

# 1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit wichtigsten Inzidenzstrukturen vorgestellt. Dabei beginnen wir zunächst sehr allgemein mit der Beschreibung, um was es sich bei einer Inzidenzstruktur überhaupt handelt, wie man sie beschreiben kann und was man unter isomorphen Strukturen versteht. Anschließend definieren wir spezielle Inzidenzstrukturen, angefangen bei sogenannten *divisiblen Designs*, deren innere Strukturen einen Schwerpunkt dieser Arbeit bilden werden. Nachdem einige elementare Begriffe und Resultate eingeführt, sowie einfache Beispiele gegeben wurden, widmen wir uns zwei wichtigen Spezialfällen divisibler Designs, den *t-Designs* und den *taktischen Konfigurationen*.

Weitere Informationen zu diesem Themenbereich findet man in jedem Buch über Designtheorie, beispielsweise in [5], [41], [23] und [32].

## 1.1 Einige Inzidenzstrukturen

Eine *endliche Inzidenzstruktur*  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  besteht aus drei endlichen Mengen, einer sogenannten *Punktmenge*  $\mathcal{P}$ , einer *Blockmenge*  $\mathcal{B}$  (wobei  $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset!$ ) und einer Teilmenge  $I$  des kartesischen Produkts dieser beiden Mengen. Wir bezeichnen die Elemente von  $\mathcal{P}$  als *Punkte* und diejenigen von  $\mathcal{B}$  als *Blöcke*. Man nennt einen Punkt  $P \in \mathcal{P}$  und einen Block  $B \in \mathcal{B}$  *inzident*, falls  $(P, B) \in I$  gilt. Andernfalls sind sie *nicht-inzident*. Anstelle von  $(P, B) \in I$  ( $(P, B) \notin I$ ) schreiben wir auch  $PIB$  ( $P\bar{I}B$ ).

Die Anzahl der Punkte bezeichnen wir üblicherweise<sup>3</sup> als  $v$  und die Anzahl der Blöcke als  $b$ . Eine endliche Inzidenzstruktur mit  $v = b$  wird *quadratisch* genannt. Wir bezeichnen die Anzahl der Blöcke, die mit einem Punkt  $P \in \mathcal{P}$  inzident sind, als den *Grad* von  $P$ . Der *Grad* eines Blockes  $B$  aus  $\mathcal{B}$  wird analog als die Anzahl der Punkte definiert, die mit diesem inzidieren.

Wenn es keine unterschiedlichen Blöcke gibt, welche dieselbe Punktmenge besitzen - sogenannte *Mehrfachblöcke* - können wir jeden Block eindeutig mit seiner Punktmenge identifizieren. Eine Inzidenzstruktur ohne Mehrfachblöcke nennt man *einfach*. Alle in dieser Arbeit betrachteten Inzidenzstrukturen werden endlich<sup>4</sup> und einfach sein.

---

<sup>3</sup>Das „v“ steht für „varieties“ und lässt noch statistische Wurzeln der Design Theorie erkennen.

<sup>4</sup>Bei einer nicht-endlichen Inzidenzstruktur ist mindestens eine der Mengen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{B}$  nicht endlich.

## Inzidenzmatrizen

Inzidenzstrukturen lassen sich beispielsweise durch Inzidenzmatrizen darstellen. Bezeichnen wir die Punkte einer Inzidenzstruktur  $D$  als  $P_1, \dots, P_v$  und die Blöcke als  $B_1, \dots, B_b$ , dann nennen wir die  $(v \times b)$ -Matrix  $M = (m_{i,j})$  ( $i = 1, \dots, v; j = 1, \dots, b$ ), definiert durch

$$m_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } P_i I B_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine *Inzidenzmatrix* von  $D$ . Die zu einem Block  $B$  gehörige Spalte von  $M$  wird der *Inzidenzvektor* von  $B$  genannt. Eine Inzidenzmatrix ist bis auf Zeilen- und Spaltenpermutationen eindeutig. Umgekehrt bestimmt jede  $(v \times b)$ -Matrix mit Einträgen aus  $\{0, 1\}$  eine Inzidenzstruktur mit  $v$  Punkten und  $b$  Blöcken.

