\text{PGL}(3, q)$  von  $E$  (in diesem Fall die  $\text{PGO}(3, q)$ , s.u.) so in  $\text{PGL}(4, q)$  eingebettet, dass die erhaltene Gruppe  $\tilde{G}$  isomorph zu  $\text{GO}(3, q)$  ist und den Punkt

$\mathcal{O} = (0, 0, 0, 1)K$  fest lässt.<sup>26</sup>

In [15] wurde folgende Proposition verwendet und bewiesen, wobei  $T$  die Translationsgruppe des oben definierten affinen Raumes  $\text{AG}(3, q)$  bezeichnet.

**Proposition 3.1.10** ([15], (3.1)) *Sei  $\Omega$  eine Menge aus Geraden von  $E$ ,  $|\Omega| \geq 2$  und sei  $\Pi(\Omega)$  die folgende Menge:*

$$\Pi(\Omega) = \{ \pi \text{ eine Ebene von } \text{AG}(3, q) \mid \pi \cap E \in \Omega \}.$$

- (i) *Falls  $G$  eine Untergruppe von  $\text{PGL}(3, q)$  ist, die 2-transitiv auf der Menge  $\Omega$  operiert, dann ist die Gruppe  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine 2- $R$ -transitive  $R$ -Permutationsgruppe;*
- (ii) *Falls  $G$  eine Untergruppe von  $\text{PGL}(3, q)$  ist, die 3-transitiv auf der Menge  $\Omega$  operiert, dann ist, falls keine drei kopunktalen Geraden in  $\Omega$  existieren, die Gruppe  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine 3- $R$ -transitive  $R$ -Permutationsgruppe;*

Hier sind  $T$  und  $\tilde{G}$  wie oben definiert und  $R$  bezeichnet die Parallelitätsrelation.

Man beachte (s. Bemerkung (3.2) in [15]): Ist  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine wie oben definierte  $R$ -Permutationsgruppe, dann operiert  $T \cdot \tilde{G}$  auf  $\Pi(\Omega)$  treu, falls sich die Geraden von  $\Omega$  nicht alle in einem Punkt schneiden.

Um die obige Proposition anwenden zu können, braucht man also eine geeignete Menge  $\Omega$ , bestehend aus mehreren Geraden von  $E$ , sowie eine darauf 2- bzw. 3-fach transitiv operierende Untergruppe von  $\text{PGL}(3, q)$ . In ihrer ersten Konstruktion in [15] verwenden Cerroni und Schulz einen in  $E$  eingebetteten nicht-singulären Kegelschnitt

$$C : \begin{cases} X_1^2 - X_0 X_2 & = 0 \\ X_3 & = 0 \end{cases}$$

und definierten  $\Omega$  als Menge seiner Tangenten. Damit besteht  $\Pi(\Omega)$  aus allen affinen Ebenen, die  $E$  in einer Tangente von  $C$  schneiden. In Abbildung 4 ist dies graphisch veranschaulicht.

Als Gruppe  $G$  wird die  $\text{PGO}(3, q)$  verwendet, die bekanntlich scharf 3-fach transitiv auf den Punkten und damit auch auf den Tangenten eines Kegelschnitts einer projektiven Ebene operiert (s. z.B. [15], (4.2)).

Abhängig von der Wahl des Startblocks, konstruierten Cerroni und Schulz mit Speras Konstruktionsprinzip verschiedene DDs, welche im folgenden Satz zusammengefaßt dargestellt sind.

---

<sup>26</sup>In Beispiel 3 wird auf Seite 46 ein analoges Vorgehen ausführlicher beschrieben.

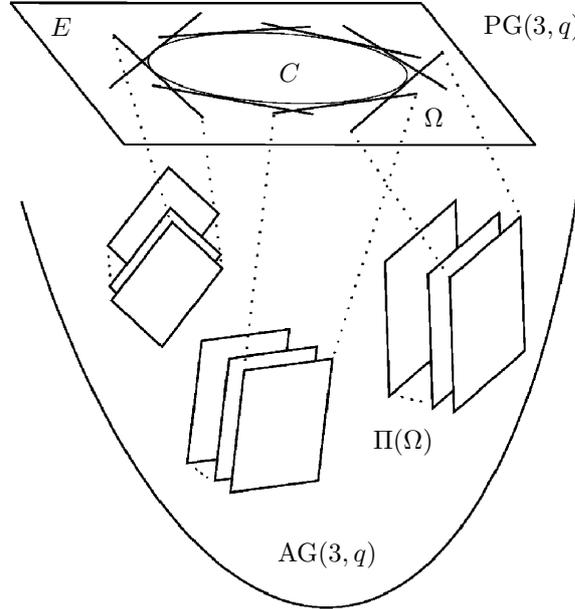


Abbildung 4:  $\text{PG}(3, q)$  mit ausgezeichneter Ebene  $E$ , Kegelschnitt  $C$ , sowie Elementen der Mengen  $\Omega$  und  $\Pi(\Omega)$ .

**Theorem 3.1.11** ([15], (4.3), (4.4)) (a) Sei  $q = p^e$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist und sei  $i$  eine ganze Zahl, so dass  $i|e$  gilt.

- (i) Falls  $q$  ungerade ist, existiert ein  $2 - (q, p^i + 1, \frac{q(q-1)}{p^i-1})$ -divisibles Design  $D$  mit  $q^2 + q$  Punkten, welches  $T \cdot \tilde{G}$  mit  $\tilde{G} \cong \text{GO}(3, q)$  als punkt- und block-transitive Automorphismengruppe besitzt;
- (ii) Falls  $q$  gerade ist, existiert ein  $2 - (q, p^i + 1, \frac{q-1}{p^i-1})$ -divisibles Design mit  $q^2 + q$  Punkten, welches  $\tilde{G} \cdot (T/\text{Ker}\phi)$  mit  $\tilde{G} \cong \text{GO}(3, q)$  als punkt- und block-transitive Automorphismengruppe besitzt, wobei  $\text{Ker}\phi$  der Kern der Aktion von  $T$  auf  $\Pi(\Omega)$  ist, mit  $\Omega$  der Menge der Tangenten des Kegelschnitts  $C$ .

Außerdem gilt, falls  $q$  ungerade ist, dass das hier konstruierte Design  $D$  eigentlich ein  $3 - (q, p^i + 1, 1)$ -divisibles Design mit einer punkt- und block-transitiven Automorphismengruppe ist.

- (b) Sei  $q = p^e$ , wobei  $p$  eine ungerade Primzahl ist. Dann existiert ein  $2 - (q, 2, 1)$ -divisibles Design und ein  $3 - (q, 3, 1)$ -divisibles Design, jedes

mit  $q(q+1)$  Punkten. Beide besitzen als eine punkt- und block-transitive Automorphismengruppe  $T \cdot \tilde{G}$  mit  $\tilde{G} \cong \text{GO}(3, q)$ .

Den Beweis zu diesem Satz findet man in [15] (4.3) und (4.4).

Für Teil (a) wurde in beiden Fällen folgender Startblock gewählt:

$$B := \Pi_{\mathcal{O}}(\Omega') = \{\pi \text{ Ebene von } \text{AG}(3, q) \mid \pi \cap E \in \Omega' \text{ und } \mathcal{O} = (0, 0, 0, 1)K \in \pi\},$$

wobei

$$\Omega' = \{l \in \Omega \mid C \cap l \text{ ist } (1, 0, 0, 0)K \text{ oder } (c^2, c, 1, 0)K, c \in \text{GF}(p^i)\}$$

ist, während in Teil (b) 2 bzw. 3 Tangenten fest gewählt wurden und als Startblock  $B$  jeweils die beiden bzw. die drei affinen Ebenen aus  $\Pi(\Omega)$  bestimmt wurden, die den Punkt  $\mathcal{O} = (0, 0, 0, 1)K$  enthalten und deren Schnitt mit der Ebene  $E$  eine der besagten Tangenten ist.

### 3.1.2.1 Untersuchung zur Block-Zerlegbarkeit

Untersuchen wir die konstruierten DDs hinsichtlich ihrer inneren Struktur, werden wir feststellen, dass jedes der oben konstruierten DDs mindestens fast-block-zerlegbar ist, wobei es von der Wahl des Startblocks abhängt, ob das DD sogar block-zerlegbar ist.

Zunächst halten wir fest, dass bei jedem der oben konstruierten DDs  $(\Pi(\Omega), B^{\tilde{G} \cdot T}, S)$  der Startblock  $B$  so gewählt wurde, dass dessen Elemente den Punkt  $\mathcal{O} = (0, 0, 0, 1)K$  enthalten. Da  $\tilde{G} \cong \text{GO}(3, q)$ , lassen alle Elemente von  $\tilde{G}$  diesen Punkt fest und er ist damit auch in jedem Element jedes Bildblocks aus  $B^{\tilde{G}}$  enthalten. Wegen der 3- bzw. 2-Transitivität auf  $\Omega$  operiert  $\tilde{G}$  auch auf

$$\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}} := \{\pi \in \Pi(\Omega) \mid \mathcal{O} \in \pi\}$$

3- bzw. 2-transitiv, weshalb wir wieder nach Hughes [40] schließen, dass die Inzidenzstruktur  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}, B^{\tilde{G}}, \epsilon)$  ein 3- bzw. 2-Design ist. Dasselbe gilt auch für jedes Translat  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t, B^{\tilde{G} \cdot t}, \epsilon)$  mit  $t \in T$ , da Translationen inzidenzerhaltend sind und die Designstruktur daher nicht verändert wird. Die Punktclassen sind also jeweils einelementig und wir wissen, dass  $\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}$  transversale Teilmenge von  $\Pi(\Omega)$  ist, die aus jeder Punktclassen von  $S$  ein Element enthält. Wegen

$$\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t \subset \Pi(\Omega) \quad \text{und} \quad B^{\tilde{G} \cdot t} \subset B^{\tilde{G} \cdot T} \quad \text{für alle } t \in T$$

und

$$\bigcup_{t \in T} \Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t = \Pi(\Omega), \quad \bigcup_{t \in T} B^{\tilde{G} \cdot t} = B^{\tilde{G} \cdot T}, \quad \text{sowie} \quad \{[P]^T \mid P \in \Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}\} = S$$

ist ein wie oben konstruiertes DD auf jeden Fall fast-block-zerlegbar (s. Def. 2.1.3), mit inneren Designs

$$(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t, B^{\tilde{G} \cdot t}, \epsilon) \text{ mit } t \in T.$$

Wählen wir eines der inneren Designs als Wurzel, zum Beispiel

$$D_{\mathcal{O}} := (\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}, B^{\tilde{G}}, \epsilon),$$

liegt nach Definition 2.1.5 ein fast-block-zerlegbares DD mit Wurzel  $D_{\mathcal{O}}$  und einer von der Translationsgruppe  $T$  induzierten Gruppe, die wir  $\hat{T}$  nennen, vor.

Dieses Ergebnis halten wir im nächsten Lemma fest.

**Lemma 3.1.12** *Jedes der in Satz 3.1.11 beschriebenen und nach dem Verfahren von C. Cerroni und R.-H. Schulz konstruierten DDs ist ein fast-block-zerlegbares DD mit Wurzel  $D_{\mathcal{O}} = (\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}, B^{\tilde{G}}, \epsilon)$  und einer von der Translationsgruppe  $T$  induzierten Gruppe  $\hat{T}$ .*

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen ein solches DD block-zerlegbar ist. Wir wissen, dass fast-block-zerlegbare DDs genau dann block-zerlegbar sind, wenn die Blockmengen der verschiedenen inneren Designs paarweise disjunkt sind.

Nun zeigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 3.1.13** *Sei  $D$  ein wie oben konstruiertes DD aus Satz 3.1.11. Die Blockmengen der inneren Designs sind disjunkt, wenn für die Punkte des Startblocks  $B$ , sowie die Punkte von  $D_{\mathcal{O}}$  gilt<sup>27</sup>:*

$$\bigcap_{P \in B} P = \bigcap_{P \in \Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}} P. \quad (14)$$

*Beweis:* Sei  $D$  ein wie oben konstruiertes DD und seien die Bezeichnungen ebenfalls wie oben gewählt. Wir werden zeigen, dass Gleichung (14) nicht gelten kann, wenn die Blockmengen der inneren Designs von  $D$  nicht paarweise disjunkt sind.

Nehmen wir also an, es gibt zwei unterschiedliche innere Designs von  $D$ , deren Blockmengen nicht disjunkt sind. Sagen wir, dies seien die inneren Designs  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t, B^{\tilde{G} \cdot t}, \epsilon)$  und  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^{t'}, B^{\tilde{G} \cdot t'}, \epsilon)$  mit  $t, t' \in T$ ,  $t \neq t'$ . Dann existiert ein Block  $b$ , der in beiden Blockmengen vorkommt:

$$b \in B^{\tilde{G} \cdot t} \cap B^{\tilde{G} \cdot t'} \text{ mit } b = B^{g \cdot t} = B^{g' \cdot t'}, \text{ wobei } g, g' \in \tilde{G}.$$

<sup>27</sup>Man beachte, dass es sich bei den Punkten dieses DDs um affine Hyperebenen von  $\text{AG}(3, q)$  handelt.

Dann gilt nach Konstruktion:

$$\mathcal{O}^t \in \bigcap_{P \in b} P \quad \text{und} \quad \mathcal{O}^{t'} \in \bigcap_{P \in b} P \quad \text{und somit} \quad l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}} \subseteq \bigcap_{P \in b} P,$$

wobei  $l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}$  die affine Gerade aus  $\text{AG}(3, q)$ , welche durch die Punkte  $\mathcal{O}^t$  und  $\mathcal{O}^{t'}$  geht, bezeichne. Man beachte, dass nach Voraussetzung  $t \neq t'$  und daher  $\mathcal{O}^t \neq \mathcal{O}^{t'}$  (wegen der scharfen Transitivität von  $T$  auf den affinen Punkten von  $\text{AG}(3, q)$ ). Daher existiert die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade  $l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}$ .

Die Elemente von  $\tilde{G} \cdot T$  sind Kollineationen, also inzidenzerhaltend, weshalb jeder Block aus  $B^{\tilde{G} \cdot T}$  eine Gerade im affinen Schnitt seiner Punkte besitzt. Dies gilt also auch für den Startblock  $B$ , dessen Gerade wir  $l$  nennen. Da je zwei affine Ebenen, die in einer affinen Geraden, sowie einem weiteren affinen Punkt außerhalb dieser Geraden (oder gar in einer weiteren affinen Geraden) übereinstimmen, gleich sind, die Elemente der Blöcke jedoch paarweise verschieden sind, muss der affine Schnitt der Elemente jeweils eines Blockes genau aus einer affinen Geraden bestehen.

Nun betrachten wir den Block  $B^g$ . Der Schnitt seiner Punkte besteht aus der Geraden  $l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}^{t^{-1}}$ , welche durch den Punkt  $\mathcal{O}$  geht.

1. Fall: Es gilt  $l \neq l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}^{t^{-1}}$ .

Nehmen wir an, Gleichung (14) gilt, dann enthielten die Punkte von  $B^g$  sowohl die Gerade  $l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}^{t^{-1}}$  als auch die davon verschiedene Gerade  $l$  und wären damit alle identisch, was einen Widerspruch ergibt.

2. Fall: Es gilt  $l = l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}^{t^{-1}}$ .

Nehmen wir wiederum an, dass Gleichung (14) gilt, dann ist der Schnitt über alle Elemente aus  $\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t$  gleich  $l^t = l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}$ , das heisst, sie enthalten alle sowohl  $\mathcal{O}^t$  als auch  $\mathcal{O}^{t'}$ . Entsprechendes gilt auch für die Elemente aus  $\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^{t'}$ . Damit gilt  $\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t = \Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^{t'}$  und folglich ist  $l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}$  der Schnitt über die Elemente eines jeden Blocks sowohl aus  $B^{\tilde{G} \cdot t}$  als auch aus  $B^{\tilde{G} \cdot t'}$ , weshalb

$$t^{-1}t' \in T_{l_{\mathcal{O}^t \mathcal{O}^{t'}}} \subseteq T_{B^{\tilde{G} \cdot t}} \cap T_{B^{\tilde{G} \cdot t'}}$$

gilt. Also haben wir  $B^{\tilde{G} \cdot t} = B^{\tilde{G} \cdot t t^{-1}t'} = B^{\tilde{G} \cdot t'}$  und die beiden inneren Designs sind entgegen der Voraussetzung nicht verschieden. Dies ist ein Widerspruch. Damit kann Gleichung (14) nicht gelten und wir haben das Lemma somit bewiesen.  $\square$

Nun fällt die Bestimmung nicht schwer, welche der in Satz 3.1.11 beschriebenen DDs, block-zerlegbar sind. Dabei verwenden wir wieder dieselbe

Notation wie oben. Nach Lemma 3.1.12 wissen wir, dass diese DDs fast-block-zerlegbar mit Wurzel  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}, B^{\tilde{G}}, \epsilon)$  und einer von der Translationsgruppe  $T$  induzierten Gruppe  $\hat{T}$  sind. Es lässt sich leicht zeigen, dass Gleichung (14) nur von den Punkten des in Teil (b) beschriebenen 2-divisiblen Designs nicht erfüllt ist, da hier schon die Dimensionen der beiden Schnitte nicht übereinstimmen. Da (14) in allen anderen Fällen erfüllt wird (s. Konstruktion in [15]) erhalten wir folgendes Ergebnis:

**Proposition 3.1.14** *Von den in Satz 3.1.11 beschriebenen DDs sind die in Teil (a) dargestellten DDs ebenso block-zerlegbar (mit einer Wurzel  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}, B^{\tilde{G}}, \epsilon)$  und einer von der Translationsgruppe  $T$  induzierten Gruppe  $\hat{T}$ ) wie das in Teil (b) beschriebene 3-DD, während dies für das 2-DD aus Teil (b) nicht gilt.*

Analoge Überlegungen hinsichtlich ihrer inneren Strukturen lassen sich auch für die in [15] von einem Unital in  $\text{PG}(3, q^2)$  ausgehend konstruierten DDs ([15], Th. (4.5)), sowie für die von Cerroni und Schulz in [14] erstellten DDs anstellen, was an dieser Stelle allerdings nicht weiter verfolgt werden soll.

Wenden wir uns nun lieber einer weiteren Verallgemeinerung dieser Konstruktionsmethode auf 4-dimensionale projektive Räume zu.

### 3.1.3 Beispiel 3: Konstruktion divisibler Designs mit Hilfe eines 4-dimensionalen projektiven Raumes

Wir betrachten den 4-dimensionalen projektiven Raum  $\text{PG}(4, q)$  über dem endlichen Körper  $K = \text{GF}(q)$  ( $q$  eine Primzahlpotenz) mit homogenen Koordinaten  $X_0, X_1, \dots, X_4$  und bezeichnen seine Hyperebene mit Gleichung  $X_4 = 0$  mit  $E$ . Nun definieren wir  $\text{AG}(4, q)$  als den affinen Raum mit un-eigentlicher Hyperebene  $E$ , bezeichnen seine Parallelitätsrelation mit  $R$  und seine Translationsgruppe mit  $T$ . Wiederum werden wir eine Gruppe verwenden, die als eine  $t$ - $R$ -transitive  $R$ -Permutationsgruppe auf einer Teilmenge der affinen Hyperebenen operiert.

#### 3.1.3.1 Konstruktion einer $t$ - $R$ -transitiven $R$ -Gruppe

Für die Bestimmung einer geeigneten Permutationsgruppe stellen wir zunächst allgemein folgendes fest (vgl. auch [15], [14]): Ist  $G$  eine Untergruppe der Kollineationsgruppe  $\text{PGL}(4, q)$  von  $E$ , dann gilt  $G \cong \overline{G}/\overline{G} \cap Z(\text{GL}(4, q))$ , wobei  $\overline{G}$  eine geeignete Untergruppe von  $\text{GL}(4, q)$ , sowie  $Z(\text{GL}(4, q))$  das Zentrum von  $\text{GL}(4, q)$  ist.

Setzen wir  $\overline{G}$  wie folgt in  $GL(5, q)$  ein

$$\tilde{G} := \left\{ \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & A & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid A \in \overline{G} \right\},$$

erhalten wir  $\tilde{G} \cong \overline{G}$ .

Da  $\tilde{G} \cap Z(GL(4, q))$  gleich der Einheitsmatrix ist und somit

$$\tilde{G}/\tilde{G} \cap Z(GL(4, q)) \cong \tilde{G}$$

gilt, kann man dies auch als Einbettung von  $\overline{G}$  in  $PGL(5, q)$  auffassen.

**Proposition 3.1.15** *Sei  $\Omega$  eine Menge aus Ebenen von  $E$ ,  $|\Omega| \geq 3$ , und man definiere*

$$\Pi(\Omega) := \{\pi \mid \pi \text{ ein 3-dim Raum von } AG(4, q) \text{ mit } \pi \cap E \in \Omega\};$$

- (a) *falls  $G$  2-transitiv auf  $\Omega$  operiert, dann ist  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine 2-R-transitive R-Permutationsgruppe;*
- (b) *falls  $G$  3-transitiv auf  $\Omega$  operiert und falls sich keine drei Elemente von  $\Omega$  in mehr als einem affinen Punkt schneiden, dann ist  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine 3-R-transitive R-Permutationsgruppe.*

*Beweis:* Teil (a):

Seien  $\{\pi_1, \pi_2\}, \{\pi'_1, \pi'_2\}$  zwei verschiedene  $R$ -transversale 2-Teilmengen von  $\Pi(\Omega)$ . Wir definieren  $S_1 := \pi_1 \cap \pi_2$  und  $S_2 := \pi'_1 \cap \pi'_2$ .  $S_1$  und  $S_2$  sind zwei affine Ebenen. Wenn wir einen affinen Punkt  $P$  auf  $S_1$  und einen affinen Punkt  $P'$  auf  $S_2$  wählen, dann existiert eine Translation  $\tau \in T$ , so dass  $P^\tau = P'$  gilt. Alle Translationen lassen die Elemente von  $E$  punktweise fest. Wir können also annehmen, dass sich  $\pi_1, \pi_2, \pi'_1, \pi'_2$  (nach geeigneter Koordinatisierung) im Punkt  $O = (0, 0, 0, 0, 1)K$  schneiden. Wir haben  $(T \cdot \tilde{G})_O = \tilde{G}_O = \tilde{G}$ .

$\tilde{G}$  lässt  $O$  fest und operiert 2-transitiv auf  $\Omega$ . Folglich existiert ein Element  $\tilde{g} \in \tilde{G}$ , so dass  $(\pi_1 \cap E, \pi_2 \cap E)^{\tilde{g}} = (\pi'_1 \cap E, \pi'_2 \cap E)$  und  $O^{\tilde{g}} = O$ . Da ein affiner Punkt und eine uneigentliche Ebene einen 3-dimensionalen affinen Raum eindeutig bestimmen, folgt die Behauptung.

Teil (b):

Analog zu Teil (a) seien  $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \{\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3\}$  zwei verschiedene  $R$ -transversale 3-Teilmengen von  $\Pi(\Omega)$ .

Da keine drei Elemente von  $\Omega$  mehr als einen affinen Punkt gemeinsam haben, schneiden sich  $(\pi_1 \cap E), (\pi_2 \cap E), (\pi_3 \cap E)$  und  $(\pi'_1 \cap E), (\pi'_2 \cap E), (\pi'_3 \cap E)$  jeweils genau in einem Punkt. Also gibt es affine Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , so dass  $g_1 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$  und  $g_2 = \pi'_1 \cap \pi'_2 \cap \pi'_3$  gilt. Wählen wir analog zu Teil (a) einen Punkt  $P$  auf  $g_1$  und einen Punkt  $P'$  auf  $g_2$ , so existiert eine Translation  $\tau \in T$ , so dass  $P^\tau = P'$  gilt. Wir können daher annehmen, dass sich  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi'_1, \pi'_2, \pi'_3$  (nach geeigneter Koordinatisierung) im Punkt  $O = (0, 0, 0, 0, 1)K$  schneiden. Wieder haben wir  $(T \cdot \tilde{G})_O = \tilde{G}_O = \tilde{G}$ .  $\tilde{G}$  lässt  $O$  fest und operiert 3-transitiv auf  $\Omega$ . Folglich gibt es ein Element  $\tilde{g} \in \tilde{G}$ , so dass  $(\pi_1 \cap E, \pi_2 \cap E, \pi_3 \cap E)^{\tilde{g}} = (\pi'_1 \cap E, \pi'_2 \cap E, \pi'_3 \cap E)$  und  $O^{\tilde{g}} = O$ . Analog zu Teil (a) folgt auch hier die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.1.16** Sei  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine wie oben definierte  $R$ -Permutationsgruppe. Dann operiert  $T \cdot \tilde{G}$  auf den Elementen von  $\Pi(\Omega)$  treu, falls sich nicht alle Elemente von  $\Omega$  in einem Punkt schneiden.

Angenommen,  $T \cdot \tilde{G}$  operiert nicht treu auf  $\Pi(\Omega)$ , dann existiert ein Element  $t\tilde{g} \in T \cdot \tilde{G}$ ,  $t\tilde{g} \neq \text{id}$  mit  $\pi^{t\tilde{g}} = \pi$  für alle  $\pi \in \Pi(\Omega)$ . Sei  $t\tilde{g} \in T \cdot \tilde{G}$  eine solche Abbildung. Jedes Element  $\pi \in \Pi(\Omega)$  wird durch  $t\tilde{g}$  fest gelassen und folglich ebenso die zugehörigen Schnitte  $\pi \cap E$  mit der Hyperebene  $E$ . Jede Translation lässt  $E$  punktweise fest und somit also auch die Elemente von  $\Omega$ , was jedoch konstruktionsbedingt kein Element aus  $\tilde{G}$  mit Ausnahme der Identität tut. Es gilt daher  $\tilde{g} = \text{id}$  und  $t\tilde{g} = t$ . Folglich existiert eine Translation  $t$ , die sämtliche  $\pi \in \Pi(\Omega)$  fest lässt und deren Zentrum daher in  $\pi \cap E$  für alle  $\pi \in \Pi(\Omega)$  liegen muss. Alle Elemente von  $\Omega$  schneiden sich somit in (mindestens) einem Punkt.

