Einleitung

Strukturen spielen in der Mathematik in vielfältiger Weise eine Rolle. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit speziellen Inzidenzstrukturen - den divisiblen Designs.[1] Solche Strukturen bieten, auch wegen ihrer teils engen Verbindung zu anderen Bereichen der Mathematik, wie beispielsweise zur Codierungstheorie, Kryptographie oder Graphentheorie, Raum für unterschiedlichste Forschungsansätze.

In dieser Arbeit widmen wir uns schwerpunktmäßig der inneren Strukturierung divisibler Designs. Der Gedanke, dass eine Struktur aus gewissen Unterstrukturen zusammengesetzt sein kann, ist nicht neu. Auch im Bereich der Designtheorie gibt es bereits vielfältige Konzepte dazu, von denen in dieser Arbeit eine Auswahl vorgestellt werden wird. Die hier neu eingeführte *Block-Zerlegung* eines divisiblen Designs umfasst zwar einige davon, es gibt jedoch divisible Designs, deren innere Strukturierung mit den bisherigen Konzepten nicht beschrieben werden kann. Zunächst werden Beispiele solcher divisiblen Designs vorgestellt, später werden wir block-zerlegbare divisible Designs gezielt konstruieren und weitere Eigenschaften herausarbeiten, die mit dieser Form der inneren Strukturierung in engem Zusammenhang stehen.

Bevor wir einen kurzen, systematischen Überblick über die vorliegende Arbeit geben, soll anhand eines praktischen Beispiels das Konzept der Block-Zerlegbarkeit anschaulich dargestellt und ein möglicher Anwendungsbezug illustriert werden.

Beispiel: Kampfrichtereinsatz

Stellen wir uns einen internationalen Wettbewerb vor, an dem Sportler aus insgesamt m verschiedenen Nationen beteiligt sind. Jede dieser m Nationen stellt genau s Kampfrichter zur Verfügung. Der Wettbewerb besteht aus mehreren Wettkämpfen, die selbst wiederum aus mehreren Durchgängen bestehen. Für jeden Durchgang werden genau k Kampfrichter benötigt. Der Fairness halber darf aus jedem Land maximal ein Kampfrichter pro Durchgang teilnehmen. Damit dies möglich ist, muss selbstverständlich $k \leq m$ gelten. Wir nehmen an, dies ist der Fall. Damit alle Kampfrichter sämtlicher Nationen möglichst gleich behandelt werden, sollen nicht nur alle Kampfrichter gleich oft zum Einsatz kommen, sondern je zwei Kampfrichter aus unterschiedlichen Ländern sollen in genau λ Durchgängen gemeinsam eingesetzt werden. Nun erstreckt sich dieser Wettbewerb jedoch über mehrere Tage, an denen jeweils ein Wettkampf ausgetragen wird. Da der Einsatz als Kampfrichter höchste Konzentration erfordert, sollte deren Einsatz möglichst ökonomisch

[1] Auch *group divisible designs*, s. S. 4.

gestaltet werden, d.h. an einem Tag, an dem ein Kampfrichter nicht zum Einsatz kommt, braucht er auch nicht am Wettkampfort zu erscheinen, ansonsten sollte er optimal eingesetzt werden. Dabei verstehen wir unter einem optimalen Einsatz, dass alle an diesem Wettkampf beteiligten Kampfrichter wiederum gleiche Behandlung erfahren, d.h. in gleich vielen Durchgängen eingesetzt werden und je zwei Kampfrichter aus verschiedenen Nationen in genau μ Durchgängen gemeinsam werten.