## Isomorphismen und Automorphismen von Inzidenzstrukturen

Zwei Inzidenzstrukturen, deren zugehörige Inzidenzmatrizen durch Zeilen- und Spaltenpermutationen ineinander überführt werden können, sind *isomorph* (s. Def. 1.1.1).

Umgekehrt besitzen Inzidenzmatrizen zweier beliebiger isomorpher Inzidenzstrukturen diese Eigenschaft (s. z.B. [5]). Diese Beschreibung mit Hilfe von Inzidenzmatrizen entspricht der folgenden Definition eines Isomorphismus.

**Definition 1.1.1** Seien  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  und  $D' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$  Inzidenzstrukturen und sei  $\pi : \mathcal{P} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}' \cup \mathcal{B}'$  eine Bijektion.  $\pi$  wird genau dann als ein *Isomorphismus* bezeichnet, wenn gilt:

- (i)  $\mathcal{P}^\pi = \mathcal{P}'$  und  $\mathcal{B}^\pi = \mathcal{B}'$
- (ii)  $PIB \Leftrightarrow P^\pi I' B^\pi$  für alle  $P \in \mathcal{P}$  und alle  $B \in \mathcal{B}$ .

Man beachte, dass jede beliebige einfache Inzidenzstruktur  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  isomorph zu  $(\mathcal{P}, \{(B) \mid B \in \mathcal{B}\}, \in)$  mit  $(B) := \{P \mid P \in B\}$  ist. Das bedeutet, die Inzidenzrelation stimmt mit der Enthaltenseinsrelation „ $\in$ “ überein, falls wir jeden Block  $B \in \mathcal{B}$  mit seiner eigenen Punktmenge  $(B)$  identifizieren, folglich gilt dann

$$PIB \Leftrightarrow P \in B.$$

Da in dieser Arbeit ausschließlich einfache Inzidenzstrukturen behandelt werden, betrachten wir jeden Block als Teilmenge der Punktmenge. Infolgedessen können wir auf die Angabe von  $I$  verzichten und schreiben, falls  $P \in B$  gilt: „ $P$  liegt in  $B$ “ oder „ $B$  geht durch  $P$ “.

Der Isomorphismus  $\pi$  aus Definition 1.1.1 wird *Automorphismus* genannt, falls  $D = D'$  gilt. Die Menge aller Automorphismen einer gegebenen Inzidenzstruktur  $D$  bilden eine Gruppe - die sogenannte *volle Automorphismengruppe* von  $D$ . Diese bezeichnen wir als  $\text{Aut}D$ . Jede Untergruppe von  $\text{Aut}D$  nennen wir eine *Automorphismengruppe* von  $D$ .

Operiert eine Automorphismengruppe  $G$  einer quadratischen Inzidenzstruktur  $D$  regulär (scharf transitiv) auf der Punktmenge  $\mathcal{P}$  und der Blockmenge  $\mathcal{B}$ , dann wird  $D$  *regulär* und  $G$  eine *Singergruppe* von  $D$  genannt.

Wir interessieren uns normalerweise für Inzidenzstrukturen mit bestimmten Eigenschaften. Diese sind üblicherweise durch Regelmäßigkeiten innerhalb der Struktur bedingt. Oftmals können diese Regelmäßigkeiten direkt an einer zugehörigen Inzidenzmatrix abgelesen werden oder sie lassen sich mit Hilfe von Eigenschaften einer Automorphismengruppe der Inzidenzstruktur beobachten.

Man unterscheidet anhand solcher Regelmäßigkeiten verschiedene Arten von Inzidenzstrukturen, von denen im Folgenden einige vorgestellt und anhand einfacher Beispiele illustriert werden. Wir beginnen mit der Betrachtung *divisibler Designs*.