### 3.1.3.2 Konstruktion divisibler Designs ausgehend von einem Ovaloid in $\text{PG}(3, q)$

Man betrachte ein Ovaloid  $\mathcal{O}$  in  $\text{PG}(3, q)$  über dem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$ ,  $q$  ungerade Primzahlpotenz.<sup>28</sup>

Da  $q$  ungerade ist, kann  $\mathcal{O}$  als elliptische Quadrik  $\mathcal{E}_3$  mit Gleichung  $f(X_0, X_1) + X_2X_3 = 0$  angesehen werden, wobei  $f$  eine irreduzible quadratische Form ist [37].  $G = \text{PGO}_-(4, q)$  ist ein Stabilisator von  $\mathcal{E}_3$  in  $\text{PGL}(4, q)$  und operiert 3-transitiv auf seinen Elementen [36]. Da jedes Element von  $\mathcal{E}_3$  eine eindeutig gegebene Tangentialebene besitzt, operiert  $G$  auch 3-transitiv auf den zugehörigen Tangentialebenen.

Wir betten  $\mathcal{E}_3$  in  $\text{PG}(4, q)$  ein und  $\overline{G} = \text{GO}_-(4, q)$  in  $\text{PGL}(5, q)$ :

$$\mathcal{E} : \begin{cases} f(X_0, X_1) + X_2X_3 & = 0 \\ X_4 & = 0 \end{cases}$$

<sup>28</sup>(Anregung durch R.-H. Schulz)

und

$$\tilde{G} = \left\{ \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & A & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid A \in \text{GO}_-(4, q) \right\}.$$

Nun definieren wir  $\Omega := \{t \mid t \text{ ist Tangentialebene von } \mathcal{E}\}$  und wissen, dass  $\tilde{G}$  isomorph zu  $\text{GO}_-(4, q)$  ist und 3-transitiv auf  $\Omega$  operiert. Keine drei Elemente von  $\Omega$  schneiden sich in mehr als einem Punkt. Angenommen, ihr Schnitt wäre eine Gerade, dann wären die zugehörigen polaren Punkte kollinear auf dem Ovaloid, ein Widerspruch. Nach Proposition 3.1.15 ist die Gruppe  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  eine 3- $R$ -transitive  $R$ -Permutationsgruppe. Nun können wir Speras Konstruktionsprinzip anwenden.

**Theorem 3.1.17** *Sei  $q$  eine ungerade Primzahlpotenz, dann existiert*

- (i) *ein  $3 - (q, q+1, 1)$ -divisibles Design, was auch ein  $2 - (q, q+1, q(q+1))$ -divisibles Design ist und*
- (ii) *ein  $3 - (q, 3, 1)$ -divisibles Design, was auch ein  $2 - (q, 3, q(q^2 - 1))$ -divisibles Design ist.*

*Jedes dieser Designs hat  $q(q^2 + 1)$  Punkte und besitzt als eine punkt- und block-transitive Automorphismengruppe  $T \cdot \tilde{G}$  mit  $\tilde{G} \cong \text{GO}_-(4, q)$ .*

*Beweis:* Sei  $E = \text{PG}(3, q)$  der 3-dimensionale projektive Raum über dem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$ ,  $q$  ungerade, eingebettet in  $\text{PG}(4, q)$ . Sei  $O$  das oben betrachtete Ovaloid in  $E$ ,  $\mathcal{E}$  die zugehörige wie oben eingebettete elliptische Quadrik und  $\Omega$  die Menge der Tangentialebenen von  $\mathcal{E}$ . Da sich nicht alle Tangentialebenen in einem Punkt schneiden, operiert die wie oben definierte  $R$ -Permutationsgruppe  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  treu (vgl. Bemerkung 3.1.16). Nach Proposition 3.1.15 ist  $(T \cdot \tilde{G}, \Pi(\Omega), R)$  3- $R$ -transitiv und wir können nun mit Proposition 3.1.3 2- oder 3-divisible Designs mit  $v = |\Pi(\Omega)| = q(q^2 + 1)$  Punkten und  $s = |[x]| = q$  ( $x \in \Pi(\Omega)$ ) Elementen pro Äquivalenzklasse konstruieren.

Um Speras Konstruktionsprinzip verwenden zu können, müssen wir eine geeignete  $R$ -transversale Teilmenge  $B$  von  $\Pi(\Omega)$  wählen.

- (i) Sei  $\Phi$  die Menge Ebenen in  $E$ , die  $\mathcal{E}$  in mehr als in einem Punkt schneiden und sei  $A \in \Phi$ . Dann ist der Schnitt  $C := A \cap \mathcal{E}$  ein Kegelschnitt. Sei

$$\Omega' := \{t_c \in \Omega \mid t_c \text{ Tangentialebene zu einem Punkt } P \in C\}$$

und

$$B := \Pi(\Omega')_{\mathcal{O}} = \{ \pi \mid \pi \text{ ein 3-dim Raum von } \text{AG}(4, q) \text{ mit } \pi \cap E \in \Omega' \text{ und } O = (0, 0, 0, 0, 1)K \in \pi \}.$$

Nun berechnen wir die Ordnung des Stabilisators  $(T \cdot \tilde{G})_B$  von  $B$  in  $T \cdot \tilde{G}$ . Wir können zeigen  $(T \cdot \tilde{G})_B = T_B \cdot \tilde{G}_B$  und daher berechnen wir  $|T_B|$  und  $|\tilde{G}_B|$  einzeln. Wir werden  $(T \cdot \tilde{G})_B \subseteq T_B \cdot \tilde{G}_B$  zeigen, der andere Fall ist trivial. Sei  $t\tilde{g} \in (T \cdot \tilde{G})_B$  gegeben. Wir wissen  $\pi^{t\tilde{g}} \in B$  für alle  $\pi \in B$ .  $T$  ist normal, also existiert ein  $t' \in T$  mit  $t\tilde{g} = \tilde{g}t'$  und wir erhalten  $B \ni \pi^{t\tilde{g}} = \pi^{\tilde{g}t'} = (\pi^{\tilde{g}})^{t'}$  für alle  $\pi \in B$ .

$t'$  lässt den uneigentlichen Raum  $E$  punktweise fest, daher muss  $\tilde{g}$  die Menge der Schnittebenen aller  $\pi \in B$  mit  $E$  fest lassen. Darüber hinaus lässt  $\tilde{g}$  den Punkt  $O$  fest und folglich gilt  $\tilde{g} \in \tilde{G}_B$ . Nun haben wir  $\pi^{\tilde{g}} \in B$  und daher  $t' \in T_B$  und somit  $t \in T_B$ .

Wir beginnen die Berechnung von  $|T_B|$  mit ein paar Gedanken zur Polarität, die zur elliptischen Quadrik  $\mathcal{E}$  gehört. Sei der Punkt  $Q$  der Pol zur Polarebene  $A$ , dann schneiden sich alle Tangentialebenen  $t_c \in \Omega'$  genau in  $Q$ . Folglich enthalten alle  $\pi \in B$  die Gerade  $OQ$  und somit lässt jede Translation mit Zentrum  $Q$  die Menge  $B$  fest und umgekehrt, jede Translation, die  $B$  fixiert, besitzt das Zentrum  $Q$ . Wir erhalten  $|T_B| = q$ .

Wir wissen,  $\tilde{G}_B$  ist eine Untergruppe von  $\tilde{G}$ , welche wiederum eine Untergruppe von  $\text{PGL}(5, q)$  ist und  $\tilde{G}$  ist isomorph zu  $\text{GO}_-(4, q)$ . Alle  $g \in \tilde{G}$  lassen den Punkt  $O$  fest. Jedes  $\pi \in B$  enthält den Punkt  $O$  und ist eindeutig durch diesen Punkt und die zugehörige Tangentialebene  $t_c \in \Omega'$  gegeben. Daher bleibt  $B$  bei jedem  $g \in \tilde{G}$  fest, welches  $\Omega'$  mengenweise invariant lässt. Umgekehrt fixiert jedes  $g \in \tilde{G}_B$  die Menge  $\Omega'$  und wir erhalten  $|\tilde{G}_B| = |\tilde{G}_{\Omega'}|$ .

Die Elemente von  $\tilde{G}_{\Omega'}$  bilden nicht nur die Tangentialebenen  $t_c \in \Omega'$  aufeinander ab, sie tun dies mit den zugehörigen Tangentialpunkten ebenfalls. Diese Punkte sind die Punkte des Kegelschnitts  $C$ , der daher durch  $\tilde{G}_{\Omega'}$  fest gelassen wird. Andererseits lässt jedes  $g \in \tilde{G}_C$  die Menge  $\Omega'$  invariant. Wir erhalten  $|\tilde{G}_{\Omega'}| = |\tilde{G}_C|$ .

Eine Ebene ist eindeutig durch drei Punkte bestimmt. Jedes  $g \in \tilde{G}$ , welches  $C$  fest lässt, tut dies auch mit der Ebene  $A$ . Wir erhalten  $\tilde{G}_C \subseteq \tilde{G}_A$ .

Jedes  $g \in \tilde{G}_A$  besitzt zwei Orbits, die Punkte von  $C$  und die Punkte, die nicht auf  $C$  liegen. Es folgt  $\tilde{G}_A \subseteq \tilde{G}_C$  und daher  $\tilde{G}_C = \tilde{G}_A$  und  $|\tilde{G}_B| = |\tilde{G}_{\Omega'}| = |\tilde{G}_C| = |\tilde{G}_A|$ .

Nun werden wir die Ordnung des Stabilisators einer Ebene von  $\Phi$  bestimmen. Jedes  $A \in \Phi$  schneidet  $C$  genau in einem Kegelschnitt und ist eindeutig durch drei Punkte dieses zugehörigen Kegelschnitts gegeben.  $G$  operiert 3-transitiv auf den Punkten von  $C$ . Folglich operiert es transitiv auf  $\Phi$  und wir erhalten mit  $|\tilde{G}| = |\tilde{G}_A| \cdot |A^{\tilde{G}}|$ :

$$|\tilde{G}_A| = \frac{|\tilde{G}|}{|A^{\tilde{G}}|} = \frac{2q^2(q-1)(q^2-1)(q^2+1)}{q(q^2+1)} = 2q(q-1)(q^2-1).$$

Wir erhalten demnach

$$|(T \cdot \tilde{G})_B| = 2q^2(q-1)(q^2-1).$$

Nun berechnen wir die verbleibenden Parameter  $k = |B| = q+1$  und

$$\lambda_3 = \frac{|T \cdot \tilde{G}| \binom{k}{t}}{|(T \cdot \tilde{G})_B| \binom{v}{t} \cdot s^t} = \frac{q^4 2q^2 (q-1)(q^2-1)(q^2+1) \cdot \binom{q+1}{3}}{2q^2 (q-1)(q^2-1) \binom{\frac{q(q^2+1)}{3}}{3} q^3} = 1$$

und bekommen das  $3-(q, q+1, 1)$ -divisible Design  $D = (\Pi(\Omega), B^{T \cdot \tilde{G}}, R)$  mit punkt- und block-transitiver Automorphismengruppe  $T \cdot \tilde{G}$  mit  $\tilde{G} = \text{GO}_-(4, q)$ .

Dies Design ist auch ein  $2-(q, q+1, q(q+1))$ -divisibles Design.

(ii) Seien  $P, Q, R \in \mathcal{E}$  drei beliebige, aber fest gegebene Punkte. Sei

$$\begin{aligned} \Omega' &:= \{t_i \in \Omega \mid t_i \text{ Tangentialebene des Punktes } i, i \in \{P, Q, R\}\} \\ &= \{t_P, t_Q, t_R\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B &:= \Pi_0(\Omega') = \{\pi_i \mid \pi_i \text{ ein 3-dim Raum von } \text{AG}(4, q) \text{ mit } \pi_i \cap E \in \Omega' \\ &\quad \text{und } O = (0, 0, 0, 0, 1)K \in \pi_i, i \in \{t_P, t_Q, t_R\}\} \\ &= \{\pi_{t_P}, \pi_{t_Q}, \pi_{t_R}\}. \end{aligned}$$

Durch die Punkte  $P, Q, R$  ist eindeutig eine Ebene  $A \in \Phi$  bestimmt. Zur Polarebene  $A$  existiert ein Pol  $U$ , welcher ein Punkt ist, der nicht auf  $\mathcal{E}$  liegt. Die Tangentialebenen zu  $P, Q, R$  schneiden sich genau in  $U$ . Folglich enthalten die zugehörigen 3-dim Räume  $\pi_{t_P}, \pi_{t_Q}$  und  $\pi_{t_R}$  alle die Gerade  $OU$  und daher lässt jede Translation mit Zentrum  $U$  die Menge  $B$  fest. Vice versa, besitzt jede Translation, die  $B$  fest lässt das Zentrum  $U$ . Wir erhalten  $|T_B| = q$ .

Mit analoger Argumentation zu (i) können wir zeigen:

$$|\tilde{G}_B| = |\tilde{G}_{\{t_P, t_Q, t_R\}}| = |\tilde{G}_{\{P, Q, R\}}|.$$

$\tilde{G}$  operiert 3-transitiv auf den Punkten von  $\mathcal{E}$ . Folglich gilt

$$|\tilde{G}| = |\tilde{G}_{P,Q,R}| \cdot (q^2 + 1)q^2(q^2 - 1) = \frac{1}{6} \cdot |\tilde{G}_{\{P,Q,R\}}| \cdot (q^2 + 1)q^2(q^2 - 1)$$

und daher

$$|(T \cdot \tilde{G})_B| = 12q(q - 1).$$

Mit  $k = |B| = 3$  und

$$\lambda_3 = \frac{|T \cdot \tilde{G}| \binom{k}{3}}{|(T \cdot \tilde{G})_B| \binom{\frac{v}{s}}{3} \cdot s^3} = \frac{q^4 2q^2 (q - 1)(q^2 - 1)(q^2 + 1) \cdot \binom{3}{3}}{12q(q - 1) \binom{\frac{q(q^2+1)}{3}}{3} q^3} = 1$$

erhalten wir ein  $3$ - $(q, 3, 1)$ -divisibles Design und für  $t = 2$  das zugehörige  $2$ - $(q, 3, q(q^2 - 1))$ -divisible Design mit punkt- und block-transitiver Automorphismengruppe  $T \cdot \tilde{G}$  mit  $\tilde{G} = \text{GO}_-(4, q)$ .  $\square$

### 3.1.3.3 Untersuchung zur Block-Zerlegbarkeit

Auch bei den hier konstruierten DDs betrachten wir nun die innere Struktur und halten folgendes fest.

**Lemma 3.1.18** *Jedes der wie oben konstruierten DDs aus Satz 3.1.17 ist fast-block-zerlegbar mit einer Wurzel und einer von der Translationsgruppe  $T$  induzierten Gruppe  $\hat{T}$ , aber keines davon ist block-zerlegbar.*

*Beweis:* Sei  $D$  ein wie oben konstruiertes DD aus Satz 3.1.17. Wir verwenden wiederum dieselben Bezeichnungen. Vollkommen analog zu Beispiel 2 (s. S. 43 ff.) können wir sowohl zeigen, dass jede Inzidenzstruktur

$$(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t, B^{\tilde{G} \cdot t}, \epsilon) \text{ mit } t \in T,$$

wobei

$$\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}} := \{\pi \in \Pi(\Omega) \mid \mathcal{O} \in \pi\},$$

ein 3- bzw. 2-Design und gleichzeitig ein Unterdesign von  $D$  ist, als auch, dass die Punkt- bzw. Blockmenge von  $D$  die Vereinigung der Punkt- bzw. Blockmengen dieser Unterdesigns ist. Auch die Situation bezüglich der Punktclassen, entspricht derjenigen in Beispiel 2. Damit ist  $D$  fast-block-zerlegbar mit Wurzel  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t, B^{\tilde{G} \cdot t}, \epsilon)$  (wobei  $t \in T$ ) und einer von  $T$  induzierten Gruppe, die wir  $\hat{T}$  nennen (s. Def. 2.1.5).

Wir haben gezeigt, dass sowohl die in (i) als auch die in (ii) konstruierten DDs einen Startblock  $B$  besitzen, dessen Elemente genau eine gemeinsame Schnittgerade enthalten, also  $T_B \neq \text{id}$  und  $|T_B| = q$ . Da die Elemente von  $\Omega$

keinen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen (ansonsten wäre dieser Schnittpunkt der Pol zu mehreren Polarebenen, was einen Widerspruch liefert), gilt  $T_{\Pi(\Omega)} = \text{id}$ , wobei  $T_{\Pi(\Omega)}$  den punktweisen Stabilisator von  $\Pi(\Omega)$  in  $T$  beschreibt. Somit haben wir  $B \in B^{\tilde{G}^t} \cap B^{\tilde{G}^{t'}}$  für alle  $t, t' \in T_B$ , wobei die inneren Designs  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^t, B^{\tilde{G}^t}, \epsilon)$  und  $(\Pi(\Omega)_{\mathcal{O}}^{t'}, B^{\tilde{G}^{t'}}, \epsilon)$  jeweils verschieden sind, da sie unterschiedliche Punktmengen besitzen.  $\square$

Bei den Konstruktionen, die in den letzten drei Beispielen vorgestellt wurden, fällt auf, dass sich die von Schulz und Spera eingeführte Konstruktionsmethode in unterschiedlich dimensionalen projektiven Räumen anwenden lässt. Dies legt nahe, eine Methode für projektive Räume beliebiger Dimension zu entwickeln. Nachdem wir zunächst, die bereits angekündigte vierte Konstruktion betrachtet haben, wird eine solche Methode in Abschnitt 3.2 dargestellt.

### 3.1.4 Beispiel 4: Konstruktion divisibler Designs mit Hilfe einer Laguerre Geometrie über dem endlichen Körper $\text{GF}(q)$

In diesem Abschnitt werden noch einmal Serien divisibler Designs unter Verwendung von Speras Konstruktionsprinzip erstellt, allerdings gehen wir dabei von einer Laguerre Geometrie

$$\Sigma(\text{GF}(q), \mathbb{ID}(\text{GF}(q)))$$

aus, wobei  $\mathbb{ID}(\text{GF}(q))$  der Ring der dualen Zahlen über dem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$  ist. Diese Konstruktion gründet auf Ideen von H. Havlicek und ist Ergebnis einer Zusammenarbeit mit H. Havlicek und R.-H. Schulz. Es war auch H. Havlicek, der eine enge Verbindung zwischen einigen dieser Designs und solchen, die durch R.-H. Schulz und C. Ceroni in [15] hergestellt und in Beispiel 2 dieses Kapitels vorgestellt wurden, erkannte.

Es ist daher nicht überraschend, wenn wir auch bei den DDs, die wir nun konstruieren werden, eine sehr ausgeprägte innere Strukturierung feststellen können.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem kurzen Exkurs in die klassische Laguerre Geometrie, gefolgt von einer Einführung in duale Zahlen und Laguerre Geometrie über dem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$ . Weitere Informationen zu diesem Thema findet man beispielsweise in [3], [8] und [35].

Zur Konstruktion unserer DDs werden wir die oben bereits erwähnte Laguerre Geometrie  $\Sigma(\text{GF}(q), \mathbb{ID}(\text{GF}(q)))$  verwenden, eine Kettengeometrie, deren Punkte die Elemente der projektiven Geraden  $\mathbb{IP}(\mathbb{ID}(\text{GF}(q)))$  über  $\mathbb{ID}(\text{GF}(q))$

sind. Auf diesen Punkten gibt es eine Äquivalenzrelation, welche, wie wir sehen werden, als Parallelitätsrelation interpretiert werden kann. Die Ketten dieser Kettengeometrie bilden jeweils transversale Teilmengen, die aus jeder Parallelenklasse genau ein Element enthalten. Da je drei Punkte mit genau einer Kette inzidieren, kann man diese Kettengeometrie selbst schon als ein 3-DD auffassen, indem man die Punkte von  $\mathbb{P}(\mathbb{ID}(\mathbb{GF}(q)))$  als Punkte des DDs und die Ketten als dessen Blöcke interpretiert. Dabei entsprechen die Parallelenklassen wieder den Punktklassen des DDs.

Ausgehend von einer solchen Kettengeometrie werden wir jedoch auch noch weitere DDs konstruieren können, da die projektive Gruppe von  $\mathbb{P}(\mathbb{ID}(\mathbb{GF}(q)))$  eine scharf 3- $R$ -transitive  $R$ -Permutationsgruppe auf deren Punkten ist, was wiederum die Verwendung von Speras Proposition (3.1.3) erlaubt.

Anschließend vergleichen wir die hier verwendete Konstruktion mit der in Beispiel 2 beschriebenen.

Im letzten Teil dieses Abschnitts betrachten wir eine Verallgemeinerung dieser Konstruktionsmethode von H. Havlicek [34] und beschäftigen uns mit der inneren Struktur der in diesem Abschnitt konstruierten DDs.

#### 3.1.4.1 Ein wenig klassische Laguerre Geometrie

In der klassischen Laguerre Geometrie beschäftigen wir uns mit sogenannten Speeren und Zykeln. Ein Speer ist eine orientierte Gerade und ein Zykel ist ein orientierter Kreis oder ein Punkt in der reellen Ebene. Neben einer Berührrelation zwischen Speeren und Zykeln existiert eine Äquivalenzrelation auf der Speeren - die Parallelitätsrelation. Zwei Speere werden *parallel* genannt, falls ihre Geraden parallel und deren Orientierungen gleich sind.

Eine mögliche Darstellungsform von Speeren und Zykeln im reellen 3-dimensionalen Raum ist durch Blaschkes Zylinder-Model gegeben [8]. In diesem Model entspricht jeder Speer genau einem Punkt eines gegebenen Zylinders  $C$  über einer Ellipse in einem 3-dimensionalen reellen Raum. Die Zykeln sind durch die Schnitte von  $C$  mit Ebenen repräsentiert, die nicht parallel zur Achse von  $C$  sind.

Zwei Speere sind genau dann parallel, wenn die zugehörigen Punkte auf demselben Generator von  $C$  liegen [3]. Damit existiert eine Äquivalenzrelation auf den Punkten von  $C$ , die durch die Parallelitätsrelation der Speere induziert ist.

Für eine andere Darstellung der Speere, brauchen wir den Ring der dualen Zahlen über  $\mathbb{R}$ . Es existiert ein Isomorphismus zwischen den Speeren und den

Punkten der projektiven Geraden über dem Ring der dualen Zahlen über  $\mathbb{R}$ , welche die Parallelitätsrelation erhält [3].

Für unsere Konstruktion divisibler Designs, werfen wir einen Blick auf eine Verallgemeinerung der klassischen Laguerre Geometrie, der Laguerre Geometrie über dem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$ .

### 3.1.4.2 Laguerre Geometrie über $\text{GF}(q)$ und DDs

Wir beginnen mit der Betrachtung *dualer Zahlen über dem endlichen Körper*  $\text{GF}(q)$ , welche wir analog zum klassischen Fall (s.o) zur Darstellung der „Speere“ verwenden werden.

**Definition 3.1.19** Eine *duale Zahl über dem endlichen Körper*  $\text{GF}(q)$  ist ein geordnetes Paar  $(a, b)$  mit  $a, b \in \text{GF}(q)$  und mit folgenden Eigenschaften:

Zwei duale Zahlen sind gleich, falls ihre Komponenten gleich sind. Die Regeln zur Addition und Multiplikation sind:

$$(i) \quad (a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$$

$$(ii) \quad (a, b) \cdot (a', b') := (aa', ab' + ba').$$

Eine duale Zahl  $(a, b)$  kann entweder durch eine Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  mit  $a, b \in \text{GF}(q)$  oder in folgender Form dargestellt werden:  $a + b\epsilon$ , wobei  $\epsilon$  ein beliebig gewähltes Element ist, welches  $\epsilon^2 = 0$  erfüllt, zum Beispiel  $\epsilon = (0, 1)$ . Die Additions- und Multiplikationsregeln entsprechen denjenigen für Matrizen.

**Bemerkung 3.1.20** Als Unterring des Matrizenringes ist die Menge der dualen Zahlen mit der gegebenen Addition und Multiplikation ein Ring mit 1. Wir bezeichnen diesen Ring als  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$ .

In Analogie zu Benz ([3], S. 24), haben wir:

**Proposition 3.1.21**  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  ist ein kommutativer lokaler Ring.

Das einzige maximale Ideal  $N$  enthält alle nicht-invertierbaren Elemente von  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$ . Wir definieren  $R^*$  für jeden Ring  $R$  als die multiplikative Gruppe aller seiner invertierbaren Elemente. Hier  $\mathcal{R} := \mathbb{D}(\text{GF}(q))^* = \mathbb{D}(\text{GF}(q)) \setminus N$ .

**Definition 3.1.22 (Laguerre Algebra)** Für einen Körper  $K$  wird eine  $K$ -Algebra  $A$  eine *Laguerre Algebra* genannt, wenn ein zweiseitiges Ideal  $M$  von  $A$  mit  $A^* = A \setminus M$  und  $A = K \oplus M$  existiert.

