2 Block-Zerlegbarkeit divisibler Designs

Nun wird das Konzept der Block-Zerlegbarkeit t-divisibler Designs vorgestellt. Wir führen zunächst die grundlegenden Definitionen und Begriffe ein und beschäftigen uns anschließend mit der Frage, wie man bei einem gegebenen divisiblen Design feststellen kann, ob es block-zerlegbar ist.
Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden unterschiedliche Konzepte innerer Strukturierungen von divisiblen Designs vorgestellt und mit unserem Konzept der Block-Zerlegbarkeit in Beziehung gesetzt.

2.1 Das Konzept der Block-Zerlegbarkeit

Wir interessieren uns hier für innere Strukturierungen von divisiblen Designs, insbesondere für solche Strukturen, die selbst ebenfalls eine Design-Struktur tragen. Da der Begriff des „Unterdesigns" in der Literatur nicht unbedingt einheitlich verwendet wird[9], stellen wir zunächst klar, was wir darunter verstehen.

Definition 2.1.1 Sei $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ ein t-divisibles Design.
Wir nennen eine Unterstruktur $D_i := (\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i, S_i)$ von D mit $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$, ein *$t_i$-divisibles Unterdesign* von D, wenn diese ein einfaches t_i-divisibles Design ist, wobei Inzidenz durch die Inzidenzrelation von D induziert ist, die Blockgröße mit der von D übereinstimmt und $[P]_{D_i} \subseteq [P]_D$ für alle $P \in \mathcal{P}_i$ mit $[P]_D \in S$ und $[P]_{D_i} \in S_i$ gilt.

Man beachte, dass es möglich ist, ein t_i-divisibles Unterdesign allgemeiner zu definieren, indem auf die Einschränkungen bezüglich der Punktklassen und Blockgrößen verzichtet wird. In dieser Arbeit ist es jedoch sinnvoll, ein Unterdesign in der oben beschriebenen Art zu definieren, da wir auf diese Weise mehr Informationen über die Unterstruktur besitzen. Dies versetzt uns in die Lage, andere Strukturen wie beispielsweise ein äußeres divisibles Design (s. Kapitel 4) zu einem gegebenen divisiblen Design zu definieren. Darüberhinaus ermöglicht die Einschränkung der Blockgrößen eine Zerlegung eines zu einem block-zerlegbaren t-divisiblen Design D assoziierten CW-Codes, bei der die einzelnen Teilcodes jeweils von Unterdesigns (den inneren Designs) von D induziert werden (s. Kapitel 6).

Nun wird das Konzept der Block-Zerlegbarkeit vorgestellt. Die folgende Definition ist grundlegend für diese Arbeit.

[9] Man vergleiche zum Beispiel ein „Unterdesign" in Definition 2.3.6 nach [50].

Definition 2.1.2 Sei $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ ein t-divisibles Design.
Existiert eine Partition von $\mathcal{B}$ mit Komponenten $\mathcal{B}_i$, $i \in N \subset \mathbb{N}$, so dass es zu jedem Element $\mathcal{B}_i$ dieser Partition eine Teilmenge $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ gibt, für die $D_i := (\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i, S_i)$ ein t_i-divisibles Unterdesign von D ist, nennen wir

- D *block-zerlegbar*,
- D_i ein *inneres t_i-divisibles Design von D* und
- die Menge aller inneren t_i-divisiblen Designs von D eine *Block-Zerlegung von D*.

In dieser Definition bilden die Blockmengen der inneren Designs eine Partition der Blockmenge von D. Wie später (siehe Kapitel 3) deutlich wird, kann eine ähnliche Struktur, bei der die Blockmengen der „inneren Designs" nicht ganz disjunkt sind, ebenfalls interessant sein. Daher führen wir den Begriff der *fast Block-Zerlegbarkeit* ein.

Definition 2.1.3 Sei $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ ein t-divisibles Design.
Existieren t_i-divisible Unterdesigns $D_i = (\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i, S_i)$, $i \in N \subset \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in N} \mathcal{P}_i$ und $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in N} \mathcal{B}_i$ gilt, dann nennen wir

- D *fast-block-zerlegbar*,
- D_i ein *inneres t_i-divisibles Design von D*.
- die Menge aller inneren t_i-divisiblen Designs von D eine *fast Block-Zerlegung von D*.

Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir gelegentlich anstatt von „Block-Zerlegbarkeit" nur von „Zerlegbarkeit" sprechen[10], sowie anstelle von „inneres t_i-divisibles Design von D" sagen wir kurz „inneres Design von D". Jedes t-Design ist spezielles DD, daher lassen sich diese Definitionen mühelos auch für t-Designs anwenden.

Bei beiden Definitionen wurden triviale Fälle nicht explizit ausgeschlossen. Dabei können wir zwischen zwei Arten der „Trivialität" unterscheiden:[11]

(a) Die inneren Designs einer (fast) Block-Zerlegung können „trivial" sein (s.o. Beispiele „trivialer" Designs).

[10] Analoges gilt auch für „fast Block-Zerlegbarkeit".

[11] Der Trivialfall einer Zerlegung mit nur einem inneren Design, nämlich dem Ausgangsdesign selbst, ist bei uns ausgeschlossen, da nach Definition 2.1.1 die Blockmenge des Unterdesigns eine echte Teilmenge der Blockmenge des Ausgangsdesigns sein muss.

(b) Die (fast) Block-Zerlegung selbst kann „trivial“ sein, das heißt, die inneren Designs sind Unterstrukturen, die zu jedem t-DD gehören. Zum Beispiel gibt es bei jedem t-Design eine fast Block-Zerlegung in seine *point-residues* (s. Lemma 1.1.7).

In beiden Fällen sagen wir, die (fast) Block-Zerlegung ist „trivial“.

Sprechen wir von einem „(fast) block-zerlegbaren t-DD“, so ist damit eine nicht-triviale Block-Zerlegung gemeint, andernfalls fügen wir die Bezeichnung „trivial“ hinzu.

Obwohl Lemma 2.1.7 (s. S. 15) nahelegt, dass es Designs gibt, deren innere Designs nicht isomorph sind, werden wir in Kapitel 3 sehen, dass auch Strukturen, deren Unterstrukturen paarweise isomorph sind, durchaus interessant sein können. Mit diesen werden wir uns im Verlauf dieser Arbeit überwiegend beschäftigen. Wir führen daher einige weitere Bezeichnungen ein, bevor wir ein erstes Beispiel einer Konstruktionsmöglichkeit angeben.

Definition 2.1.4 Sei D ein (fast) block-zerlegbares t-divisibles Design. Wenn die inneren t_i-divisiblen Designs paarweise isomorph zueinander sind, nennen wir D *regulär* (fast) block-zerlegbar.

Definition 2.1.5 Besitzt ein regulär (fast) block-zerlegbares t-divisibles Design $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ mit inneren t_i-divisiblen Designs $D_i, i \in N \subset \mathbb{N}$ eine Untergruppe $\mathcal{T}$ seiner Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}D$, so dass für ein beliebig gewähltes inneres t_j-divisibles Design D_j gilt

(i) $D = D_j^{\mathcal{T}}$ mit $\quad D_j^{\mathcal{T}} = (\mathcal{P}_j^{\mathcal{T}}, \mathcal{B}_j^{\mathcal{T}}, S_j^{\mathcal{T}})$, wobei

$\mathcal{P}_j^{\mathcal{T}} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathcal{P}_j^{\tau}$ mit $\mathcal{P}_j^{\tau} = \{P^{\tau} \mid P \in \mathcal{P}_j\}$,

$\mathcal{B}_j^{\mathcal{T}} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathcal{B}_j^{\tau}$ mit $\mathcal{B}_j^{\tau} = \{B^{\tau} \mid B \in \mathcal{B}_j\}$,

$S_j^{\mathcal{T}} = \{[P]^{\mathcal{T}} \mid P \in \mathcal{P}_j\}$ mit $[P]^{\mathcal{T}} = \{Q^{\mathcal{T}} \mid Q \in [P]\}$ und

(ii) für jedes innere t_i-divisible Design D_i existiert ein $\tau \in \mathcal{T}$, so dass $D_i = D_j^{\tau}$ gilt,

nennen wir D *(fast) block-zerlegbar mit Wurzel D_j und Gruppe $\mathcal{T}$*.