### 1.1.1 Divisible Designs

Sei eine Punktmenge  $\mathcal{P}$  gegeben. Auf  $\mathcal{P}$  gebe es eine Partition, die auf einer auf den Punkten gegebenen Äquivalenzrelation  $R$  beruht bzw. eine solche induziert. Wir bezeichnen eine Äquivalenzklasse, die das Element  $x \in \mathcal{P}$  enthält, mit  $[x]$  und definieren  $S := \{[x] \mid x \in \mathcal{P}\}$ . Eine nicht-leere Teilmenge  $B$  von  $\mathcal{P}$  nennen wir *R-transversal*, falls diese jeweils höchstens ein Element aus einer Äquivalenzklasse enthält. Man beachte, dass eine *R-transversale* Teilmenge von  $\mathcal{P}$  nicht aus jeder Äquivalenzklasse ein Element enthalten muss. Wir definieren nun ein *t-divisibles Design* wie folgt:

**Definition 1.1.2** (*t-divisibles Design*<sup>5</sup>, *t-DD*) Seien  $t, s, k, \lambda_t$  natürliche Zahlen mit

$$t \leq k < v := |\mathcal{P}|.$$

Ein Tripel  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{S})$  wird *t-(s, k,  $\lambda_t$ )-divisibles Design* (oder *t-(s, k,  $\lambda_t$ )-DD* oder *t-DD*) genannt, falls gilt:

- (1)  $\mathcal{B}$  ist eine Menge *R-transversaler* Teilmengen von  $\mathcal{P}$  mit  $|B| = k$  für alle  $B \in \mathcal{B}$ ;

- (2)  $||x|| = s$  für alle  $x \in \mathcal{P}$ ;
- (3) Zu jeder  $R$ -transversalen  $t$ -Teilmenge  $Y$  von  $\mathcal{P}$  existieren genau  $\lambda_t$  Elemente aus  $\mathcal{B}$ , die  $Y$  enthalten;
- (4)  $t \leq \frac{v}{s}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{P}$  nennen wir *Punkte*, die von  $\mathcal{B}$  *Blöcke* und die Elemente von  $\mathcal{S}$  *Punktclassen*.

Im Folgenden wird gelegentlich bei der Angabe einer Punktclassen die Bezeichnung des zugehörigen divisiblen Designs als Index hinzugefügt. So bezeichnet beispielsweise  $[P]_D$  die Punktclassen des divisiblen Designs  $D$ , welche den Punkt  $P$  enthält.

Man beachte, dass manche Autoren auch von *group divisible designs* (GDD) sprechen, da die Punktclassen von DDs ursprünglich als *Gruppen* bezeichnet wurden (s. z.B. Beth et al. [5], [23], [20]). Zur Abgrenzung gegenüber dem mathematischen Begriff einer *Gruppe*, mit der diese Punktclassen nichts als den Namen gemeinsam haben, wurde in [4] die Schreibweise „*group divisible design*“ eingeführt, welche sich jedoch nicht durchsetzen konnte.

In dieser Arbeit verwenden wir die Bezeichnung *divisibles Design* (DD). Falls keine Verwechslungen oder Unklarheiten zu befürchten sind, verzichten wir gegebenenfalls auf die (vollständige) Angabe der Parameter.

Unter den *Parametern* eines DDs verstehen wir die natürlichen Zahlen  $t, v, k, \lambda_t$ , sowie  $b$  und  $r$ . Der Parameter  $r$  wird als *Wiederholungszahl* (*replication number*) bezeichnet und gibt den, wie man zeigen kann, konstanten Grad aller Punkte an. Der gemeinsame Grad aller Blöcke wird durch den Parameter  $k$  beschrieben. In diesem Zusammenhang sprechen wir oft auch von der *Größe*  $k$  der Blöcke. Der Parameter  $\lambda_t$  wird als der *Index* des DDs bezeichnet und man sagt, das DD ist  *$t$ -balanciert*. Gilt  $t = 2$ , verzichten wir üblicherweise auf diesen Parameter, schreiben lediglich  $(s, k, \lambda)$ -DD und sprechen von einer *balancierten Inzidenzstruktur*.

