Kapitel 2

Spiralwellen in der Kinematischen Theorie

2.1 Überblick: Von Reaktions-Diffusionssystemen zur Kinematischen Theorie

Musterbildung in der Physik, Chemie und Biologie gehört zu den faszinierendsten Phänomenen, die in der Natur beobachtet werden können.

1952 zeigte Turing [Tur52], dass in zweikomponentigen Reaktions-Diffusionssystemen räumlich homogene Gleichgewichtslösungen, die ohne Diffusion stabil sind, durch Diffusionseffekte destabilisiert werden können.

$$\begin{aligned} u_t &= D_u \Delta u + f(u,v) \\ v_t &= D_v \Delta v + g(u,v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei müssen die Diffusionsraten der reagierenden Chemikalien D_u, D_v allerdings ungleich sein, was bei der BZ-Reaktion nicht der Fall ist. Die Turing-Instabilität erwirkt räumlich periodische Muster und ist durch eine aktivierende Chemikalie langsamer Diffusion (Aktivator) u gekennzeichnet, die mit einer hemmenden Chemikalie schneller Diffusion (Inhibitor) v konkurriert. Die BZ-Reaktion zeigt einen Musterbildungsmechanismus ähnlich dem von Turing vorgeschlagenem, obgleich Turing-Muster zeitunabhängig sind.

Erregbare Medien besitzen eine stabile Gleichgewichtslage. Kleine Störungen dieser klingen zeitlich ab, während Störungen jenseits eines Schwellenwertes eine plötzliche Reaktion hervorrufen. Danach vergeht eine gewisse Refraktärzeit ehe die volle Erregbarkeit wieder erlangt wird. In der Model-

lierung nimmt dann (2.1) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \varepsilon u_t &= \varepsilon^2 \Delta u + f(u,v) \\ v_t &= \delta \varepsilon \Delta v + g(u,v). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei ist $0 < \varepsilon \ll 1$, $\delta = D_v/D_u$ der Quotient der Diffusionsraten und die Nulllinie $f(u,v) = 0$ ist kubisch, während die Nulllinie $g(u,v) = 0$ monoton ist. Die Nulllinien treffen sich in nur einem Punkt. Für kleine ε ist die eindeutige Gleichgewichtslage lokal stabil aber erregbar, siehe Abbildung 2.1.

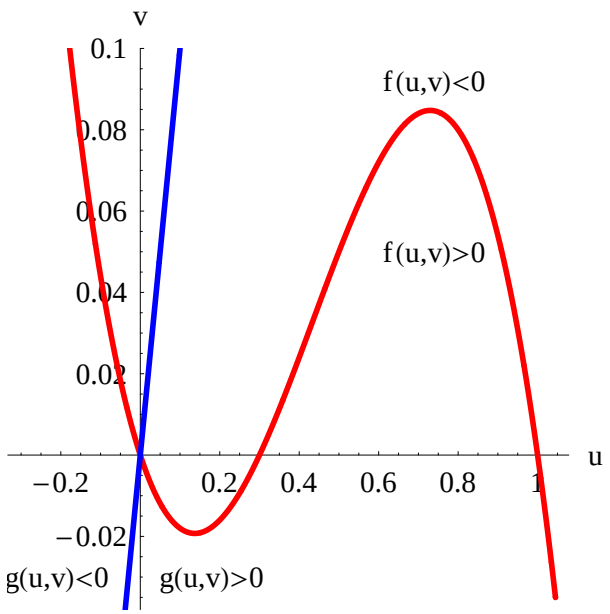

Abbildung 2.1: Plot der Nulllinien $f(u,v) = 0$, $g(u,v) = 0$ für das FitzHugh-Nagumo-System mit $a = 0.3$.

Ein konkretes Beispiel ist das FitzHugh-Nagumo-System [Fit61]:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= u(u-1)(u-a) - v \quad 0 < a < 1, \\ g(u,v) &= u - v. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es werden Lösungen der Reaktions-Diffusionsgleichung (2.2) gesucht, deren Niveaulinien $u(x,y,t) =$ konstant Spiralwellen darstellen. Eine Wellenfront ist eine schmale Region in der Ebene mit einer Breite der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Sie trennt das Medium in zwei Gebiete. In dem einen befindet sich das Medium im angeregten Zustand, in dem anderen im Relaktionszustand. Dabei besitzt eine Wellenfront eine Vorderseite, der die Rückseite folgt.