Man beachte, dass die „Wurzel“ nicht eindeutig bestimmt ist - jedes innere Design kann als Wurzel betrachtet werden; und die Automorphismengruppe $\mathcal{T}$ induziert eine transitive Permutationsgruppe auf den inneren Designs.

Es stellt sich nun die Frage, wie man ein zerlegbares t-DD konstruieren kann. An dieser Stelle soll zunächst ein Beispiel mit einer sehr einfachen zusammengesetzten Struktur gegeben werden. In Kapitel 3 werden wir uns diesem Thema dann ausführlich widmen.

2.1.1 Erste einfache Resultate zur Erstellung block-zerlegbarer t-DDs

Ein block-zerlegbares t-DD setzt sich aus mehreren kleineren Designs zusammen. In diesem Zusammenhang ist es naheliegend, an eine Summe von Designs zu denken. In Lemma 2.1.7 werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, wann eine Summe von t-DDs ein block-zerlegbares t-DD ist.

Etwas allgemeiner gefaßt, definieren wir zunächst die Summe von Inzidenzstrukturen:

Definition 2.1.6 ([5], (5.2)) Seien $D_i = (V, B_i, I)$ $(i = 1, \ldots, m)$ Inzidenzstrukturen auf derselben Punktmenge V und die B_i seien paarweise disjunkt. Dann nennen wir

$$D := (V, B_1 \cup \ldots \cup B_m, I_1 \cup \ldots \cup I_m)$$

die *Summe* der Inzidenzstrukturen D_i.

Nun folgt der Zusammenhang zur Block-Zerlegbarkeit divisibler Designs.

Lemma 2.1.7 *Eine Summe D von t-DDs D_i, $i = 1, \ldots, u$, $u \geq 2$, ist genau dann ein block-zerlegbares t-DD mit den D_i als inneren Designs, wenn*

1. *D und D_i, $i = 1, \ldots, u$ paareweise dieselben Punktklassen besitzen und*
2. *die Blockgrößen aller D_i, $i = 1, \ldots, u$ gleich sind.*

Beweis: Wir setzen zunächst D als block-zerlegbares t-DD voraus, welches die Summe seiner inneren t-divisiblen Designs D_i, $i = 1, \ldots, u$, $u \geq 2$, bildet und zeigen die Eigenschaften (1) und (2).

Nach Definition 2.1.6 besitzen alle D_i dieselbe Punktmenge wie D. Angenommen, es existiert ein D_j, $j \in \{1, \ldots, u\}$, dessen Punktklassen nicht mit denen von D übereinstimmen. Dann gibt es Punkte, die in D in einer Punktklasse liegen, in D_j jedoch nicht. Betrachten wir zwei dieser Punkte. Sie sind in D_j transversal und inzidieren daher mit einer gewissen Anzahl

Blöcken von D_j. Die Blockmenge von D_j ist in der Blockmenge von D enthalten, daher gibt es auch in D Blöcke, die mit diesen Punkten gleichzeitig inzidieren. Dies kann jedoch nicht sein, da diese Punkte in D gemeinsam in einer Punktklasse liegen. Die Punktklassen aller D_i, $i = 1, \ldots, u$ müssen also mit den Punktklassen von D übereinstimmen.

Teil (2) folgt sofort mit der Eigenschaft von D ein t-DD zu sein.

Nun gehen wir davon aus, dass D die Summe der t-divisiblen Designs D_i, $i = 1, \ldots, u$ mit $u \geq 2$ ist und die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt sind. Wir müssen zeigen, dass D ein block-zerlegbares t-DD mit den D_i als inneren Designs ist.

Nach (1) ist auf der Punktmenge von D dieselbe Partition in Punktklassen definiert, wie bei den D_i, weshalb die Punktklassen alle dieselbe Größe besitzen müssen und Bedingung (4) der Definition eines DDs erfüllt ist. Außerdem sind die Blöcke daher jeweils transversale Teilmengen, die nach (2) alle gleich groß sind. Da jedes D_i t-balanciert ist, erhält man zu jeder transversalen t-Teilmenge der Punktmenge dieselbe Anzahl Blöcke von D, die mit dieser inzidieren. D ist daher ein t-DD.

Nach Definition 2.1.6 sind die Blockmengen der D_i paarweise disjunkt. Wegen $u \geq 2$ gibt es mindestens zwei „Summanden“, d.h. die Blockmengen der D_i sind jeweils echte Teilmengen der Blockmenge von D, und daher sind die D_i nach Definition 2.1.1 Unterdesigns von D. Die Behauptung ist damit beweisen. $\square$

Eine Möglichkeit, wie man eine solche Summe von t-DDs konstruieren kann, wird in folgender Proposition angegeben. Dabei wird ein Resultat von A.G. Spera verallgemeinert (vgl. Proposition 3.1.3), was wir in Kapitel 3 behandeln werden und in welchem es zur Konstruktion von t-DDs eingesetzt wird.[86]

Proposition 2.1.8 *Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer endlichen Menge V der Ordnung v mit $|[x]| = s$ $(s \in \mathbb{N})$ für alle $x \in V$, $S := \{[x] \mid x \in V\}$ und sei G eine endliche t-R-homogene R-Permutationsgruppe*[12] *auf V. Ferner seien $B_1, \ldots, B_u$ $(u \geq 2)$ R-transversale Teilmengen von V, mit $B_i^G \neq B_j^G$ für $i \neq j$, alle Teilmengen besitzen dieselbe Kardinalität k $(k \in \mathbb{N})$ mit $k \geq t$.*

Dann ist $D = (V, \mathcal{B}, S)$ mit

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{u} B_i^G$$

[12] Zur Definition der Begriffe „t-R-homogen“ und „R-Permutationsgruppe“ siehe Abschnitt 3.1.

ein block-zerlegbares $t-(s,k,\lambda)$*-divisibles Design mit* $b = |\mathcal{B}| = |G| \cdot \sum_{i=1}^{u} |G_{B_i}|^{-1}$ *Blöcken und Index* $\lambda = |G|\binom{k}{t}/(\binom{v/s}{t}s^t)\sum_{i=1}^{u}|G_{B_i}|^{-1}$*, dessen innere Designs* $D_i = (V, B_i^G, S)$*,* $i = 1, \ldots, u$ *sind.*

