

Kapitel 3

Vergleich zwischen Krümmungsfluss und Eikonalfluss

In diesem Kapitel werden wir rechtsgewundene asymptotisch Archimedische Spiralwellen für Eikonalflüsse und Krümmungsflüsse in der Kinematischen Theorie vergleichen. Wir nehmen abermals eine konstante ($D = 0$) oder affin-lineare ($D > 0$) Krümmungsabhängigkeit der Normalengeschwindigkeit U an

$$U = c - D\kappa, \quad c > 0 \quad (3.1)$$

und erlauben eine Tangentialgeschwindigkeit $G \geq 0$ in der Spitze. In diesem Kapitel werden alle Systemparameter zeitunabhängig angenommen.

Wir werden im nächsten Abschnitt auf die Rotationsfrequenz der Spiralwellen für die Eikonalf- und die Krümmungsgleichung eingehen. Dabei stoßen wir auf eine approximative Gleichung, die bereits in [YN93], [MDZ94] und in [GLT04] untersucht worden ist. Im darauf folgenden Abschnitt werden einige Ergebnisse zu dieser approximativen Gleichung zusammengefasst. Schließlich erfolgt ein Vergleich des Far-Fields dieser drei Modelle.

3.1 Anmerkungen zur Rotationsfrequenz

Unsere Annahme zeitunabhängiger Kontrollparameter liefert $\kappa_t = 0$. Mithilfe von (3.1) vereinfacht sich die kinematische Gleichung (2.5) zu

$$D\kappa_{ss} = \left(\kappa \int_0^s \kappa(c - D\kappa) d\sigma \right)_s + G\kappa_s. \quad (3.2)$$

Wie bereits in (2.64), bezeichnen wir den negativen Tangentenwinkel mit $\tilde{w}(t, s)$ und den Tangentenwinkel in der Spiralspitze mit $\alpha(t)$, d.h. es sei $Z_s(t, s) = e^{-i\tilde{w}(t,s)}$ und $\alpha(t) = -\tilde{w}(t, 0)$. In der Rechnung (2.69) zeigten wir:

$$-\tilde{w}_t = \frac{d}{ds}U - \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}_s = \frac{d}{ds}U - \kappa \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_s. \quad (3.3)$$

Die Rotationsfrequenz $-\tilde{w}_t(t)$ der Spiralwelle zum Zeitpunkt t ist natürlich s -unabhängig, was man z.B. nach Differentiation von (3.3) nach s sieht:

$$\begin{aligned} -\tilde{w}_{ts} &= \frac{d^2}{ds^2}U - \mathbf{Z}_{ts} \cdot \mathbf{n}_s - \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}_{ss} \\ &\stackrel{(2.8),(2.10)}{=} \mathbf{Z}_{tss} \cdot \mathbf{n} \stackrel{(2.9)}{=} -\kappa_t = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Es gilt folglich:

$$\alpha_t = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} U - \kappa \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_s \Big|_{s=0}. \quad (3.5)$$

Wir betrachten zunächst Eikonalflüsse ohne Tangentialgeschwindigkeit in der Spiralspitze, also den Fall $G = 0$ und $D = 0$. Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, wird für $s \rightarrow \infty$ die Krümmung singularär, $\kappa(s) \rightarrow +\infty$, aber es gilt $c\kappa(s) \int_0^s \kappa d\sigma \equiv \omega$ für die einzige nicht-triviale Lösung. Es folgt dann:

$$-\frac{\kappa_s(s)}{\kappa(s)^3} = \frac{c}{\omega} \quad \text{für alle } s > 0. \quad (3.6)$$

Hierbei ist ω wieder die Rotationsfrequenz, denn mithilfe von (2.14) erhalten wir aus (3.3)

$$-\tilde{w}_t = -\kappa \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_s = c \kappa(s) \int_0^s \kappa d\sigma \stackrel{(2.20)}{=} \omega. \quad (3.7)$$