In [Zyk80b, Zyk80a] untersuchte Zykov den Fall eines nicht diffundierenden Inhibitors v, d.h. $\delta = 0$ im FitzHugh-Nagumo-System (2.2). Er erkannte, dass die Normalengeschwindigkeit einer Wellenfront in einem erregbaren Medium in erster Ordnung von der Krümmung abhängt:

$$U = c - D\kappa. \tag{2.4}$$

Zykov nahm einen Punkt auf der Erregungsfront, der sich tangential entlang des Cores (kleines Gebiet um das Rotationszentrum) bewegt. Der Core-Radius ergibt sich dann, wenn eine kritische Krümmung in diesem Punkt angenommen wird. Dabei ist die kritische Krümmung dadurch definiert, dass eine stärker gekrümmte Wellenfront im Medium nicht mehr propagieren könnte. Analytische und numerische Untersuchungen ergaben, dass ein kleinerer Core mit einer kürzeren Rotationsperiode einhergeht.

Auch andere Autoren erzielten mit singulären Störungsmethoden in erster Ordnung in ε die Krümmungsabhängigkeit der Normalengeschwindigkeit (2.4). Mikhailov und Krinsky [MK83] untersuchten Spiralwellen in erregbaren Medien mit Relaktionsprozessen. Allerdings interessierten sie sich vor allem für neuromuskuläres Gewebe, wo der Inhibitor v die lokale Durchlässigkeit einer Membran für transmembrane ionische Ströme darstellt und – wie zuvor bei Zykov – nicht diffundiert ($\delta = 0$). Weiterhin berechneten sie, wie die Rotationsfrequenz der Spiralwellen von den Parametern des Mediums abhängt.

Fife [Fif84] hingegen erkannte die Wichtigkeit der Diffusion des Inhibitors u ($\delta = 1$) und untersuchte erstmals mit singulären Störungsmethoden das Reaktions-Diffusionssystem (2.2). Er gab eine Skalierung für die Rotationsfrequenz, Ausbreitungsgeschwindigkeit und asymptotische Wellenlänge an. Allerdings fehlten genauere quantitative Aussagen. In erster Ordnung hing bei ihm die Normalengeschwindigkeit U neben der Krümmung, wie in (2.4), zusätzlich von einem Term ab, der sich aus der Abhängigkeit der Funktion f von v in (2.3) ableitet. Ebenso wenig ergab seine Analyse die Eindeutigkeit einer Spiralwelle bezüglich dieser Parameter in der BZ-Reaktion, die im Experiment beobachtet wird.

Demgegenüber ergaben die singulären Störungsuntersuchungen von Keener und Tyson [KT86] eine Spiralwelle, deren Parameter eindeutig gegeben sind, da die Erregungsfront gleichzeitig eine Dispersionsrelation und eine kritische Relation für Spiralwellen erfüllt. Die Dispersionsrelation gibt an wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit periodischer planarer Traveling Waves von der Frequenz der Wellenzüge abhängt. Die kritische Relation berücksichtigt die Abhängigkeit der Frequenz von dem Core-Radius der Spiralwelle und der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Während Fife, Keener und Tyson ein freies Randwertproblem betrachteten, indem sie ein Matching der Frontvorderseite mit der -rückseite an der

Spitze der Spiralwelle versuchten, betrachteten Zykov [Zyk87b, Zyk87a] und Mikhailov [MDZ94] nur die Frontvorderseite und erhielten daher ein Randwertproblem. Dabei müssen für die Spiralspitze in $s = 0$ noch Randbedingungen angegeben werden. Dieser Ansatz wird auch Kinematische Theorie genannt und von uns in dieser Arbeit verfolgt werden. Dabei wollen wir von Krümmungsflüssen sprechen, wenn die Normalengeschwindigkeit wie in (2.4) angegeben affin-linear von der Krümmung abhängt. Bei krümmungsunabhängiger Normalengeschwindigkeit sprechen wir von Eikonalflüssen.