Beweis: Nach Proposition 3.1.3 ist jede der Inzidenzstrukturen $D_i := (V, B_i^G, \in)$, $i = 1, \ldots, u$, ein t-DD. Wegen $B_i^G \neq B_j^G$ mit $i \neq j$ gilt paarweise $B_i^G \cap B_j^G = \emptyset$ für alle Blockmengen B_i, B_j, $i, j \in \{1, \ldots, u\}$. Da außerdem die Punktmengen jeweils gleich sind, ist D eine Summe der D_i, $i = 1, \ldots, u$. Die Punktklassen sind durch die Äquivalenzrelation R festgelegt und daher für alle D_i und D identisch. Somit gilt Eigenschaft (1) aus Lemma 2.1.7. Da nach Voraussetzung alle B_i, $i = 1, \ldots, u$, dieselbe Kardinalität besitzen, ist Eigenschaft (2) desselben Lemmas ebenfalls erfüllt und D ist damit ein block-zerlegbares t-DD, dessen innere Designs gerade die D_i, $i = 1, \ldots, u$ sind. Nun zu den Parametern von D. Die Menge V mit den durch R bestimmten Klassen bildet die Punktmenge mit den Punktklassen von D. Deren Parameter sind ebenso vorausgesetzt wie die Blockgröße k. Da es in jedem Orbit B_i^G jeweils $b_i := |B_i^G| = |G|/|G_{B_i}|$ Elemente gibt und die Orbits nach Voraussetzung paarweise disjunkt sind, erhalten wir insgesamt $b = |\mathcal{B}| = |G| \cdot \sum_{i=1}^{u} |G_{B_i}|^{-1}$ Blöcke von D. Nach 3.1.3 ist jedes der D_i ein t-DD mit λ_i von der Form $\lambda_i = |G|\binom{k}{t}/(|G_{B_i}|\binom{v/s}{t}s^t)$. Die Punktmengen der D_i sind gleich, während die Blockmengen paarweise disjunkt sind. Daher gibt es zu je t transversalen Punkten aus V genau $\sum_{i=1}^{u} \lambda_i$ verschiedene Blöcke der inneren Designs (und damit auch aus D), die alle diese Punkte enthalten. Mehr solcher Blöcke kann es nicht geben. D ist daher ebenfalls t-balanciert mit $\lambda = |G|\binom{k}{t}/(\binom{v/s}{t}s^t)\sum_{i=1}^{u}|G_{B_i}|^{-1}$. □

In Kapitel 3 findet sich in Lemma 3.1.9 ein Zusammenhang von Block-Zerlegbarkeit und der Summe von DDs.

2.2 Identifikation block-zerlegbarer divisibler Designs

Nachdem nun das Konzept der Block-Zerlegbarkeit eines t-DDs vorgestellt wurde, wenden wir uns der Frage zu, wie man bei einem gegebenen divisiblen Design erkennt, ob es block-zerlegbar ist oder nicht. Dabei werden wir uns ab jetzt auf den Fall $t = 2$ konzentrieren.

Besitzt ein gegebenes divisibles Design eine geometrische Interpretation oder ist isomorph zu einem divisiblen Design mit dieser Eigenschaft, kann man unter Umständen anhand dieser Interpretation Aussagen zur möglichen Block-Zerlegbarkeit dieses Designs machen. In Kapitel 3 werden wir solche geometrische Interpretationen behandeln und für weitere Konstruktionen ausnutzen. Im Allgemeinen besitzt ein gegebenes divisibles Design allerdings keine geometrische Interpretation. Eine Inzidenzmatrix kann man jedoch immer angeben.[13] Daher werden wir ein block-zerlegbares divisibles Design anhand der Eigenschaften einer seiner Inzidenzmatrizen charakterisieren.

2.2.1 Inzidenzmatrizen block-zerlegbarer divisibler Designs

Im nun folgenden Abschnitt behandeln wir die Frage: Woran erkennt man ein block-zerlegbares divisibles Design, dessen innere Designs 2-balanciert sind? Wir werden sehen, dass solche zerlegbaren divisiblen Designs eine bemerkenswerte Inzidenzmatrix besitzen.

Wir beginnen mit der Einführung einiger Begriffe. Sei eine beliebige Matrix M gegeben. Es ist möglich, dass M Zeilen enthält, deren sämtliche Einträge gleich Null sind. Wir definieren nun $\hat{M}$ als die Matrix, die wir durch Entfernung aller „Null-Zeilen“ aus M erhalten.
Eine $(v \times 1)$-Matrix, deren Einträge alle gleich Eins sind, bezeichnen wir wieder als w_v.

Theorem 2.2.1 *Eine endliche Inzidenzstruktur D ist genau dann ein block-zerlegbares (s, k, λ)-divisibles Design mit v Punkten, b Blöcken und Wiederholungszahl r, dessen innere divisible Designs 2-balanciert sind, wenn sie eine Inzidenzmatrix M der Form*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1u} \\ M_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ M_{m1} & \cdots & & M_{mu} \end{pmatrix}$$

(mit Untermatrizen M_{xy})
besitzt, die folgende Bedingungen (8 - 13) erfüllt:

$$M^T \, w_v = k \, w_b \tag{8}$$

und

$$M_i \, M_i^T = r \, I_s \qquad \text{für alle } i = 1, \cdots, m \tag{9}$$

mit $M_i := (M_{i1} \; M_{i2} \cdots M_{iu})$ und I_s der Einheitsmatrix der Ordnung s, sowie

$$M_i \, M_j^T = \lambda J_s \qquad \text{für alle } i, j = 1, \cdots, m, \text{ mit } i \neq j, \tag{10}$$

[13] Man beachte, dass hier endliche Inzidenzstrukturen gemeint sind.

wobei J_s die Matrix der Ordnung s bezeichnet, deren Einträge alle gleich 1 sind; und es gilt mit

$$\hat{M}_{\nu(sp)} := \begin{pmatrix} \hat{M}_{1\nu} \\ \hat{M}_{2\nu} \\ \vdots \\ \hat{M}_{m\nu} \end{pmatrix}$$

für alle $\nu = 1, \cdots, u$ (mit $\hat{M}$ wie oben definiert)

$$\hat{M}^T_{\nu(sp)}\ w_{s_\nu m} = k\ w_{b_\nu} \tag{11}$$

wobei $s_\nu m$ die Anzahl der Zeilen und b_ν die Anzahl der Spalten von $\hat{M}_{\nu(sp)}$ ist; sowie

$$\hat{M}_{\mu\nu}\ \hat{M}^T_{\mu\nu} = \hat{r}_\nu\ I_{s_\nu} \quad \text{für alle } \mu = 1, \cdots, m \tag{12}$$

mit I_{s_ν} die Einheitsmatrix der Ordnung s_ν und

$$\hat{M}_{\mu\nu}\ \hat{M}^T_{\delta\nu} = \hat{\lambda}_\nu J_{s_\nu} \quad \text{für alle } \mu, \delta = 1, \cdots, m, \ \text{mit } \mu \neq \delta, \ \ \hat{\lambda}_\nu \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

wobei J_{s_ν} die Matrix der Ordnung s_ν bezeichnet, deren Einträge alle gleich 1 sind, $\hat{r}_\nu, \hat{\lambda}_\nu \in \mathbb{N}$.

Beweis: „$\Rightarrow$“
Sei ein block-zerlegbares (s, k, λ)-divisibles Design D mit v Punkten, b Blöcken und Wiederholungszahl r gegeben, dessen innere Designs 2-balanciert sind. Da D ein divisibles Design ist, wissen wir nach Proposition 1.1.5, dass D eine Inzidenzmatrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix}$$

besitzt, die (i) $M^T\ w_v = k\ w_b$, (ii) $M_i\ M_i^T = r\ I_s$ für alle $i = 1, \cdots, m$ und (iii) $M_i\ M_j^T = \lambda J_s$ für alle $i, j = 1, \cdots, m,$ mit $i \neq j$ erfüllt. Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass die Gültigkeit dieser Gleichungen durch eine Permutation der Spalten von M nicht verändert wird. D ist nach Voraussetzung ein block-zerlegbares divisibles Design. Es existiert demnach eine Partition der Blockmenge. Wir permutieren nun die Spalten von M entsprechend dieser Partition und bezeichnen diese neue Matrix als M'. (Jede Spalte aus

Untermatrizen von M' entspricht einem Teil dieser Partition.)

$$M' = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1u} \\ M_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ M_{m1} & \cdots & & M_{mu} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die ersten drei Bedingungen aus Satz 2.2.1, indem wir $M_i := (M_{i1}\ M_{i2} \cdots M_{iu})$ mit $i = 1, \cdots, m$ definieren.