$\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  ist kommutativ, also ist das oben definierte Ideal  $N$  zweiseitig. Darüber hinaus ist  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  die direkte Summe des eingebetteten Körpers  $\text{GF}(q)$  mit  $N$ , wobei  $\text{GF}(q)$  mit der Menge der Diagonalmatrizen  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  (oder der Menge von Paaren  $(a, 0)$  oder  $a+0\epsilon$  mit  $a \in \text{GF}(q)$ , abhängig von der Art der Darstellung) identifiziert wird. Folglich erhalten wir das wohlbekannte Ergebnis:

**Proposition 3.1.23**  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  ist eine Laguerre Algebra.

**Definition 3.1.24** Wir definieren die *projektive Gerade*  $\mathbb{P}(\mathbb{D}(\text{GF}(q)))$  über  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  als die Menge aller Äquivalenzklassen von zulässigen Paaren. Dabei nennen wir hier ein Paar  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{D}(\text{GF}(q))$  ein *zulässiges Paar über  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$* , falls mindestens eines der beiden Elemente invertierbar ist. Zwei zulässige Paare  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  werden *äquivalent* genannt, wenn ein Element  $r \in \mathcal{R}$  existiert, so dass  $x_i = ry_i$ ,  $i = 1, 2$  gilt. Wir nennen die Elemente von  $\mathbb{P}(\mathbb{D}(\text{GF}(q)))$  *Punkte*. Da  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  ein lokaler Ring ist, ist diese Definition einer projektiven Geraden über  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  äquivalent zu derjenigen, die von Herzer in [35] auf Seite 785 gegeben wurde.

**Definition 3.1.25** Zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\text{GF}(q)))$  mit  $P = \mathcal{R}(p_1, p_2)$ ,  $Q = \mathcal{R}(q_1, q_2)$ ,  $p_i, q_i \in \mathbb{D}(\text{GF}(q))$ ,  $i = 1, 2$  werden *parallel* genannt, falls gilt

$$p_1q_2 - q_1p_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \notin \mathcal{R}.$$

In Analogie zur allgemeineren Definition einer Kettengeometrie von Benz in ([3], S. 94), definieren wir in dieser Arbeit die Kettengeometrie  $\Sigma(K, D)$  mit  $K := \text{GF}(q)$ ,  $D := \mathbb{D}(\text{GF}(q))$  als eine Inzidenzstruktur, deren Punkte die Elemente von  $\mathbb{P}(D)$  und deren Blöcke (Ketten) die Bilder von  $\mathbb{P}(K)$  unter der projektiven Gruppe von  $\mathbb{P}(D)$  sind (vgl. Def. 3.1.30 und [35], S. 790). Da  $D$  eine Laguerre Algebra ist, gilt folgendes:

**Proposition 3.1.26** [35]  $\Sigma(K, D)$  ist eine sogenannte Laguerre Geometrie, das heißt, die Parallelismusrelation ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{P}(D)$  und jede Kette von  $\Sigma(K, D)$  enthält aus jeder Parallelenklasse einen Punkt.

Wir betrachten nun die Kettengeometrie  $\Sigma(K, D)$ , deren Punkte die Elemente der projektiven Geraden über  $D$  sind. Wir können die Punkte von  $\mathbb{P}(D)$  in *eigentliche* und *uneigentliche* Punkte teilen und zwar in Abhängigkeit von der Invertierbarkeit der zweiten Komponente oder äquivalent dazu, bezüglich der Parallelität zum Punkt  $\mathcal{R}(1, 0)$ . Jeder eigentliche Punkt lässt sich in Form von  $\mathcal{R}(p, 1)$ ,  $p \in D$  darstellen und jeder uneigentliche Punkt in Form von  $\mathcal{R}(1, \delta\epsilon)$ ,  $\delta \in K$ .

**Proposition 3.1.27** (i) Seien  $P, Q \in \mathbb{P}(D)$  zwei eigentliche Punkte mit  $P = \mathcal{R}(p_1 + p_2\epsilon, 1)$  und  $Q = \mathcal{R}(q_1 + q_2\epsilon, 1)$ . Sie sind genau dann parallel, wenn gilt:  $p_1 = q_1$ .

(ii) Uneigentliche Punkte sind immer parallel.

(iii) Ein eigentlicher Punkt ist niemals parallel zu einem uneigentlichen Punkt.

Der einfache Beweis verwendet

$$P \parallel Q \Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 + p_2\epsilon & 1 \\ q_1 + q_2\epsilon & 1 \end{vmatrix} = p_1 - q_1 + (p_2 - q_2)\epsilon \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow p_1 - q_1 = 0.$$

**Bemerkung 3.1.28** Mit der Parallelismusrelation erhalten wir  $q + 1$  Äquivalenzklassen mit jeweils  $q$  Elementen:  $\{\mathcal{R}(x + b\epsilon, 1) \mid b \in K\}$ , mit  $x \in K$  und  $[\mathcal{R}(1, 0)] = \{\mathcal{R}(1, \delta\epsilon) \mid \delta \in K\}$ .

**Bemerkung 3.1.29** Wir können die projektiv Gerade über  $K$  in  $\mathbb{P}(D)$  einbetten. Die Elemente von  $\mathbb{P}(K)$  bilden die folgende transversale Teilmenge von  $\mathbb{P}(D)$ :  $\tilde{K} := \{\mathcal{R}(p_1 + 0\epsilon, 1) \mid p_1 \in K\} \cup \mathcal{R}(1, 0)$ .

**Definition 3.1.30** Man definiert die projektive Gruppe von  $\mathbb{P}(D)$  als die Gruppe aller regulären  $2 \times 2$ -Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{D}(K)$  faktorisiert nach der Untergruppe  $\left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in \mathcal{R} \right\}$ . Wir bezeichnen sie als  $\Gamma(D)$ . (Vgl. [3])

**Proposition 3.1.31** [3]  $\Gamma(D)$  erhält die Parallelität und operiert scharf 3-R-transitiv auf der Punktmenge von  $\mathbb{P}(D)$ .

Nach Bemerkung 3.1.5 sind wir nun in der Lage, ein divisibles Design unter Verwendung von Proposition 3.1.3 zu konstruieren.

**Theorem 3.1.32 (Havlicek, Schulz, Giese)** Seien  $n, i \in \mathbb{N}$  mit  $i \mid n$  und sei  $q = p^n$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist. Dann existieren 3- $(q, k, \lambda_3)$ -divisible Designs, jedes mit  $q(q + 1)$  Punkten und den in Tabelle 1 angegebenen Parametern  $k$  und  $\lambda_3$ , wobei  $p$  und  $i$  die dort angegebenen Bedingungen erfüllen. Diese 3-divisiblen Designs besitzen  $\Gamma(\mathbb{D}(\text{GF}(q)))$  als eine punkt- und block-transitive Automorphismengruppe. Dasselbe gilt für die zugehörigen 2-divisiblen Designs.

Der Beweis von Theorem 3.1.32 ist in [28] angegeben.

Nr. <sup>29</sup>	$k$	$\lambda_3$	Bedingungen
(i)	$p^i + 1$	1	
(ii)	$p^i$	$p^i - 2$	$p^i > 2$
(iii)	$p^i - 1$	$\frac{1}{2}(p^i - 2)(p^i - 3)$	$p^i > 3$
(iv)	$p^i - 2$	$\frac{1}{6}(p^i - 2)(p^i - 3)(p^i - 4)$	$p^i > 4$
(v)	$p^i - 3$	$\frac{1}{4}(p^i - 3)(p^i - 4)(p^i - 5)$	$p^i > 7$
	4	6	
	$p^i - 3$	$\frac{1}{24}(p^i - 3)(p^i - 4)(p^i - 5)$	$p = 3$ und $p^i > 5$
	4	1	
	$p^i - 3$	$\frac{1}{8}(p^i - 3)(p^i - 4)(p^i - 5)$	$p > 3$ und $p^i > 5$
	4	3	
	$p^i - 3$	$\frac{1}{12}(p^i - 3)(p^i - 4)(p^i - 5)$	$p^i \equiv 1 \pmod{3}$ und $p^i > 5$
4	2		

Tabelle 1

**Bemerkung 3.1.33** A.G. Spera konstruiert in [87] divisible Designs ausgehend von einer endlichen lokalen  $K$ -Algebra  $A$  mit  $K = \text{GF}(q)$  und  $J$  ihr Jacobson-Radikal (mit  $|A| = q^n$ ,  $|J| = q^j$ ,  $n, j \in \mathbb{N}$ ). Im Spezialfall  $K \cong A/J$ , wobei  $A$  eine Laguerre Algebra ist, erhält er ein transversales  $3 - (q^j, q + 1, 1)$ -DD, also einen Spezialfall von Fall (i).

### 3.1.4.3 Vergleich von Konstruktionen

Wie bereits angekündigt, werden wir nun die eben beschriebene Konstruktion mit der in Beispiel 2 geschilderten vergleichen. Auf den ersten Blick scheinen diese beiden nicht viel gemeinsam zu haben, auf den zweiten fällt jedoch auf, dass die Parametersätze des in Satz 3.1.32 Teil (i) und in Satz 3.1.11 Teil (a) Abschnitt (i) beschriebenen 3-DDs übereinstimmen. Das ist kein Zufall, denn diese beiden Konstruktionen sind, wie wir gleich sehen werden, in gewisser Weise dual zueinander.

Für den Vergleich dieser Konstruktionen ist es von Vorteil, sich eine Darstellung von  $\Sigma(K, D)$  in einem projektiven Raum anzusehen, welche ein Analogon zu Blaschkes Zylinder-Modell in der klassischen Laguerre Geometrie bildet [8]. Im Folgenden werden wir sehen, wie man unsere Kettengeometrie

<sup>29</sup>Die Nummer in der Tabelle bezieht sich auf den zugehörigen Teil des Beweises in [28].

$\Sigma(K, D)$  in einen projektiven Raum einbetten kann. Dabei verwenden wir Ergebnisse von H. Hotje [38].

*Einbettung von  $\Sigma(K, D)$  in einen projektiven Raum:*

Der entscheidende Satz zur Einbettung ist der folgende.

**Theorem 3.1.34** (Hotje, [38], Th. 1, S. 93) *Sei  $L$  eine kommutative kinematische Algebra vom Rang  $n \geq 2$  über dem Körper  $F$  und sei  $M$  die zugehörige quadratische Form. Dann kann die Kettengeometrie  $\Sigma(F, L)$  im  $(n + 1)$ -dimensionalen projektiven Raum  $\Psi = (L \times F \times F)^*/F^*$  über  $F$  als Menge derjenigen Punkte der Quadrik  $\mathcal{O} = \{[a, c, d] \mid M(a) = cd\}$  dargestellt werden, die nicht im Radikal bezüglich der zugehörigen Bilinearform liegen. Die Ketten sind genau die Schnitte von  $\mathcal{O}$  mit solchen Ebenen von  $\Psi$ , die keine ganze Gerade, aber mindestens drei Punkte mit  $\mathcal{O}$  gemeinsam haben.*

Der Beweis kann in [38] gefunden werden.

Zu jeder dualen Zahl <sup>30</sup>  $x = x_1 + x_2\epsilon$ , existieren Elemente  $k_x = -2x_1$ ,  $l_x = x_1^2$  von  $\text{GF}(q)$ , so dass  $x^2 = -l_x - k_x x$  gilt.  $D$  ist also eine kinematische Algebra über  $K$ . Daher können wir festhalten:

**Lemma 3.1.35**  *$D$  ist eine abelsche kinematische Algebra über  $K$ .*

Da  $D$  vom Rang 2 ist, wissen wir nach dem Satz von H. Hotje (s.o.), dass wir  $\Sigma(K, D)$  so in einen 3-dimensionalen projektiven Raum einbetten können, dass jeder Punkt von  $\mathbb{P}(D)$  auf einen Punkt einer Quadrik  $\mathcal{O}$  abgebildet wird. Wir werden diese Quadrik analog zu dem allgemeineren Fall untersuchen, den Hotje in [38] gezeigt hat. Dafür müssen wir die Involution

$${}_{-}' : \begin{cases} D & \longrightarrow D \\ x & \longmapsto \bar{x} = x_1 - x_2\epsilon, \end{cases}$$

die quadratische Form

$$M : \begin{cases} D & \longrightarrow K \\ x & \longmapsto x\bar{x} = x_1^2 \end{cases}$$

ebenso wie die quadratische Form

$$Q : \begin{cases} D \times K \times K & \longrightarrow K \\ (x, c, d) & \longmapsto M(x) - cd = x_1^2 - cd \end{cases}$$

---

<sup>30</sup>Im folgenden Abschnitt steht die „Kurzform“  $x$  einer dualen Zahl immer für die genaue Darstellung  $x = x_1 + x_2\epsilon$ ,  $x_1, x_2 \in \text{GF}(q)$ .

mit zugehöriger Bilinearform

$$S_Q : \begin{cases} (D \times K \times K)^2 & \longrightarrow K \\ (x, c, d) \times (y, u, v) & \longmapsto 2x_1y_1 - cv - ud \end{cases}$$

definieren. Wir betten  $\mathbb{P}(D)$  in den 3-dimensionalen projektiven Raum  $\Psi$  ein, mit  $\Psi := (D \times K \times K)^*/K^*$ : Der Ausdruck  $[a, a_1, a_2]$  beschreibt den Punkt von  $\Psi$ , der durch  $(a, a_1, a_2) \in (D \times K \times K)^*$  bestimmt ist. Dann ist

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{P}(D) & \longrightarrow \Psi \\ \mathcal{R}(x, y) & \longmapsto [x\bar{y}, M(x), M(y)] \end{cases}$$

eine injektive Abbildung (vgl. [38]).

Wir definieren  $\mathcal{O} := \{[x, c, d] \in \Psi \mid Q((x, c, d)) = 0\}$  als einen Kegel in  $\Psi$ . Die Spitze dieses Kegels besteht aus einem einzelnen Punkt, sagen wir  $\text{rad } \Psi$ , da das Radikal der quadratischen Form  $Q$  ein eindimensionaler Unterraum von  $D \times K \times K$  ist. Wir nennen eine Ebene von  $\Psi$  *zulässig*, falls ihr Schnitt mit der Quadrik  $\mathcal{O}$  das Bild einer Kette von  $\mathbb{P}(D)$  ist.

**Lemma 3.1.36** (vgl. [38],(3.2), (3.5) und ein Spezialfall von (3.6))

$$(i) \quad \Delta(\mathbb{P}(D)) = \mathcal{O} \setminus \text{rad } \Psi.$$

$$(ii) \quad \text{Sei } P, Q \in \mathbb{P}(D), P \neq Q.$$

$$P \parallel Q \iff \Delta(P) \text{ und } \Delta(Q) \text{ liegen auf demselben Generator von }^{31}\mathcal{O}.$$

(iii) Die zulässigen Ebenen sind genau die Ebenen von  $\Psi$ , die nicht durch die Spitze  $\text{rad } \Psi$  gehen.

Man betrachte  $\Delta(\tilde{K}) = \{[p_1, p_1^2, 1] \mid p_1 \in K\} \cup \{[0, 1, 0]\}$  (vgl. Bemerkung 3.1.29), welcher ein regulärer Kegelschnitt ist und definiere  $\tilde{W}$  als die (zulässige) Ebene von  $\Psi$ , die durch  $[0, 1, 0], [1, 1, 1], [0, 0, 1] \in \Delta(\tilde{K})$  bestimmt ist. Hotje zeigt

**Lemma 3.1.37** ([38], (3.4))  $\Delta(\tilde{K}) = \mathcal{O} \cap \tilde{W}$ .

Nun können wir schließen:

Wir können die Elemente von  $\mathbb{P}(D)$  mit den Elementen des Kegels  $\mathcal{O}$  im 3-dimensionalen projektiven Raum  $\Psi$  identifizieren, mit Ausnahme seiner Spitze  $E' := [a, 0, 0]$ . Man betrachte eine Ebene in  $\Psi$ , deren Schnitt mit  $\mathcal{O}$  genau der Punkt  $E'$  ist, dann sind alle Punkte des Zylinders  $Z := \mathcal{O} \setminus E'$

<sup>31</sup>Ein Generator von  $\mathcal{O}$  ist eine Gerade, die vollständig in  $\mathcal{O}$  enthalten ist.

affine Punkte des 3-dimensionalen affinen Raumes, dessen uneigentliche Hyperebene die oben betrachtete Ebene ist. Eine solche Ebene existiert, da kein endlicher Körper quadratisch abgeschlossen ist.  $Z$  besteht aus  $q + 1$  Geraden (Generatoren) mit jeweils  $q$  Punkten, welche die uneigentliche Ebene in  $E'$  schneiden. Nach Lemma 3.1.36 sind die Punkte einer Geraden paarweise parallel.

Man beachte, dass  $\mathbb{P}(K)$  in  $Z \cap \tilde{W}$  eingebettet ist (Lemma 3.1.37).

Die Punkte des in diesem Abschnitt mit Hilfe einer Laguerre Geometrie konstruierten Designs (vgl. Satz 3.1.32) können als die affinen Punkte der  $q + 1$  Geraden des Kegels  $\mathcal{O}$  in einem 3-dimensionalen projektiven Raum  $\Psi$  angesehen werden. Jede Gerade enthält genau eine Parallelenklasse von Punkten und alle Geraden schneiden sich in dem Punkt  $E'$ .

Indem wir  $\Psi$  dualisieren, erhalten wir die Situation der Konstruktion von Schulz und Cerroni aus Beispiel 2 (vgl. 3.1.2). Wir haben  $q + 1$  Parallelenklassen aus jeweils  $q$  Ebenen. Sämtliche Ebenen dieser Parallelenklassen schneiden die Ebene  $E$ , welche dual zum Punkt  $E'$  ist. Es ist daher nicht überraschend, dass wir trotz unterschiedlicher Konstruktionen divisible Designs mit identischen Parametersätzen erhalten, wenn wir geeignete Startblöcke verwenden.

In Abbildung 5 wird dies graphisch verdeutlicht.

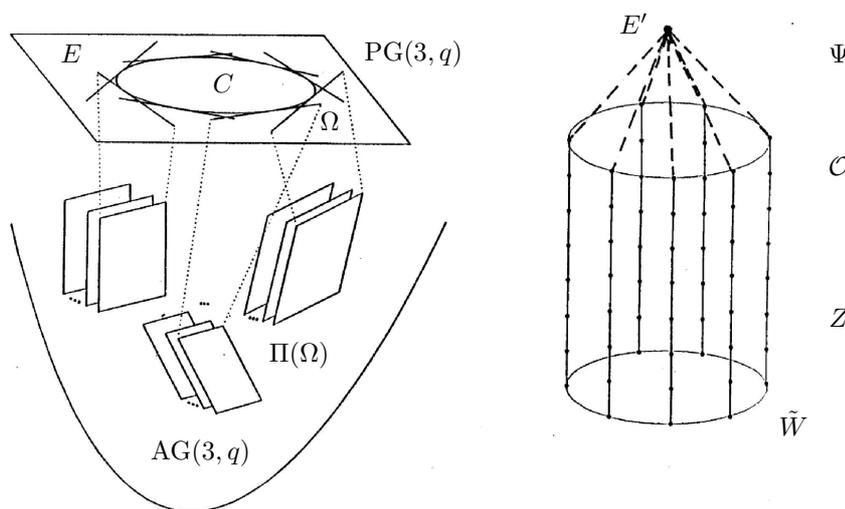


Abbildung 5: Links: Konstruktion aus Beispiel 2. Rechts: Konstruktion aus Beispiel 4.

Wie wir bereits feststellen konnten, sind die in Beispiel 2 erstellten DDs mindestens fast-block-zerlegbar. Daher ist es naheliegend, auch bei den hier konstruierten DDs eine ähnlich starke Strukturierung zu vermuten. Doch bevor wir uns mit diesem Thema näher beschäftigen, werden wir uns eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion ansehen, um dann auch deren innere Strukturen mit zu erfassen.

### 3.1.4.4 Eine Verallgemeinerung: Kettengeometrien und DDs

In [34] verwendet H. Havlicek anstelle der Laguerre Algebra  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  eine nicht näher spezifizierte endlich dimensionale lokale Algebra über  $\text{GF}(q)$  (s.u.).

**Theorem 3.1.38** ([34], Th. (4.3.4) u. Th. (4.4.2)) *Sei  $A$  eine endlich-dimensionale lokale Algebra über  $K = \text{GF}(q)$  mit  $A/\text{rad}A \cong \text{GF}(q^m)$ , wobei  $\dim_K A = hm$  mit natürlicher Zahl  $h$ . Darüber hinaus sei  $C_0$  die Standardkette der Kettengeometrie  $\Sigma(K, A)$  und man nehme an, der Startblock  $B_0$  sei wie folgt gewählt:*

- (a)  $B_0 := C_0$ .
- (b)  $B_0 := C_0 \setminus \{A(1, 0)\}$ , für  $q > 2$ .
- (c)  $B_0 := C_0 \setminus \{A(1, 0), A(0, 1)\}$ , für  $q > 3$ .
- (d)  $B_0 := C_0 \setminus \{A(1, 0), A(0, 1), A(1, 1)\}$ , für  $q > 4$ .

Dies ergibt gemäß [34], Th. (4.1.2) ein  $3 - (s, k, \lambda_3)$ -divisibles Design mit

$$v = q^{hm} + q^{(h-1)m} \quad \text{und} \quad s = q^{(h-1)m}.$$

Die übrigen Parameter  $k$  und  $\lambda_3$  sind

$$\begin{array}{ll} k = q + 1, & \lambda_3 = 1, & \text{im Fall (a),} \\ k = q, & \lambda_3 = q - 2, & \text{im Fall (b),} \\ k = q - 1, & \lambda_3 = \frac{1}{2}(q - 2)(q - 3), & \text{im Fall (c),} \\ k = q - 2, & \lambda_3 = \frac{1}{6}(q - 2)(q - 3)(q - 4), & \text{im Fall (d).} \end{array}$$

Den Beweis dieses Satzes findet man in [34], Th. (4.3.4) u. Th. (4.4.2).

### 3.1.4.5 Untersuchung zur Block-Zerlegbarkeit

Untersuchen wir diese und die im vorigen Abschnitt konstruierten DDs nun hinsichtlich ihrer inneren Struktur, erhalten wir folgenden Satz.

**Theorem 3.1.39** *Sei  $D$  ein nach Theorem 3.1.32 oder 3.1.38 erstelltes 3-DD, dann ist  $D$  block-zerlegbar.*

*Beweis:* Sei  $D$  ein DD, welches nach 3.1.32 oder 3.1.38 mit Hilfe einer Kettengeometrie erstellt wurde. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie oben. Da sowohl  $\mathbb{D}(\text{GF}(q))$  als auch  $A$  (nach Voraussetzung) lokale Algebren sind, gilt in beiden Fällen nach ([34], (3.4.8) und (3.4.9) (a)), dass je drei transversale Punkte von  $\mathbb{P}(K)$  auf genau einer Kette der verwendeten Kettengeometrie liegen. Es gilt  $k \geq 3$ , also ist jeder Block eine Teilmenge von jeweils genau einer Kette. Man kann daher die Blockmenge gemäß der Zugehörigkeit der Blöcke zu den verschiedenen Ketten partitionieren. Wegen der 3-Transitivität der projektiven Gruppe auf den Punkten einer jeden einzelnen Kette<sup>32</sup>, ist die Inzidenzstruktur (nach Hughes [40]), die aus den Punkten einer Kette und der zugehörigen Blockmenge besteht, jeweils ein 3-Design.  $\square$

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die in den Beispielen 1 bis 4 vorgestellten DDs ausnahmslos mindestens fast-block-zerlegbar, in den meisten Fällen sogar block-zerlegbar sind, wobei die inneren Designs jeweils  $t$ -Designs waren.

Mit der Konstruktion, welche im nächsten Abschnitt vorgestellt wird, können wir nicht nur gezielt block-zerlegbare DDs erzeugen, sondern sie lässt uns unter anderem zu jedem beliebigen divisiblen Design  $D$  ein größeres finden, welches zu  $D$  paarweise isomorphe innere DDs besitzt.

---

<sup>32</sup>Dies folgt z.B. aus [34], Th. (3.4.7).

## 3.2 Eine weitere Konstruktion divisibler Designs

Nun beschreiben wir eine Möglichkeit, divisible Designs ausgehend von einem gegebenen divisiblen Design zu konstruieren. Wir nennen dies Konstruktion (A).<sup>33</sup>

Diese Konstruktion ähnelt in der Verwendung von projektiven und affinen Räumen der im vorigen Abschnitt vorgestellten Konstruktionsmethode von A.G. Spera und R.-H. Schulz, ohne jedoch Speras Konstruktionsprinzip (vgl. Proposition 3.1.3) anzuwenden. Da wir bei der Wahl des Starter-Designs dessen Automorphismengruppen nicht berücksichtigen müssen, ja sogar vollkommen frei in unserer Wahl sind, ist es mit Konstruktion (A) möglich, divisible Designs zu konstruieren, die wir mit den im vorigen Abschnitt vorgestellten Mitteln nicht konstruieren könnten. Zu jedem DD, welches durch diese im vorigen Abschnitt dargestellten Mittel konstruiert wurde, kann mit Konstruktion (A) ein isomorphes DD erstellt werden. Dazu muss das Starter-Design geeignet gewählt sein, was jedoch, wie wir sehen werden, immer möglich ist (s. Bemerkung 3.2.20 und das Beispiel auf S. 83).