Nun untersuchen wir den Eikonalfluss ($D = 0$) mit positiver Tangentialgeschwindigkeit in der Spiralspitze ($G > 0$). Wir zeigten, dass $G > 0$ eine Möglichkeit ist die Singularität der Krümmung $\kappa(s)$ in $s = 0$ zu beheben. Die Rotationsgeschwindigkeit ist nach (3.5) durch

$$\alpha_t = -\kappa \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_s \Big|_{s=0} = G\kappa_0 \quad (3.8)$$

gegeben. Somit erhalten wir nach (2.52) wieder

$$-\frac{\kappa_s(s)}{\kappa(s)^3} = \frac{c}{G\kappa_0} = \frac{c}{\omega} \quad \text{für alle } s \geq 0. \quad (3.9)$$

Schließlich wenden wir uns dem Krümmungsfluss ($D > 0$) mit $G = 0$ zu. Wir erwähnten bereits, dass die positive Wahl von D eine weitere Möglichkeit bietet die Krümmung $\kappa(s)$ zu regularisieren. Spiralwellen-Lösungen erhalten wir laut Theorem 1 nach der Wahl einer Rotationsfrequenz $\omega > 0$ nur für $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \kappa(s) = -\frac{\omega}{D}$ und eine endlichen Anzahl an Werten für κ_0 . Ist ω zu groß, existieren keine Spiralwellen-Lösungen. Die Lösungen liegen, wie in Abschnitt 2.4 dargestellt, auf einer eindimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit. Die Taylor-Entwicklung dieser Zentrumsmannigfaltigkeit (2.36) liefert die Far-Field-Asymptotik

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} -\frac{\kappa_s(s)}{\kappa(s)^3} = \frac{c}{\omega}. \quad (3.10)$$

In [YN93, MDZ94, GLT04] wird neben dem Eikonalfuss auch eine approximative Gleichung für den Krümmungsfluss mit $U = c - D\kappa$, $D > 0$, und Tangentialgeschwindigkeit $G = 0$ untersucht. Diese approximative Gleichung wird dadurch erhalten, dass man in (3.2) den Koeffizienten D nur im Integranden 0 setzt, aber nicht vor κ_{ss} . Dadurch vereinfacht sich (3.2) zu

$$D\kappa_{ss} = \left(c\kappa \int_0^s \kappa d\sigma \right)_s. \quad (3.11)$$

Integration von (3.11) über die Bogenlänge s ergibt:

$$\kappa_s = \frac{c}{D}\kappa \int_0^s \kappa d\sigma - \frac{\omega}{D}. \quad (3.12)$$

Die Integrationskonstante $\omega = -D\kappa_s(0)$ ist dabei wieder die Rotationsfrequenz. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 2.4 erhalten wir durch Substitution des Integralterms in (3.11) durch (3.12) eine singuläre gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mithilfe eines Euler-Multiplikators regularisiert werden kann. Die Spiralwellen-Lösungen liegen wieder auf einer eindimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit, mit derselben Far-Field-Asymptotik wie in (3.10).

Nach Einführung des negativen Tangentenwinkels $w(t, s) = \int_0^s \kappa(t, \sigma) d\sigma$ erhalten wir ähnlich wie in Abschnitt 2.5

$$\begin{aligned} w_{ss} &= \frac{c}{D}ww_s - \frac{\omega}{D} \\ w(0) &= 0 \\ w_s(0) &= \kappa_0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

In [YN93] und in [MDZ94] wurde erkannt, dass (3.13) mit gegebenen Parametern c , D , κ_0 genau dann eine rechtsgewundene, linksrotierende asymptotisch Archimedische Spiralwellen-Lösung besitzt, wenn die Rotationsfrequenz ω_* durch

$$\omega = \eta_* \sqrt{cD\kappa_0^3} \quad \text{mit } \eta_* \approx 0.69 \quad (3.14)$$

gegeben ist. Diese und weiterführende Aussagen wurden mathematisch rigoros in [YN93] und in [GLT04] bewiesen. Aus (3.14) folgt mit $\omega = -D\kappa_s(0)$ insbesondere

$$-\frac{\kappa_s(0)}{\kappa_0^3} = \eta_*^2 \frac{c}{\omega} \approx 0.47 \frac{c}{\omega}. \quad (3.15)$$