Ein  $(s, k, \lambda)$ -DD mit  $k = \frac{v}{s}$  ( $k \geq 2$ ) nennen wir ein *transversales Design*  $\text{TD}_\lambda[k; s]$  (kurz: TD). Bekanntlich ist die Existenz eines  $\text{TD}_\lambda[k; s]$  äquivalent zur Existenz von  $k - 2$  paarweise orthogonalen Lateinischen Quadraten (MOLS) (s. z.B. [5], VIII, Lemma (4.6)).

Nicht für jede Parameterkombination gibt es ein  $t - (s, k, \lambda_t)$ -DD. Dessen Existenzfrage kann im Allgemeinen nicht beantwortet werden, obwohl sich schon eine Vielzahl von Arbeiten mit der Existenz von DDs beschäftigen.

---

<sup>5</sup>Es sei bemerkt, dass einige Autoren DDs etwas allgemeiner formulieren, so dass die hier angegebene Definition (mit  $t = 2$ ) einen Spezialfall dieser DDs darstellt (s. z.B. [5], [23], [20]).

Es ist daher nach wie vor von Interesse, neue Parameterkombinationen und damit bislang nicht bekannte DDs zu finden.

Die Parameter eines DDs sind keineswegs unabhängig voneinander. Dies wird beispielsweise in Theorem 1.1.3 deutlich, mit dessen Hilfe wir sowohl  $r$  als auch  $b$  berechnen können (s.u.). Diese beiden Parameter werden daher in Definition 1.1.2 nicht erwähnt.

**Theorem 1.1.3** *Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, S)$  ein  $t - (s, k, \lambda_t)$ -DD mit  $t \geq 2$  und sei  $i$  eine natürliche Zahl mit  $1 \leq i \leq t$ . Dann ist  $D$  ebenfalls ein  $i - (s, k, \lambda_i)$ -DD mit*

$$\lambda_i = \lambda_t \frac{\binom{vs^{-1}-i}{t-i} s^{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}. \quad (1)$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man beispielsweise in [34]. Er beruht auf doppelter Abzählung.

Nach diesem Satz wissen wir, dass jedes  $t$ -DD ( $t \geq 1$ ) auch ein 1-DD ist. Demnach besitzen alle Punkte denselben Grad. Dieser entspricht, wie bereits erwähnt, der Wiederholungszahl  $r$ , es gilt also

$$r = \lambda_1.$$

Für die Berechnung von  $b$ , der Anzahl der Blöcke eines  $t$ -DDs, können wir folgende Formel festhalten (s. z.B. [34], (2.1.9)):

$$b := |\mathcal{B}| = \lambda_t \frac{\binom{vs^{-1}}{t} s^t}{\binom{k}{t}}.$$

Man beachte, dass dies dem Einsetzen von  $i = 0$  in (1) entspricht.

Im Spezialfall  $t = 2$  erfüllen die Parameter eines  $(s, k, \lambda)$ -DDs demnach die beiden Gleichungen:

$$r(k - 1) = \lambda(v - s)$$

und

$$vr = bk,$$

woraus sich folgende notwendige Bedingungen für die Existenz eines  $(s, k, \lambda)$ -DDs ergeben.