Durch rekursive Anwendung von Konstruktion (A) sind wir in der Lage, ganze Serien block-zerlegbarer divisibler Designs zu erzeugen. Dabei spielt die Wahl des Starter-Designs zunächst eine untergeordnete Rolle, da wir bei geeigneter Anfangskonstruktion mit jedem beliebigen Starter-Design eine solche Serie erhalten. Mit einer solch geeigneten Anfangskonstruktion erhalten wir ein block-zerlegbares DD, dessen innere Designs paarweise isomorph zum Starter-Design sind. Dies kann von Vorteil sein, wenn man beispielsweise gezielt block-zerlegbare DDs konstruieren möchte, dessen innere Designs bestimmte Eigenschaften aufweisen (z.B.  $t$ -balanciert zu sein, mit  $t \neq 2$  oder mit eigener innerer Strukturierung).

Wir beschäftigen uns außerdem mit der Wirkung unterschiedlicher Starter-Designs. Da wir zunächst ausschließlich 2-balancierte DDs behandeln werden, sich jedoch viele der verwendeten Argumente auch für  $t$ -balancierte DDs mit  $t \neq 2$  anwenden lassen, widmen wir uns der Frage, unter welchen Umständen mit einem  $t$ -balancierten Starter-Design durch Konstruktion (A) ein  $t$ -DD erzeugt werden kann. Anschließend betrachten wir die Wirkung von Starter-Designs, welche jeweils zusätzliche strukturelle Eigenschaften aufweisen.

### 3.2.1 Konstruktion (A)

Die Konstruktion wird in verschiedene Teile untergliedert, wobei jeder mit einem kurzen Überblick beginnt. Die folgende einfache Proposition wird während

---

<sup>33</sup>Da dies die erste von ursprünglich zwei verschiedenen Konstruktionen war, wurde diese Bezeichnung gewählt und nun beibehalten.

der Konstruktion wiederholt angewandt werden.

**Proposition 3.2.1** (i) Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein gegebenes divisibles Design und  $\hat{\mathcal{P}}$  eine Menge mit  $|\mathcal{P}| = |\hat{\mathcal{P}}|$ . Sei  $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$  eine Bijektion.

Wir definieren  $\hat{P}$  als unsere neue Punktmenge,  $\hat{B} := \delta(B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}$  als neue Blöcke und  $\hat{\mathcal{B}} := \{\hat{B} | B \in \mathcal{B}\}$  als Blockmenge. Darüber hinaus definieren wir  $\delta([P]) := \{\delta(Q) \in \mathcal{P} | Q \sim P\}$  für alle  $P \in \mathcal{P}$  als die Menge  $\hat{S}$  unserer neuen Punktklassen. Dann ist  $\hat{D} := (\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{S})$  ein zu  $D$  isomorphes divisibles Design. Wir nennen  $\hat{D}$  ein durch  $D$  induziertes divisibles Design auf der Punktmenge  $\hat{\mathcal{P}}$ .

(ii) Sei  $G$  eine Automorphismengruppe von  $D$ , dann ist  $\hat{G} := \delta G \delta^{-1}$  eine Automorphismengruppe von  $\hat{D}$ .

Dieses Ergebnis ist offensichtlich, daher geben wir hier nur eine kurze Beweisskizze von Teil (i) an:  $\hat{D}$  und dessen Elemente  $\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{B}}$  und  $\hat{S}$  sind derart definiert, dass die Inzidenzrelation von  $D$  eine solche auf  $\hat{D}$  induziert, weshalb durch die Bijektion  $\delta$  ein Isomorphismus von  $D$  auf  $\hat{D}$  induziert wird.

*Das Starter-Design und die Wahl eines geeigneten projektiven Raumes:*

Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ , ein gegebenes  $2-(s, k, \lambda)$ -divisibles Design mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken und sei  $\mathfrak{P} = \text{PG}(n, q)$  ein projektiver Raum der Dimension  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  über dem endlichen Körper  $\text{GF}(q)$ ,  $q$  Primzahlpotenz. Die Parameter  $n$  und  $q$  müssen so geeignet gewählt sein, dass wir „genug“ Hyperebenen in  $\mathfrak{P}$  zur Verfügung haben, das heißt, es muss  $(q^{n+1} - 1)(q - 1)^{-1} \geq v$  erfüllt sein.

Wir nennen  $D$  das *Starter-Design* von Konstruktion (A). Man beachte, dass wir den Fall  $s = 1$  nicht ausgeschlossen haben. In diesem Fall ist  $D$  ein  $(v, k, \lambda)$ -Design.

(a) *Einbettung von  $D$  in  $\mathfrak{P}$*

Sei

$$\hat{\mathcal{P}} \subseteq \{H \mid H \text{ Hyperebene von } \mathfrak{P}\} \text{ mit } |\hat{\mathcal{P}}| = v$$

eine Menge geeigneter Hyperebenen von  $\mathfrak{P}$ , das heißt, sie erfüllt Bedingung (\*) (s.u.) und  $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$  sei eine Bijektion. Analog zu den Definitionen in Proposition 3.2.1 erhalten wir ein divisibles Design  $\hat{D} := (\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{S})$  isomorph zu  $D$ , dessen Punkte<sup>34</sup> Hyperebenen von  $\mathfrak{P}$  sind.

---

<sup>34</sup>Von nun an sind mit der Bezeichnung „Punkte“ immer Punkte eines divisiblen Designs gemeint, andernfalls werden wir die Punkte genauer spezifizieren oder es ergibt sich vollkommen klar aus dem Zusammenhang, welche Art Punkte gemeint ist.

Um mit Konstruktion (A) divisible Designs herstellen zu können, müssen wir sicherstellen, dass die Hyperebenen der Menge  $\hat{\mathcal{P}}$  so gewählt sind, dass

$$(*) \quad \dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \hat{\mathcal{B}}$$

erfüllt ist.

**Bemerkung 3.2.2** Vorausgesetzt, wir haben  $n$  und  $q$  während der Definition des projektiven Raumes  $\mathfrak{P}$  geeignet gewählt, ist es immer möglich, Bedingung  $(*)$  zu erfüllen:

- (i) Wählen wir  $\mathfrak{P}$  als projektive Gerade über  $\text{GF}(q)$ , ist jeder Punkt von  $\hat{\mathcal{P}}$  ein einzelner projektiver Punkt und der Schnitt über die Punkte eines jeden Blockes aus  $\hat{\mathcal{B}}$  ist leer. Damit ist Bedingung  $(*)$  erfüllt.<sup>35</sup>
- (ii) Wählen wir  $\mathfrak{P}$  mit  $n > 1$ , dann können wir  $\hat{\mathcal{P}}$  als eine Menge von Hyperebenen mit  $H \cap H' = \mathcal{H}$  für alle  $H, H' \in \hat{\mathcal{P}}$  wählen, wobei  $\mathcal{H}$  ein  $(n - 2)$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathfrak{P}$  ist. Auch hier ist Bedingung  $(*)$  stets erfüllt.

Es ist also immer möglich, eine geeignete Menge  $\hat{\mathcal{P}}$  zu bestimmen!

- (b) *Einbettung von  $\mathfrak{P}$  in  $\overline{\mathfrak{P}} := \text{PG}(n + 1, q)$  und Bestimmung eines durch  $\hat{D}$  induzierten divisible Designs auf einer Punktmenge, die aus affinen Hyperebenen von  $\text{AG}(n + 1, q)$  besteht*

Sei  $\mathfrak{P}$  in  $\overline{\mathfrak{P}} = \text{PG}(n + 1, q)$  eingebettet. Wir identifizieren  $\mathfrak{P}$  mit einer Hyperebene von  $\overline{\mathfrak{P}}$ . Nun betrachten wir den affinen Raum  $\mathcal{A} := \text{AG}(n + 1, q)$ , dessen projektiver Abschluss  $\overline{\mathfrak{P}}$  ist und dessen uneigentliche Hyperebene  $\mathfrak{P}$  ist. Für alle affinen Hyperebenen  $A \in \mathcal{A}$  bezeichne  $\bar{A}$  jeweils den zugehörigen projektiven Abschluss. Wir wählen einen beliebigen affinen Punkt in  $\mathcal{A}$  und bezeichnen ihn als unseren Ursprung  $\mathcal{O}$ .

Nun definieren wir

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} := \{A \mid A \text{ Hyperebene von } \mathcal{A} \text{ mit } \bar{A} \cap \mathfrak{P} \in \hat{\mathcal{P}} \text{ und } \mathcal{O} \in A\}$$

und eine Bijektion  $\delta' : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$ ,  $H \mapsto A$  mit  $\bar{A} \cap \mathfrak{P} = H$ .

Wir erhalten wieder mit Definitionen, analog zu denjenigen in Proposition 3.2.1, ein divisible Design  $\tilde{D}_{\mathcal{O}} := (\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}, \tilde{S}_{\mathcal{O}})$  isomorph zu  $\hat{D}$ , dessen Punkte Hyperebenen von  $\mathcal{A}$  sind.

---

<sup>35</sup>Mit  $\dim \emptyset := (-1)$ .

(c) *Konstruktion divisibler Designs isomorph zu  $\tilde{D}_O$  durch Translation der Punkte*

Sei  $\mathcal{T}$  die Translationsgruppe von  $\mathcal{A}$ . Für jede Translation  $t \in \mathcal{T}$  und jede Hyperebene  $A \in \mathcal{A}$  existiert ein eindeutiges Bild  $A^t$ . Daher ist  $\hat{t} : \tilde{\mathcal{P}}_O \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_O^t$  mit  $\tilde{\mathcal{P}}_O^t = \{A^t \mid A \in \tilde{\mathcal{P}}_O\}$  für jedes  $t \in \mathcal{T}$  eine bijektive Abbildung, die wir der Einfachheit halber auch mit „ $t$ “ bezeichnen.

Sei ein beliebiges  $t \in \mathcal{T}$  gegeben. Mit analogen Definitionen zu denen in Proposition 3.2.1 erhalten wir ein divisibles Design  $\tilde{D}_O^t := (\tilde{\mathcal{P}}_O^t, \tilde{\mathcal{B}}_O^t, \tilde{\mathcal{S}}_O^t)$  isomorph zu  $\tilde{D}_O$ , dessen Punkte ebenfalls Hyperebenen von  $\mathcal{A}$  sind.

Da die Translation  $t$  beliebig gewählt war, erhalten wir  $\tilde{D}_O \cong \tilde{D}_O^t$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  und folglich  $\tilde{D}_O^t \cong \tilde{D}_O^{t'}$  für alle  $t, t' \in \mathcal{T}$ .

(d) *Konstruktion eines neuen divisiblen Designs*

Wir definieren

$$\tilde{\mathcal{P}} := (\tilde{\mathcal{P}}_O)^T, \quad \tilde{\mathcal{B}} := (\tilde{\mathcal{B}}_O)^T \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{S}} := (\tilde{\mathcal{S}}_O)^T$$

mit

$$(\tilde{\mathcal{P}}_O)^T := \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \tilde{\mathcal{P}}_O^t, \quad (\tilde{\mathcal{B}}_O)^T := \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \tilde{\mathcal{B}}_O^t \quad \text{und} \quad (\tilde{\mathcal{S}}_O)^T := \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \tilde{\mathcal{S}}_O^t.$$

Wir werden zeigen, dass  $\tilde{D} := (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{S}})$  ein divisibles Design ist.

Die Menge  $(\tilde{\mathcal{P}}_O)^{id} \subset \tilde{\mathcal{P}}$  kann mit der Punktmenge von  $\tilde{D}_O$  identifiziert werden und das gleiche gilt für die Blockmenge  $(\tilde{\mathcal{B}}_O)^{id}$ , sowie die Menge  $(\tilde{\mathcal{S}}_O)^{id}$ . Da  $\tilde{D}_O$  ein divisibles Design ist, sind die Punkte in  $v/s$  Punktclassen  $[P]$  mit  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_O$  partitioniert. Wir können die Menge  $\tilde{\mathcal{S}}$  auch in folgender Form beschreiben:

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{[P]^T \mid P \in \tilde{\mathcal{P}}_O\}$$

mit

$$[P]^T = \{Q^T \mid Q \sim P\}.$$

Jede neue Punktclass  $[P]^T$  besteht aus der vollen Parallelenklasse jedes Elements der zugehörigen alten Punktclass  $[P]$ . Da die Elemente von  $\tilde{\mathcal{P}}_O$  in paarweise verschiedenen Parallelenklassen des affinen Raumes  $\mathcal{A}$  sind, bedingen die neuen Punktclassen eine Partition von  $\tilde{\mathcal{P}}$  und es gilt  $|\tilde{\mathcal{P}}| = v \cdot q$ . Wir erhalten  $v/s$  neue Punktclassen mit jeweils  $s \cdot q$  Punkten. Nach Voraussetzung gilt  $2 \leq \frac{v}{s}$ , weshalb dies auch für  $\frac{v \cdot q}{s \cdot q}$  gilt und Bedingung (4) aus Definition 1.1.2 erfüllt ist.

Um zu zeigen, dass jeder Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  aus genau  $k$  transversalen Punkten besteht, bemerken wir zuerst, dass zu je zwei Punkten  $P, Q \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$  mit  $[P] \neq [Q]$  und  $t \in \mathcal{T}$  die zugehörigen Bilder  $P^t$  und  $Q^t$  in unterschiedlichen neuen Punktklassen liegen, das heisst, es gilt  $[P]^t \neq [Q]^t$  für alle  $t \in \mathcal{T}$  und folglich  $[P]^{\mathcal{T}} \neq [Q]^{\mathcal{T}}$ .

Da  $|B| = |B^t|$  für jedes  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  und alle  $t \in \mathcal{T}$  gilt und jeder Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  eine transversale  $k$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$  ist, besteht jeder Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  aus genau  $k$  transversalen Punkten.

Bis auf die dritte, sind alle Bedingungen der Definition eines divisiblen Designs (Definition 1.1.2) gezeigt. Bevor wir unsere nächste Argumentation beginnen, werden wir ein Lemma zeigen, welches wir dafür benötigen werden.

**Lemma 3.2.3** *Seien  $\tilde{\mathcal{P}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$  wie oben definiert. Dann gilt*

$$\dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \hat{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow |\mathcal{T}_B| = |\mathcal{T}_{B'}| \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}}.$$

*Beweis:* Wir beginnen mit einigen Beobachtungen.

(1) Konstruktionsbedingt haben wir

$$\dim \bigcap_{P \in B_{\mathcal{O}}} P = \dim \bigcap_{P \in B} P + 1$$

für alle  $B_{\mathcal{O}} \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  und den jeweils zugehörigen Block  $B \in \hat{\mathcal{B}}$ .

(2) Jeder Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  ist das Bild eines eindeutig bestimmten Blockes aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  unter einer Translation  $t \in \mathcal{T}$ . Da durch die Abbildung mittels einer Translation die Dimension affiner Unterräume nicht verändert wird, haben wir

$$\dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B^t} P$$

für alle  $t \in \mathcal{T}$  und jeden Block  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ .

(3) Die Translationsgruppe  $\mathcal{T}$  operiert regulär auf der Menge der affinen Punkte von  $\mathcal{A}$ , daher können wir jeden affinen Unterraum  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mathcal{T}_A$ , seinem Stabilisator in  $\mathcal{T}$ , identifizieren und erhalten

$$|\mathcal{T}_A| = |\{p \mid p \in A\}| = q^{\dim A}.$$

(4) Jede Translation, die einen affinen Unterraum  $A$  fest lässt, fixiert ebenfalls jeden affinen Unterraum, der  $A$  vollständig enthält. Jeder Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  besteht aus Punkten paarweise verschiedener Parallelenklassen und jede Translation lässt jeweils jede Parallelenklasse fest, das heisst, keine Translation permutiert die Punkte eines Blockes. Also gilt

$$\mathcal{T}_B = \mathcal{T}_{P_1, \dots, P_k} = \mathcal{T} \bigcap_{P \in B} P$$

für alle  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$  und  $P_i \in B$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Nun können wir schließen

$$\begin{aligned} & \dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \hat{\mathcal{B}} \\ \Leftrightarrow (1) & \dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}} \\ \Leftrightarrow (2) & \dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}} \\ \Leftrightarrow (3) & |\mathcal{T} \bigcap_{P \in B} P| = |\mathcal{T} \bigcap_{P \in B'} P| \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}} \\ \Leftrightarrow (4) & |\mathcal{T}_B| = |\mathcal{T}_{B'}| \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

□

Es bleibt zu untersuchen, ob für je zwei transversale Punkte aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  genau  $\tilde{\lambda}$  ( $\tilde{\lambda} \in \mathbb{N}$ ) Blöcke aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  existieren, die diese zwei Punkte enthalten.

Seien zwei beliebige Punkte  $P, Q \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit  $[P] \neq [Q]$  gegeben. Konstruktionsbedingt existieren Punkte  $P_{\mathcal{O}}, Q_{\mathcal{O}} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$  mit  $P \parallel P_{\mathcal{O}}$  und  $Q \parallel Q_{\mathcal{O}}$ , wobei  $\parallel$  die Parallelitätsrelation des affinen Raumes  $\mathcal{A}$  bezeichnet.

Da  $P$  und  $Q$  nicht-parallele Hyperebenen von  $\mathcal{A}$  sind, ist ihr Schnitt nicht leer. Also existiert ein  $t \in \mathcal{T}$  mit  $P_{\mathcal{O}}^t = P$  und  $Q_{\mathcal{O}}^t = Q$ . Solch eine Translation ist ein Automorphismus der Inzidenzstruktur  $\mathcal{D}$ , da sie eine bijektive, inzidenzerhaltende (in beide Richtungen) Abbildung ist, die Punkte auf Punkte und Blöcke auf Blöcke abbildet. Daher entspricht die Anzahl der mit  $P$  und  $Q$  gleichzeitig inzidierenden Blöcke, derjenigen, die sowohl  $P_{\mathcal{O}}$  als auch  $Q_{\mathcal{O}}$  enthalten. Wir bestimmen nun diese Anzahl.  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{O}}$  ist ein  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design, daher haben wir genau  $\lambda$  Blöcke aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ , die  $P_{\mathcal{O}}$  und  $Q_{\mathcal{O}}$  gemeinsam enthalten. Wir wissen also  $\tilde{\lambda} \geq \lambda$ .

Da jede Translation die Parallelenklassen fest lässt, bildet keine Translation einen Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  auf einen anderen Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  ab und kein Block

aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ , der nicht beide Punkte  $P_{\mathcal{O}}$  und  $Q_{\mathcal{O}}$  enthält, kann durch eine Translation auf einen Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  abgebildet werden, der mit diesen beiden Punkten inzidiert. Jeder Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$ , der sowohl  $P_{\mathcal{O}}$  als auch  $Q_{\mathcal{O}}$  enthält, muss also ein Bild genau eines der oben erwähnten  $\lambda$  Blöcke aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  sein. Wir müssen daher die Anzahl der Bilder dieser Blöcke bestimmen, die sowohl  $P_{\mathcal{O}}$ , als auch  $Q_{\mathcal{O}}$  enthalten.

Sei  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$  ein Block mit  $P_{\mathcal{O}}, Q_{\mathcal{O}} \in B$ . Jede Translation, die  $P_{\mathcal{O}}$  und  $Q_{\mathcal{O}}$  fest lässt, aber dies nicht mit dem ganzen Block  $B$  tut, das heisst,  $t \in \mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}} / \mathcal{T}_B$ , liefert einen Block  $B^t \neq B$  mit  $P_{\mathcal{O}}, Q_{\mathcal{O}} \in B^t$ . Man beachte,  $\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}, Q_{\mathcal{O}}} = \mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}}$  folgt aus der Argumentation, die im Beweis von Lemma 3.2.3 Teil (4) angegeben ist, was auch  $\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}} \supseteq \mathcal{T}_{\bigcap_{P \in B} P} = \mathcal{T}_B$  liefert, da  $P_{\mathcal{O}}, Q_{\mathcal{O}} \in B$  vorausgesetzt ist. Da  $\mathcal{T}_B$  eine Untergruppe von  $\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}}$  ist, erhalten wir  $[\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}} : \mathcal{T}_B] = |\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}}| / |\mathcal{T}_B|$  verschiedene, geeignete Bilder von  $B$ . Wir haben  $B$  beliebig gewählt, folglich erhalten wir insgesamt, mit analoger Argumentation für die anderen  $\lambda - 1$  Blöcke

$$\tilde{\lambda} := \sum_{i=1}^{\lambda} |\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}}| / |\mathcal{T}_{B_i}| = |\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}}| \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{1}{|\mathcal{T}_{B_i}|}$$

mit  $B_i \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ ,  $P_{\mathcal{O}}, Q_{\mathcal{O}} \in B_i$  für alle  $i = 1, \dots, \lambda$  verschiedene Blöcke, die  $P_{\mathcal{O}}$  und  $Q_{\mathcal{O}}$  gemeinsam enthalten und dasselbe gilt für  $P$  und  $Q$ .

Soll  $\tilde{D}$  ein divisibles Design sein, muss diese Zahl für alle transversalen Punktepaare übereinstimmen. Die Dimension des Schnitts zweier nicht-paralleler affiner Hyperebenen ist immer gleich, was nach dem Beweis von Lemma 3.2.3 Teil (3) eine konstante Ordnung der zugehörigen Stabilisatoren in  $\mathcal{T}$  bedingt. Diese Zahl kann also nur variieren, wenn  $\sum_{i=1}^{\lambda} |\mathcal{T}_{B_i}|^{-1}$  für transversale Punktepaare differiert. Wir haben Bedingung (\*) vorausgesetzt, weshalb dies nach Lemma 3.2.3 nicht vorkommen kann. Wir erhalten also

$$\tilde{\lambda} = \lambda |\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}} \cap Q_{\mathcal{O}}}| / |\mathcal{T}_B|.$$

Zu je zwei transversalen Punkten aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  haben wir demnach dieselbe Anzahl  $\tilde{\lambda}$  von Blöcken aus  $\tilde{\mathcal{B}}$ , die diese Punkte gemeinsam enthalten. Damit ist  $\tilde{D}$  ein divisibles Design.

Wir könnten eigentlich auch ohne Bedingung (\*) auskommen, um ein divisibles Design zu erhalten, da wir lediglich sicherstellen müssen, dass  $\sum_{i=1}^{\lambda} |\mathcal{T}_{B_i}|^{-1}$  für jedes transversale Punktepaar denselben Wert besitzt. Aber da es sehr viel praktikabler ist, Bedingung (\*) bei der Einbettung von  $D$  in  $\mathfrak{P}$  zu berücksichtigen, beschränken wir uns auf die Verwendung dieser stärkeren Bedingung.

Nun berechnen wir den Wert von  $\tilde{\lambda}$ . Wir definieren

$$d := \dim \bigcap_{P \in B} P \quad \text{mit } B \in \hat{\mathcal{B}}.$$

Mit (\*), Teil (1) und Teil (2) des Beweises von Lemma 3.2.3 erhalten wir

$$\dim \bigcap_{P \in B} P = d + 1 \quad \text{für jedes } B \in \tilde{\mathcal{B}}.$$

Wegen  $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$  bekommen wir mit Lemma 3.2.3 und Teil (3) und (4) seines Beweises

$$|\mathcal{T}_{P \cap Q}|/|\mathcal{T}_B| = q^{n-1}/q^{d+1} = q^{n-1-(d+1)} = q^{n-2-d}$$

verschiedene Bilder für jedes  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ .

Daher haben wir  $\tilde{\lambda} := \lambda \cdot q^{n-2-d}$  Blöcke aus  $\tilde{\mathcal{B}}$ , die  $P$  und  $Q$  gemeinsam enthalten.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Theorem 3.2.4** Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein gegebenes  $(s, k, \lambda)$ -DD und  $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  wie oben durch Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  erstellt. Dann ist  $\tilde{D}$  ein  $(\tilde{s}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$ -divisibles Design mit  $\tilde{s} := s \cdot q$ ,  $\tilde{k} := k$  und  $\tilde{\lambda} := \lambda \cdot q^{n-2-d}$ , mit  $\tilde{v} := v \cdot q$  Punkten und  $\tilde{b} := b \cdot q^{n-d}$  Blöcken, wobei  $d$  wie oben definiert ist und  $n$  und  $q$  geeignet<sup>36</sup> gewählt sind.

**Bemerkung 3.2.5** Jedes durch Konstruktion (A) erstellte DD besitzt offensichtlich eine durch die Translationsgruppe des verwendeten affinen Raumes induzierte Automorphismengruppe  $T \cong \mathcal{T}/\text{Kern } \pi$ , wobei  $\pi$  der Kern der Operation von  $\mathcal{T}$  auf  $\tilde{\mathcal{P}}$  ist.

Wir werden sehen, dass sich Konstruktion (A) in gewisser Weise rekursiv anwenden lässt. Dazu wird das konstruierte DD  $\tilde{D}$  geeignet vorbereitet, was wir hier als dessen *Erweiterung* bezeichnen.

---

<sup>36</sup>(s. S. 65)

(e) Erweiterung des divisiblen Designs  $\tilde{D}$ , dessen Punkte affine Hyperebenen sind, zu einem divisiblen Design, dessen Punkte die zugehörigen projektiven Abschlüsse dieser Hyperebenen sind

Man entsinne sich, dass  $\overline{\mathfrak{P}}$  der projektive Abschluss des affinen Raumes  $\mathcal{A}$  ist und  $\mathfrak{P}$  seine uneigentliche Hyperebene. Wir definieren nun

$$\overline{\mathcal{P}} := \{H \mid H \text{ Hyperebene von } \overline{\mathfrak{P}} \text{ mit } H = \overline{P} \text{ für } P \in \tilde{\mathcal{P}}\}$$

und die Bijektion

$$\delta'' : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \overline{\mathcal{P}}, P \mapsto \overline{P}$$

wobei  $\overline{P}$  der projektive Abschluss von  $P$  ist. Wieder verwenden wir Proposition 3.2.1 und erhalten mit analogen Definitionen ein divisibles Design  $\overline{D} := (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{S})$  isomorph zu  $\tilde{D}$ , dessen Punkte Hyperebenen von  $\overline{\mathfrak{P}}$  sind.