Dadurch motiviert, stellt sich die Frage, ob eine ähnliche Relation wie (3.14) für die nicht-approximative kinematische Gleichung mit $D > 0$ und $G = 0$ für starr rotierende Spiralwellen-Lösungen gilt. Es stellt sich aber heraus, dass der Quotient $\frac{\omega}{\sqrt{cD\kappa_0^3}}$ nicht konstant ist. Die Parameter ω , c , D , κ_0 sind durch (2.38) gegeben, also durch die Forderung, dass die Lösung auf der eindimensionalen ω -abhängigen Zentrumsmannigfaltigkeit liegt und dass $\omega = -D \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \kappa(s)$ gilt. Die Parameter werden also einen komplexeren Zusammenhang aufweisen als (3.14).

3.2 Approximative Krümmungsgleichung

Das Randwertproblem (3.13) stellt, wie oben erläutert, eine Approximation der Krümmungsflussgleichung (3.2) dar, indem der Koeffizient D nur im Integranden 0 gesetzt wird. Wir gaben für (3.13) bereits zwei Randbedingungen an, doch die Suche nach Spiralwellenlösungen erfordert zusätzlich, dass die Krümmung für $s \rightarrow +\infty$ verschwindet:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} w_s(s) = 0. \quad (3.16)$$

Wir werden nun Ergebnisse von [YN93] und [GLT04] zusammenfassen. Zunächst wenden wir eine Koordinatentransformation an, wie in [MDZ94, GLT04] vorgeschlagen:

$$\xi = \sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}} s, \quad x(\xi) = \sqrt{\frac{c}{D\kappa_0}} w(s), \quad \eta = \frac{\omega}{\sqrt{cD\kappa_0^3}}. \quad (3.17)$$

Diese Koordinatentransformation überführt (3.13) in

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} &= xx_{\xi} - \eta \\ x(0) &= 0 \\ x_{\xi}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die zusätzliche Bedingung $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} x_\xi(\xi) = 0$, die (3.16) entspricht, lässt uns bereits vermuten, dass eine Lösung nur für ein bestimmtes η_* existiert. In [MDZ94] wurde dieser Wert numerisch mit 0.685... angegeben.

In [GLT04] wurde bewiesen, dass ein η_* existiert, so dass für alle $\eta > \eta_*$ eine globale Lösung $x(\xi)$ existiert, die genau einen kritischen Punkt besitzt und $\lim_{\xi \rightarrow \infty} x(\xi) = -\infty$, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} x_\xi(\xi) = 0$ erfüllt. Bei diesen Lösungen wechselt die Krümmung genau einmal das Vorzeichen und wir erhalten linksgewundene, linksrotierende asymptotisch Archimedische Spiralwellen. Für $\eta = \eta_*$ erhalten wir eine positive, monoton wachsende Lösung mit $\lim_{\xi \rightarrow \infty} x(\xi) = \infty$, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} x_\xi(\xi) = 0$. Diese Lösung entspricht einer rechtsgewundenen, linksrotierenden asymptotisch Archimedischen Spiralwelle. Für $\eta < \eta_*$ erhalten wir monoton wachsende, nicht global existierende Lösungen, die einen Blow-up aufweisen.

In [YN93] wurde (3.18) analytisch gelöst und das kritische η_* angegeben. Wir präsentieren kurz die Herleitung der Lösung. Die Cole-Hopf-Transformation wird auf (3.18) angewandt. Mit

$$y(\xi) := e^{-\frac{1}{2} \int_0^\xi x(\xi') d\xi'} \quad (3.19)$$

ergibt sich

$$y_{\xi\xi} = \left(-\frac{1}{2}xy\right)_\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x_\xi\right) y. \quad (3.20)$$