Die Kinematische Theorie findet für schwach erregbare Medien Anwendung. Spiralwellen in solch einem Medium sind durch schmale Erregungs- und kurze Refraktärzonen gekennzeichnet und rotieren um einen Kreis mit großem Radius. Daher können die Frontvorderseite und -rückseite als eine einzelne Kurve mit einem freien Ende betrachtet werden. Solche Spiralwellen treten typischerweise in der BZ-Reaktion [NUMH92] und der katalytischen CO-Oxidation auf Platinoberflächen [NvORE93] auf, siehe auch [PP81]. Die mathematische Modellierung durch in Normalenrichtung fließende (berandete) Kurven und Flächen findet auch in anderen Systemen Anwedung, z.B. zur Beschreibung von Kristallwachstum [BCF51, BKKL84] und Flammenausbreitung [Siv83].

Krümmungsflüsse für Kurven wurden bereits vielfach untersucht [GH86, Ang90, Ang91, FM02]. Schöne Resultate wie das Zusammenschrumpfen geschlossener, konvexer Kurven in endlicher Zeit zu einem Punkt, wobei die Form sich asymptotisch einem Kreis annähert, konnten bewiesen werden. Eine Verallgemeinerung auf konvexe Flächen unter dem mittleren Krümmungsfluss [Hui93] folgte.

Eines der bekanntesten offenen mathematischen Probleme, die Poincaré Vermutung, wurde kürzlich von Perelman bewiesen. Seine Beweistechniken beinhalten Ricci-Krümmungsflüsse kompakter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten [Per06a, Per06b, Per06c].

Auf Grund des glättenden Charakters von Krümmungsflüssen, werden diese auch in der Bildverarbeitung benutzt. Ausgefranste Konturlinien gleicher Intensität werden geglättet [MS95, CM01, Mik01]. Die Krümmungsabhängigkeit $U = c - \kappa^{1/3}$ wird häufig benutzt, da sie affin-äquivariant ist, d.h. Bilder, die affin-linear aufeinander abgebildet werden können, behalten diese Eigenschaft unter dem affinen Krümmungsfluss.

2.2 Herleitung der kinematischen Gleichung

Der Vollständigkeit halber werden wir dem Leser kurz die kinematische Gleichung

$$\kappa_t + U(t,\kappa)_{ss} + \left(\kappa \int_0^s \kappa U(t,\kappa)\mathrm{d}\sigma\right)_s + G(t)\kappa_s = 0 \tag{2.5}$$

herleiten. Dabei sei $\kappa(t,s)$ die Krümmung einer über die Bogenlänge $s \geq 0$ parametrisierten, planaren Kurve $\mathbf{Z}(t,s) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, die bei $s = 0$ einen Anfangspunkt, die Spitze, besitze. An jeder Stelle s bewege sich die Kurve in Normalenrichtung mit eventuell krümmungsabhängiger Geschwindigkeit $U(t,s) = U(t,\kappa(t,s))$. An der Spitze $s = 0$ erlauben wir eine Tangentialgeschwindigkeit $G(t)$. Wir folgen der Herleitung in [GIW04], siehe auch [MZ91, DZM91, MDZ94].

Der linke Normalenvektor, die Normalengeschwindigkeit und der Tangentialvektor sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= i\mathbf{Z}_s, \\ U &= \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{Z}_s. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Frenet-Serret-Formeln ergeben in der Ebene folgenden Zusammenhang für den Normalenvektor $\mathbf{n}$, den Tangentialvektor $\mathbf{T}$ und die Krümmung κ:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s &= \kappa\mathbf{T}, \\ \mathbf{T}_s &= -\kappa\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Zweimaliges Differenzieren der Normalengeschwindigkeit U nach s ergibt:

$$U_{ss} = \mathbf{Z}_{tss} \cdot \mathbf{n} + 2\,\mathbf{Z}_{ts} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}_{ss}. \tag{2.8}$$

Nun werden wir nacheinander die Terme der rechten Seite der Gleichung (2.8) mithilfe von (2.6) und (2.7) umformen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{tss} \cdot \mathbf{n} &\overset{(2.6)}{=} (\mathbf{T})_{ts} \cdot \mathbf{n} \overset{(2.7)}{=} (-\kappa\mathbf{n})_t \cdot \mathbf{n} = -(\kappa_t\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}_t) \cdot \mathbf{n} \\ &= -(\kappa_t \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}_{=1} + \kappa \underbrace{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{n}}_{=0}) = -\kappa_t, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{Z}_{ts} \cdot \mathbf{n}_s \overset{(2.6),(2.7)}{=} \mathbf{T}_t \cdot (\kappa\mathbf{T}) = 0, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}_{ss} &\overset{(2.7)}{=} \mathbf{Z}_t \cdot (\kappa\mathbf{T})_s = \mathbf{Z}_t \cdot (\kappa_s\mathbf{T} + \kappa\mathbf{T}_s) \\ &\overset{(2.7)}{=} \kappa_s(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{Z}_t \cdot (-\kappa^2\mathbf{n}) \overset{(2.6)}{=} \kappa_s(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T}) - \kappa^2 U. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Einsetzen von (2.9), (2.10), (2.11) in Gleichung (2.8) ergibt:

$$U_{ss} = -\kappa_t - \kappa^2 U + \kappa_s(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T}). \tag{2.12}$$

Ferner gilt

$$(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T})_s = \mathbf{Z}_{ts} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T}_s \overset{(2.6),(2.7)}{=} \underbrace{\mathbf{T}_t \cdot \mathbf{T}}_{=0} + \mathbf{Z}_t \cdot (-\kappa \mathbf{n}) \overset{(2.6)}{=} -\kappa U \tag{2.13}$$

und damit

$$(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T})(t,s) = \underbrace{(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T})(t,0)}_{:=G} - \int_0^s \kappa(t,\sigma) U(t,\sigma) \mathrm{d}\sigma, \tag{2.14}$$

wobei $(\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{T})(t,0)$ aber gerade die Geschwindigkeit in der Spiralspitze ist, die wir mit G bezeichnen.

Gleichung (2.14) eingesetzt in (2.12) ergibt nun

$$\begin{aligned} &\kappa_t + U_{ss} + \left(\kappa \int_0^s \kappa U \mathrm{d}\sigma\right)_s + G\kappa_s = 0 \qquad \text{bzw.} \\ &\kappa_t + U_{ss} + \left(\kappa \left(\int_0^s \kappa U \mathrm{d}\sigma + G\right)\right)_s = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3 Starr rotierende Spiralwellen des Eikonalflusses

Wir betrachten nun zeitunabhängige Eikonalflüsse von Kurven mit Tangentialgeschwindigkeit $G \geq 0$ in der Spitze und krümmungsunabhängiger Normalengeschwindigkeit $U = c > 0$ entlang der Kurve. Der Fall verschwindender Spitzentangentialgeschwindigkeit $G = 0$ wird auch als Wiener-Rosenblueth-Grenzwert bezeichnet. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich die Krümmungsgleichung (2.15) zu

$$c\Big(\kappa \int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma\Big)_s + G\kappa_s = 0. \tag{2.16}$$

Ist die Krümmung κ stetig differenzierbar in der Bogenlänge $s \geq 0$ und nimmt bei $s = 0$ einen endlichen Wert κ_0 an, $\kappa(0) = \kappa_0 < \infty$, so folgt nach Integration von (2.16) über s:

$$c\,\kappa \int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma + G\kappa = G\kappa_0. \tag{2.17}$$

Eine weitere Integration über die Bogenlänge s ergibt

$$c\,\frac{1}{2}\Big(\int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma\Big)^2 + G\int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma = G\kappa_0 s \tag{2.18}$$

und wir erhalten als Lösung

$$\int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma = -\frac{G}{c} + \sqrt{\Big(\frac{G}{c}\Big)^2 + 2\frac{G}{c}\kappa_0 s}. \tag{2.19}$$

Ist $G = 0$ oder $\kappa_0 = \kappa(0) = 0$, so erhalten wir die triviale Lösung $\kappa \equiv 0$, also eine ungekrümmte Wellenfront. Wir sehen, dass $\kappa(0) = \kappa_0$ und G dasselbe Vorzeichen besitzen müssen, falls sie ungleich 0 sind. Des Weiteren hängt die Krümmung nur vom Quotienten G/c ab, nicht von den individuellen Werten von c oder G.