Nun stellt sich die Frage, ob es möglich ist, ein weiteres divisibles Design zu erhalten, indem wir von  $\overline{D}$  ausgehend, die Schritte (b) bis (d) von Konstruktion (A) wiederholen.

**Lemma 3.2.6** *Sei  $\overline{D}$  wie oben konstruiert. Dann ist*

$$(*) \quad \dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \overline{\mathcal{B}}$$

erfüllt.

*Beweis:*

(1) Konstruktionsbedingt haben wir

$$\dim \bigcap_{P \in B} P = \dim \bigcap_{\overline{P} \in \overline{\mathcal{B}}} \overline{P} = d + 1$$

jeweils für alle  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$  und ihre zugehörigen  $\overline{B} \in \overline{\mathcal{B}}$ .

(2) Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \bigcap_{P \in B} P &= \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}} \\ \Leftrightarrow \dim \bigcap_{\overline{P} \in \overline{\mathcal{B}}} \overline{P} &= \dim \bigcap_{\overline{P} \in \overline{\mathcal{B}'}} \overline{P} \quad \text{für alle } \overline{B}, \overline{B'} \in \overline{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

(3) Nach dem Beweis von Lemma 3.2.3 wissen wir

$$\begin{aligned} \dim \bigcap_{P \in B} P &= \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \hat{\mathcal{B}} \\ \Leftrightarrow \dim \bigcap_{P \in B} P &= \dim \bigcap_{P \in B'} P \quad \text{für alle } B, B' \in \tilde{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Da Bedingung (\*) erfüllt ist, ist das Lemma gezeigt.  $\square$

Nach Konstruktion und Lemma 3.2.6 wissen wir, dass  $\overline{D}$  ein divisibles Design ist, was Bedingung (\*') erfüllt, und dessen Punkte Hyperebenen des projektiven Raumes  $\overline{\mathfrak{P}} = \text{PG}(n+1, q)$  sind.

Dies entspricht der Situation von Konstruktion (A) nach Teil (a), mit Ausnahme des kleinen Unterschieds, dass wir nun einen projektiven Raum der Dimension  $n+1$  haben. Wenn wir  $n' := n+1$  und  $d' := d+1$  definieren, können wir die Schritte (b) bis (d) erneut ausführen und erhalten mit Satz 3.2.4 ein  $(s_2, k_2, \lambda_2)$ -divisibles Design mit  $s_2 := \bar{s} \cdot q$ ,  $k_2 := \bar{k} = k$  und  $\lambda_2 := \bar{\lambda} \cdot q^{n'-2-d'} = \bar{\lambda} \cdot q^{(n+1)-2-(d+1)}$  mit  $v_2 := \bar{v} \cdot q$  Punkten und  $b_2 := \bar{b} \cdot q^{n'-d'} = \bar{b} \cdot q^{n-d}$  Blöcken.

Im Allgemeinen erhalten wir daher folgenden Satz.

**Theorem 3.2.7** *Sei ein  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben. Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $(s \cdot q^i, k, \lambda \cdot q^{i(n-2-d)})$ -divisibles Design  $\tilde{D}^i$  mit  $v \cdot q^i$  Punkten und  $b \cdot q^{i(n-d)}$  Blöcken, wobei  $q, n, d \in \mathbb{N}$ ,  $q$  eine Primzahlpotenz,  $n, q$ , so gewählt, dass  $(q^{n+1} - 1)(q - 1)^{-1} \geq v$  gilt.*

*Beweis:* Sei ein  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben. Wir zeigten bereits, dass wir durch Konstruktion (A) ein divisibles Design erhalten, was (nach seiner Erweiterung, s.o.) alle Anforderungen für eine weitere Iteration von Konstruktion (A) erfüllt. Das divisible Design  $\tilde{D}^i$  sei das Design, welches wir nach der  $i$ -ten Iteration von Konstruktion (A) erhalten.

Wir zeigen nun die Formeln für die Parameter durch Induktion nach  $i$ .

(a) Nach Satz 3.2.4 gilt die Behauptung für  $i = 1$ , was den Induktionsbeginn liefert.

(b) Nehmen wir an, die Behauptung gilt für  $i = m$ .

Dann haben wir ein divisibles Design  $\tilde{D}^m$  mit den Parametern

$$s_m = s \cdot q^m, \quad k_m = k, \quad \lambda_m = \lambda \cdot q^{m(n-2-d)}, \quad v_m = v \cdot q^m \quad \text{und} \quad b_m = b \cdot q^{m(n-d)}.$$

(c) Sei  $i = m + 1$ . Nach Erweiterung von  $\tilde{D}^m$  analog zu Schritt (e) erhalten wir nach Satz 3.2.4 mit Konstruktion (A) (Schritte (b) bis (d)) ein divisibles Design  $\tilde{D}^{m+1}$  mit folgenden Parametern:

- $s_{m+1} = s_m \cdot q = s \cdot q^{m+1}$ ,
- $k_{m+1} = k$ ,
- $\lambda_{m+1} = \lambda_m \cdot q^{(n-2-d)} = \lambda \cdot q^{(m+1)(n-2-d)}$
- $v_{m+1} = v_m \cdot q = v \cdot q^{m+1}$ ,
- $b_{m+1} = b_m \cdot q^{(n-d)} = b \cdot q^{(m+1)(n-d)}$ .

Somit folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 3.2.8** Nach Bemerkung 3.2.2 ist es immer möglich Konstruktion (A) zu beginnen,

(i) mit  $\mathfrak{P} = \text{PG}(1, q)$  der projektiven Geraden über  $\text{GF}(q)$ ,  $q$  eine Primzahlpotenz. In diesem Fall müssen wir sicherstellen, dass  $q \geq v - 1$  gilt, und wir erhalten<sup>37</sup> immer  $d = (-1)$ .

(ii) mit  $\mathfrak{P} = \text{PG}(n, q)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ,  $q$  eine Primzahlpotenz, indem  $\hat{\mathcal{P}}$  als Menge von Hyperebenen gewählt wird, deren Schnitt ein  $(n-2)$ -dimensionaler Unterraum ist. Da wir  $q + 1$  solcher Hyperebenen in  $\mathfrak{P}$  ([37], Th. 3.1.2, (i), S. 66) haben, müssen wir wiederum sicherstellen, dass  $q \geq v - 1$  gilt und wir erhalten  $d = n - 2$ .

Jeder dieser Fälle liefert das folgende Korollar.

**Korollar 3.2.9** *Sei ein  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben. Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  und jede Primzahlpotenz  $q$  mit  $q \geq v - 1$  ein  $(s \cdot q^i, k, \lambda)$ -divisibles Design mit  $v \cdot q^i$  Punkten und  $b \cdot q^{2i}$  Blöcken.*

### 3.2.1.1 Untersuchung zur Block-Zerlegbarkeit

Nun untersuchen wir, ob beziehungsweise welche Designs  $\tilde{D}^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  blockzerlegbar sind. Zunächst erfolgt jedoch eine Definition, sowie eine Bemerkung zur fast Block-Zerlegbarkeit.

**Definition 3.2.10** Seien  $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$  und  $\mathcal{T}$  wie oben definiert.

Wir definieren  $\tilde{\mathcal{T}}$  als Menge von Repräsentanten der Nebenklassen  $t \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}$  mit  $t \in \mathcal{T}$ .

---

<sup>37</sup>Man entsinne sich, dass wir  $\dim \emptyset = (-1)$  definieren.

**Bemerkung 3.2.11** Konstruktionsbedingt ist jedes durch Konstruktion (A) erstellte divisible Design  $\tilde{D}^1$  fast-block-zerlegbar, mit inneren divisiblen Designs, die paarweise isomorph zum Starter-Design  $D$  sind, mehr noch, es besitzt eine Wurzel  $\tilde{D}_O$  und Gruppe  $\tilde{T}$ .

**Lemma 3.2.12** Sei  $\tilde{D}^1$  ein wie oben durch Konstruktion (A) konstruiertes divisible Design, bei gegebenem divisiblen Design  $D$  als Starter Design.  $\tilde{D}^1$  ist genau dann block-zerlegbar mit  $|\tilde{T}|$  inneren divisiblen Designs  $\tilde{D}_O^t$  mit  $t \in \tilde{T}$ , die paarweise isomorph zu  $D$  sind, genauer,  $\tilde{D}^1$  besitzt eine Wurzel  $\tilde{D}_O$  und Gruppe  $\tilde{T}$ , wenn zusätzlich zu Bedingung (\*) auch noch Bedingung

$$(**) \quad \dim \bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = \dim \bigcap_{P \in B} P = d \quad \text{mit } B \in \hat{\mathcal{B}}$$

gilt.

Bevor wir den Beweis von Lemma 3.2.12 beginnen, zeigen wir folgendes Lemma, welches wir für den Beweis des obigen Lemmas benötigen werden.

**Lemma 3.2.13** Seien  $\tilde{\mathcal{P}}_O$ ,  $\hat{\mathcal{P}}$  und  $\hat{\mathcal{B}}$  wie oben definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim \bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P &= \dim \bigcap_{P \in B} P = d \quad \text{für alle } B \in \hat{\mathcal{B}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_O} &= \mathcal{T}_B \quad \text{für alle } B \in \tilde{\mathcal{B}}_O. \end{aligned}$$

*Beweis:* Wiederum einige Beobachtungen:

(1) Es gilt

$$\dim \bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = \dim \bigcap_{P \in B} P \Leftrightarrow \bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = \bigcap_{P \in B} P \quad \text{für alle } B \in \hat{\mathcal{B}},$$

da  $\bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P \subseteq \bigcap_{P \in B} P$  für jedes  $B \in \hat{\mathcal{B}}$  gilt.

(2) Konstruktionsbedingt erhalten wir

$$\bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = \bigcap_{P \in B} P \Leftrightarrow \bigcap_{P \in \tilde{\mathcal{P}}_O} P = \bigcap_{P \in B_O} P \quad \text{für jedes } B_O \in \tilde{\mathcal{B}}_O$$

und den zugehörigen  $B \in \hat{\mathcal{B}}$ .

(3) Mit einer analogen Argumentation zu Teil (3) und (4) des Beweises von Lemma 3.2.3, und da alle Punkte von  $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$  den affinen Punkt  $\mathcal{O}$  gemeinsam haben, erhalten wir schließlich

$$\bigcap_{P \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} P = \bigcap_{P \in B} P \Leftrightarrow \mathcal{T} \bigcap_{P \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} P = \mathcal{T} \bigcap_{P \in B} P \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} = \mathcal{T}_B \quad \text{für alle } B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}.$$

□

*Beweis von Lemma 3.2.12:*

„ $\Rightarrow$ “

Sei (\*\*) erfüllt. Wir wissen  $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}})^{\mathcal{T}} = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^t = \bigcup_{t \in \tilde{\mathcal{T}}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^t$ .

Zuerst müssen wir zeigen

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^t \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^{t'} = \emptyset \quad \text{für alle } t, t' \in \tilde{\mathcal{T}} \text{ mit } t' \neq t.$$

Angenommen, es existieren ein Block  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  und  $t, t' \in \tilde{\mathcal{T}}$  mit  $t' \neq t$ , so dass gilt  $B^t \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^t \cap \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^{t'}$ .

Dies impliziert  $B^t \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^{t'}$ , folglich existiert ein Block  $B' \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  mit  $B^t = B'^{t'}$ . Da jede Translation die Parallelenklassen fest lässt, erhalten wir  $B = B'$  und damit  $B^t = B'^{t'}$  und  $B = B'^{t'^{-1}}$ . Somit gilt  $t't^{-1} \in \mathcal{T}_B = \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}$  (Lemma 3.2.13), was  $t' \in t \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}$  ( $\mathcal{T}$  ist abelsche Gruppe) liefert und folglich den Widerspruch  $t = t'$ , da es in  $\tilde{\mathcal{T}}$  genau einen Repräsentanten jeder Nebenklasse gibt.

Infolgedessen haben wir

$$\tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{t \in \tilde{\mathcal{T}}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^t.$$

In Teil (c) von Konstruktion (A) haben wir gezeigt, dass  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}^t = (\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}^t, \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}^t, \tilde{S}_{\mathcal{O}}^t)$  für jedes  $t \in \mathcal{T}$  ein divisibles Design ist, was isomorph zu  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}$  und somit auch isomorph zu  $D$  ist.  $\tilde{D}_1$  ist daher block-zerlegbar mit  $|\tilde{\mathcal{T}}|$  inneren divisiblen Designs  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}^t$  mit  $t \in \tilde{\mathcal{T}}$ , die isomorph zu  $D$  sind, also kann  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}$  als eine Wurzel mit Gruppe  $\tilde{\mathcal{T}}$  angesehen werden.

„ $\Leftarrow$ “

Angenommen, es existiert ein Block  $B \in \hat{\mathcal{B}}$  mit

$$\dim \bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P \neq \dim \bigcap_{P \in B} P.$$

Mit Lemma 3.2.13 haben wir für ein  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$

$$\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} \neq \mathcal{T}_B$$

und, da  $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_0} \subseteq \mathcal{T}_B$  für jedes  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_0$  gilt, erhalten wir

$$\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_0} \subsetneq \mathcal{T}_B.$$

Folglich existiert ein  $t \in \mathcal{T}_B \setminus \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_0}$  und daher ein  $t' \in \tilde{\mathcal{T}}$  ( $t' \neq id$ ) mit  $t \in t'\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{P}}_0}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}_0^t = \tilde{\mathcal{B}}_0^{t'}$ . Da  $t'$  nicht alle Punkte fest lässt, existiert ein Block  $B' \in \tilde{\mathcal{B}}_0$  mit  $B' \neq B^{t'}$ . Daher gilt  $\tilde{\mathcal{B}}_0^{t'} \neq \tilde{\mathcal{B}}_0$ , aber  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_0^{t'} \cap \tilde{\mathcal{B}}_0$  und

$$\tilde{\mathcal{B}} \neq \bigcup_{t \in \tilde{\mathcal{T}}} \tilde{\mathcal{B}}_0^t.$$

Somit erhalten wir mit Konstruktion (A) kein block-zerlegbares divisibles Design  $\tilde{D}^1$ , dessen innere divisible Designs  $\tilde{D}_0^t$  mit  $t \in \tilde{\mathcal{T}}$  sind.  $\square$

**Lemma 3.2.14** *Sei  $\hat{\mathcal{P}}$  mit Hilfe einer der beiden in Bemerkung 3.2.2 angegebenen Methoden definiert, dann ist Bedingung (\*\*) erfüllt.*

*Beweis:*

1. Fall: Sei  $\hat{\mathcal{P}}$  als Teilmenge der Punktmenge von  $\text{PG}(1, q)$  definiert. Dann haben wir

$$\bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = \emptyset = \bigcap_{P \in B} P \quad \text{für alle } B \in \hat{\mathcal{B}},$$

was

$$\dim \bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = (-1) = \dim \bigcap_{P \in B} P \quad \text{für alle } B \in \hat{\mathcal{B}}$$

liefert.

2. Fall: Sei  $\hat{\mathcal{P}}$  wie in Bemerkung 3.2.2 Teil (ii) definiert.

Da  $\dim \mathcal{H} = n - 2$  gilt und der Schnitt von je zwei Punkten aus  $\hat{\mathcal{P}}$  nach Konstruktion gleich  $\mathcal{H}$  ist, wissen wir

$$\bigcap_{P \in \hat{\mathcal{P}}} P = \mathcal{H} = \bigcap_{P \in C} P \quad \text{für jede Teilmenge } C \subseteq \hat{\mathcal{P}}, \quad |C| \geq 2.$$

Daher folgt die Behauptung.  $\square$

Es ist also immer möglich, die Punktmenge eines Designs so in  $\mathfrak{P}$  einzubetten, dass sowohl Bedingung (\*) als auch (\*\*) erfüllt ist. Nach Lemma 3.2.12 erhält man daher mit Konstruktion (A) ein block-zerlegbares DD, dessen innere Designs paarweise isomorph zum Starter-Design sind. Nun stellt sich die Frage, ob die DDs, welche durch weitere Anwendungen von Konstruktion (A) entstehen, diese Eigenschaft ebenfalls besitzen. Die Antwort lautet „nein“. Folgendes Lemma liefert den Grund, warum Bedingung (\*\*) nicht mehr erfüllt wird.

**Lemma 3.2.15** Sei  $\tilde{D}^i, i \in \mathbb{N}$ , ein block-zerlegbares divisibles Design, welches wie oben durch Konstruktion (A), ausgehend von einem gegebenen divisiblen Design  $D^{i-1}$  konstruiert ist<sup>38</sup>. Und sei  $\overline{D}^i = (\overline{\mathcal{P}}_i, \overline{\mathcal{B}}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$  das zugehörige erweiterte (nach Teil (e) von Konstruktion (A)) block-zerlegbare divisible Design. Dann gilt

$$\dim \bigcap_{P \in \overline{\mathcal{P}}_i} P < \dim \bigcap_{P \in B} P \quad \text{für alle } B \in \overline{\mathcal{B}}_i.$$

*Beweis:* Nach dem Beweis von Lemma 3.2.6 Teil (1) wissen wir

$$\dim \bigcap_{P \in B} P = d + 1 \quad \text{für alle } B \in \overline{\mathcal{B}}_i.$$

Nach Konstruktion enthält die Punktmenge  $\tilde{\mathcal{P}}_i$  von  $\tilde{D}_i$  verschiedene Elemente derselben Parallelenklasse. Also gilt  $\bigcap_{P \in \tilde{\mathcal{P}}_i} P = \emptyset$ . Der projektive Abschluss paralleler affiner Hyperebenen schneidet sich im selbem Unterraum der un-eigentlichen Hyperebene. Daher erhalten wir konstruktionsbedingt

$$\dim \bigcap_{P \in \overline{\mathcal{P}}_i} P = \dim \bigcap_{P \in \tilde{\mathcal{P}}_i} P \leq d,$$

was

$$\dim \bigcap_{P \in \overline{\mathcal{P}}_i} P \leq d < d + 1$$

liefert. □

Die folgende Proposition ist nun naheliegend.

**Proposition 3.2.16** Seien  $\tilde{D}^i$  ein block-zerlegbares divisibles Design, welches wie oben durch Konstruktion (A), ausgehend von einem gegebenen divisiblen Design  $D^{i-1}$  konstruiert ist<sup>39</sup> und  $\tilde{D}^j, j \in \mathbb{N}, j > i$  ein durch einige Iterationen dieser Konstruktion entstandenes divisibles Design. Dann bilden die Translate von  $\tilde{D}^{j-1}$  keine Block-Zerlegung von  $\tilde{D}^j$ .

*Beweis:*  $\tilde{D}^i$  ist block-zerlegbar, also erfüllt  $D^{i-1}$  nach Lemma 3.2.12 Bedingung (\*\*), aber nach Lemma 3.2.15 gilt diese Bedingung bei dem erweiterten divisiblen Design  $\overline{D}^i$ , welches der Ausgangspunkt für die nächste Iteration ist, nicht mehr. Daher kann das konstruierte divisible design  $\tilde{D}^{i+1}$  nicht block-zerlegbar mit paarweise zu  $\tilde{D}^i$  isomorphen inneren divisiblen Designs sein (nach Lemma 3.2.12).

<sup>38</sup>Bei  $i = 1$  bezeichne  $D^0$  das Starter-Design.

<sup>39</sup>(S. Fußnote zu Proposition 3.2.15.)

Da bei jeder Iteration die Dimension des Schnittes über die Punkte immer konstant gleich  $d$  ist, der Schnitt über die Punkte der Blöcke jedoch ansteigt, ist Bedingung (\*\*) in keiner der folgenden Iterationen erfüllt. Daher kann keines der divisiblen Designs  $\tilde{D}^j$  block-zerlegbar mit paarweise zu  $\tilde{D}^{j-1}$  isomorphen inneren divisiblen Designs sein.  $\square$

Nun fassen wir zusammenfassen:

**Korollar 3.2.17** *Sei ein  $(s, k, \lambda)$ -divisibles Design  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben. Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $(s \cdot q^i, k, \lambda \cdot q^{i(n-2-d)})$ -divisibles Design  $\tilde{D}^i$  mit  $v \cdot q^i$  Punkten und  $b \cdot q^{i(n-d)}$  Blöcken mit  $q, n, d \in \mathbb{N}$ ,  $q$  eine Primzahlpotenz,  $q, n$  groß genug,  $d$  geeignet, wobei*

- (i)  $\tilde{D}^1$  ein block-zerlegbares divisibles Design ist, dessen innere divisible Designs paarweise isomorph zu  $D$  sind, jedoch
- (ii)  $\tilde{D}^j$  mit  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j > 1$  keine Block-Zerlegung erlaubt derart, dass die inneren divisiblen Designs paarweise isomorph zu  $D$  sind.

*Beweis:* Nach Lemma 3.2.14 ist es immer möglich, eine geeignete Menge  $\hat{\mathcal{P}}$  zu finden. Nach Satz 3.2.7 und Lemma 3.2.12 erhalten wir Behauptung (i). Teil (ii) folgt mit Proposition 3.2.16.  $\square$

In den folgenden beiden Abschnitten beschäftigen wir uns mit der Wirkung spezieller Starter-Designs. Nachdem wir uns zunächst  $t$ -balancierten Starter-Designs gewidmet haben, werden wir Starter Designs verwenden, die zusätzliche Eigenschaften aufweisen, wie beispielsweise selbst block-zerlegbar zu sein.

Wir werden unter anderem feststellen können, dass ein block-zerlegbares Starter-Design eine Block-Zerlegung bei dem konstruierten DD induziert, so dass es doch möglich ist, mit Konstruktion (A) Familien block-zerlegbarer DDs zu erhalten (s. Satz 3.2.25). Allerdings sind die inneren Designs dieser Block-Zerlegungen nicht mehr isomorph zum Starter-Design, wie es bei den bisher behandelten block-zerlegbaren DDs der Fall gewesen ist. Aus diesem Grund wurde das obige Ergebnis (Korollar 3.2.17) explizit festgehalten.

### 3.2.2 Verwendung $t$ -balancierter Starter-Designs

Bis jetzt haben wir uns bezüglich Konstruktion (A) nur mit 2-balancierten divisiblen Designs beschäftigt. Es stellt sich nun die Frage, ob es möglich ist, mit Konstruktion (A) (fast) block-zerlegbare  $t$ -divisible Designs mit  $t > 2$  herzustellen. Naheliegend ist die Verwendung eines  $t$ -balancierten Starter Designs. Wegen Satz 1.1.3 ist dies auch 2-balanciert, weshalb wir durch Konstruktion (A) auf jeden Fall ein divisibles Design erhalten. Das nächste Lemma gibt

nun die Bedingungen an, unter denen ein solches Design auch  $t$ -balanciert ist.

**Lemma 3.2.18** *Sei ein  $t$ -divisibles Design  $D$ , mit  $t \geq 2$  gegeben und sei  $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  ein divisibles Design, welches wir durch Konstruktion (A) erhalten, wenn wir  $D$  als Starter-Design verwenden.  $\tilde{D}$  ist genau dann ein (fast) block-zerlegbares<sup>40</sup>  $t$ -divisibles Design mit zu  $D$  isomorpher Wurzel und Gruppe  $\mathcal{T}$ , wenn*

- (i) *die Elemente jeder transversalen  $t$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$  einen nicht-leeren affinen Schnitt besitzen und*
- (ii) *diese Schnitte paarweise dieselbe Dimension aufweisen (diese bezeichnen wir mit  $\tilde{d}_t$ ).*

*Beweis:* Sei  $D$  ein  $t$ -divisibles Design mit  $t \geq 2$  und  $\tilde{D}$  das divisible Design, welches wir durch Verwendung von Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  erhalten.<sup>41</sup> Die Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 3.2.18 seien durch die Elemente von  $\tilde{D}$  erfüllt.

In den Schritten (a) bis (c) von Konstruktion (A) (s. 3.2) ist es unerheblich, ob  $D$   $t$ -balanciert mit  $t = 2$  oder  $t > 2$  ist. Und dasselbe gilt für Schritt (d) bis zur Untersuchung zum Index. Diese führen wir daher an dieser Stelle durch:

Sei  $\{P_1, P_2, \dots, P_t\}$  eine beliebig gegebene transversale  $t$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Nach Konstruktion existieren Punkte  $P_{1\mathcal{O}}, P_{2\mathcal{O}}, \dots, P_{t\mathcal{O}}$  aus  $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} \subset \tilde{\mathcal{P}}$  mit  $P_1 || P_{1\mathcal{O}}, P_2 || P_{2\mathcal{O}}, \dots, P_t || P_{t\mathcal{O}}$ . Auch hier bezeichnet  $||$  die Parallelitätsrelation des affinen Raumes  $\mathcal{A}$ . Bedingung (i) (s.o) stellt die Existenz eines  $t' \in \mathcal{T}$  mit  $P_{1\mathcal{O}}^{t'} = P_1, P_{2\mathcal{O}}^{t'} = P_2, \dots, P_{t\mathcal{O}}^{t'} = P_t$  sicher. Analog zum 2-balancierten Fall (s. S. 71), reicht auch hier die Bestimmung der Anzahl der Blöcke, welche die Punkte  $P_{1\mathcal{O}}, P_{2\mathcal{O}}, \dots, P_{t\mathcal{O}}$  gemeinsam enthalten. Da hier ebenfalls jeder Block, der diese Punkte enthält, ein Bild unter einer Translation eines der  $\lambda$  Blöcke mit dieser Eigenschaft aus  $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$  ist, bestimmen wir die Anzahl solcher Blöcke mit analogen Überlegungen zum 2-balancierten Fall (s. S. 71) als

$$\tilde{\lambda} := \sum_{i=1}^{\lambda} |\mathcal{T}_{\{P_{1\mathcal{O}}, P_{2\mathcal{O}}, \dots, P_{t\mathcal{O}}\}}| / |\mathcal{T}_{B_i}|$$

mit  $B_i \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  und  $P_{1\mathcal{O}}, P_{2\mathcal{O}}, \dots, P_{t\mathcal{O}} \in B_i$  für alle  $i = 1, \dots, \lambda$ , was äquivalent ist zu

<sup>40</sup> $\tilde{D}$  ist genau dann block-zerlegbar, wenn Bedingung (\*\*) aus Lemma 3.2.12 erfüllt ist, ansonsten ist es fast-block-zerlegbar mit Wurzel  $D$  und Gruppe  $\mathcal{T}$ .