**Korollar 1.1.4** *(Cor. 6.14, [5]) Die folgenden Bedingungen sind für die Existenz eines  $(s, k, \lambda)$ -DDs mit  $v$  Punkten notwendig.*

$$\lambda(v - s) \equiv 0 \pmod{k - 1}; \quad (2)$$

$$\lambda v(v - s) \equiv 0 \pmod{k(k - 1)}; \quad (3)$$

$$v \equiv 0 \pmod{s}, \quad v \geq ks. \quad (4)$$

Es gibt natürlich auch Parameterkombinationen für die es auf jeden Fall ein zugehöriges DD gibt. Die Existenz dieser DDs ist so offensichtlich, dass wir sie als *trivial* bezeichnen. Die Blöcke können beispielsweise jeweils aus einem einzigen Punkt bestehen, damit haben wir ein  $1 - (s, 1, \lambda_1)$ -DD mit  $b = v$ . Dies ist ein Spezialfall eines sogenannten *vollständigen* DDs, dessen Blockmenge aus sämtlichen  $R$ -transversalen  $k$ -Teilmengen der Punktmenge besteht.

### Inzidenzmatrizen divisibler Designs:

Ein 2-balanciertes divisibles Design kann anhand einer seiner Inzidenzmatrizen charakterisiert werden. In [5] ist eine solche Charakterisierung angegeben ([5], Proposition 6.2, S. 33), wobei sich diese jedoch auf eine etwas allgemeinere Definition eines divisiblen Designs bezieht, als die hier verwendete. Die folgende Proposition entspricht der oben genannten aus [5], ist jedoch auf die hier definierten divisiblen Designs (s. Definition 1.1.2) bezogen.

Eine  $(v \times 1)$ -Matrix, deren Einträge alle gleich Eins sind, bezeichnen wir darin als  $w_v$ .

**Proposition 1.1.5** *Eine endliche Inzidenzstruktur  $D$  ist genau dann ein  $(s, k, \lambda)$ -DD mit  $v$  Punkten,  $b$  Blöcken und Wiederholungszahl  $r$ , wenn sie eine Inzidenzmatrix  $M$  der Form*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix}$$

besitzt, die folgende drei Bedingungen erfüllt:

$$M^T w_v = k w_b, \tag{5}$$

$$M_i M_i^T = r I_s \quad \text{für } i = 1, \dots, m \tag{6}$$

mit  $I_s$  der Einheitsmatrix der Ordnung  $s$  und

$$M_i M_j^T = \lambda J_s \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m \text{ und } i \neq j, \tag{7}$$

wobei  $J_s$  die Matrix der Ordnung  $s$  bezeichnet, deren Einträge alle gleich 1 sind; und wobei  $v, k, \lambda, s, b$  und  $r$  natürliche Zahlen mit  $\lambda > 0$ ,  $1 < k < v - 1$  und  $2 \leq vs^{-1}$  sind.

Wir geben eine *Beweisskizze* an: Bedingung (5) beschreibt die Tatsache, dass in jeder Spalte von  $M$  genau  $k$  Einträge gleich 1 sind, was äquivalent zu einer konstanten Blockgröße  $k$  von  $D$  ist. Bedingungen (6) und (7)

können unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir hier eine speziellere Inzidenzstruktur haben, auf die beiden in Proposition 6.2 in [5] angeführten Bedingungen zurückgeführt werden.

**Bemerkung 1.1.6** Man beachte, dass jede Inzidenzmatrix eines divisiblen Designs, dessen Zeilen entsprechend den zugehörigen Punktklassen angeordnet sind, die in Proposition 1.1.5 angegebenen Bedingungen erfüllt und vice versa.

### Einfache Beispiele divisibler Designs:

Nun betrachten wir einige einfache und anschauliche Beispiele divisibler Designs, die erstens zeigen, dass man sich schon sehr lange mit Objekten beschäftigt, die eine solche Struktur tragen und zweitens einen Zusammenhang zu anderen Gebieten der Mathematik, wie der Geometrie, der Graphentheorie, sowie auch der affinen und projektiven Geometrie aufzeigen. Dass auch zur Codierungstheorie ein enger Bezug besteht, wird in Kapitel 6 dargestellt.

(a) Wir beginnen mit der Betrachtung einer sehr berühmten Konfiguration, der *Pappos Konfiguration* (PAPPOS von Alexandria, ca. 300 n. Chr.) in der reellen projektiven Ebene.