Nun definieren wir $M_{j(sp)} := \begin{pmatrix} M_{1j} \\ M_{2j} \\ \vdots \\ M_{mj} \end{pmatrix}$ für $j = 1, \cdots, u$ und entfernen jede Zeile, deren sämtliche Einträge gleich Null sind. Mit unserer obigen Definition erhalten wir folglich

$$\hat{M}_{j(sp)} := \begin{pmatrix} \hat{M}_{1j} \\ \hat{M}_{2j} \\ \vdots \\ \hat{M}_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \cdots, u,$$

was jeweils eine Inzidenzmatrix eines inneren Designs von D ist. Mit Proposition 1.1.5 und Bemerkung 1.1.6 erhalten wir daher die Bedingungen (11) bis (13).

„$\Leftarrow$“
Sei eine endliche Inzidenzstruktur D gegeben, die eine Inzidenzmatrix M von der in Satz 2.2.1 angegebenen Form besitzt, die sämtliche Bedingungen (8) bis (13) erfüllt.

Nach Proposition 1.1.5 ist D ein (s, k, λ)-divisibles Design mit v Punkten, b Blöcken, Wiederholungszahl r und jede Untermatrix

$$\hat{M}_j := \begin{pmatrix} \hat{M}_{1j} \\ \hat{M}_{2j} \\ \vdots \\ \hat{M}_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \cdots, u$$

ist eine Inzidenzmatrix eines divisiblen Unterdesigns von D, da die Punkt- und Blockmengen jeweils Teilmengen der Punkt- und Blockmengen von D

sind. Die Blockmengen dieser divisiblen Unterdesigns bilden eine Partition der Blockmenge von D, folglich ist D block-zerlegbar mit 2-balancierten inneren divisiblen Designs. □

Bemerkung 2.2.2 Sei D ein regulär block-zerlegbares divisibles Design und sei M eine Inzidenzmatrix von D mit der in Satz 2.2.1 dargestellten Form, welche die Bedingungen (8) bis (13) erfüllt. Dann können die Untermatrizen $\hat{M}_{j(sp)}, j = 1, \cdots u$ paarweise durch Zeilen- und Spaltenpermutationen ineinander überführt werden, da sie Inzidenzmatrizen paarweise isomorpher Inzidenzstrukturen sind.

Nun wenden wir uns bereits vorhandenen Konzepten zu, die sich mit inneren Strukturen von divisiblen Designs beschäftigen.

2.3 Andere Konzepte im Vergleich

In der Literatur findet man diverse Untersuchungen zu inneren Strukturen von (divisiblen) Designs. So ist es beispielsweise oft von Interesse, ob in einem gegebenen (divisiblen) Design eine regelmäßige Unterstruktur in Form eines einzelnen Designs vorhanden ist, bzw. sich (divisible) Designs in größere einbetten oder auch einschließen lassen. Einen Einblick in diesen Themenkomplex, sowie einen Einstieg in weiterführende Literatur kann man sich beispielsweise zu Designs in [5], Kapitel IX, Abschnitt 11 verschaffen. Zu divisiblen Designs sei auf die Arbeiten von S.P. Hurd, D.G. Sarvate et. al. ([45], [43], [44]) verwiesen.

Das Anliegen dieser Arbeit besteht jedoch nicht in der Untersuchung divisibler Designs hinsichtlich einer einzelnen Unterstruktur, sondern hinsichtlich ihrer Zusammensetzung. Unser Hauptaugenmerk gilt dabei wie gehabt solchen divisiblen Designs, die sich aus kleineren Designs zusammensetzen.

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Überblick über bereits vorhandene Konzepte innerer Strukturierungen von DDs gegeben werden, damit sowohl eine Einordnung der in Abschnitt 2.1 eingeführten „Block-Zerlegbarkeit", als auch deren Abgrenzung gegenüber vorhandenen Konzepten möglich wird.

Aufgrund der Fülle möglicher Ansätze, angefangen bei der ausgesprochen allgemein gehaltenen Definition einer Zerlegung eines DDs in m Faktoren (z.B. [25]) bis hin zu speziellen Partitionierungen gewisser Steiner Tripel und Steiner Quadrupel Systeme (z.B. [77]), kann es sich bei den vorgestellten Konzepten natürlich nur um eine Auswahl handeln. Dabei wurde Wert darauf gelegt, bereits international bekannte Zerlegungen von t-DDs zu erfassen, die auf einer Partitionierung der Blockmenge beruhen. Ein weiteres Auswahlkriterium bestand darin, hauptsächlich solche Strukturen zu erfassen, deren innere Elemente selbst wieder Design-Struktur tragen (dabei erfassen wir ausdrücklich auch taktische Konfigurationen, also 1-Designs). Verzichtet wird zugunsten allgemeiner Konzepte indes auf die Beschreibung von Zerlegungen einzelner, spezieller Designs (z.B. [77]), sowie von modifizierten Abarten von DDs, wie beispielsweise „incomplete double group divisible designs“(z.B. [17]).

Zunächst werden die einzelnen Konzepte kurz vorgestellt und anschließend in Beziehung zu dem Konzept der Block-Zerlegbarkeit gesetzt.[14] Zusätzlich wird in vielen Fällen ein kurzer Einblick in Historie, aktuelle Forschung und Literatur gegeben, um einen Eindruck der Entwicklung und Aktualität der Forschungsgebiete hinsichtlich dieser Konzepte zu vermitteln.

2.3.1 Zerlegung in Faktoren

Wir beginnen mit der eben schon erwähnten „Faktor-Zerlegung“, die beispielsweise von Fronček und Meszka in [25] zur Halbierung von transversalen Designs verwendet wird. Auf die von diesen Autoren geschilderte „d-Halbierbarkeit“ und „d-Zerlegbarkeit in Faktoren“ werden wir später in diesem Abschnitt noch kurz eingehen.[15]
Wir verstehen unter einem *Faktor* H eines DDs $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S)$, bei dem $\mathcal{B}_i$ eine Teilmenge von $\mathcal{B}$ ist. Eine *Zerlegung eines DDs D in m Faktoren* ist ein m-Tupel von Faktoren $H_i = (\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S)$, $i = 1, \ldots, m$, so dass $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ und $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ gilt. Nach Definition 2.1.6 ist D die Summe der H_i. Sind die Faktoren H_i selbst (divisible) Designs, so ist D block-zerlegbar und die Faktoren sind dessen innere Designs.

Als ersten wichtigen Spezialfall einer solchen Summe divisibler Designs, betrachten wir sogenannte „Large sets of disjoint DDs“.

