

Kapitel 4

Diskussion

Wir haben die Kinematische Theorie von Wellenfronten in schwach erregbaren Medien in zwei Dimensionen untersucht. Besonderes Augenmerk legten wir dabei auf Eikonalfüsse und entdeckten mathematisch rigoros Superspiralstrukturen, wenn die Spiralspitze kompliziertere Dynamiken als ein starre Rotation aufwies. Die Kinematische Theorie kann auch auf drei Dimensionen verallgemeinert werden, um z.B. die Dynamik von Scroll-Wellen zu beschreiben, siehe [BDM85, BDZM87]. Scroll-Wellen sind das dreidimensionale Analogon zu Spiralwellen. Das mathematische Verständnis von Scroll-Wellen ist von großer Bedeutung, weil das Herzgewebe ein dreidimensionales erregbares Medium ist und dort auftretende Scroll-Wellen zu Herzrhythmusstörungen führen können. Da die Dynamik einer Scroll-Welle viel reichhaltiger sein kann als die einer Spiralwelle, reicht die Untersuchung von Spiralwellen nicht aus.

In zweidimensionalen schwach erregbaren Medien modellierten wir die Wellenfronten durch Kurven, die sich in Normalenrichtung fortbewegten, wobei wir eine Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze zuließen. In drei Dimensionen stellen wir uns die Erregungsfront einer Scroll-Welle durch eine im \mathbb{R}^3 eingebettete Fläche S vor. Diese bewege sich in Normalenrichtung mit Geschwindigkeit U . Der Rand γ wird Filament genannt und entspricht der Spiralspitze einer Spiralwelle. Das Filament γ stellt eine Kurve im \mathbb{R}^3 dar, die sich tangential zur Fläche S in Normalenrichtung mit Geschwindigkeit G fortbewegen darf; siehe Abbildung 4.1.

Die Scroll-Welle kann man sich also als eine Familie von Spiralwellen vorstellen, die mit der Spitze am Filament verankert sind. Im einfachsten Fall ist das Filament eine gerade Linie und die Querschnitte in jedem Punkt des Filaments weisen Spiralwellen auf, die sich in gleicher Phase befinden, so wie links in Abbildung 4.1 illustriert. In diesem Fall verhält sich die Scroll-Welle wie eine Spiralwelle. Ändert sich die Phase dieser Spiralwellen entlang des Filaments, handelt es sich um eine getwistete, gerade Scroll-Welle. Andererseits

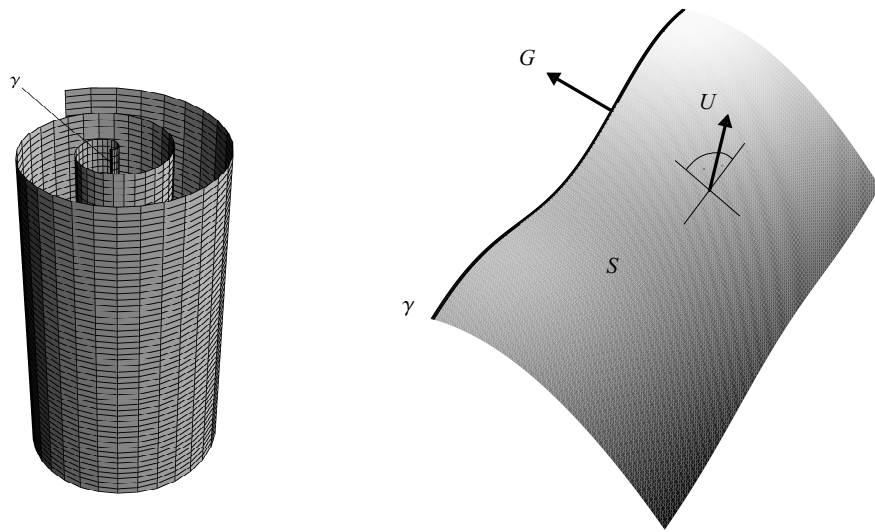


Abbildung 4.1: Links: Gerade, ungetwistete Scroll-Welle. Rechts: Mit Normalengeschwindigkeit U fließende Fläche S mit Rand γ , der sich selbst mit Tangentialgeschwindigkeit G bewegt.

können wir die Phase beibehalten und dafür das Filament zu einer Kreislinie verkleben. Dadurch erhalten wir einen (ungetwisteten) Scroll-Ring.