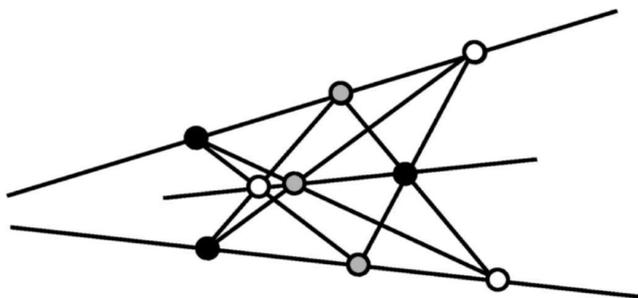


Abbildung 1: Die Pappos Konfiguration.

Sie besteht aus den in Abbildung 1 dargestellten 9 Punkten und 9 Geraden. Fassen wir die in dieser Darstellung „in gleicher Farbgebung dargestellten“ Punkte jeweils zu einer Punktklasse zusammen und betrachten die 9 Punkte als Punkte unseres DDs, sowie die Geraden der Konfiguration als Blöcke, kann man diese Inzidenzstruktur als  $2$ - $(3,3,1)$ -DD auffassen.

(b) Als weiteres Beispiel, diesmal aus der Graphentheorie, betrachten wir den sogenannten Petersen Graph (s. Abb. 2).

Identifizieren wir die Ecken des Graphen mit den Punkten, die Kanten mit den Blöcken und die in „gleicher Weise dargestellten“ Ecken, jeweils als

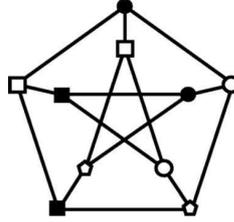


Abbildung 2: Der Petersen Graph.

zu einer Punktclassen gehörige Punkte, können wir den Petersen Graph als  $2-(2,2,1)$ -DD interpretieren.

(c) Als nächstes anschauliches Beispiel betrachte man nun eine affine Ebene der Ordnung 3. Eine solche 9-Punkte-Ebene ist in Abbildung 3 (linke Zeichnung) skizziert dargestellt. Die Geraden entsprechen den Verbindungslinien von jeweils drei Punkten, wobei die entsprechende Zugehörigkeit in der rechten Abbildung verdeutlicht wird. Hier stellen die letzten beiden „Punktspalten“ (farblos) Kopien der ersten beiden dar, so dass die Punkte einer Geraden jeweils auf einer geradlinig verlaufenden Verbindungslinie liegen.

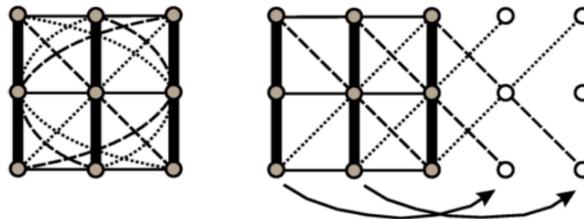


Abbildung 3: Affine Ebene der Ordnung 3.

Diese Ebene kann als  $2-(3,3,1)$ -DD mit  $v = 9$  Punkten aufgefasst werden, indem die Punkte der Ebene als Punkte des DDs, die Geraden einer beliebigen, jedoch fest bestimmten Parallelenklasse (welche in Abbildung 3 als dicke Linien gekennzeichnet sind) als Punktclassen und die verbleibenden Geraden der Ebene als Blöcke interpretiert werden. Man kann leicht nachprüfen, dass sämtliche Bedingungen aus Definition 1.1.2 erfüllt sind.