2.3.2 Large sets of disjoint DDs

Wir bezeichnen zwei $t-(s, k, 1)$-DDs mit sw Punkten als *disjoint* (disjunkt), falls sie dieselbe Menge von Punktklassen besitzen, ihre Blockmengen jedoch disjunkt sind. Ein *Large set of disjoint* $t-(s, k, 1)$-DDs mit sw Punkten (oder $LGDD(t, k, sw; w\{s\})$, kurz $LGDD$) ist eine Menge $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_r, S)_{r \in R}$ von $t-(s, k, 1)$-DDs mit sw Punkten, die alle dieselbe Punktklassenmenge besitzen

[14] Dabei beachte man, dass wir jeweils nur an *echten* Zerlegungen interessiert sind und daher der Trivialfall nur eines einzigen inneren divisiblen Designs nicht gemeint ist, auch wenn er nicht jedesmal explizit ausgeschlossen wird.

[15] Der hier erwähnte Parameter „d“ hat mit dem auf Seite 71 definierten Parameter nichts zu tun. Da keine Verwechslung zu befürchten ist, wird er hier trotzdem verwendet.

und in der es zu jeder k-Teilmenge B von $\mathcal{P}$, für die $|B \cap G| \leq 1$ für alle $G \in S$ gilt, genau ein $r \in R$ mit $B \in \mathcal{B}_r$ gibt.

Ein $LGDD$ ist also ein block-zerlegbares vollständiges t-DD, dessen innere Designs ebenfalls divisible sind. Man beachte, dass hier der Index $\lambda = 1$ vorausgesetzt wird. Obwohl bereits in den frühen 80-er Jahren umfangreiche Untersuchungen zu Large sets of disjoint Steiner Triple Systemen stattgefunden haben ([61], [62]) wurden Large sets of disjoint DDs (mit Blockgröße $k = 3$) nicht als deren natürliche Verallgemeinerung eingeführt, sondern erstmalig Ende der 80-er Jahre im Zusammenhang mit perfekten Threshold Schemes in der Kryptographie behandelt ([78], [90]). So entspricht beispielsweise ein $(3, 3, 2w; 2w-4)$-Threshold Scheme in ([78], [90]) einem $LGDD(2, 3, 2w; w\{2\})$ (s. a. [59]). Definiert und gezielt konstruiert wurden Large sets of disjoint DDs dann von D.R. Stinson, C.C. Lindner und D. Chen [18]. Seitdem ist die Forschung zu diesen Strukturen, sowie auch zu einer etwas verallgemeinerten Fassung, in der die DDs nicht uniform sein müssen[16], bis in die jüngste Vergangenheit nicht abgerissen (z.B.. [91], [94], [18], [19], [92], [59], [11], [12], [10]). So konnte das Existenzproblem für $LGDD$ mit Blockgröße $k = 3$ letztlich von Lei ([59], Th.9) gelöst werden. Für entsprechende $LGDD$s vom Typ $2^n 4^1$ gelang Ji ([46], Th.1.3) im Jahr 2004 eine deutliche Verbesserung der bisherigen Resultate, so dass das Existenzproblem dieser $LGDD$s bis auf einige wenige mögliche Ausnahmen ebenfalls geklärt ist.

Sowohl bei Lei als auch Ji fanden sogenannte „generalized Frames“ Verwendung, welche ebenfalls zu einer für diese Arbeit interessanten Struktur führen.

2.3.3 Generalized Frames

Unter einem *generalized Frame* $F(t, k, w\{s\})$ verstehen wir eine Menge

$$\{(\mathcal{P}, \mathcal{B}_r, S) : r \in R\},$$

bei der $\mathcal{P}$ eine ws-Menge und S eine Partition von $\mathcal{P}$ in w Mengen von jeweils s Punkten (Punktklassen genannt) ist, so dass jedes $(\mathcal{P} \setminus G, \mathcal{B}_r, S \setminus G), G \in S$ ein $(t-1) - (s, k, 1)$-DD mit $s(w-1)$ Punkten ist, $(\mathcal{P}, \bigcup_{r \in R} \mathcal{B}_r, S)$ ein $t-(s, k, 1)$-DD mit sw Punkten ist und alle $\mathcal{B}_r, r \in R$ paarweise disjunkt sind.

Die Parameter müssen $2 \leq t \leq k \leq ws$ erfüllen, damit die obige Definition einen Sinn ergibt.

[16] Von besonderem Interesse sind dabei LGDD vom Typ $2^n 4^1$ mit Blockgröße $k = 3$, die ebenfalls in engem Zusammenhang zu Threshold Schemes stehen.

Ein generalized Frame $F(t, k, w\{s\})$, $2 \leq t \leq k \leq ws$, induziert also ein $t-(s, k, 1)$-DD mit sw Punkten, dessen Blockmenge sich so partitionieren läßt, dass die Teile dieser Partition zusammen mit der jeweils zugehörigen Punktmenge, sowie den jeweiligen Punktklassen selbst jeweils ein $(t-1)$-DD bilden. Nach Definition 2.1.2 ist ein von einem generalized Frame induziertes t-DD D folglich block-zerlegbar.

Dabei enthält D insgesamt $\frac{ws}{k-t+1}$ innere $(t-1)-(s, k, 1)$-DDs mit $s(w-1)$ Punkten, das heisst, es gilt $|R| = \frac{ws}{k-t+1}$ und setzen wir $R_G := \{r \in R | \mathcal{B}_r$ haben dieselbe Menge von Punktklassen $S \setminus G\}$, dann erhalten wir $|R_G| = \frac{s}{k-t+1}$ (vgl. [93]).

Für Blockgröße $k = 3$, $t = 3$ und $s > 3$ gab Ji ([46], Lemma 3.1) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines generalized Frames $F(3, 3, w\{s\})$ an. Dabei verwendete er Ergebnisse von Teirlinck [93] und Mills [65].

Generalized Frames werden, wie oben schon erwähnt, gerne für die Konstruktion weiterer Strukturen eingesetzt. So wurden sie beispielsweise von Teirlinck zur Entwicklung neuer 2-auflösbarer Steiner Quadrupel Systeme verwendet [93]. Damit kommen wir zu einer der wichtigsten und wohl am längsten untersuchten inneren Strukturierung von Designs.

2.3.4 $\mathcal{A}$-Auflösbarkeit von DDs

Die Auflösbarkeit, ein Spezialfall der $\mathcal{A}$-Auflösbarkeit, stellt eine der bekanntesten und am längsten bekannten Zerlegungen von Designs und divisiblen Designs dar. Sie verallgemeinert bei Designs das Konzept von Parallelenklassen einer affinen Ebene [5]. In nahezu jedem Buch über Designtheorie findet man Diverses zu diesem Thema (z.B. [5], [41], [71], [23], [32]).

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, begann die systematische Untersuchung von Designs bereits beim Kirkmanschen Schulmädchenproblem mit der Frage nach einem auflösbaren Steiner Tripel System [57], was man heutzutage auch oft als *Kirkman Tripel System* bezeichnet. Der Begriff des auflösbaren 'balanced incomplete block designs' (RBIBD) wurde allerdings erst 1942 von R.C. Bose eingeführt [9]. Im Jahre 1964 verallgemeinerten S.S. Shrikhande und D. Raghavarao ihn zur α-Auflösbarkeit [85]. Für $\alpha = 1$ entspricht dieser dem Begriff von Bose.

Da wir hier insbesondere an t-DDs interessiert sind, betrachten wir die α-Auflösbarkeit von t-DDs, welche eine natürliche Verallgemeinerung der α-Auflösbarkeit von Designs darstellt.