Nehmen wir nun nur an, dass die Krümmung κ stetig differenzierbar von der Bogenlänge $s > 0$ abhängt und für $s \to 0$ unbeschränkt ist, aber $c\kappa(s)\int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma \to \omega$ für $s \to 0$ gilt und die Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze verschwindet $G = 0$. Dann erhalten wir aus (2.16)

$$c\kappa \int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma \equiv \omega \tag{2.20}$$

und damit die Lösung im Wiener-Rosenblueth-Grenzwert

$$\int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2\frac{\omega}{c}s}. \tag{2.21}$$

Aus der Parametrisierung der Kurve Z über die Bogenlänge s folgt, dass der Tangentenvektor Z_s die Länge 1 besitzt. Es existiert also ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $Z_s(0) = e^{-i\alpha_0}$. Aus den Frenetschen Formeln (2.7) folgt als Definition für die Krümmung $Z_{ss} = -i\kappa Z_s$. Daher gilt:

$$Z_s(s) = e^{-i\left(\int_0^s \kappa(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \alpha_0\right)}. \tag{2.22}$$

Integration über die Bogenlänge liefert

$$Z(s) = e^{-i\alpha_0}\int_0^s e^{-i\int_0^{\tilde{s}} \kappa(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tilde{s} + Z(0). \tag{2.23}$$

An der Gleichung (2.23) sehen wir auch, dass die Krümmung die Kurve bis auf Translation $Z(0)$ und Rotation α_0 festlegt. Wenn wir ohne Einschränkung annehmen, dass $Z(0) = \frac{c}{\omega}$ und $\alpha_0 = 0$ gilt, vereinfacht sich (2.23) mit Hilfe von (2.21) zu

$$Z(s) = \int_0^s e^{-i\sqrt{2\frac{\omega}{c}\sigma}}\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{\omega}. \tag{2.24}$$

Partielle Integration liefert nun

$$
\begin{aligned}
Z(s) &= \int_0^s i\sqrt{2\frac{c}{\omega}\sigma}\frac{1}{i\sqrt{2\frac{c}{\omega}\sigma}}e^{-i\sqrt{2\frac{\omega}{c}\sigma}}\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{\omega} \\
&= i\sqrt{2\frac{c}{\omega}s}e^{-i\sqrt{2\frac{\omega}{c}s}} - \int_0^s i\frac{1}{\sqrt{2\frac{\omega}{c}\sigma}}e^{-i\sqrt{2\frac{\omega}{c}\sigma}}\mathrm{d}\sigma + \frac{c}{\omega} \\
&= i\sqrt{2\frac{c}{\omega}s}e^{-i\sqrt{2\frac{\omega}{c}s}} + \frac{c}{\omega}e^{-i\sqrt{2\frac{\omega}{c}s}}.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Definieren wir $\varphi(s) := \sqrt{2\frac{\omega}{c}s}$ so erhalten wir

$$
Z(\varphi(s)) = i\frac{c}{\omega}\varphi(s)e^{-i\varphi(s)} + \frac{c}{\omega}e^{-i\varphi(s)}. \tag{2.26}
$$

Bei dieser Lösung handelt es sich also um die Evolvente eines Kreises, siehe z.B. [GAS06]. Wenn wir eine Bindrolle auf ein Blatt Papier befestigen, am Fadenende einen Stift befestigen und dann den Faden straff gespannt abrollen, beschreibt die Linie eine Spirale – die Evolvente des Kreises, siehe Abbildung 2.2. Bereits Wiener, Rosenblueth [WR46] und Winfree [Win72] er-

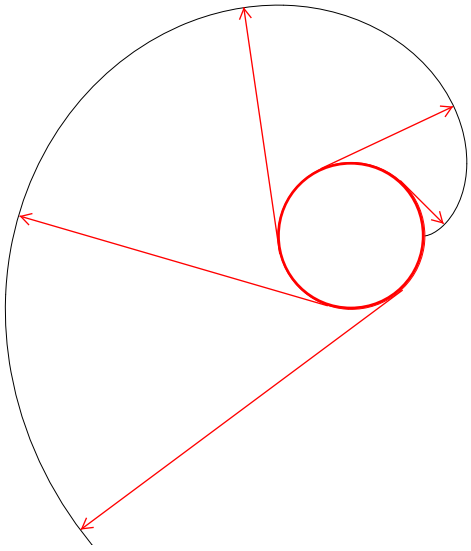

Abbildung 2.2: Evolvente eines Kreises.

kannten, dass eine Spirale, die um ein kreisförmiges Hindernis mit konstanter Normalengeschwindigkeit kreist, eine Evolvente desselbigen darstellt.