Verallgemeinert kann man feststellen, dass jede endliche affine Ebene der Ordnung  $q$  ( $q$  Primzahlpotenz) auf entsprechende Weise als  $2-(q, q, 1)$ -DD interpretiert werden kann. Wird keine der Parallelenklassen ausgezeichnet und als Menge der Punktclassen interpretiert, sondern jeder Punkt als elementare Punktclassen angesehen, kann eine affine Ebene der Ordnung  $q$

entsprechend auch als  $2 - (1, q, 1)$ -DD mit  $v = q^2$  Punkten aufgefasst werden. Speziell kann man also die obige 9-Punkte-Ebene als  $2 - (1, 3, 1)$ -DD betrachten. Ebenso kann man eine endliche projektive Ebene der Ordnung  $q$  als  $2 - (1, q + 1, 1)$ -DD mit  $v = q^2 + q + 1$  Punkten ansehen.

Die letzten beiden Beispiele bilden jeweils einen Spezialfall eines DDs, nämlich ein DD, dessen Punktclassen jeweils nur aus einem einzigen Element bestehen. Ein solches DD bezeichnen wir als  $t$ -Design.

### 1.1.2 Ein wichtiger Spezialfall divisibler Designs: $t$ -Designs

Ein  $t - (1, k, \lambda_t)$ -DD mit  $v$  Punkten bezeichnen wir üblicherweise als  $t - (v, k, \lambda_t)$ -Design (kurz:  $t$ -Design). Man beachte, dass hier auf die Angabe des Parameters  $s = 1$  verzichtet und an dessen Stelle  $v$ , die Anzahl der Punkte, angegeben wird. Da jedoch jeweils aus dem Zusammenhang heraus klar sein sollte, ob es sich um ein „echtes“ DD (mit  $s > 1$ ) oder ein  $t$ -Design handelt, stellt dies in der Regel keine Schwierigkeit dar und wir verwenden diese Notation.

Im Falle von  $t = 2$  verzichten wir wiederum meist auf die Angabe dieses Parameters und schreiben  $(v, k, \lambda)$ -Design. Häufig wird hier in der Literatur auch die Bezeichnung „*balanced incomplete block design*“ (BIBD) angewandt<sup>6</sup> (s. z.B. [23], [20], [32]).

Manche Autoren bevorzugen für ein  $t - (v, k, \lambda_t)$ -Design folgende Schreibweise:  $S_{\lambda_t}(t, k, v)$ . Dabei wird das „S“ in Anlehnung an ein sogenanntes *Steiner System*<sup>7</sup> verwendet. Ein Steiner System ist ein  $t$ -Design mit  $\lambda_t = 1$ . Gilt zusätzlich  $t = 2$  und  $k = 3$ , haben wir also ein  $(v, 3, 1)$ -Design, sprechen wir von einem *Steiner Tripel System*, kurz STS( $v$ ).

Betrachten wir noch einmal die Beispiele (a) und (c) (auf den Seiten 7 und 8), können wir feststellen, dass man beide Inzidenzstrukturen als Steiner Tripel Systeme auffassen kann, wenn wir die Punkte jeweils als Punkte des Designs, die Geraden als Blöcke und jeden Punkt als einelementige Punktclassen interpretieren. Auf diese Weise erhalten wir in beiden Beispielen ein STS(9).

Steiner Tripel Systeme waren und sind bis heute ein beliebter Forschungsgegenstand (s. z.B. [55], [54], [95]). Das wohl berühmteste Existenzproblem eines Steiner Tripel Systems stellt das *Kirkmansche Schulmädchenproblem* ([57]) dar:

<sup>6</sup>Falls das Design *nicht-trivial* ist.

<sup>7</sup>Jakob Steiner (1796 - 1863)

*Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession; it is required to arrange them daily, so that not two will walk twice abreast.*<sup>8</sup>

Diese von Reverend Thomas Kirkman (1806 - 1895) um 1850 gestellte Aufgabe wird allgemein als der Beginn der Designtheorie angesehen, obwohl sich auch schon andere Mathematiker wie Plücker (1835) oder Woolhouse (1844) mit einigen Spezialfällen von Steiner Systemen beschäftigt haben ([69], [97]). Einen historischen Einblick in die Geschichte der Designtheorie erhält man beispielsweise in [96], [6] und [29].