Nun kommen wir endlich zur Definition:

Wir bezeichnen ein t-DD $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ als *α-auflösbar* (oder nur *auflösbar*, falls

$\alpha = 1$ gilt), wenn sich die Bockmenge $\mathcal{B}$ in α-Parallelenklassen partitionieren läßt. Dabei verstehen wir unter einer *α-Parallelenklasse* eine Teilmenge $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, so dass jeder Punkt $P \in \mathcal{P}$ genau in α Blöcken von $\mathcal{B}'$ enthalten ist. Gilt $\alpha = 1$, dann sprechen wir einfach von einer *Parallelenklasse* des t-DDs.

Eine etwas verallgemeinerte Form der α-Auflösbarkeit ist die *$\mathcal{A}$-Auflösbarkeit*, bei der α für jeden Teil der Partition der Blockmenge einen anderen Wert annehmen kann. Formal gesprochen ist dies in [27]:

Ein t-DD $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ wird *$\mathcal{A}$-auflösbar* genannt, wenn die Blockmenge $\mathcal{B}$ eine Partition in Teilmengen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_l$ zuläßt, wobei für jedes $i = 1, 2, \ldots, l$ ein $\alpha_i \in \mathcal{A}$ existiert, so dass jeder Punkt $P \in \mathcal{P}$ genau in α_i Blöcken von $\mathcal{B}_i$ enthalten ist.

Konstruktionen zur $\mathcal{A}$-Auflösbarkeit findet man beispielsweise in [75].

Jeder zu einer α_i-Parallelenklasse $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ gehörende Faktor $(\mathcal{P}, \mathcal{B}_i, S)$ eines $\mathcal{A}$-auflösbaren t-DDs $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ (mit Blockgröße k) ist ein 1-Design, genauer ein $1-(|\mathcal{P}|, k, \alpha_i)$-Design, also eine taktische Konfiguration. Folglich ist jedes $\mathcal{A}$-auflösbare t-DD block-zerlegbar, wobei die inneren Designs jeweils taktische Konfigurationen sind.

$\mathcal{A}$-Auflösbarkeit von Designs und DDs sowie insbesondere die Spezialfälle der α-Auflösbarkeit und Auflösbarkeit sind bis heute beliebte Forschungsgegenstände geblieben.

Es gibt eine solche Fülle von Arbeiten, die sich mit unterschiedlichsten Aspekten dieser Art der Zerlegung beschäftigen, dass ein Versuch, diese hier auch nur annähernd vollständig aufzulisten, zum Scheitern verurteilt wäre. Daher seien an dieser Stelle nur einige wenige erwähnt, die sich mit der α-Auflösbarkeit von Tripel-Systemen beschäftigen. Nachdem für $\alpha = 1$ das Existenzproblem für auflösbare $t-(s, 3, 1)$-DDs mit ws Punkten durch Ergebnisse von ([2], [75], [76]) gelöst und in [98] zusammengetragen und das Spektrum α-auflösbarer $(v, 3, \lambda)$-BIBDs von Jungnickel, Mullin und Vanstone in [49] vervollständigt wurde, haben Zhang und Du im Jahr 2004 in ([98], Th.1.3) das Existenzproblem für α-auflösbare $t-(s, 3, 1)$-DDs mit ws Punkten gelöst. Dafür haben sie unter anderem sogenannte $(\lambda, \alpha; 3)$-Frames verwendet. Dabei handelt es sich um DDs, deren Blockmengen sich in gewisse partielle α-Parallelenklassen zerlegen lassen. Mit Frames werden wir uns nun ein wenig näher beschäftigen.

2.3.5 $(\lambda, \alpha; k)$-Frames

Eine *partielle α-Parallelenklasse* (auch *partial α-resolution class*) eines t-DDs $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, in der jedes Element aus $\mathcal{P}$ entweder

in genau α oder genau null Blöcken vorkommt. Die Menge der Punkte, die in einer partiellen α-Parallelenklasse nicht vorkommt, wird deren *Komplement* genannt.[17]
Ein $(\lambda, \alpha; k)$-*Frame* ist ein $t-(s, k, \lambda)$-DD, dessen Blockmenge eine Partition in partielle α-Parallelenklassen zuläßt, deren Komplemente jeweils aus einer Punktklasse des DDs bestehen.

(Es sei an dieser Stelle auch noch erwähnt, dass das zugrundeliegende DD nicht unbedingt uniform sein muss. Man kann Frames auch entsprechend allgemeiner definieren, wobei der *Typ* des Frames in so einem Fall dem Typ des zugrundeliegenden DDs entspricht[18]. Da wir jedoch ausschließlich an uniformen DDs interessiert sind, wurde auf diese allgemeinere Definition verzichtet.) Ist $\alpha = 1$, wird dieser Parameter üblicherweise nicht angegeben und wir sprechen von einem (k, λ)-Frame, dessen partielle Parallelenklassen auch manchmal als *holey parallel classes* bezeichnet werden[19] (vgl. [89], [73]).
Ist auch $\lambda = 1$, so sprechen wir von einem $\{k\}$-Frame.

Nachdem Frames bereits implizit von mehreren Autoren, angefangen bei Hanani [30], zur Konstruktion auflösbarer BIBDs verwendet worden waren ([72], [60], [48]), wurden sie von Stinson [89] erstmals formal eingeführt, um Kirkman Tripel Systeme, d.h. $(v, 3, 1)$-RBIBDs, mit Untersystemen zu konstruieren. Sein Interesse galt dabei vorwiegend $(3, 1)$-Frames, die er als *Kirkman Frames* bezeichnete. Für uniforme Kirkman Frames bestimmte er das vollständige Spektrum [89]. Seitdem ist das Interesse an Frames und deren Verwendung zur Konstruktion anderer kombinatorischer Objekte nicht abgerissen (s. z.B. [98], [46], [27], [26]).

Ebenso wie bei $\mathcal{A}$-auflösbaren DDs, bilden auch bei Frames die zu den partiellen α-Parallelenklassen gehörigen Tripel $(\mathcal{P}-G_i, \mathcal{B}_i, S-G_i)$, $G_i \in S, \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}$, jeweils eine taktische Konfiguration und damit ein 1-Design. Die Punktmengen dieser Unterstrukturen bestehen dabei jeweils aus der Punktmenge des zugrunde liegenden DDs abzüglich einer Punktklasse.[20] Damit sind $(\lambda, \alpha; k)$-Frames nach unserer Definition block-zerlegbar.

---

[17]Sagt man: Eine partielle Parallelenklasse $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ *„mit Respekt zu* $\mathcal{P}'(\subseteq \mathcal{P})$“, dann ist mit $\mathcal{P}'$ deren Komplement gemeint.

[18]Zur Def. des *Typs* eines DDs s. z.B. [5].

[19]Die Punktklassen eines solchen Frames werden dann auch häufig als „*holes*“ bezeichnet.

[20]Nun erklärt sich auch der bereits oben eingeführte Begriff des „generalized Frames“, bei dem die jeweiligen Unterstrukturen nicht nur taktische Konfigurationen, sondern selbst wieder DDs sind und generalized Frames daher eine Verallgemeinerung von Frames darstellen. Da die inneren Designs von generalized Frames nicht „nur“ 1-Designs sind, wurden sie trotzdem zuerst eingeführt.

Die nun folgende Struktur verbindet das Konzept von Frames und auflösbaren DDs.

2.3.6 (k, λ)-Semiframes

Der Begriff eines Semiframes wurde im Jahr 1988 von Rees [74] eingeführt. Er verbindet und verallgemeinert die Konzepte von Frames und auflösbaren DDs.
Ein (k,λ)-*Semiframe vom Typ* s^u ist ein $t-(s,k,\lambda)$-DD $(\mathcal{P},\mathcal{B},S)$ vom Typ[21] s^u, in welchem sich die Blockmenge $\mathcal{B}$ als eine disjunkte Vereinigung $\mathcal{B}=X\cup Y$ schreiben lässt, wobei X in partielle Parallelenklassen partitioniert werden kann, deren Komplemente Punktklassen sind und sich Y in Parallelenklassen aufteilen lässt.