In Kapitel 3 werden wir zeigen, dass ω der Rotationsgeschwindigkeit der Spiralwelle entspricht. Die Krümmung dieser Spiralwelle wird in der Spitze

singulär. In diesem Grenzwert sind allerdings die Krümmungsfluss- und Eikonalflussapproximationen nicht haltbar. Offensichtlich wird diese Singularität durch eine positive Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze behoben, wie wir oben gezeigt haben.

2.4 Starr rotierende Spiralwellen des Krümmungsflusses

In diesem Abschnitt betrachten wir starr rotierende Spiralwellen im Falle krümmungsabhängiger Normalengeschwindigkeit. Wir fassen Ergebnisse Fiedlers, Guos und Tsais zusammen [FGT06].

In [FGT06] wurde eine verschwindende Normalengeschwindigkeit $G = 0$, eine streng monoton fallende Abhängigkeit $U(\kappa)$ der Normalengeschwindigkeit von der Krümmung und $U(0) > 0$ angenommen. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich die kinematische Gleichung (2.15) zu

$$U(\kappa)_{ss} + \left(\kappa \int_0^s \kappa U(\kappa) \mathrm{d}\sigma\right)_s = 0. \tag{2.27}$$

Integration von (2.27) über die Bogenlänge s liefert

$$\begin{aligned} U(\kappa)_s + \kappa\left(\int_0^s \kappa U(\kappa) \mathrm{d}\sigma\right) &= \omega \\ \kappa(0) &= \kappa_0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

mit Integrationskonstante ω.

Dabei gibt die Konstante ω die Rotationsfrequenz der asymptotisch Archimedischen Spiralwelle an, die durch die Lösung $\kappa(s)$ von (2.28) gegeben ist ([FGT06]), siehe auch Kapitel 3. Nach Differentiation der Gleichung (2.28) nach der Bogenlänge s lässt sich der Integralterm substituieren und (2.28) geht über in

$$U(\kappa)_{ss} + \frac{\kappa_s}{\kappa}\big(\omega - U(\kappa)_s\big) + \kappa^2 U = 0. \tag{2.29}$$

Die Annahme einer streng monotonen Abhängigkeit der Normalengeschwindigkeit von der Krümmung $U = U(\kappa)$ ermöglicht den Inversen Zusammenhang anzugeben:

$$\kappa = \Gamma(U). \tag{2.30}$$

Man sollte den affin-linearen Fall $U(\kappa) = c - D\kappa$ im Hinterkopf haben, der auf $\Gamma(U) = (c-U)/D$ führt. Wird ferner $\Gamma \in C^4$ mit $\Gamma'(U) < 0$ für alle U und

Abbildung 2.3: Globales Verzweigungsdiagramm starr rotierender asymptotisch Archimedischer Spiralwellen mit Rotationsfrequenz $\omega > 0$ und Normalengeschwindigkeit $U(0)$ in der Spitze.

Genauer, es existiert eine streng monoton fallende Folge $\omega_1 > \omega_2 > \cdots \searrow 0$ *und dazugehörigen Funktionen* $U_n^{\pm}(\omega)$ *für* $0 < \omega \leq \omega_n$*, die Folgendes erfüllen: Eine* C^3*-Lösung* $U = U(s)$*,* $s \geq 0$ *der Krümmungsgleichung (2.31) existiert genau dann, wenn die Normalengeschwindigkeit in der Spitze* $U(0)$ *und deren Ableitung* $U_s(0)$

$$U(0) \in \{U_n^-(\omega), U_n^+(\omega)\}, \quad U_s(0) = \omega \tag{2.32}$$

für eine natürliche Zahl n erfüllen.

Die dazugehörigen Kurven $z = Z(t,s) = r\exp(i\varphi)$ sind rechtsgewundene, linksrotierende, asymptotische Archimedische Spiralen für $s \to \infty$. Die Spitze $Z(t,0)$ rotiert um einen Kreis mit Radius $\rho = |U(0)/\omega|$. Die asymptotische Wellenlänge der Archimedischen Spirale im Far-Field $r \to \infty$ ist durch $2\pi c/\omega$ gegeben.

Die Funktionen $\omega \mapsto U_n^{\pm}(\omega)$ besitzen für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften (siehe Bifurkationsdiagramm 2.3):

(i) Die Vereinigung der Graphen von $U_n^{\pm}$ bilden eine C^3-Kurve mit nicht verschwindender Krümmung bei $\omega = \omega_n$.