Da um das Filament eine Welle rotiert, gibt es einige topologische Restriktionen an das Filament, siehe [WS83a, WS83b, WS83c, WS84]. Winfree und Strogatz zogen zwei abstrakte Modellbeschreibungen zur Erklärung dieser Einschränkungen heran. Die eine ist eine Phasenbeschreibung, wobei angenommen wurde, dass sich jeder Punkt außerhalb des Cores in einer bestimmten Phase befindet. Diese Phase bezieht sich auf das Stadium der zyklisch verlaufenden chemischen Reaktion, in dem sich das Medium in jenem Punkt befindet. Man kann sich die Phase also als Abbildung des zwei- oder dreidimensionalen Raums in die Kreislinie S^1 vorstellen. Objekt der Untersuchung waren die Konturlinien bzw. -flächen gleicher Phase. Da die Definition der Erregungsfront im Core nicht klar ist, lässt sich die Phase dort auch nicht eindeutig definieren. Dennoch ermöglichte diese Beschreibung das Auffinden von Phasensingularitäten im Sinne von Unstetigkeitsstellen der Phasenabbildung bzw. Punkten, in denen viele Konturlinien aufeinandertreffen. Diese findet man, indem geschlossene Kurven C betrachtet werden, die eine einfach-zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit beranden, wenn entlang C die Phase einen vollen Zyklus durchläuft. Eine stetige Phase auf dieser Mannigfaltigkeit würde zu einem Widerspruch führen, [WS83a]. Diese auftretenden Singularitäten ermöglichen die Definition der Spiralspitzen und sogar der Filamente als Kurve solcher Unstetigkeitsstellen.

Die andere Beschreibung erfolgte durch Betrachtung von Niveaulinien bzw. -flächen der chemischen Konzentrationen. Der Vorteil dieser Modellierung liegt darin, dass sie auch eine qualitative Beschreibung des Cores ermöglicht. Beide Beschreibungen wurden sich ergänzend in den Untersuchungen Winfree und Strogatz' herangezogen. Dabei wurden Muster untersucht, die beschränkte räumliche Ausdehnung hatten. Aus der Phasenbeschreibung folgt, dass Singularitäten nur als komplementäre Paare erzeugt werden können.

In [WS83b] stellten Winfree und Strogatz fest, dass zum Beispiel getwistete, unverknotete Scroll-Ringe nicht existieren können, es sei denn sie sind mit entsprechenden Scroll-Ringen verbunden. Weiter wurde in [WS83c] gezeigt, dass auch isolierte, ungetwistete aber verknotete Scroll-Ringe nicht existieren können. Noch allgemeiner wurde hergeleitet, dass Scroll-Ringe, um existieren zu können, bestimmte Regeln bezüglich der so genannten Writhing-, Twisting-, Linking-Zahl und der Verknotung erfüllen müssen. Die eben genannten topologischen Zahlen und die damit verbundenen Regeln schließen die meisten ansonsten denkbaren Filamentstrukturen für Scroll-Ringe aus. In [WS84] wurde unter anderem auch untersucht, welche Übergänge von einer topologischen Struktur zu einer anderen für ein Scroll-Ring möglich ist. Dabei wurde auch darauf eingegangen wie die Filamentstruktur sich durch die Annäherung zweier Scroll-Ringe verändern könnte.