<sup>41</sup>Mit Bezeichnungen wie im 2-balancierten Fall.

$$\tilde{\lambda} = \lambda |\mathcal{T}_{P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{t_0}}| / |\mathcal{T}_B| \quad (15)$$

mit  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ , mit Lemma<sup>42</sup> 3.2.3 und einer analogen Argumentation zu Teil (4) des zugehörigen Beweises.

Damit  $\tilde{D}$  ein t-divisibles Design ist, muss dieser Wert für sämtliche transversalen t-Teilmengen von  $\tilde{\mathcal{P}}$  übereinstimmen. Da Lemma 3.2.3 gilt und wir Bedingung (\*) vorausgesetzt haben, ist die Ordnung der Stabilisatoren der Blöcke in  $\mathcal{T}$  paarweise identisch. Wir haben Bedingung (ii) (aus Lemma 3.2.18) vorausgesetzt, also ist auch die Ordnung der Stabilisatoren aller transversaler t-Teilmengen von  $\tilde{\mathcal{P}}$  paarweise identisch. Dies liefert einen konstanten Wert für  $\tilde{\lambda}$ . Damit ist  $\tilde{D}$  ein t-divisibles Design<sup>43</sup>.

Da sich  $\tilde{D}$  nach Konstruktion aus Translaten von  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}$  zusammensetzt und  $\tilde{D}_{\mathcal{O}} \cong D$  gilt, wissen wir, dass  $\tilde{D}$  mindestens fast-block-zerlegbar mit zu  $D$  isomorpher Wurzel und Gruppe  $\mathcal{T}$  ist. Lemmata 3.2.12 und 3.2.13 betreffen nicht den Index, können also auch hier entsprechend eingesetzt werden und wir schließen, dass  $\tilde{D}$  genau dann (wie behauptet) block-zerlegbar ist, wenn Bedingung (\*\*) aus Lemma 3.2.12 erfüllt ist.

Sei nun ein (fast) block-zerlegbares t-divisibles Design  $\tilde{D}$  mit zu  $D$  isomorpher Wurzel und Gruppe  $\mathcal{T}$  gegeben, was durch Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  erstellt wurde.

Bedingung (i) erhalten wir durch folgende Beobachtung: Zu jeder transversalen t-Teilmenge aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  existieren genau  $\tilde{\lambda}$  Blöcke, die diese t Punkte enthalten, da  $\tilde{D}$  t-balanciert ist. Die Punkte jedes Blockes besitzen einen nicht-leeren affinen Schnitt, da sich ihre Urbilder in  $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$  mindestens im affinen Punkt  $\mathcal{O}$  schneiden. Damit besitzt jede Teilmenge von Punkten eines Blocks ebenfalls einen nicht-leeren affinen Schnitt.

Um die zweite Bedingung (ii) zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an, dass also zwei transversale t-Teilmengen aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  existieren, deren Punkte sich in affinen Unterräumen unterschiedlicher Dimension schneiden. Diese affinen Unterräume besitzen Stabilisatoren von verschiedener Ordnung in  $\mathcal{T}$ , wohingegen als Folge von Bedingung (\*) alle  $\mathcal{T}_{B_i}$ ,  $B_i \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$  von konstanter Ordnung sind. Bei der Konstruktion der Inzidenzstruktur  $\tilde{D}$  bestimmen wir den Parameter  $\tilde{\lambda}$  mit Hilfe von Gleichung (15) auf Seite 81, welche für die beiden

---

<sup>42</sup>Lemma 3.2.3 gilt, da es in diesem nicht darauf ankommt, ob die Inzidenzstruktur  $\tilde{D}$  2-balanciert ist und wir Bedingung (\*) vorausgesetzt haben.

<sup>43</sup>Die Ordnung der Punktmenge sowie der Punktklassen stimmt jeweils mit dem 2-balancierten Fall überein. Daher braucht Bedingung (4) aus Definition 1.1.2 nicht erneut untersucht werden.

oben betrachteten  $t$ -Teilmengen unterschiedliche Werte liefert. Daher ist  $\tilde{D}$  kein  $t$ -divisibles Design, ein Widerspruch. Also muss Bedingung (ii) erfüllt werden.  $\square$

Die nächste Proposition liefert Informationen über die Parameter eines  $t$ -divisiblen Designs  $\tilde{D}$ , welches wie oben durch Konstruktion (A) mit  $t$ -divisiblen Starter-Design  $D$  erstellt wurde. Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung von Satz 3.2.4.

**Proposition 3.2.19** *Sei ein (fast) block-zerlegbares  $t$ -divisibles Design  $\tilde{D}$ ,  $t \geq 2$ , mit Wurzel  $D$  und Gruppe  $\mathcal{T}$  gegeben, was durch Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  erstellt wurde.*

*Ist  $D$  ein  $t - (s, k, \lambda)$ -divisibles Design mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken, dann ist  $\tilde{D}$  ein  $t - (\tilde{s}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$ -divisibles Design mit  $\tilde{s} := s \cdot q$ ,  $\tilde{k} := k$  und  $\tilde{\lambda} := \lambda \cdot q^{\tilde{d}_t - d - 1}$ , was  $\tilde{v} := v \cdot q$  Punkte und  $\tilde{b} := b \cdot q^{\tilde{d}_t - d + 1}$  Blöcke besitzt, wobei  $d$  und  $\tilde{d}_t$  wie oben definiert sind.*

*Beweis:* Im Beweis des vorigen Lemmas haben wir bereits festgestellt, dass wir lediglich bei der Berechnung des Parameters  $\tilde{\lambda}$  aufpassen müssen. Die anderen Parameter entsprechen denen, die für den 2-balancierten Fall in Satz 3.2.4 angegeben sind.<sup>44</sup> Um den Wert von  $\tilde{\lambda}$  zu bestimmen, müssen uns die Ordnungen der Stabilisatoren eines Blocks aus  $\tilde{\mathcal{B}}$ , sowie einer beliebigen transversalen  $t$ -Teilmenge  $Y$  von  $\tilde{\mathcal{P}}$  bekannt sein.<sup>45</sup> Ebenso wie im 2-balancierten Fall wissen wir<sup>46</sup>  $|\mathcal{T}_B| = q^{d+1}$  und wir bestimmen  $|\mathcal{T}_Y| = q^{\tilde{d}_t}$  was

$$\tilde{\lambda} = \lambda |\mathcal{T}_{P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_t}| / |\mathcal{T}_B| = \lambda q^{\tilde{d}_t} / q^{d+1} = \lambda q^{\tilde{d}_t - d - 1}$$

ergibt.  $\square$

Wann immer es möglich ist, Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 3.2.18 zu erfüllen, sind wir in der Lage, ein fast block-zerlegbares  $t$ -divisibles Design zu erzeugen. Für  $t = 2$  sind diese Bedingungen natürlich immer erfüllt, da sich je zwei nicht-parallele affine Hyperebenen (die Punkte von  $\tilde{\mathcal{P}}$  sind affine Hyperebenen) in affinen Unterräumen derselben Dimension schneiden. Dies bestätigt unser Ergebnis im 2-balancierten Fall.

<sup>44</sup>Mit Ausnahme der Anzahl der Blöcke  $b$ , die vom Wert von  $\tilde{\lambda}$  abhängig ist (s. S.5).

<sup>45</sup>Mit Bedingungen (\*) und (ii) wissen wir, dass diese Werte jeweils für jeden Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  und jede transversale  $t$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$  gelten.

<sup>46</sup>Man entsinne sich, wir bezeichnen  $d = \dim \bigcap_{P \in B} P$  (mit  $B \in \hat{\mathcal{B}}$ ) und  $\tilde{d}_t = \dim \bigcap_{P \in Y} P$  (mit  $Y$  eine beliebige transversale  $t$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$ ).

**Der Fall  $t=3$ :**

Betrachten wir nun den Fall  $t = 3$ . Wir wissen, dass sich je drei paarweise nicht-parallele Hyperebenen eines 3-dimensionalen affinen Raumes, deren Schnitte mit der uneigentlichen Hyperebene nicht aus drei kopunktalen Geraden bestehen, genau in einem affinen Punkt schneiden. Folglich sind Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 3.2.18 erfüllt, wenn wir das Starter-Design  $D$  so in  $\text{PG}(2, q)$  einbetten, dass je drei Punkte von  $\hat{\mathcal{P}}$  (also Geraden in  $\text{PG}(2, q)$ ) ein Dreieck bilden. Im folgenden Beispiel wird eine Möglichkeit angegeben, wie diese Forderung erfüllt werden kann.

*Beispiel:*

Sei ein  $3 - (s, k, \lambda)$ -divisibles Design  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben und sei  $\mathfrak{P} = \text{PG}(2, q)$ ,  $q$  ungerade Primzahlpotenz mit  $q + 1 \geq v$ . Wir betrachten nun einen nicht-singulären Kegelschnitt  $C$  in  $\mathfrak{P}$  und definieren  $\hat{\mathcal{P}}$  mit  $|\hat{\mathcal{P}}| = v$  als Teilmenge der Menge aller Tangenten von  $C$ :

$$\hat{\mathcal{P}} \subseteq \{H \mid H \text{ Tangente von } C\}.$$

Jeder Kegelschnitt in  $\text{PG}(2, q)$  besteht aus  $q + 1$  Punkten. Da wir  $q + 1 \geq v$  vorausgesetzt haben, ist die Menge der Tangenten groß genug für unsere Konstruktion und, da  $q$  ungerade ist, sind keine drei Tangenten von  $C$  kopunktal. Je drei von ihnen bilden daher ein Dreieck und Bedingungen (i) und (ii) sind erfüllt. Also ist die durch Konstruktion (A) erstellte Inzidenzstruktur  $\tilde{D}$  nach Lemma 3.2.18 ein 3-divisibles Design mit den in Proposition 3.2.19 angegebenen Parametern.

Nun bleibt also lediglich die Bestimmung der Werte von  $d$  und  $\tilde{d}_t$ . Da  $k \geq t \geq 3$  ( $D$  ist 3-balanciert) gilt, ist der Schnitt über die Punkte eines jeden Blocks aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  leer (ebenso wie der Schnitt über alle Punkte von  $\hat{\mathcal{P}}$ , was Bedingung (\*\*)) liefert). Wie haben daher  $d = (-1)$ . Und es gilt  $\tilde{d}_t = 0$ , da sich je drei Punkte aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  genau in einem affinen Punkt schneiden. Schließlich bemerken wir noch, dass  $\tilde{D}$  block-zerlegbar ist, da Bedingung (\*\*)) gilt.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass  $\tilde{D}$  isomorph zu einem in Beispiel 2 auf Seite 42 durch C. Cerroni und R.-H. Schulz [15] konstruierten divisiblen Design sein kann, falls wir ein geeignetes Starter-Design  $D$  verwenden. Wir erhalten ein solches beispielsweise, indem wir die 3-Regularität von  $\text{PGO}(3, q)$  auf den Punkten eines Kegelschnitts nutzen. Wählen wir denselben Kegelschnitt wie Cerroni/Schulz und definieren die zu den Tangenten in der Menge  $\Omega'$  (s. S. 43) gehörigen Punkte als Startblock, erhalten wir mit Hughes [40] ein solch geeignetes Design  $D$ .

Analog können wir zu allen in den Beispielen 1 bis 3 dargestellten DDs jeweils isomorphe DDs mit Konstruktion (A) erzeugen.

Verallgemeinert können wir folgendes festhalten:

**Bemerkung 3.2.20** Sei  $D$  ein DD, welches unter Verwendung von Speras Konstruktionsprinzip (3.1) mit der Konstruktionsmethode von Schulz und Spera (s. Beispiel 3.1.1) oder einer erweiterten Fassung wie in den Beispielen 3.1.2 oder 3.1.3 konstruiert wurde. Dann ist es möglich, mit Konstruktion (A) ein dazu isomorphes DD zu erstellen.

Dies folgt sofort, da mit der Verwendung einer Kollineationsgruppe, die auf einer Menge in der verwendeten uneigentlichen Hyperebene mehrfach transitiv (oder homogen) operiert, die Herstellung eines geeigneten Starter-Designs (mit Hughes [40]) sichergestellt ist. Die Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 3.2.18 sind bei den oben genannten Konstruktionen erfüllt (siehe Konstruktionsbeschreibungen in den entsprechenden Abschnitten), daher ist dies bei der Durchführung von Konstruktion (A) ebenso der Fall.

### Block-Zerlegung in $t$ -divisible Designs

Die Frage nach der Existenz (fast) block-zerlegbarer divisibler Designs, deren innere Designs  $t$ -balanciert sind, ist leicht beantwortet. Beginnt man Konstruktion (A) mit einem  $t$ -balancierten Starter-Design, erhält man ein solches divisibles Design, da die inneren Designs isomorph zum Starter-Design sind. Wir sind also in der Lage, für jedes  $t \in \mathbb{N}$  für welches ein  $t$ -divisibles Design existiert, ein (fast) block-zerlegbares divisibles Design zu konstruieren, dessen innere Designs  $t$ -balanciert sind.

### 3.2.3 Konstruktion (A) mit strukturierten Starter-Designs

Im folgenden Abschnitt werden wir uns damit beschäftigen, inwieweit innere Strukturierungen des Starter-Designs durch Konstruktion (A) auf das konstruierte DD übertragen werden bzw. welche inneren Strukturierungen bei diesem induziert werden. Dabei können wir feststellen, dass Konstruktion (A) ein vielfältig einsetzbares Verfahren ist, mit dem nicht nur block-zerlegbare DDs produziert werden können.

Zunächst halten wir fest, dass nicht nur eine auf der Punktmenge des Starter-Designs existierende Partition eine ebensolche auf der Punktmenge des durch Konstruktion (A) erstellten DDs induziert, sondern dass dies ebenso für Partitionen der Blockmenge gilt.

**Lemma 3.2.21** Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein gegebenes DD, welches als Starter Design<sup>47</sup> für Konstruktion (A) verwendet wird und  $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  das erstellte DD.

- Existiert eine Partition  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_m)$ ,  $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Punktmenge  $\mathcal{P}$ , dann wird durch diese eine Partition  $(\mathcal{P}_1^T, \mathcal{P}_2^T, \dots, \mathcal{P}_m^T)$ ,  $\mathcal{P}_i^T \subseteq \mathcal{P}^T = \tilde{\mathcal{P}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Punktmenge  $\tilde{\mathcal{P}}$  von  $\tilde{D}$  induziert.
- Existiert eine Partition  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_m)$ ,  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Blockmenge  $\mathcal{B}$ , dann wird durch diese eine Partition  $(\mathcal{B}_1^T, \mathcal{B}_2^T, \dots, \mathcal{B}_m^T)$ ,  $\mathcal{B}_i^T \subseteq \mathcal{B}^T = \tilde{\mathcal{B}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , der Blockmenge  $\tilde{\mathcal{B}}$  von  $\tilde{D}$  induziert.

*Beweis:* Die Argumentation zum ersten Teil verläuft analog zu derjenigen, die in Konstruktion (A) Teil (d) bezüglich der Punktklassen gegeben wurde, da bei dieser lediglich die Eigenschaft der Punktklassen, eine Partition der Punktmenge zu sein, verwendet wurde.

Für den zweiten Teil stellen wir zunächst fest, dass die Punktmenge der Blöcke in  $\mathcal{B}$  paarweise verschieden sind, da  $D$  als einfach vorausgesetzt wurde. Die Punkte von  $D$  befinden sich in paarweise unterschiedlichen Parallelenklassen affiner Hyperebenen von  $\tilde{D}$ . Daher kann kein Block aus  $\mathcal{B}$  durch eine Translation  $t \in \mathcal{T}$  auf einen anderen Block aus  $\mathcal{B}$  abgebildet werden. Wir erhalten daher  $B_i^t \neq B_j^{t'}$  für alle  $B_i, B_j \in \mathcal{B}$  mit  $i \neq j$  und  $t, t' \in \mathcal{T}$  mit  $t \neq t'$ , denn sonst gäbe es  $t' \circ t^{-1} \in \mathcal{T}$ , so dass  $B_j^{t' \circ t^{-1}} = B_i$  gälte. Da die Orbits der Blöcke aus  $\mathcal{B}$  unter  $\mathcal{T}$  also paarweise disjunkt sind, muss dies auch für die zu einer Partition von  $\mathcal{B}$  gehörigen Mengen von Orbits gelten.  $\square$

Da, wie eben erwähnt, die Orbits der Blöcke aus  $\mathcal{B}$  unter  $\mathcal{T}$  disjunkt sind, folgt sofort:

**Lemma 3.2.22** Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie in Lemma 3.2.21 gegeben und seien  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_m)$ ,  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ,  $i = 1, \dots, m$  und  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \dots, \mathcal{B}'_l)$ ,  $\mathcal{B}'_j \subseteq \mathcal{B}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , zwei verschiedene Partitionen der Blockmenge  $\mathcal{B}$ , d.h. es gibt Indizes  $i \in \{1, \dots, m\}$ , so dass für alle  $j \in \{1, \dots, l\}$  gilt  $\mathcal{B}_i \neq \mathcal{B}'_j$ .

Dann sind die nach Lemma 3.2.21 induzierten Partitionen  $(\mathcal{B}_1^T, \mathcal{B}_2^T, \dots, \mathcal{B}_m^T)$  und  $(\mathcal{B}'_1^T, \mathcal{B}'_2^T, \dots, \mathcal{B}'_l^T)$  ebenfalls verschieden und es gibt  $\mathcal{B}_i^T, \mathcal{B}'_j^T$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$ , für die  $\mathcal{B}_i^T \neq \mathcal{B}'_j^T$  gilt.

---

<sup>47</sup>Wir identifizieren im Folgenden  $D$  mit dem bei Konstruktion (A) zugehörigen isomorphen eingebetteten DD  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}$  bzw.  $(\tilde{D}_{\mathcal{O}})^{id}$ , verzichten also der Einfachheit halber auf Indizes und Exponenten. Falls keine Missverständnisse zu befürchten sind, werden wir dies auch im Folgenden tun, ohne jedes Mal erneut darauf hinzuweisen.

Nun werden wir die „Wirkung“ verschiedener Starter-Designs mit unterschiedlichen, in Kapitel 2 eingeführten inneren Strukturierungen betrachten. Wir beginnen mit der für diese Arbeit wichtigsten Struktur, einem block-zerlegbaren DD.

### 3.2.3.1 Das Starter-Design sei block-zerlegbar

Wir bezeichnen jeweils mit  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  das Starter-Design und mit  $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  das durch Konstruktion (A) erhaltene DD, mit  $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^T$ ,  $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^T$  und  $\tilde{S} = S^T$ .

$D$  sei *block-zerlegbares*  $(s, k, \lambda)$  – DD mit  $v$  Punkten,  $b$  Blöcken und inneren DDs  $D_i = (\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i, S_i)$  mit  $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ,  $S_i \subseteq S$  für alle  $i = 1, \dots, m$ .

Dann können wir problemlos zeigen:

**Lemma 3.2.23** *Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie oben gegeben. Dann ist  $\tilde{D}$*

- *block-zerlegbar mit  $m$  inneren Designs  $\tilde{D}_i := (\tilde{\mathcal{P}}_i, \tilde{\mathcal{B}}_i, \tilde{S}_i)$ , wobei  $\tilde{\mathcal{P}}_i := \mathcal{P}_i^T \subseteq \tilde{\mathcal{P}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_i := \mathcal{B}_i^T \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$  und  $\tilde{S}_i := S_i^T \subseteq \tilde{S}$  für alle  $i = 1, \dots, m$  gilt.*

*Gilt zusätzlich für alle  $i = 1, \dots, m$  Bedingung*<sup>48</sup>

$$(**') \quad \dim \bigcap_{P \in \mathcal{P}_i} P = \dim \bigcap_{P \in \mathcal{B}} P = d \quad \text{mit } B \in \mathcal{B}_i,$$

*dann lässt sich jedes der  $\tilde{D}_i$  zerlegen und  $\tilde{D}$  ist daher auch noch*

- *block-zerlegbar mit  $\sum_{i=1}^m |\tilde{\mathcal{T}}_i|$  inneren Designs  $\tilde{D}_{it} := (\tilde{\mathcal{P}}_{it}, \tilde{\mathcal{B}}_{it}, \tilde{S}_{it})$ , wobei  $\tilde{\mathcal{P}}_{it} := \mathcal{P}_i^t \subseteq \tilde{\mathcal{P}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_{it} := \mathcal{B}_i^t \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$  und  $\tilde{S}_{it} := S_i^t \subseteq \tilde{S}$  mit  $t \in \tilde{\mathcal{T}}_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$  gilt. Dabei sei  $\tilde{\mathcal{T}}_i$  jeweils eine Menge von Repräsentanten der Nebenklassen  $t\mathcal{T}_{\mathcal{P}_i}$  ( $t \in \mathcal{T}$ ).*

*Beweis:*  $\tilde{D}$  ist nach Satz 3.2.4 ein DD. Beschränken wir uns während der Betrachtung der Konstruktion von  $\tilde{D}$  auf die Behandlung der einzelnen inneren Designs von  $D$ , so wissen wir nach Abschnitt 3.2.1, dass zu jedem der  $D_i$  ein DD  $D_i^T = (\mathcal{P}_i^T, \mathcal{B}_i^T, S_i^T)$  konstruiert wird, welches, falls Bedingung (\*\*') gilt, selbst ebenfalls block-zerlegbar ist (nach Lemma 3.2.12). Dabei sind die inneren Designs jeweils von der Form  $(\mathcal{P}_i^t, \mathcal{B}_i^t, S_i^t)$ , mit  $t \in \tilde{\mathcal{T}}_i$ .

Da das Starter-Design  $D$  nach Voraussetzung block-zerlegbar ist, bilden die Blockmengen der inneren Designs  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  eine Partition seiner Blockmenge  $\mathcal{B}$ . Nach Lemma 3.2.21 induziert diese ein Partition

<sup>48</sup>Diese Bedingung entspricht Bedingung (\*\*), ist hier nur jeweils auf die einzelnen inneren Designs von  $D$  bezogen.

$(\mathcal{B}_1^T, \mathcal{B}_2^T, \dots, \mathcal{B}_m^T)$  von  $\tilde{\mathcal{B}}$  mit  $\mathcal{B}_i^T \subset \mathcal{B}^T = \tilde{\mathcal{B}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Die Teile dieser Partition sind jedoch gerade die Blockmengen der DDs  $D_i^T$ . Da nach Voraussetzung

$$\bigcup_{i=1, \dots, m} \mathcal{P}_i = \mathcal{P}$$

gilt, wissen wir, es gilt auch

$$\bigcup_{i=1, \dots, m} \mathcal{P}_i^T = \mathcal{P}^T.$$

Durch eine entsprechende Überlegung zu den Punktklassen erhalten wir insgesamt die erste der beiden Behauptungen.

Um die zweite zu beweisen, müssen wir noch zeigen, dass die Blockmengen der  $\tilde{D}_{it}$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $t \in \tilde{\mathcal{T}}_i$ ) eine Partition von  $\tilde{\mathcal{B}}$  ergeben, die Vereinigung der einzelnen Punktmengen der  $\tilde{D}_{it}$  die Punktmenge  $\tilde{\mathcal{P}}$  bildet und dies ebenso entsprechend für die Punktklassen gilt.

Da wir nun Bedingung (\*\*') für alle  $i = 1, \dots, m$  voraussetzen, bilden die Blockmengen der  $\tilde{D}_{it}$  nach Lemma 3.2.12 jeweils eine Partition der Blockmenge des zugehörigen DDs  $\tilde{D}_i$ , die ihrerseits wiederum die Blockmenge von  $\tilde{D}$  partitionieren. Insgesamt bilden also die Blockmengen der  $\tilde{D}_{it}$  eine Partition von  $\tilde{\mathcal{B}}$ .

Die Vereinigung der Punktmengen der  $\tilde{D}_{it}$  ergibt jeweils die Punktmenge des zugehörigen DDs  $\tilde{D}_i$ . Da deren Vereinigung die Punktmenge von  $\tilde{D}$  ergibt, gilt dies auch für die Vereinigung aller Punktmengen  $\tilde{\mathcal{P}}_{it}$ . Völlig analog erhält man auch die Behauptung für die entsprechenden Punktklassen. Nach Lemma 3.2.12 erhalten wir zu jedem „Starter-Design“  $D_i$  jeweils  $|\tilde{\mathcal{T}}_i|$  verschiedene innere Designs, also insgesamt  $\sum_{i=1}^m |\tilde{\mathcal{T}}_i|$ .  $\square$

**Bemerkung 3.2.24** (a) Die zwei in Lemma 3.2.23 angegebenen Zerlegungen sind verschieden, da  $\mathcal{B}_i^t \neq \mathcal{B}_i^T$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und alle  $t \in \mathcal{T}$  gilt. Angenommen, es gibt ein  $i$ , für das  $\mathcal{B}_i^t = \mathcal{B}_i^T$  ( $t \in \mathcal{T}$ ) gilt. Dann folgt  $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i^{T \circ t^{-1}} = \mathcal{B}_i^T$ . Die Blockmenge  $\mathcal{B}_i$  wird also von  $\mathcal{T}$  fest gelassen, was nur möglich ist, wenn  $\bigcap_{P \in B} P$  mit  $B \in \mathcal{B}_i$  den ganzen affinen Raum einnimmt. Da die Punkte jedoch echte affine Unterräume sind, kann das nicht passieren.