Wird (3.18) über ξ integriert und der Klammerausdruck in (3.20) ersetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} y_{\xi\xi} &= \frac{1}{2} (\eta\xi - 1) y \\ y(0) &= 1 \\ y_\xi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung $y_{zz}(z) = zy(z)$ sind durch die Airy-Funktionen $\text{Ai}(z)$, $\text{Bi}(z)$ gegeben, siehe [AS64]. Man sieht leicht ein, dass damit

$$\begin{aligned} y_1(\xi) &= \text{Ai}\left(\frac{\eta\xi - 1}{2^{1/3}\eta^{2/3}}\right) \\ y_2(\xi) &= \text{Bi}\left(\frac{\eta\xi - 1}{2^{1/3}\eta^{2/3}}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (3.21) ohne Beachtung der Randbedingungen sind.

Die Wronski-Determinante $\text{Ai}(z)\text{Bi}'(z) - \text{Bi}(z)\text{Ai}'(z)$ von $\text{Ai}(z)$ und $\text{Bi}(z)$ ist konstant, da die Differentiation nach z null ergibt. Die Konstante lautet $1/\pi$, siehe [AS64]. Die Lösung $Y(\xi; \eta)$ des Randwertproblems (3.21) lautet daher ([YN93]):

$$Y(\xi; \eta) = \pi \frac{2^{1/3}\eta^{2/3}}{\eta} \left((y_2'(0)y(0) - y_2(0)y_\xi(0)) \cdot y_1(\xi) + (-y_1'(0)y(0) + y_1(0)y_\xi(0)) \cdot y_2(\xi) \right), \quad (3.23)$$

was nach Einsetzen der Randbedingungen Folgendes ergibt:

$$Y(\xi; \eta) = \pi \left(\text{Bi}' \left(-\frac{1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right) \text{Ai} \left(\frac{\eta\xi - 1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right) - \text{Ai}' \left(-\frac{1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right) \text{Bi} \left(\frac{\eta\xi - 1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right) \right). \quad (3.24)$$

Die Lösung $X(\xi; \eta)$ von (3.18) ist nach (3.19) folglich:

$$X(\xi; \eta) = -2 \frac{Y'(\xi; \eta)}{Y(\xi; \eta)}. \quad (3.25)$$

Umkehrung der Transformation (3.17) liefert als Lösung $W(s; \eta)$ von (3.13):

$$W(s; \eta) = -2 \sqrt{\frac{D\kappa_0}{c}} \frac{Y'(\sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}}s; \eta)}{Y(\sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}}s; \eta)}. \quad (3.26)$$

Wir sehen, dass die Nullstellen von Y eine besondere Rolle spielen. Nach (3.21) gilt $Y(0; \eta) = 1$ für alle $\eta > 0$. Wenn $Y(\xi; \eta) < 0$ für ein $\xi > 0$ negativ ist, liegt ein Blow-up für X vor. Betrachten wir nun (3.24). Für $z \rightarrow \infty$ ist $\text{Ai}(z)$ exponentiell gegen 0 fallend, während $\text{Bi}(z)$ exponentiell wächst. Das Vorzeichen von $\text{Ai}' \left(-\frac{1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right)$ in (3.24) bestimmt also das Verhalten der Lösung $Y(\xi; \eta)$ für $\xi \rightarrow \infty$.

Sei η_* die größte Nullstelle von $\text{Ai}' \left(-\frac{1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right)$. Für η ein wenig kleiner als η_* ist $\text{Ai}' \left(-\frac{1}{2^{1/3}\eta^{2/3}} \right)$ negativ und $Y(\xi; \eta)$ fällt exponentiell gegen $-\infty$, muss also eine Nullstelle aufweisen. Somit ergibt sich ein Blow-up.