Es stellt sich nun die Frage: Ist ein solcher Kampfrichtereinsatz möglich? Die Antwort lautet: Ja, falls es ein (s, k, λ)-divisibles Design mit $v := m \cdot s$ Punkten gibt, welches in passende kleinere (innere) divisible Designs zerlegbar ist. Dabei entsprechen die teilnehmenden Kampfrichter den v Punkten des divisiblen Designs, die Nationen den Punktklassen und die Durchgänge den Blöcken. Jeder Wettkampf des Wettbewerbs entspricht einem inneren divisiblen Design. Da die Kampfrichter ihre Nationalität natürlich nicht ändern können, werden die Punktklassen der inneren divisiblen Designs von denen des großen divisiblen Designs induziert und da die Durchgänge alle dieselbe Anzahl von Kampfrichtern benötigen, ist die Blockgröße bei allen betrachteten divisiblen Designs identisch.

Übersicht

In Kapitel 1 stellen wir einige der für diese Arbeit grundlegenden Begriffe vor, vermitteln einen kurzen historischen Einblick in die Thematik der Designtheorie und geben einfache Resultate sowie mehrere Beispiele an.

Kapitel 2 beginnt mit der Vorstellung des Konzepts der (fast)[2] Block-Zerlegbarkeit divisibler Designs. Nach grundlegenden Definitionen und Begriffen, sowie einem einfachen Beispiel folgt die Charakterisierung eines blockzerlegbaren divisiblen Designs anhand einer seiner Inzidenzmatrizen. Anschließend werden bereits vorhandene Konzepte innerer Strukturen divisibler Designs dargestellt und mit dem Konzept der Block-Zerlegbarkeit in Beziehung gesetzt.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit Konstruktionen divisibler Designs. Dieses Kapitel gliedert sich im Wesentlichen in zwei Teile. Wir unterscheiden bei den Konstruktionen das Vorgehen nach Speras Konstruktionsprinzip

[2]Wird ein Begriff in Klammern gesetzt, so bedeutet das in dieser Arbeit, dass unter geeigneten Umständen beide Varianten vorkommen können. Es wird hier also sowohl die Block-Zerlegbarkeit, als auch die fast Block-Zerlegbarkeit vorgestellt werden.

(Beispiele 1 bis 4) und die Verwendung von Konstruktion (A), die ohne dieses Konstruktionsprinzip auskommt. Wir werden festellen, dass wir in vielen Fällen block-zerlegbare divisible Designs erhalten. Fast-block-zerlegbar sind sie in jedem Fall.

Anschließend wird die Wirkung verschiedener Starter-Designs bei Konstruktion (A) dargestellt. Nach t-balancierten ($t \geq 2$) Starter Designs behandeln wir strukturierte Starter-Designs und können feststellen, dass Konstruktion (A) in vielen Fällen strukturerhaltend oder annähernd strukturerhaltend ist, so dass sie sich zur gezielten Herstellung von divisiblen Designs mit spezieller innerer Strukturierung eignet.

Ein block-zerlegbares divisibles Design kann eine weitere Struktur aufweisen - ein sogenanntes *äußeres divisibles Design*. Dieser möglichen Strukturierung widmen wir uns im 4. Kapitel. Zunächst wird das Konzept vorgestellt, anschließend werden divisible Designs, welche ein äußeres divisibles Design besitzen, charakterisiert. Im letzten Abschnitt folgt eine Untersuchung der in Kapitel 3 erstellten divisiblen Designs hinsichtlich ihrer möglichen äußeren divisiblen Designs.

Kapitel 5 widmet sich speziellen Automorphismengruppen divisibler Designs, die wir als *(volle) duale Translationsgruppen* bezeichnen. Besitzt ein divisibles Design eine elementar abelsche (volle) duale Translationsgruppe als Automorphismengruppe, so ist es isomorph zu einem divisiblen Design, dessen Elemente eine Unterstruktur eines endlichen affinen Raumes bilden. Fast alle, der in Kapitel 3 behandelten, divisiblen Designs besitzen eine solche Automorphismengruppe.

Im letzten Kapitel wird schließlich die Verbindung zur Codierungstheorie genutzt, um die Ergebnisse zu divisiblen Designs auf die jeweils assoziierten CW-Codes zu übertragen.