(b) Ausserdem stellen wir fest<sup>49</sup>:  $\tilde{\mathcal{B}}_i \cap \mathcal{B}^t = \tilde{\mathcal{B}}_{it}$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $t \in \mathcal{T}$ .

<sup>49</sup>Die Bezeichnungen entsprechen denjenigen in Lemma 3.2.23

Wir können also festhalten, dass ein durch Konstruktion (A) entstandenes DD  $\tilde{D}$  immer block-zerlegbar ist, falls das Starter-Design diese Eigenschaft hat. In Konstruktion (A) Teil (e) wird  $\tilde{D}$  isomorph auf  $\overline{D}$  abgebildet, welches als Starter-Design für die folgende Iteration verwendet wird. Wegen  $\tilde{D} \cong \overline{D}$  ist auch dieses block-zerlegbar und wir erhalten folglich mit jeder Iteration ein weiteres block-zerlegbares DD. Nach Korollar 3.2.17 wissen wir, dass man zu jedem gegebenen DD mit der ersten Durchführung von Konstruktion (A) ein block-zerlegbares DD erhalten kann, dessen innere Designs paarweise isomorph zum Starter-Design sind. Das bedeutet, bei jeder weiteren Iteration erhalten wir wieder ein block-zerlegbares DD (dessen innere Designs jedoch *nicht* isomorph zum jeweiligen Starter-Design sind).

Dies halten wir als Erweiterung von Satz 3.2.7 fest:

**Theorem 3.2.25** *Sei ein  $(s, k, \lambda)$ -DD  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben. Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein block-zerlegbares  $(s \cdot q^i, k, \lambda \cdot q^{i(n-2-d)})$ -DD  $\tilde{D}^i$  mit  $v \cdot q^i$  Punkten und  $b \cdot q^{i(n-d)}$  Blöcken, wobei  $q, n, d \in \mathbb{N}$ ,  $q$  eine Primzahlpotenz,  $n, q$ , so gewählt, dass  $(q^{n+1} - 1)(q - 1)^{-1} \geq v$  gilt.*

Man beachte, dass jede Block-Zerlegung des Starter-Designs, mindestens eine und bei geeigneter Konstruktion (so dass (\*\*') für alle inneren Designs gilt, z.B. s.u.) sogar zwei verschiedene Block-Zerlegungen des konstruierten DDs induziert. Ist zusätzlich Bedingung (\*\*) bei der Konstruktion erfüllt, so erhält man eine weitere Block-Zerlegung, wobei diese inneren Designs paarweise isomorph zum Starter-Design sind. Wir werden sehen, unabhängig von der Wahl des Starter-Designs ist es immer möglich, die Konstruktion so durchzuführen, dass sowohl Bedingung (\*\*') für alle inneren Designs, als auch Bedingung (\*\*) erfüllt ist. Im nachfolgenden „Exkurs zu  $\mathfrak{P} = \text{PG}(1, q)$ “ wird dies vorgeführt.

Allgemein kann man daher sagen:

**Lemma 3.2.26** *Sei ein DD  $D$  wie oben (mit (\*\*) und (\*\*')) gegeben, wobei es insgesamt  $z$  paarweise verschiedene Block-Zerlegungen besitze. Dann existiert ein DD  $\tilde{D}$  mit  $2z + 1$  paarweise verschiedenen Block-Zerlegungen.*

*Beweis:* Nach Lemma 3.2.23 wissen wir, dass durch eine Block-Zerlegung des Starter-Designs zwei Zerlegungen des durch Konstruktion (A) erhaltenen DDs  $\tilde{D}$  induziert werden, vorausgesetzt Bedingung (\*\*') ist für alle inneren Designs dieser Block-Zerlegung von  $D$  erfüllt. Nach Bemerkung 3.2.24 (a) sind diese beiden Zerlegungen verschieden. Nach Voraussetzung ist (\*\*') bei allen inneren Designs sämtlicher  $z$  Zerlegungen erfüllt, d.h. wir erhalten  $2z$  induzierte Block-Zerlegungen von  $\tilde{D}$ .

Wir zeigen, dass diese paarweise verschieden sind. Wegen Lemma 3.2.22 wissen wir, dass die nach dem ersten Teil von Lemma 3.2.23 induzierten Block-Zerlegungen in  $\tilde{D}$  paarweise verschieden sind, da die zugehörigen Block-Zerlegungen des Starter-Designs paarweise verschieden sind. Auch die im zweiten Teil von Lemma 3.2.23 beschriebenen Zerlegungen müssen paarweise unterschiedlich sein, da die zugrunde liegenden Blockmengen jeweils nicht gleich sind. Desweiteren kann keine der letzteren Zerlegungen mit einer der obigen (durch den 1. Teil von Lemma 3.2.23 induzierten) Zerlegungen übereinstimmen, da sonst der Fall  $\mathcal{B}_i^t = \mathcal{B}_j^T$  vorkommen würde, was nur möglich ist, wenn  $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_j$  gilt. Für  $\mathcal{B}_i^t = \mathcal{B}_i^T$  erhalten wir jedoch mit der Argumentation von Bemerkung 3.2.24 (a) einen Widerspruch. Somit erhalten wir also  $2z$  paarweise verschiedene Block-Zerlegungen. Keine dieser Zerlegungen von  $\tilde{\mathcal{B}}$  enthält Teile mit  $|\mathcal{B}|$  Elementen. Daher kann keine dieser Zerlegungen mit der durch Konstruktion (A) erhaltenen Block-Zerlegung übereinstimmen, dessen innere Designs paarweise isomorph zum Starter-Design  $D$  sind (\*\*\*) gilt nach Voraussetzung). Insgesamt erhalten wir daher die Behauptung.  $\square$

Wir werden nun ein Beispiel betrachten, bei dem die oben genannten Bedingungen (\*\*\*) und (\*\*'\*) erfüllt sind.

*Kurzer Exkurs zu  $\mathfrak{P} = \text{PG}(1, q)$ :*

Wieder sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein gegebenes block-zerlegbares  $(s, k, \lambda)$ -DD mit  $v$  Punkten,  $b$  Blöcken. Es besitze  $z$  paarweise unterschiedliche Block-Zerlegungen.

Wir beginnen Konstruktion (A) mit der Einbettung von  $D$  in  $\mathfrak{P} = \text{PG}(1, q_1)$  ( $q_1 \geq v - 1$ , Primzahlpotenz). Nach Lemma 3.2.14 wird Bedingung (\*\*\*) bei einer Einbettung in eine projektive Gerade immer erfüllt, d.h. es gilt

$$(***) \quad \dim \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P = \dim \bigcap_{P \in \mathcal{B}} P = (-1) \quad \text{mit } \mathcal{B} \in \mathfrak{B}.$$

Da dies auch für jede beliebige Teilmenge von  $\mathcal{P}$  gilt, wird Bedingung (\*\*'\*) immer für alle Punktmengen und Blockmengen der inneren Designs von  $D$  erfüllt, wenn die Einbettung in eine projektive Gerade erfolgt.

Durch Konstruktion (A) erhalten wir demnach (Korollar 3.2.9 (für  $i = 1$ )) und Lemmata 3.2.12, 3.2.23) ein  $(s \cdot q_1, k, \lambda)$ -DD  $\tilde{D}$  mit  $\tilde{v} = v \cdot q_1$  Punkten, welches (nach Lemma 3.2.26)  $2z + 1$  verschiedene Block-Zerlegungen besitzt.

Nach Lemma 3.2.12 besitzt eine dieser Zerlegungen  $|\tilde{\mathcal{T}}|$  innere Designs, wobei  $|\tilde{\mathcal{T}}| = [\tilde{\mathcal{T}} : \mathcal{T}_{\mathcal{P}}] = q_1^2$  wegen  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = id$  und  $|\mathcal{T}| = q_1^2$  gilt. Diese inneren Designs sind paarweise isomorph zum Starter-Design und besitzen damit ebenfalls  $z$  verschiedene Block-Zerlegungen. Da der Stabilisator jeder mehr

als einelementigen Teilmenge von  $\mathcal{P}$  in  $\mathcal{T}$  ebenfalls gleich der Identität ist und damit dessen Index in  $\mathcal{T}$  gleich  $q_1^2$  ist, besitzen  $z$  der anderen Zerlegungen nach Lemma 3.2.23 jeweils genau  $m_i$  und die anderen  $z$  jeweils  $m_i \cdot q_1^2$  innere Designs, wobei  $m_i, i = 1, \dots, z$  jeweils der Anzahl der inneren Designs der  $z$  zugehörigen Block-Zerlegungen des Starter-Designs  $D$  entspricht.

Man kann das konstruierte DD jeweils wieder als Starter-Design für eine analoge Konstruktion mit Einbettung in eine projektive Gerade  $\text{PG}(1, q_i)$  verwenden, wobei man bei der Wahl der Primzahlpotenz  $q_i$  jeweils lediglich wieder darauf achten muss, dass sie groß genug ist. Auf diese Weise kann man neben den in Satz 3.2.25 angesprochenen DDs eine weitere Familie block-zerlegbarer DDs konstruieren, bei der jedoch die Anzahl der Block-Zerlegungen mit jeder Iteration ansteigt. Wir betrachten das nach der  $j$ -ten Iteration erhaltene DD:

Es handelt sich um ein  $(sq_1q_2 \dots q_j, k, \lambda)$ -DD mit  $vq_1q_2 \dots q_j$  Punkten und  $bq_1^2q_2^2 \dots q_j^2$  Blöcken, welches  $Z_j$  Zerlegungen besitzt, wobei  $Z_j = 2Z_{j-1} + 1$  mit  $Z_0 = z$  gilt und  $q_i, i = 1, \dots, j$  die Ordnung der jeweils gewählten projektiven Geraden ist. Dabei gilt  $q_j \geq vq_1q_2 \dots q_{j-1} - 1$ . Die Parameter ergeben sich direkt durch mehrfache Anwendung von Korollar 3.2.9.

### 3.2.3.2 Das Starter-Design sei in Faktoren zerlegbar

In Abschnitt 2.3 wurden verschiedene innere Strukturierungen vorgestellt. Wir haben festgestellt, dass die meisten der betrachteten Strukturen Spezialfälle einer Block-Zerlegung darstellen. Diese Spezialfälle werden wir nun behandeln. Wir beginnen mit solchen Zerlegungen, bei denen die Punktmenge eines jeden Unterdesigns die gesamte Punktmenge umfaßt, d.h. einer Zerlegung in Faktoren. Später beschäftigen wir uns mit Faktoren, die jeweils zusätzliche Eigenschaften aufweisen, welche dann die jeweilige Struktur bedingen.

Im nächsten Lemma halten wir fest, dass ein Starter-Design, welches sich in  $m$  Faktoren zerlegen lässt, zu einem DD führt, welches ebenfalls eine Zerlegung in  $m$  Faktoren besitzt.

**Lemma 3.2.27** *Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein gegebenes DD mit einer Zerlegung in  $m$  Faktoren  $H_i = (\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S), \mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}, i = 1, \dots, m$ . Dann erhält man durch Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  ein DD  $\tilde{D}$ , welches sich ebenfalls in  $m$  Faktoren  $\tilde{H}_i = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}_i, \tilde{S})$ , mit  $\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P}^T, \tilde{\mathcal{B}}_i := \mathcal{B}_i^T \subseteq \mathcal{B}^T =: \tilde{\mathcal{B}}, i = 1, \dots, m$  und  $\tilde{S} := S^T$  zerlegen lässt.*

*Beweis:* Die Blockmengen der Faktoren von  $D$  bilden nach Definition eine Partition  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_m)$  von  $\mathcal{B}$ . Nach Lemma 3.2.21 induziert diese

eine Partition  $(\mathcal{B}_1^T, \mathcal{B}_2^T, \dots, \mathcal{B}_m^T)$  von  $\mathcal{B}^T = \tilde{\mathcal{B}}$ . Wir setzen  $\mathcal{B}_i^T = \tilde{\mathcal{B}}_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und müssen zeigen, dass die jeweils zur Blockmenge  $\tilde{\mathcal{B}}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  zugehörige Punktmenge die gesamte Punktmenge  $\mathcal{P}^T = \tilde{\mathcal{P}}$  des DDs  $\tilde{D}$  umfasst und damit auch alle Punktklassen  $S^T = \tilde{S}$  vollständig vorhanden sind. Dies folgt jedoch mit Konstruktion (A) sofort aus der Tatsache, dass die Punktmenge jedes Faktors  $H_i$  ganz  $\mathcal{P}$  umfasst.  $\square$

Wir wissen nun mit Lemma 3.2.23 und 3.2.27, dass durch Konstruktion (A), ausgehend von einem block-zerlegbaren Starter-Design  $D$ , dessen Zerlegung gleichzeitig eine Faktor-Zerlegung ist, ein ebensolches DD  $\tilde{D}$  konstruiert wird.

Wir werden nun jeweils prüfen, welche Eigenschaften der Faktoren des Starter-Designs auf die Faktoren des konstruierten DDs übertragen werden bzw. welche Eigenschaften induziert werden. Die Eigenschaft der Faktoren selbst Designstruktur zu tragen, wird, wie wir eben folgern konnten, auf die Faktoren des konstruierten DDs übertragen. Nun widmen wir uns als erstes der Frage, was für eine Art Designstruktur diese neuen Faktoren tragen - ob beispielsweise ein  $\mathcal{A}$ -auflösbares Starter-Design ein ebensolches induziert.

Jeder Faktor ist in diesem Fall eine Taktische Konfiguration. Daher werden wir im folgenden Abschnitt u.a. zeigen, dass durch eine Taktische Konfiguration eine ebensolche induziert wird.

### 3.2.3.3 Das Starter-Design sei $\mathcal{A}$ -auflösbar

$D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  sei  $\mathcal{A}$ -auflösbares  $(s, k, \lambda)$ -DD mit  $v$  Punkten,  $b$  Blöcken und  $m$  verschiedenen  $\alpha_i$ -Parallelenklassen  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$  mit  $\alpha_i \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  sei das durch Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  und Einbettung in  $\mathfrak{P} = \text{PG}(n, q)$  erhaltene DD, mit  $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^T$ ,  $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^T$  und  $\tilde{S} = S^T$ .

Wir können folgendes Lemma zeigen:

**Lemma 3.2.28** *Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie oben gegeben.*

*Dann ist  $\tilde{D}$  ein  $\mathcal{A}_1$ -auflösbares DD mit  $\mathcal{A}_1 = \{\alpha_i \cdot q^{n-1-d} \mid \alpha_i \in \mathcal{A}\}$ .*

*Beweis:* Das DD  $\tilde{D}$  besitzt nach Lemma 3.2.27 eine Faktor-Zerlegung mit Faktoren  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}_i, \tilde{S})$  wobei  $\tilde{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}_i^T$  gilt. Wir müssen zeigen, dass für jeden dieser Faktoren gilt<sup>50</sup>: Jeder Punkt  $P \in \tilde{\mathcal{P}}$  ist genau in  $\alpha_i \cdot q^{n-1-d}$  Blöcken

---

<sup>50</sup>Obwohl die Argumentation derjenigen in der Beschreibung von Konstruktion (A) ähnelt, wird sie noch einmal recht ausführlich durchgeführt, da sich die Argumentation zu Konstruktion (A) auf ein 2-DD bezog und nicht auf eine Taktische Konfiguration.

von  $\tilde{\mathcal{B}}_i$  vorhanden, wobei  $\alpha_i$  jeweils durch die zu diesem Faktor zugehörige  $\alpha_i$ -Parallelenklasse  $\mathcal{B}_i$  bestimmt ist.

Wir betrachten einen beliebigen Faktor  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}_j, \tilde{\mathcal{S}})$  mit  $j \in \{1, \dots, m\}$  und einen beliebigen Punkt  $P \in \tilde{\mathcal{P}}$ . Nach Voraussetzung und Konstruktion wissen wir, dass der Punkt  $P$  ein Urbild  $P_{\mathcal{O}}$  in  $\tilde{P}$  besitzt, welches genau in  $\alpha_j$  Blöcken aus  $\mathcal{B}_j \subset \tilde{\mathcal{B}}_j$  vorhanden ist. Die Blöcke aus  $\tilde{\mathcal{B}}_j$  sind Elemente des Orbits von  $\mathcal{B}_j$  unter  $\mathcal{T}$ . Der Punkt  $P_{\mathcal{O}}$  (eine affine Hyperebene) kann zusätzlich also nur in solchen Blöcken vorkommen, die das Bild eines der oben angesprochenen  $\alpha_j$  Blöcke aus  $\mathcal{B}_j$  unter einer Translation  $t \in \mathcal{T}$  sind, bei der zwar der Punkt  $P_{\mathcal{O}}$  fest gelassen wird, nicht jedoch der jeweilige Block selbst. Da die Orbits aller Blöcke aus  $\mathcal{B}_j$  disjunkt sind, können wir diese einzeln betrachten. Sei  $B \in \mathcal{B}_j \subset \tilde{\mathcal{B}}_j$  einer dieser  $\alpha_j$  Blöcke, die den Punkt  $P_{\mathcal{O}}$  enthalten. Jede Translation aus  $\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}} \setminus \mathcal{T}_B = \{t \mathcal{T}_B \mid t \in \mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}}\}$  ( $\mathcal{T}_B \leq \mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}}$ ) mit Ausnahme der Identität lässt zwar  $P_{\mathcal{O}}$  fest, nicht jedoch den Block  $B$ . Wir erhalten genau  $|\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}} : \mathcal{T}_B| = |\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}}|/|\mathcal{T}_B|$  verschiedene geeignete Bilder von  $B$ . Zu jedem der anderen  $\alpha_j - 1$  Blöcke erhalten wir ebenso viele geeignete Bilder, da nach Bedingung (\*) und Lemma 3.2.3  $|\mathcal{T}_B| = |\mathcal{T}_{B'}|$  für alle  $B, B' \in \tilde{\mathcal{B}}$  gilt. Insgesamt kommt der Punkt  $P_{\mathcal{O}}$  in genau  $\alpha_j \cdot |\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}}|/|\mathcal{T}_B|$  mit den Bezeichnungen aus Konstruktion (A) in  $\alpha_j \cdot q^n/q^{d+1} = \alpha_j \cdot q^{n-1-d}$  Blöcken aus  $\tilde{\mathcal{B}}_j$  vor. Dies gilt auch für den Punkt  $P$ , da jede Translation inzidenzerhaltender Automorphismus ist. Dieser Punkt war beliebig gewählt. Daher verläuft die Argumentation für die anderen Punkte analog und da Punkte jeweils affine Hyperebenen sind und damit  $|\mathcal{T}_P| = |\mathcal{T}_{P'}|$  für alle  $P, P' \in \tilde{P}$  gilt, sowie (\*) und Lemma 3.2.3 gelten, ist der Wert von  $|\mathcal{T}_{P_{\mathcal{O}}}|/|\mathcal{T}_B| = q^{n-1-d}$  unabhängig vom betrachteten Punkt und Block. Der Faktor  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}_j, \tilde{\mathcal{S}})$  war jedoch ebenfalls beliebig gewählt, folglich besteht die Blockmenge von jedem der Faktoren aus einer  $(\alpha_i \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelenklasse, wobei sich der Wert  $\alpha_i$  aus der jeweils zugehörigen  $\alpha_i$ -Parallelenklasse von  $D$  ergibt. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Als Folgerung dieses Beweises halten wir folgende Bemerkung fest:

**Bemerkung 3.2.29** Jede  $\alpha$ -Parallelenklasse  $\mathcal{B}_i$  des DDs  $D$  induziert also eine  $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelenklasse  $\mathcal{B}_i^{\mathcal{T}}$  des konstruierten DDs  $\tilde{D}$ .

Als Spezialfälle erhalten wir sofort:

**Korollar 3.2.30** Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie oben gegeben.

- Ist  $D$   $\alpha$ -auflösbar (gilt also  $\alpha = \alpha_i$  für alle  $\alpha_i \in \mathcal{A}$ ), dann ist  $\tilde{D}$   $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -auflösbar.
- Ist  $D$  auflösbar (gilt also  $\alpha = 1$ ), dann ist  $\tilde{D}$   $(q^{n-1-d})$ -auflösbar.

Analog zu den Überlegungen zur Block-Zerlegbarkeit, können wir auch hier weitere Iterationen von Konstruktion (A) betrachten. Wir haben oben lediglich Bedingung (\*) verwendet, die wir bei Konstruktion (A) sowieso voraussetzen und welche auch bei folgenden Iterationen immer erfüllt ist. Durch die Isomorphie  $\tilde{D} \cong \overline{D}$ , wobei  $\overline{D}$  wiederum das in Schritt (e) der Konstruktion erzeugte DD ist, was bei der nächsten Iteration als Starter-Design verwendet wird, haben wir ein  $\mathcal{A}_1$ -auflösbares Starter-Design. Mit jeder Iteration erhöht sich sowohl die Dimension des affinen Raumes um eins, als auch die Dimension des Schnitts der Punkte eines Blockes (dies gilt für jeden Block). Vollkommen analog zur Induktion in Teil (e) von Konstruktion (A) kann man zeigen, dass wir nach  $i$  Iterationen von Konstruktion (A) ein DD erhalten, welches  $\mathcal{A}_i$ -auflösbar ist, wobei  $\mathcal{A}_i = \{\alpha_j \cdot q^{i(n-1-d)} \mid \alpha_j \in \mathcal{A}\}$  gilt.

Insgesamt können wir daher festhalten:

**Theorem 3.2.31** *Sei ein  $\mathcal{A}$ -auflösbares  $(s, k, \lambda)$ -DD  $D$  mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken gegeben, wobei  $\mathcal{A} = \{\alpha_j \mid \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m\}$  gilt.*

*Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $\mathcal{A}_i$ -auflösbares  $(s \cdot q^i, k, \lambda \cdot q^{i(n-2-d)})$ -DD  $\tilde{D}^i$  mit  $v \cdot q^i$  Punkten und  $b \cdot q^{i(n-d)}$  Blöcken, wobei  $q, n, d \in \mathbb{N}$ ,  $q$  Primzahlpotenz,  $q, n$  groß genug,  $d$  geeignet und  $\mathcal{A}_i = \{\alpha_j \cdot q^{i(n-1-d)} \mid \alpha_j \in \mathcal{A}\}$  gilt.*

Wie wir sahen, wird die Eigenschaft des Starter-Designs, eine Block-Zerlegung zu besitzen, deren innere Designs Taktische Konfigurationen sind, auf das durch Konstruktion (A) erzeugte DD übertragen. Ein Frame ist ebenfalls ein block-zerlegbares DD, dessen innere Designs gleichfalls Taktische Konfigurationen sind. Es ist daher naheliegend, nun einen Frame als Starter-Design zu betrachten.

### 3.2.3.4 Das Starter-Design sei ein $(\lambda, \alpha; k)$ -Frame

Anders als bei einem  $\mathcal{A}$ -auflösbaren DD umfassen die jeweils zu einem inneren Design zugehörigen Punktmengen eines Frames nicht die gesamte Punktmenge, sondern die gesamte Punktmenge jeweils abzüglich einer Punktmenge. Daher werden wir untersuchen, ob die Punktmengen der inneren Designs eines durch Konstruktion (A) erhaltenen DDs ebenfalls diese Eigenschaft aufweisen.

$D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  sei ein  $(\lambda, \alpha; k)$ -Frame, also ein  $(s, k, \lambda)$ -DD mit  $v$  Punkten,  $b$  Blöcken und  $m$  verschiedenen partiellen  $\alpha$ -Parallelenklassen  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , deren Komplemente jeweils aus einer Punktmenge von  $D$  bestehen.

$\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  sei wieder das durch Konstruktion (A) mit Starter-Design  $D$  und Einbettung in  $\mathfrak{P} = \text{PG}(n, q)$  erhaltene DD, mit  $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^T$ ,  $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^T$  und  $\tilde{S} = S^T$ .

Wir werden folgendes Lemma zeigen:

**Lemma 3.2.32** *Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie oben gegeben. Dann ist  $\tilde{D}$  ein  $(\lambda \cdot q^{n-2-d}, \alpha \cdot q^{n-1-d}; k)$ -Frame.*

*Beweis:* Die Tatsache, dass  $\tilde{D}$  ein DD ist, sowie dessen Parameter  $\lambda \cdot q^{n-2-d}$  und  $k$  ergeben sich direkt aus Satz 3.2.4.