Für $\eta = \eta_*$ ergibt sich:

$$Y(\xi; \eta_*) = \pi \text{Bi}' \left(-\frac{1}{2^{1/3}\eta_*^{2/3}} \right) \text{Ai} \left(\frac{\eta_*\xi - 1}{2^{1/3}\eta_*^{2/3}} \right). \quad (3.27)$$

Für $\xi \geq 0$ besitzt $Y(\xi; \eta_*)$ keine Nullstellen und die Lösung X existiert global. Damit stimmt das als Nullstelle gewählte η_* mit dem weiter oben erwähnten kritischen η_* aus [GLT04] überein. Nach (3.26) lautet die Lösung als negativer Tangentenwinkel geschrieben:

$$W(s; \eta) = -2\sqrt{\frac{D\kappa_0}{c}} \frac{Y'(\sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}}s; \eta)}{Y(\sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}}s; \eta)}. \quad (3.28)$$

Zusammenfassend wurde also in [YN93, GLT04] gezeigt: Nur wenn die Rotationsfrequenz ω den Wert ω_* annimmt, besitzt die approximative zeitunabhängige Krümmungsflussgleichung (3.13) eine Lösung, die einer rechtsgewundenen, linksrotierenden Spiralwelle entspricht. Die Lösung lautet

$$w(s) = -2^{2/3}\eta_*^{1/3} \sqrt{\frac{D\kappa_0}{c}} \frac{\text{Ai}'\left(\frac{\eta_*\sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}}s-1}{2^{1/3}\eta_*^{2/3}}\right)}{\text{Ai}\left(\frac{\eta_*\sqrt{\frac{c\kappa_0}{D}}s-1}{2^{1/3}\eta_*^{2/3}}\right)}$$

mit $\eta_* \approx 0.687632$.

3.3 Vergleich der unterschiedlichen kinematischen Modelle

Die Kinematische Theorie für Spiralwellen zerfällt in Krümmungsflüsse und Eikonalflüsse, je nachdem ob eine Krümmungsabhängigkeit der Normalengeschwindigkeit angenommen wird oder nicht. In den beiden obigen Abschnitten untersuchten wir auch eine approximative Krümmungsgleichung (3.11). Es stellt sich die Frage, inwiefern sich diese drei Modelle unterscheiden. Dabei interessiert uns in diesem Abschnitt insbesondere das Far-Field-Verhalten. Weiterhin werden wir in diesem Abschnitt starr rotierende Spiralwellen betrachten.

Wir werden sogleich feststellen, dass der Quotient $-\frac{\kappa_s(s)}{\kappa(s)}$ für alle drei Modelle eine besondere Rolle spielt. Wieder sei $w(s) = \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma$. Wenn wir berücksichtigen, dass die Evolution der Kurve $Z(t, s)$ eine starre Rotation ist, legt $Z(s) = Z(0, s)$ die geometrische Gestalt fest. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass der Tangentenwinkel in der Spitze zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet. Wir erhalten dann nach (2.64)–(2.67)

$$Z(s) = z_0 + \int_0^s e^{-iw(\sigma)} d\sigma. \quad (3.29)$$

Die Anfangsposition $z_0 = Z(0)$ spielt für die Geometrie der Kurve natürlich auch keine Rolle, wir werden aus gleich ersichtlichen Gründen $z_0 = \frac{1}{\kappa_0} i + \frac{c}{\omega}$ wählen. Nach partieller Integration erhalten wir aus (3.29):

$$Z(s) = \underbrace{\frac{1}{\kappa(s)} ie^{-iw(s)}}_{:=Z_1(s)} + \underbrace{\frac{c}{\omega} + \int_0^s \frac{\kappa_s(\sigma)}{\kappa(\sigma)^2} ie^{-iw(\sigma)} d\sigma}_{:=Z_2(s)} \quad (3.30)$$

Für die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $Z_1(s) = r_1(s)e^{i\varphi_1(s)}$ gilt:

$$\frac{dr_1}{d\varphi_1} = \frac{\frac{dr_1}{ds}}{\frac{d\varphi_1}{ds}} = \frac{\kappa_s}{\kappa^3}. \quad (3.31)$$

In den drei untersuchten Modellen – Eikonalfluss, Krümmungsfluss und approximativer Krümmungsfluss – gilt stets $\lim_{s \rightarrow +\infty} -\frac{\kappa_s(s)}{\kappa(s)^3} = \frac{c}{\omega}$, siehe Abschnitt 3.1. Daher ist Z_1 jeweils eine asymptotisch Archimedische Spiralwelle.