Man beachte, dass ein solches Design ein RGDD ist, falls $X = \emptyset$ gilt, während es bei $Y = \emptyset$ ein Frame ist.

Ein Semiframe, in welchem weder X noch Y der leeren Menge entspricht, wird als *echt* bezeichnet.

In den letzten Jahren wurden echte Semiframes von verschiedenen Autoren konstruiert und zum Beispiel bei der Konstruktion anderer Typen kombinatorischer Designs (s. z.B. [74], [73], [51], [47]), sowie in Verbindung zur Codierungstheorie eingesetzt [52].

Wie bereits festgestellt, sind sowohl die zu Parallelenklassen als auch die zu partiellen Parallelenklassen gehörigen Unterstrukturen eines DDs taktische Konfigurationen. Daher sind auch Semiframes block-zerlegbar.

Nun folgt eine Zerlegung, die sich von den bereits betrachteten stark unterscheidet. Da die Herangehensweise hier algebraischer Natur ist und wir die Zerlegung relativer Differenzenmengen behandeln, erfolgt zunächst eine kurze Einführung in die zugehörige Terminologie.

2.3.7 Zerlegung von Differenzenmengen

In diesem Abschnitt werden Zerlegungen von Differenzenmengen beschrieben, die auf Jungnickel [50] zurückgehen. Differenzenmengen stehen in enger Verbindung zu symmetrischen Designs, die eine Singergruppe als Automorphismengruppe besitzen. Jungnickel charakterisiert solche symmetrischen Designs mit einer Singergruppe G, die eine quasi-reguläre G-invariante

[21] Da wir in dieser Arbeit ausschließlich uniforme DDs betrachten, wird im Folgenden darauf verzichtet, den Typ des Semiframes bzw. DDs anzugeben.

Partition in *„stark induzierte symmetrische Unterdesigns“* zulassen ([50], Prop. 2.3 und Theorem 2.6).

Wie wir sehen werden, gibt es große Unterschiede zum Konzept der Block-Zerlegbarkeit, obwohl dies zunächst nicht so scheinen mag. Der entscheidende Unterschied besteht darin, dass hier nicht die Blockmenge unterteilt wird, sondern im Allgemeinen die Blöcke an sich in verschiedene kleine Teile partitioniert werden. Trotzdem bzw. gerade deswegen wird dieses Konzept vorgestellt. Es bietet einen Ausblick auf eine vollkommen andere Konzeption der Zerlegung von Designs.

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung der für diese Art der Zerlegung relevanten Begriffe und Ergebnisse. Auf die meisten Beweise wird dabei verzichtet. Sie können zusammen mit weiteren Informationen zu diesem Thema zum Beispiel in [5] gefunden werden.

Definition 2.3.1 Sei G eine beliebige endliche Gruppe (multiplikativ geschrieben) und D$\neq \emptyset$ eine beliebige Teilmenge von G. Dann nennt man die Inzidenzstruktur

$$\mathrm{dev}\ \mathrm{D} := (G, \mathcal{B}, \in) \quad \text{mit} \quad \mathcal{B} := \{\mathrm{D}g \mid g \in G\}$$

das *„development“* von D.

Man beachte, dass dev D=dev (Da) für jedes $a \in G$ gilt.

Definition 2.3.2 Sei G eine multiplikative Gruppe der Ordnung v und D eine k-Teilmenge von G. Man nennt D eine (v, k, λ)-*Differenzenmenge*, falls die *Liste der Differenzen*[22]

$$d\, e^{-1} \quad (d, e \in \mathrm{D}, d \neq e)$$

jedes Element $g \neq 1$ genau λ mal enthält.

Der nächste Satz stellt eine Verbindung zwischen Differenzenmengen mit $0 < k < v$ und regulären symmetrischen (v, k, λ)-Designs her.

Theorem 2.3.3 *([5], VI, S.299) Sei G eine endliche Gruppe und D eine echte, nicht-leere Teilmenge von G. Dann ist D genau dann eine* (v, k, λ)*-Differenzenmenge, wenn* dev D *ein symmetrisches* (v, k, λ)*-Design ist, welches regulär bezüglich G ist. Darüber hinaus kann jedes reguläre symmetrische* (v, k, λ)*-Design auf diese Weise repräsentiert werden.*

[22]Ursprünglich wurde G als additive Gruppe angenommen, daher rührt die Bezeichnung „Differenzenmenge“.

Im Beweis von Satz 2.3.3, der in ([5], VI, S.299) nachgelesen werden kann, wird deutlich, dass man die Differenzenmenge D als eine Art *Startblock* des zugehörigen symmetrischen Designs betrachten kann.[23]
Die etwas allgemeiner gehaltenen *relativen Differenzenmengen* definieren wir wie folgt.

Definition 2.3.4 Seien G eine multiplikative Gruppe der Ordnung mn, N eine normale Untergruppe von G der Ordnung n und R eine k-Teilmenge von G, wobei $0 < k < mn$ gilt. Man nennt R eine *relative* (m, n, k, λ)-*Differenzenmenge* (kurz, eine (m, n, k, λ)-RDS) in G relativ zu N, falls die *Liste der Differenzen*

$$r\,h^{-1} \quad (r, h \in R, r \neq h)$$

kein Element aus N und jedes Element aus $G \setminus N$ genau λ mal enthält.

Im Fall $n = 1$ entspricht die RDS einer gewöhnlichen Differenzenmenge. Eine RDS mit $n \neq 1$ wird daher als *echt* bezeichnet.

Bemerkung 2.3.5 Wie beispielsweise von Jungnickel in [50] gezeigt, gibt es zwischen relativen Differenzenmengen und bestimmten divisiblen Designs eine ähnliche Verbindung wie zwischen Differenzenmengen und symmetrischen Designs (vgl. Satz 2.3.3).

Nun wird eine Art Unterstruktur eines symmetrischen Designs eingeführt, die bei der in diesem Abschnitt betrachteten Zerlegung Verwendung finden wird und sich stark von der in Definition 2.1.1 angegebenen unterscheidet.

Definition 2.3.6 Sei $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \in)$ ein symmetrisches (v, k, λ)-Design und sei U eine Teilmenge von $\mathcal{P}$. Dann wird die Inzidenzstruktur

$$\mathcal{U} := (U, B_U, \in) \text{ mit } B_U := \{U \cap B \mid B \in \mathcal{B}, U \cap B \neq \emptyset\}$$

eine *stark induzierte Unterstruktur* von D genannt.

Ist $\mathcal{U}$ ein symmetrisches Design, dann nennen wir es ein *stark induziertes symmetrisches Unterdesign*.

Im Allgemeinen bestehen die Blöcke einer solchen Unterstruktur lediglich aus Teilblöcken der Originalstruktur. Ein stark induziertes symmetrisches Unterdesign eines gegebenen Designs D ist daher nur dann ein Unterdesign von D in der Bedeutung von Definition 2.1.1, wenn $U \cap B = B$ für sämtliche $B \in \mathcal{B}$ gilt, für die $U \cap B \neq \emptyset$.

[23] Vgl. Konstruktionen mit *Startblock* in Abschnitt 3.1.