Die Interaktion von Scroll-Wellen-Filamenten wurde in [FM00] untersucht. Dabei wurde ein allgemeines, semilineares parabolisches System auf einem beschränkten Gebiet Ω betrachtet. In diesem zweikomponentigen Reaktions-Diffusions-Ansatz haben Lösungen die Gestalt $u = (u^1, u^2)(t, x)$ mit $x \in \Omega$. Während in der Kinematischen Theorie die Spitze der Spiralwelle eindeutig durch $Z(t, 0)$, also durch den Kurvenvektor bei $s = 0$ gegeben ist, ist die Definition der Spiralspitze bzw. des Filaments in drei Dimensionen im Reaktions-Diffusions-Modell schwieriger. In [FM00] wurden die Spiralspitzen durch die Nullstellen von $u(t, \cdot)$ definiert, wobei u die Lösung der partiellen Differentialgleichung zu gegebenem Anfangswert unter Beachtung der Randwerte ist. Generisch existieren in dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ endlich viele Spiralspitzen, die sich mit der Zeit t bewegen. Entsprechend ist das Filament der Scroll-Wellen in diesem Modell zu jedem Zeitpunkt t ebenfalls durch die Nullstellen von $u = (u^1, u^2)(t, x)$ gegeben. Doch diesmal ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ist 0 ein regulärer Wert von $u(t, \cdot)$, dann sind die Filamente zu jedem Zeitpunkt im dreidimensionalen Raum eingebettete Kurven, die so glatt von t abhängen wie die Lösung u es zulässt. Die Null ist ein regulärer Wert, wenn $u_x(t_0, x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ den maximalen Rang 2 an allen Nullstellen x_0 von $u(t_0, \cdot)$ besitzt.

Deshalb können Filamente nur kollidieren, wenn der Rang von $u_x(t, \cdot)$ auf

1 oder 0 fällt. Für generische Anfangsbedingungen der partiellen Differentialgleichung können Filamente, die sich nicht annihilierend treffen, nur neu arrangieren. In Abbildung 4.2 ist dies in einer Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum veranschaulicht, ([FM00]). Dieses Ergebnis beruht

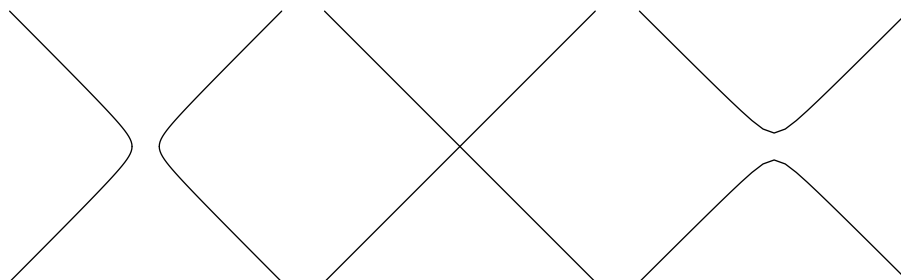


Abbildung 4.2: Interaktion der Scroll-Wellen-Filamente für generische Anfangsdaten; kurz vor der Kollision (links), während der Kollision (mitte) und Neuarrangierung danach (rechts).

auf der Anwendung der Singularitäten Theorie unter Benutzung des Thom-schen Transversalitätssatzes.

In der Kinematischen Theorie werden Interaktionen von Erregungsfronten nicht berücksichtigt. Insofern könnten Filamente sich einfach durchdringen ohne dabei ihre Struktur zu verändern. Dieser Unterschied hätte einen großen Einfluss auf die Dynamik der Scroll-Wellen und sollte experimentell untersucht werden.

Unsere vorgestellten Betrachtungen für Spiralwellen empfehlen zunächst den Fall krümmungsunabhängiger Normalengeschwindigkeit U für Scroll-Wellen zu untersuchen. Für Krümmungsflüsse wird in [Mik95] z.B. vorgeschlagen, dass die Normalengeschwindigkeit U der Fläche S von der mittleren Krümmung abhängt

$$U = c - DH \tag{4.1}$$

und die Tangentialgeschwindigkeit G des Rand-Filaments $\gamma = \partial S$ nicht nur von der mittleren Krümmung H der Fläche am Rand abhängt, sondern auch von der geodätischen Krümmung κ der Filament-Kurve γ

$$G = G_0 - d_1 H - d_2 \kappa. \tag{4.2}$$

In [Mik95] wurde unter den Annahmen (4.1) und (4.2) approximativ gezeigt, dass Scroll-Ringe, d.h. ungetwisteten Scroll-Wellen mit ringförmigem Filament, je nach Größe der Werte d_1 und d_2 expandieren oder kontrahieren. Die Symmetrie des Problems reduzierte die Analyse auf die Betrachtung zweidimensionaler Spiralwellen.