Betrachten wir nun die Kurve Z_2 . Für den Eikonalfluss (I), den Krümmungsfluss (II) und den approximativen Krümmungsfluss (III) weist $\kappa(s)$ für $s \rightarrow \infty$ verschiedene Entwicklungen auf:

$$\begin{aligned} \kappa_s(s) &= -\frac{c}{\omega} \kappa(s)^3 & \text{(I)} \\ \kappa_s(s) &= -\frac{c}{\omega} \kappa(s)^3 + 0 \cdot \kappa(s)^4 + 0 \cdot \kappa(s)^5 + \frac{2c^2 D}{\omega^3} \cdot \kappa(s)^6 + \dots & \text{(II)} \\ \kappa_s(s) &= -\frac{c}{\omega} \kappa(s)^3 + \frac{D}{\omega} \cdot \kappa(s)^4 + 0 \cdot \kappa(s)^5 + \frac{2c^2 D}{\omega^3} \cdot \kappa(s)^6 + \dots & \text{(III)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die drei Modelle unterscheiden sich also in dieser Far-Field-Entwicklung von κ_s in κ . Die Entwicklung für den approximativen Krümmungsfluss (III) in (3.32) erhalten wir analog zu der des Krümmungsflusses (II), indem wir die eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit des erweiterten Systems entwickeln.

Wir zeigten bereits in (2.53)–(2.55), dass aus

$$0 < l < -\frac{\kappa_s(s)}{\kappa(s)^3} < L \quad \text{für Konstanten } l, L \quad (3.33)$$

die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{2ls + \frac{1}{\kappa_0^2}}} \geq \kappa(s) \geq \frac{1}{\sqrt{2Ls + \frac{1}{\kappa_0^2}}} \quad (3.34)$$

folgt. Damit ist $\kappa(s) \cdot s^{\frac{1}{2}}$ beschränkt und (3.32) liefert eine Entwicklung von κ_s in Potenzen von $s^{-\frac{1}{2}}$.

Die erste nicht verschwindende Ordnung der Asymptotik in (3.32) motiviert (3.30) weiter umzuformen:

$$Z(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{\kappa(s)} i + \frac{c}{\omega}\right) e^{-iw(s)}}_{:=Z_3(s)} + \underbrace{\int_0^s \kappa(\sigma) \left(\frac{c}{\omega} + \frac{\kappa_s(\sigma)}{\kappa(\sigma)^3}\right) i e^{-iw(\sigma)} d\sigma}_{:=Z_4(s)}. \quad (3.35)$$

Für Eikonalflüsse erhalten wir nach (3.32):

$$Z(s) = \left(\frac{1}{\kappa(s)} i + \frac{c}{\omega}\right) e^{-iw(s)} \quad (\text{I}). \quad (3.36)$$

Diese Gleichung bedeutet bereits, dass $Z(s)$ die Evolvente eines Kreises ist.

Die Kurve Z_4 ist also gerade ein Maß für die Abweichung von der Geometrie einer Evolvente. Die Entwicklung (3.32) gepaart mit der Abschätzung für die Krümmung (3.34) liefert für die Kurve Z_4 im Krümmungsflussfall einen Längenzuwachs der Ordnung $\frac{1}{s}$ für große s . Demgegenüber ist der Längenzuwachs der Kurve Z_4 für den approximativen Krümmungsfluss sogar der Ordnung $\log s$.

Entfernt vom Spiral Core sind damit sowohl der Eikonalfluss, als auch der approximative Krümmungsfluss gute Näherungen für den Krümmungsfluss, siehe Abbildung 3.1. Die Spiralwellenlösungen des Eikonalfusses (schwarz) und des approximativen Krümmungsflusses (blau) sind in der Abbildung 3.1 praktisch ausserhalb einer sehr kleinen Umgebung der Spiralspitze deckungsgleich.