Das folgende Ergebnis, welches im Wesentlichen auf Pott zurückgeht [70], enthält implizit eine Art der Konstruktion von großen Differenzenmengen, die eine Zerlegung zulassen.

Proposition 2.3.7 *([50]) Angenommen es existiert sowohl eine relative (w, v, l, α)-Differenzenmenge in einer Gruppe G relativ zu einer normalen Untergruppe N, als auch eine (v, k, λ)-Differenzenmenge in N. Wenn gilt*

$$k^2\alpha = l\lambda,$$

dann existiert auch eine $(vw, kl, \lambda l)$-Differenzenmenge in G.

Im Beweis dieser Proposition (s. [50]) wird die gegebene relative Differenzenmenge mit R und die Differenzenmenge mit S bezeichnet. Es wird gezeigt, dass $D := SR$ die gewünschte Differenzenmenge in G ist.
Warum das Paar (S, R) eine *Zerlegung* der großen Differenzenmenge D genannt wird, sollte mit der nächsten Proposition klar werden. Zum leichteren Verständnis wird der Beweis dieser Proposition angegeben (vgl. [50]).

Proposition 2.3.8 *([50], Prop. 2.3) Sei $D = SR \subseteq G$ eine Differenzenmenge mit Zerlegung, die wie in Proposition 2.3.7 konstruiert wurde und sei $\mathbf{D} = \mathrm{dev}\ \mathrm{D}$ das zugehörige symmetrische Design. Dann lässt $\mathbf{D}$ eine G-invariante Zerlegung in stark induzierte symmetrische Unterdesigns zu, die jeweils isomorph zu $\mathbf{S} = \mathrm{dev}\ S$ sind.*

Beweis:[50] Es ist offensichtlich ausreichend zu zeigen, dass die Blöcke von $\mathbf{D}$ ein zu $\mathbf{S}$ isomorphes Design auf der Punktmenge N induzieren. Nach Konstruktion lässt sich D als disjunkte Vereinigung von Translaten von S schreiben:

$$\mathrm{D} = Sr_1 \cup \ldots \cup Sr_l,$$

wobei $R = \{r_1, \ldots, r_l\}$. Ein beliebiger Block von $\mathbf{D}$ ist folglich von der Form

$$\mathrm{D}g = Sr_1g \cup \ldots \cup Sr_lg \subseteq Nr_1g \cup \ldots \cup Nr_lg$$

und wir müssen seinen Schnitt mit N untersuchen. Dieser Schnitt ist natürlich leer, falls alle Nebenklassen Nr_jg von N verschieden sind. Ansonsten existiert eindeutig ein Index i mit $Nr_ig = N$. Dies kommt genau dann vor, wenn r_i in derselben Nebenklasse nach N wie g^{-1} liegt. (Man beachte, dass es in der Tat höchstens einen solchen Index i gibt, da R eine Differenzenmenge relativ zu N ist.) Folglich haben wir

$$\mathrm{D}g \cap N = Sr_ig \Leftrightarrow Ng^{-1} = Nr_i.$$

Es reicht festzustellen, dass alle möglichen Translate Sn ($n \in N$) von S tatsächlich unter den Schnitten $\mathrm{D}g \cap N$ vorkommen, was aus der obigen Beobachtung folgt, indem $g = r_i^{-1}n$ gewählt wird. □

Theorem 2.6. in [50] führt nun zu der Eingangs erwähnten Charakterisierung.

2.3.8 *d*-Halbierbarkeit und *d*-Zerlegbarkeit in Faktoren

'Last but not least' kommen wir nun zu einer Art der Zerlegung, bei der erstmals zugehörige Permutationsgruppen eine Rolle spielen.

Was wir unter einer Zerlegung in m Faktoren verstehen, wurde bereits in Abschnitt 2.3.1 definiert. Nun wird unter anderem erläutert, was man unter einem Isomorphismus zwischen zwei Faktoren und damit einer isomorphen Zerlegung versteht. Dabei verwenden wir Bezeichnungen und Definitionen von Fronček und Meszka [25]. Diese setzen voraus, dass das DD, welches in Faktoren zerlegt wird, vom Index 1 ist. Dies tun wir daher ebenfalls.
Zwei Faktoren H_i und H_j sind *isomorph* (in Zeichen $H_i \cong H_j$), falls eine bijektive Abbildung ϕ_{ij} der zugehörigen Punktmenge $\mathcal{P}$ auf sich selbst existiert, so dass $B' = \{\phi_{ij}(x_1), \phi_{ij}(x_2), \ldots, \phi_{ij}(x_k)\}$ genau dann ein Block von H_j ist, wenn $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ein Block von H_i ist. Eine Zerlegung wird *isomorph* genannt, falls $H_i \cong H_j$ für jedes Paar $i, j, 1 \leq i < j \leq m$ gilt.

Ein *Weg* P_q der Länge q ist eine Sequenz $x_0, B_1, x_1, B_2, x_2, \ldots, B_q, x_q$, bestehend aus Punkten und Blöcken, bei der für jedes $i = 1, \ldots, q$ die Punkte x_{i-1} und x_i zum Block B_i gehören und kein Block oder Punkt mehr als einmal vorkommt. Der *Abstand* zweier Punkte x und y in einem Faktor entspricht der Länge des kürzesten Weges von x nach y. Ein Faktor H ist *zusammenhängend*, falls es zu jedem Paar (x, y), $x, y \in \mathcal{P}$ einen Weg von x nach y gibt. Ansonsten ist H *nicht zusammenhängend*. Der *Durchmesser* eines zusammenhängenden Faktors H ist das Maximum der Menge der Abstände aller Punktepaare von H.
Ein DD wird *d-zerlegbar* genannt, falls es in zwei Faktoren zerlegt werden kann, die denselben Durchmesser d besitzen und *d-halbierbar*, falls es in zwei isomorphe Faktoren mit demselben Durchmesser d zerlegt werden kann.

Das Problem der Halbierung wurde bereits 1987 in [31] für vollständige Designs behandelt. Es folgten Untersuchungen an Steiner Tripel und Steiner Quadrupel Systemen ([22], [68]). In [25] werden d-halbierbare und d-zerlegbare DDs untersucht, wobei ein Hauptaugenmerk dabei den TDs gilt. Insbesondere wird auch der Zusammenhang zur Existenz bestimmter Graphen deutlich ([25], Th. 1.1). Obwohl es durchaus wahrscheinlich ist, dass auch die Block-Zerlegbarkeit eines DDs Zusammenhänge mit der Graphentheorie bietet, soll in der vorliegenden Arbeit dieser Aspekt nicht weiter verfolgt werden.

Sind die einzelnen Faktoren eines d-zerlegbaren oder d-halbierbaren DDs selbst keine Designs, so sind diese DDs nicht block-zerlegbar.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Block-Zerlegbarkeit eine gemeinsame „Klammer“ um verschiedenste Konzepte der Zerlegung von t-DDs bildet, die auf einer Partitionierung der Blockmenge beruhen. So sind von den hier beispielhaft angeführten Konzepten sowohl die Large sets of disjoint DDs, generalized Frames, Frames, Semiframes, $\mathcal{A}$-auflösbare DDs als auch allgemein Summen divisibler Designs block-zerlegbar. Dass es auch andere Konzepte zur Zerlegung von t-DDs gibt, die keine Block-Zerlegbarkeit beinhalten, sieht man anhand der letzten beiden Beispiele.

In Kapitel 3 werden divisible Designs vorgestellt, die ebenfalls die interessante innere Struktur der Block-Zerlegbarkeit aufweisen, aber in keines der bisher bekannten Konzepte passen.