Beachtenswert ist die Tatsache, dass das von Kirkman gesuchte STS(15) eine bisher in dieser Arbeit noch nicht beschriebene zusätzliche *innere Struktur* aufweisen sollte. Es handelt sich dabei um die sogenannte *Auflösbarkeit* ( $\alpha$ -Auflösbarkeit mit  $\alpha = 1$ ), welcher wir uns in Abschnitt 2.3 (ab Seite 24) noch widmen werden und welche ein Spezialfall der in dieser Arbeit neu eingeführten Block-Zerlegbarkeit (s. Abschnitt 2.1) ist.

Interessanterweise spielen innere Strukturierungen also schon von Anbeginn der systematischen Untersuchung und Erforschung von Designs eine wichtige Rolle. In dieser Arbeit werden wir uns nun intensiv mit inneren Strukturen divisibler Designs beschäftigen.

Bevor das Konzept der Block-Zerlegbarkeit vorgestellt wird, werden jedoch noch sogenannte „*point residues*“ eines  $t$ -Designs, sowie *taktische Konfigurationen* eingeführt. Bei letzteren handelt es sich um spezielle  $t$ -Designs, während erstere Designs sind, die sich jeweils aus einem gegebenen  $t$ -Design entwickeln lassen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, von einem  $t$ -Design ausgehend, „verwandte“  $t$ - oder auch  $(t - 1)$ -Designs zu konstruieren. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der bereits erwähnten „*point residues*“ und geben ein Lemma (ohne Beweis) dazu an. Mehr Informationen zu diesem Thema findet man beispielsweise in [5].

**Definition 1.1.7** Sei  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  ein gegebenes  $t - (v, k, \lambda_t)$  Design und  $P \in \mathcal{P}$  ein Punkt von  $D$ . Wir definieren  $\mathcal{B}_{res}^P := \mathcal{B} \setminus \{B \mid B \in \mathcal{B} \wedge P \in B\}$ ,  $I_{res}^P := I \mid (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \times \mathcal{B}_{res}^P$  und nennen  $D_{res}^P := (\mathcal{P} \setminus \{P\}, \mathcal{B}_{res}^P, I_{res}^P)$  den „*point residue*“ von  $D$  in  $P$ .

**Lemma 1.1.8** (s. [5], Lemma (1.7)) *Ist  $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  ein  $t - (v, k, \lambda_t)$  Design, wobei  $t \geq 2$  ist, dann gilt für jeden beliebigen Punkt  $P \in \mathcal{P}$ , dass*

---

<sup>8</sup>Eine Lösung dieser Aufgabe wurde im Jahr 1850 sowohl von Kirkman selbst [56], als auch von Cayley [13] veröffentlicht. In neueren Publikationen wie z.B. in [5] oder [72] findet man sie ebenfalls.

$D_{res}^P := (\mathcal{P} \setminus \{P\}, \mathcal{B}_{res}^P, \mathbf{I}_{res}^P)$ , der „point residue“ in  $P$ , ein  $(t-1)-(v-1, k, \lambda')$  Design mit  $\lambda' = \lambda_t \frac{v-k}{k-(t-1)}$  ist.

### 1.1.3 Ein Spezialfall von $t$ -Designs: Taktische Konfigurationen

Ein  $1 - (v, k, \lambda_1)$ -Design nennen wir eine *taktische Konfiguration*. Man beachte, dass bei einem solchen 1-Design der Index und die Wiederholungszahl übereinstimmen, da in beiden Fällen die Anzahl der Blöcke durch einen Punkt angegeben wird. Als divisibles Design beschrieben, sprechen wir im Fall einer taktischen Konfiguration von einem  $1 - (1, k, \lambda_1)$ -DD mit  $v$  Punkten.

Nachdem nun die für diese Arbeit relevanten Inzidenzstrukturen eingeführt sind, werden wir uns im folgenden Kapitel inneren Strukturen divisibler Designs widmen.