Ferner sehen wir in Abbildung 3.1, dass der approximative Krümmungsfluss dem Eikonalfluss viel mehr ähnelt als dem Krümmungsfluss. Das ist jedoch nicht weiter überraschend, wenn wir uns die zeitunabhängige Krümmungsgleichung (3.2) ansehen (die Tangentialgeschwindigkeit G spielt bei dieser Betrachtung keine Rolle):

$$D\kappa_{ss} = \left(\kappa \int_0^s \kappa(c - D\kappa) d\sigma \right)_s + G\kappa_s.$$

Diese Gleichung geht nach Integration über die Bogenlänge s und Substitution des Integralterms – wie bereits in Abschnitt 2.4 gesehen – über in

$$D\kappa_{ss}\kappa = D\kappa_{ss} - \omega\kappa_s + c\kappa^3 - D\kappa^4. \quad (3.37)$$

Für $D > 0$ ist (3.37) die Krümmungsflussgleichung, für $D = 0$ die Eikonalgleichung. Die approximative Krümmungsgleichung erhalten wir aus (3.37), wenn wir D nur vor dem Term κ^4 auf Null setzen. Doch die Terme $\kappa_{ss}\kappa$

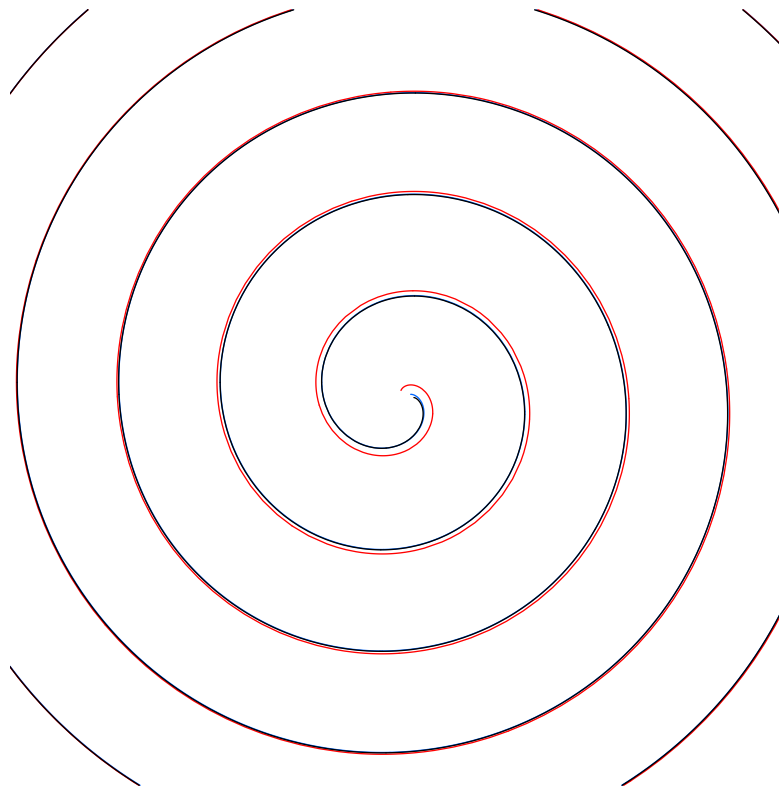


Abbildung 3.1: Vergleich von Spiralwellenlösungen des Krümmungsflusses (rot), des Eikonalfusses (schwarz) und des approximativen Krümmungsflusses (blau) mit $c = 1$, $D = 1$, $G = 0$, $\omega = 1/5$.

und κ_{ss} , die auch den Koeffizienten D besitzen, sind für große s weniger dominant. Insofern ist die approximative Krümmungsgleichung keine wirklich bessere Annäherung an die volle Krümmungsgleichung. Ein Vorteil der Eikonalgleichung ist, dass sie sich selbst im zeitabhängigen Fall gut untersuchen lässt, wie wir in dieser Arbeit gesehen haben. Dabei lassen sich viele im Experiment beobachtete Phänomene wiederfinden.