Während des Beweises von Lemma 3.2.28 haben wir gezeigt, dass ein Punkt, der in einem Faktor des Starter-Designs genau in  $\alpha$  Blöcken vorkommt, in dem zugehörigen Faktor des konstruierten Designs genau in  $\alpha \cdot q^{n-1-d}$  Blöcken auftritt (Bemerkung 3.2.29). Dabei war die Tatsache unerheblich, dass es sich um Faktoren handelte, dass also die zugehörigen Punktmen- gen jeweils die gesamte Punktmenge des entsprechenden DDs umfassten. Ge- hen wir analog vor, bleibt hier also lediglich zu zeigen, dass die Komplemente der induzierten partiellen  $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelenklassen jeweils genau einer Punkt- klasse von  $\tilde{D}$  entsprechen. Dazu betrachten wir eine beliebige partielle  $\alpha$ -Parallelen- klasse  $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$  des Starter-Designs, deren Komplement die Punkt- klasse  $S_j \in S$  ist, sowie die zugehörige  $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelen- klasse  $\tilde{\mathcal{B}}_j = \mathcal{B}_j^T$  von  $\tilde{D}$ . Die zur  $\alpha$ -Parallelen- klasse  $\mathcal{B}_j$  gehörende Punktmenge in  $D$  ist dem- nach  $\mathcal{P} \setminus S_j$ . Nach Konstruktion besteht die zur  $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelen- klasse  $\tilde{\mathcal{B}}_j$  gehörende Punktmenge in  $\tilde{D}$  aus den Elementen von  $(\mathcal{P} \setminus S_j)^T$ . Da die Orbits der Punkte unter  $\mathcal{T}$  paarweise disjunkt sind, gilt  $(\mathcal{P} \setminus S_j)^T = \mathcal{P}^T \setminus S_j^T$  und damit  $(\mathcal{P} \setminus S_j)^T = \tilde{\mathcal{P}} \setminus \tilde{S}_j$ , wobei  $\tilde{S}_j = S_j^T \in \tilde{S}$  genau eine Punkt- klasse von  $\tilde{D}$  ist.  $\square$

Analog zu Bemerkung 3.2.29 können wir auch hier festhalten:

**Bemerkung 3.2.33** *Jede partielle  $\alpha$ -Parallelen- klasse  $\mathcal{B}_i$  des DDs  $D$ , deren Komplement genau eine Punkt- klasse von  $D$  ist, induziert eine partielle  $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelen- klasse  $\mathcal{B}_i^T$  des konstruierten DDs  $\tilde{D}$ , dessen Komplement genau eine Punkt- klasse von  $\tilde{D}$  ist.*

Ein Frame induziert also wiederum einen Frame. Analog zum vorigen Abschnitt über  $\mathcal{A}$ -auflösbare DDs und Teil (e) von Konstruktion (A) können wir per Induktion und unter Verwendung von Lemma 3.2.32 auch für Frames zeigen, dass wir von einem „Starter Frame“ ausgehend durch Iterationen von Konstruktion (A) eine ganze Familie von Frames erhalten.

Dies drücken wir in Form folgenden Satzes aus:

**Theorem 3.2.34** Sei  $D$  ein  $(\lambda, \alpha; k)$ -Frame, mit  $v$  Punkten,  $b$  Blöcken und  $m$  partiellen  $\alpha$ -Parallelenklassen  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , deren Komplemente jeweils aus einer Punktklasse von  $D$  bestehen.

Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $(\lambda \cdot q^{i(n-2-d)}, \alpha \cdot q^{i(n-1-d)}; k)$ -Frame  $\tilde{D}^i$  mit  $m$  partiellen  $(\alpha \cdot q^{i(n-1-d)})$ -Parallelenklassen, deren Komplemente jeweils aus einer Punktklasse von  $\tilde{D}^i$  bestehen.

Nun kombinieren wir die Ergebnisse zu Frames und Auflösbarkeit und wenden sie auf Semiframes an.

### 3.2.3.5 Das Starter-Design sei ein $(k, \lambda)$ -Semiframe

$D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  sei nun ein  $(k, \lambda)$ -Semiframe, also ein  $(s, k, \lambda)$ -DD, dessen Blockmenge eine Partition  $\mathcal{B} = X \cup Y$  zulässt, so dass einer dieser Teile (sagen wir  $X$ ) in Parallelenklassen und der andere in  $\alpha$ -partielle Parallelenklassen mit  $\alpha = 1$ , deren Komplemente jeweils einer Punktklasse entsprechen, unterteilt werden kann.

Wie gehabt, sei  $\tilde{D}$  ein durch Konstruktion (A) erhaltenes DD. Die Bezeichnungen der Parameter entsprechen denjenigen in den vorigen Abschnitten.

Die Partition  $\mathcal{B} = X \cup Y$  der Blockmenge von  $D$  induziert nach Lemma 3.2.21 eine Partition  $\tilde{\mathcal{B}} = X^T \cup Y^T$  der Blockmenge von  $\tilde{D}$ .

Jede Parallelenklasse  $\mathcal{B}_i$  von  $X$  induziert (nach Bemerkung 3.2.29 mit  $\alpha = 1$ ) eine  $(q^{n-1-d})$ -Parallelenklasse  $\mathcal{B}_i^T$  in  $X^T$ . Die Parallelenklassen von  $D$  bilden eine Partition von  $X$ . Diese Partition induziert (Lemma 3.2.21) eine Partition von  $X^T$ , deren Teile gerade die induzierten  $(q^{n-1-d})$ -Parallelenklassen sind. Ebenso wird durch jede partielle Parallelenklasse  $\mathcal{B}_j$  aus  $Y$  (nach Bemerkung 3.2.33 mit  $\alpha = 1$ ) eine partielle  $(q^{n-1-d})$ -Parallelenklasse  $\mathcal{B}_j^T$  in  $Y^T$  induziert, deren Komplement eine Punktklasse von  $\tilde{D}$  ist. Wiederum bilden die partiellen Parallelenklassen von  $D$  eine Partition von  $Y$ , welche eine Partition von  $Y^T$  induziert, deren Teile gerade die induzierten partiellen  $(q^{n-1-d})$ -Parallelenklassen bilden.

Insgesamt erhalten wir also eine Struktur, welche wir als verallgemeinerten Semiframe ansehen können und bezeichnen diese als  $(\mu, \alpha; k)$ -Semiframe, wobei hier  $\mu = \lambda \cdot q^{n-2-d}$  (Parameter nach Satz 3.2.4) und  $\alpha = q^{n-1-d}$  (Bemerkungen 3.2.29 und 3.2.33) gilt.

Genauer definieren wir eine solche Struktur wie folgt<sup>51</sup>:

**Definition 3.2.35** Ein  $(\lambda, \alpha; k)$ -Semiframe ist ein  $(s, k, \lambda)$ -DD, dessen Blockmenge eine Partition  $\mathcal{B} = X \cup Y$  zulässt, so dass einer dieser Teile in

<sup>51</sup>Dabei verwenden wir wieder den gewohnteren Parameter „ $\lambda$ “ anstatt „ $\mu$ “.

$\alpha$ -Parallelenklassen und der andere in partielle  $\alpha$ -Parallelenklassen, deren Komplemente jeweils einer Punktklasse entsprechen, unterteilt werden kann.

Nun formulieren wir das obige Ergebnis als Lemma:

**Lemma 3.2.36** *Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie oben gegeben. Dann ist  $\tilde{D}$  ein  $(\lambda \cdot q^{n-2-d}, q^{n-1-d}; k)$ -Semiframe.*

Verwenden wir einen solch verallgemeinerten Semiframe wiederum als Starter Design für Konstruktion (A), so erhalten wir mit analoger Argumentation unter Verwendung der Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte ebenfalls einen verallgemeinerten Semiframe.

**Theorem 3.2.37** *Sei  $D$  ein  $(\lambda, \alpha; k)$ -Semiframe mit  $m$   $\alpha$ -Parallelenklassen und  $m'$  partiellen  $\alpha$ -Parallelenklassen.*

*Dann existiert für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $(\lambda \cdot q^{i(n-2-d)}, \alpha \cdot q^{i(n-1-d)}; k)$ -Semiframe  $\tilde{D}^i$  mit  $m$   $(\alpha \cdot q^{i(n-1-d)})$ -Parallelenklassen und  $m'$  partiellen  $(\alpha \cdot q^{i(n-1-d)})$ -Parallelenklassen, deren Komplemente jeweils aus einer Punktklasse von  $\tilde{D}^i$  bestehen ( $q$  groß genug und  $d$  geeignet).*

*Beweis:* Nach Definition ist  $D$  ein  $(s, k, \lambda)$ -DD. Die Blockmenge  $\mathcal{B}$  von  $D$  lässt eine Zerlegung in zwei Teile  $\mathcal{B} = X \cup Y$  zu, wobei o.B.d.A.  $X$  aus  $m$   $\alpha$ -Parallelenklassen und  $Y$  aus  $m'$  partiellen  $\alpha$ -Parallelenklassen bestehen, deren Komplemente jeweils genau einer Punktklasse von  $D$  entsprechen.

Mit völlig analoger Argumentation zum Fall  $\alpha = 1$  (s.o.) können wir unter Verwendung von Lemma 3.2.21 und Bemerkungen 3.2.29 und 3.2.33 schließen, nach der 1. Durchführung von Konstruktion (A) (mit den üblichen Bezeichnungen) lässt die Blockmenge  $\tilde{\mathcal{B}}$  des konstruierten DDs  $\tilde{D}^1$  eine Zerlegung  $\tilde{\mathcal{B}} = X^T \cup Y^T$  zu, wobei  $X^T$  aus  $m$   $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelenklassen und  $Y^T$  aus  $m'$  partiellen  $(\alpha \cdot q^{n-1-d})$ -Parallelenklassen bestehen, deren Komplemente jeweils einer Punktklasse von  $\tilde{D}^1$  entsprechen. Dies ist unser Induktionsbeginn.

Die oben genannten Partitionen der Blockmenge setzen sich ebenso mit jeder weiteren Iteration von Konstruktion (A) fort. Wir müssen daher lediglich zeigen, dass beim Übergang von der  $i$ -ten zur  $(i+1)$ -ten Iteration von Konstruktion (A) durch eine  $(\alpha \cdot q^{i(n-1-d)})$ -Parallelenklasse eine  $(\alpha \cdot q^{(i+1)(n-1-d)})$ -Parallelenklasse induziert wird, sowie natürlich entsprechendes auch für die partiellen  $(\alpha \cdot q^{i(n-1-d)})$ -Parallelenklassen. Wie schon in Abschnitt 3.2.3.3 bezüglich der  $\mathcal{A}$ -Auflösbarkeit erwähnt, erhöht sich sowohl die Dimension des verwendeten affinen Raumes um eins, als auch die Dimension des Schnittes der Punkte eines (jeden) Blocks, so dass diese sich jeweils bei der Berechnung des Exponenten von  $q$  wieder aufheben (vergleichbar den Berechnungen zur

Induktion in Konstruktion (A) Teil (e)) und wir mit  $\alpha \cdot q^{i(n-1-d)}q^{n-1-d} = \alpha \cdot q^{(i+1)(n-1-d)}$  jeweils das gewünschte Ergebnis erhalten. Die anderen Parameter, sowie der Fakt, dass jedes der  $\tilde{D}^i$  ein DD ist, ergeben sich direkt aus Satz 3.2.4.  $\square$

In Abschnitt 2.3 haben wir noch eine weitere „frame-artige“ Struktur kennengelernt, die ein DD induziert, welches nach unserem Konzept block-zerlegbar ist, einen *generalized Frame*. Ein von einem generalized Frame induziertes DD werden wir nun als Starter-Design einsetzen und untersuchen, welche Eigenschaften das konstruierte DD aufweist.

### 3.2.3.6 Das Starter-Design sei durch einen generalized Frame induziert

Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein DD, was von einem generalized Frame  $F(t, k, w\{s\})$  mit  $\{(\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S) : i \in R\}$  induziert ist.  $D$  ist demnach ein block-zerlegbares  $t - (s, k, 1)$ -DD mit  $v = ws$  Punkten und  $|R| = \frac{ws}{k-t+1}$  inneren DDs  $D_i = (\mathcal{P} \setminus G, \mathcal{B}_i, S \setminus G)$  mit  $G \in S, \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ , welche jeweils  $(t-1) - (s, k, 1)$ -DDs mit  $(w-1)s$  Punkten sind.

Ist  $t = 2$ , so sind die inneren DDs  $1 - (s, k, 1)$ -DDs, also partielle Parallelenklassen, deren Komplemente gerade einer Punktklasse von  $D$  entsprechen.  $D$  ist somit ein  $\{k\}$ -Frame. Diesen Fall haben wir bereits betrachtet.

Sei also  $t > 2$ . In Lemma 3.2.18 werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, durch Konstruktion (A) ein  $t$ -DD (mit zu  $D$  isomorpher Wurzel und Gruppe  $\mathcal{T}$ ) mit  $t \geq 2$  zu erstellen. Für den Fall  $t = 3$  wurde auf Seite 83 ein Konstruktionsbeispiel angegeben. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des Falles  $t = 3$ .

Sei also  $D$  ein durch einen  $F(3, k, w\{s\})$  induziertes  $3 - (s, k, 1)$ -DD. Wir verwenden  $D$  als Starter-Design für Konstruktion (A) und zwar mit der Einbettung aus dem bereits angesprochenen Beispiel von Seite 83. Wir erhalten auf diese Weise nach Proposition 3.2.19 ein  $3 - (s \cdot q, k, 1)$ -DD  $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  mit  $v \cdot q = w \cdot s \cdot q$  Punkten, dessen innere Strukturierung wir uns nun ein wenig genauer ansehen.

Bekanntlich ist jedes  $t$ -DD auch ein  $(t-1)$ -DD, also können wir  $D$  nach Lemma 1.1.3 auch als  $2 - (s, k, (v-2s)(k-2)^{-1})$ -DD auffassen.  $D$  ist nach Voraussetzung block-zerlegbar mit  $\frac{ws}{k-2}$  inneren  $2 - (s, k, 1)$ -DDs  $D_i = (\mathcal{P} \setminus G, \mathcal{B}_i, S \setminus G)$  mit  $G \in S, \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$  und  $(w-1)s$  Punkten. Nach Lemma 3.2.23 Teil (1) ist das durch Konstruktion (A) erstellte DD  $\tilde{D}$  daher ebenfalls block-zerlegbar mit  $\frac{ws}{k-2}$  inneren 2-DDs  $\tilde{D}_i = ((\mathcal{P} \setminus G)^T, \mathcal{B}_i^T, (S \setminus G)^T)$ , wobei

$(\mathcal{P} \setminus G)^T \subseteq \tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{B}_i^T \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$  und  $(S \setminus G)^T \subseteq \tilde{S}$  gilt. Ebenso wie beim Beweis von Lemma 3.2.32 gilt,  $(\mathcal{P} \setminus G)^T = \mathcal{P}^T \setminus G^T = \tilde{\mathcal{P}} \setminus \tilde{G}$  mit  $\tilde{G} := G^T \in \tilde{S}$  und  $(S \setminus G)^T = S^T \setminus G^T = \tilde{S} \setminus \tilde{G}$  für alle inneren Designs, da die Orbits der Punkte von  $\mathcal{P}$  unter  $\mathcal{T}$  paarweise disjunkt sind. Somit bestehen die Punktmenge der inneren Designs von  $\tilde{D}$  gerade aus der Punktmenge  $\tilde{\mathcal{P}}$  von  $\tilde{D}$  abzüglich genau einer Punktmenge. Ebenso gilt für die Menge der Punktmenge der inneren Designs, dass sie aus  $\tilde{S}$  abzüglich jeweils genau einer Punktmenge bestehen. Die Blockmengen der inneren Designs ergeben eine Partition von  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Die Forderungen, die an ein durch einen generalized Frame induziertes DD hinsichtlich der Block-Zerlegbarkeit und der Eigenschaften der Punkt- und Blockmengen sowie der Punktmenge der zugehörigen inneren DDs gestellt werden, sind daher ebenso erfüllt wie die Forderung, dass wir ein  $t$ -DD haben, dessen innere DDs jeweils nur  $(t - 1)$ -balanciert sind.

Nun betrachten wir die zugehörigen Parameter. Jedes einzelne innere DD  $D_i$  von  $D$  kann als Starter-Design für das zugehörige innere DD  $\tilde{D}_i$  von  $\tilde{D}$  betrachtet werden, weshalb wir jeweils nach Proposition 3.2.19 und wegen der verwendeten Konstruktion nach dem Beispiel von Seite 83 ein  $2 - (s \cdot q, k, q)$ -DD mit  $(w - 1)s \cdot q$  Punkten erhalten. Der Index der inneren DDs von  $\tilde{D}$  ist demnach ungleich eins, weshalb  $\tilde{D}$  kein von einem generalized Frame induziertes DD ist. Allerdings ist die erhaltene Struktur  $\{(\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S) : i \in R\}$  einem generalized Frame sehr ähnlich und stellt eine natürliche Verallgemeinerung dar. Wir bezeichnen sie daher als *generalized  $\lambda$ -Frame*  $F(t, k, w\{s\})_\lambda$ . Dabei soll der als Index geschriebene Parameter  $\lambda$  den Index der inneren DDs des induzierten DDs beschreiben.

**Definition 3.2.38** Ein *generalized  $\lambda$ -Frame*  $F(t, k, w\{s\})_\lambda$  ist eine Menge  $\{(\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S) : i \in R\}$ , wobei  $\mathcal{P}$  eine  $ws$ -Menge ist,  $S$  eine Partition von  $\mathcal{P}$  in  $w$  Mengen von  $s$  Punkten (die wir auch hier als Punktmenge bezeichnen), so dass jedes Tripel  $(\mathcal{P} \setminus G, \mathcal{B}_i, S \setminus G), G \in S$  ein  $(t - 1) - (s, k, \lambda)$ -DD mit  $(w - 1) \cdot s$  Punkten ist, das Tripel  $(\mathcal{P}, \bigcup_{i \in R} \mathcal{B}_i, S)$  ein  $t - (s, k, 1)$ -DD mit  $ws$  Punkten ist und die Blockmengen  $\mathcal{B}_i, i \in R$  paarweise disjunkt sind.

Als Schlussfolgerung der obigen Überlegungen formulieren wir mit dem neuen Begriff eines generalized  $\lambda$ -Frames folgendes Lemma:

**Lemma 3.2.39** Sei ein generalized Frame  $F(3, k, w\{s\})$  gegeben und  $q$  Primzahlpotenz mit  $q \geq ws - 1$ .

Dann existiert ein generalized  $q$ -Frame  $F(3, k, w\{s \cdot q\})_q$ .

Nachdem wir nun alle in Kapitel 2.3 eingeführten „frame-artigen“ Strukturen behandelt haben, von denen die zuerst behandelten  $\mathcal{A}$ -auflösbaren DDs

eine Zerlegung in Faktoren besitzen, widmen wir uns nun einem weiteren Spezialfall einer Faktorzerlegung, den *Large sets of disjoint DDs*.

### 3.2.3.7 Das Starter-Design sei ein Large set of disjoint DDs

$D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  sei ein Large set of disjoint DDs  $LGDD(t, k, ws; w\{s\})$ , also ein vollständiges<sup>52</sup>  $t - (s, k, 1)$ -DD mit  $v = ws$  Punkten, welches eine Block-Zerlegung in Faktoren  $D_i = (\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S)_{i \in R}$  besitzt, die ihrerseits ebenfalls  $t - (s, k, 1)$ -DDs sind.

Sei  $\tilde{D} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S})$  wiederum ein durch Konstruktion (A) erstelltes DD mit den gewohnten Bezeichnungen.

**Lemma 3.2.40** *Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  wie oben gegeben.*

*Dann ist  $\tilde{D}$  ein  $LGDD(t, k, wsq; w\{sq\})$ , wenn*

- (i) *die Elemente jeder transversalen  $k$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$  einen nicht-leeren affinen Schnitt besitzen und*
- (ii)  *$n - 2 - d = 0$  gilt.*

*Beweis:* Nach dem ersten Teil von Lemma 3.2.23 ist  $\tilde{D}$  block-zerlegbar mit inneren DDs  $\tilde{D}_i = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{B}}_i, \tilde{S})_{i \in R}$  mit den gewohnten Bezeichnungen  $\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P}^T$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_i := \mathcal{B}_i^T$  und  $\tilde{S} := S^T$ . Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen  $\tilde{D}$  ein vollständiges DD mit Index 1 ist. Vollständig ist  $\tilde{D}$ , wenn es zu jeder transversalen  $k$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$  einen Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$  gibt, der diese Punkte enthält. Gibt es zu jeder transversalen  $t$ -Teilmenge von  $\tilde{\mathcal{P}}$  genau einen Block aus  $\tilde{\mathcal{B}}$ , der diese Punkte enthält, so hat  $\tilde{D}$  den Index 1. Nach Konstruktion gilt für alle Blöcke aus  $\tilde{\mathcal{B}}$ , dass die Punkte eines Blockes, jeweils als affine Hyperebenen betrachtet, einen nicht-leeren Schnitt besitzen. Falls es also  $k$  Punkte aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  gibt, deren Schnitt leer ist, so kann  $\tilde{D}$  nicht vollständig sein. Nehmen wir also an, der Schnitt von je  $k$  Punkten aus  $\tilde{\mathcal{P}}$  sei nicht-leer. Seien  $P_1, \dots, P_k \in \tilde{\mathcal{P}}$  beliebig gegebene transversale Punkte, dann existiert also ein nicht-leerer affiner Schnitt dieser Punkte. Folglich gibt es eine Translation  $t \in \mathcal{T}$ , die diese  $k$  Punkte auf die jeweils zugehörigen Punkte aus  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}$  abbildet, die den affinen Punkt  $\mathcal{O}$  enthalten. Da nach Konstruktion  $\tilde{D}_{\mathcal{O}} \cong D$  gilt und  $D$  nach Voraussetzung LGDD ist, gibt es genau einen Block  $B$  genau eines inneren DDs  $D_j$  von  $\tilde{D}_{\mathcal{O}}$ , der aus diesen  $k$  Punkten besteht. Daher enthält das innere DD  $D_j^{-t}$  nach Konstruktion den Block  $B^{-t}$ , der aus den Punkten  $P_1, \dots, P_k$  besteht. Die Punkte waren beliebig gewählt, daher ist  $\tilde{D}$  vollständig. Es bleibt die Frage nach dem Index. Nach Satz 3.2.4 erhalten wir als Index von  $\tilde{D}$ :  $\tilde{\lambda} = q^{n-2-d}$  (da nach Voraussetzung  $\lambda = 1$ ). Dieser

---

<sup>52</sup>(s. Def. auf S. 6)

Index ist genau dann gleich 1, wenn  $n - 2 - d = 0$  gilt. Dies gilt für die inneren DDs von  $\tilde{D}$  ebenfalls, d.h. deren Index ist jeweils entsprechend gleich 1.  $\square$

Betrachten wir nun folgendes einfache Beispiel:

Sei  $D$  ein  $LGDD(2, 2, ws; w\{s\})$  und setzen wir  $\mathfrak{P} = PG(1, q)$ ,  $q \geq ws - 1$ , dann gilt  $n = 1$  und  $d = (-1)$  und somit  $n - 2 - d = 0$ . Damit ist Bedingung (ii) aus Lemma 3.2.40 erfüllt. Da sich je zwei Geraden der bei Konstruktion (A) verwendeten affinen Ebene  $AG(2, q)$  schneiden, ist auch Bedingung (i) dieses Lemmas erfüllt. Das mit Konstruktion (A) erstellte DD  $\tilde{D}$  ist somit ein  $LGDD(2, 2, wsq; w\{sq\})$ .

In Abschnitt 2.3 wurden zuletzt Konzepte zur Zerlegung von DDs vorgestellt, die keine Block-Zerlegbarkeit darstellen. An dieser Stelle soll nun das Konzept der Zerlegung von Differenzenmengen behandelt werden, da wir auch hier durch Konstruktion (A) DDs erhalten, die eine starke innere Strukturierung aufweisen.

### 3.2.3.8 Das Starter-Design sei ein symmetrisches Design $\mathbf{D} = \text{dev } D$

Sei  $\mathbf{D} = \text{dev } D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein symmetrisches Design, wobei  $D = SR$  eine wie in Proposition 2.3.7 (vgl. S. 30) konstruierte Differenzenmenge ist.  $\mathbf{D}$  enthält damit nach Proposition 2.3.8 eine Partition in „stark induzierte symmetrische Unterdesigns“, die paarweise isomorph zu  $\mathbf{S} = \text{dev } S$  sind.

Verwenden wir  $\mathbf{D}$  als Starter-Design und betten es in eine projektive Gerade  $\mathfrak{P} = PG(1, q)$  ein, wobei  $q$  wie gewohnt eine geeignete Primzahlpotenz ist, so erhalten wir durch Konstruktion (A) ein DD  $\tilde{D}$ , welches nach Lemmata 3.2.14 und 3.2.12 block-zerlegbar ist, wobei die  $|\tilde{\mathcal{T}}|$  inneren DDs paarweise isomorph zu  $\mathbf{D}$  sind. Damit lassen sich auch diese in Designs partitionieren, die ihrerseits wiederum alle isomorph zu  $\mathbf{S}$  sind. Da  $\mathbf{S}$  selbst ein Design ist, wissen wir, dass mit unserer Konstruktion  $\mathbf{S}^{\mathcal{T}}$  ebenfalls ein DD ist und gleiches auch für die Orbits unter  $\mathcal{T}$  aller zu  $\mathbf{S}$  isomorphen Designs von  $\mathbf{D}$  gilt. Außerdem sind diese Orbits alle paarweise isomorph zueinander. Wir erhalten somit ein DD, nämlich  $\tilde{D}$ , bei dem sich die Blöcke so zerteilen lassen, dass diese „Bruchstücke“ die Blöcke von  $\mathbf{S}^{\mathcal{T}}$  und den dazu isomorphen DDs bilden.  $\tilde{D}$  weist demnach ein ähnliche innere Strukturierung wie  $\mathbf{D}$  auf, ist allerdings ebenso wie seine „inneren Designs“ kein „Development“ einer relativen Differenzenmenge. Wir wissen nämlich nach Korollar 3.2.9, dass die Anzahl der Punkte und Blöcke unterschiedlich sein muss, da deren Anzahl in  $\mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{S}$  jeweils identisch waren.

Wir haben in diesem Abschnitt feststellen können, dass wir mit Konstruktion (A) ein Werkzeug an der Hand haben, mit welchem wir aus gegebenen Designstrukturen gezielt größere ebenfalls stark strukturierte divisible Designs erzeugen können.