Die Evolution einer Scroll-Welle wird stark durch die Struktur des Filaments bestimmt. Die Krümmung und die Torsion des Filaments und eine eventuelle Anisotropie des Mediums spielen dabei eine große Rolle für die Dynamik. Die Länge des Filaments kann sich mit der Zeit verändern. Diese Eigenschaft wird als Filament-Tension bezeichnet. Eine kleiner werdende Filamentlänge führt zum Zusammenschrumpfen von Scroll-Ringen bzw. zur Stabilisierung von Filamenten zwischen gegenüberliegenden Rändern des Mediums. Dagegen ruft eine Verlängerung des Filaments Instabilitäten hervor, die in Experimenten beobachtet werden konnten. Diese nach Winfree benannte Winfree-Turbulence kann je nach Frequenz der externen periodischen Anregung kontrolliert bzw. verstärkt werden. Dies ergaben theoretische Überlegungen und numerische Untersuchungen in [ASM03, ASM06].

Für neuere experimentelle Untersuchungen im dreidimensionalen BZ-Medium zur Erzeugung und Auslöschung von Scroll-Wellen siehe z.B. [BS06]. In diesem Artikel wurden die Erzeugung von getwisteten und ungetwisteten Scroll-Ringen in der BZ-Reaktion beschrieben und dreidimensionale tomographisch rekonstruierte Bilder gezeigt.

Doch selbst in zwei Dimensionen gibt es andere Phänomene, die mit der Eikonaltheorie noch untersucht werden sollten. Bekanntermaßen können Erhaltungsgleichungen wie (2.40) neben regulären auch Schocklösungen aufweisen. Wir erhielten durch unsere Forderung positiver Krümmung in der Spitze $\kappa_0(t) > m > 0$ für alle Zeiten t nach (2.51), dass die Kurve bereits anfangs überall positiv gekrümmt ist:

$$w_s(0, s) = \kappa(0, s) > 0 \quad \text{für alle } s \geq 0. \quad (4.3)$$

Dadurch sind Schocks für den negativen Tangentenwinkel w ausgeschlossen. Andererseits treten Schocks auf, wenn die Kurve an einer Stelle negative Krümmung aufweist. Schocks entsprechen Unstetigkeitsstellen des Tangentenwinkels $-w$ und können daher kollidierende Wellenfronten beschreiben, siehe Abbildung 4.3.

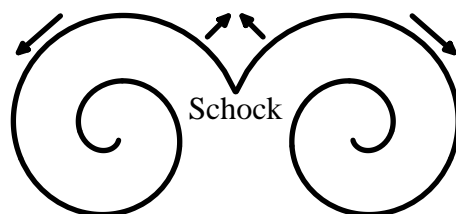


Abbildung 4.3: Kollidierende Spiralwellen als Schocklösung der nichtlinearen hyperbolischen Erhaltungsgleichung (2.40).

Wie wir sehen, warten viele interessante Anwendungen der Kinematischen Theorie auf ihre Erforschung. Nicht zuletzt fehlt auch eine mathematische Untersuchung der zeitabhängigen Krümmungsgleichung. Jedes gelöste Problem stellt uns vor neue interessante Aufgaben oder wie Hesse es formulierte:

“Alles Wissen und alle Vermehrung unseres Wissens endet nicht mit einem Schlusspunkt, sondern mit Fragezeichen. Ein Plus an Wissen bedeutet ein Plus an Fragestellungen, und jede von Ihnen wird immer wieder von neuen Fragestellungen abgelöst.”

Hermann Hesse (1877-1962)