(ii) $U_n^{\pm}(\omega_n) = 0$ und $U_n^{\pm}(\omega) \to \pm c$ für $\omega \searrow 0$.

(iii) Alle Rotationsfrequenzen $0 < \omega < \omega_n$ erfüllen die strikte Ordnung

$$U_1^+(\omega) > U_2^+(\omega) > \ldots > U_n^+(\omega) > 0 > U_n^-(\omega) > \ldots > U_2^-(\omega) > U_1^-(\omega). \tag{2.33}$$

Theorem 1 wurde in [FGT06] bewiesen, indem die singuläre gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.31) durch Hinzufügen der Variablen $V := U_s$ als System erster Ordnung geschrieben und dann die rechte Seite durch Multiplikation mit dem Euler-Multiplikator $\kappa = \Gamma(U)$ regularisiert wurde:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \Gamma \cdot V \\ \dot{V} &= -\Gamma_U \cdot V(\omega - V) - \Gamma^3 U. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Diese Differentialgleichung besitzt drei Gleichgewichte: $(U,V) = (0,0)$, $(c,0)$, (c,ω). Die Annahme $\Gamma_U < 0 < \omega$ liefert, dass $(U,V) = (0,0)$ zwei Eigenwerte positiven Realteils besitzt, also instabil ist. Das Gleichgewicht $(c,0)$ besitzt 0 als einen Eigenwert, während der andere positiv ist, und (c,ω) hat negative Eigenwerte und ist damit stabil.

Das nicht-hyperbolische Gleichgewicht $(c,0)$ besitzt eine eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit $V = \Phi(\omega,U)$. Sie weist folgende Entwicklung auf:

$$V = \Phi(\omega,U) = \frac{c}{\omega}\Gamma_U(c)^2(c-U)^3 + \ldots \tag{2.35}$$

nahe $U = c$, $V = 0$. Die Zentrumsmannigfaltigkeit verbindet im Bereich $U \leq c$ die beiden Gleichgewichte $(U,V) = (0,0)$ und $(U,V) = (c,0)$ und ist dort eindeutig, siehe Phasenportrait 2.4.

Auf der linkseindeutigen Zentrumsmannigfaltigkeit, die ein heterokliner Orbit ist, liegen alle Lösungen des Theorems 1. Dies folgt allein aus der

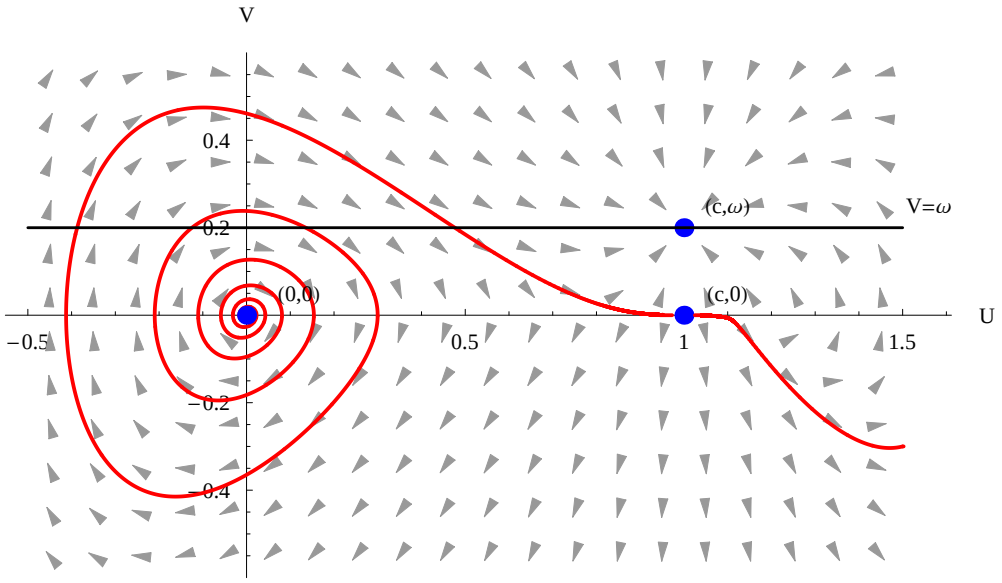

Abbildung 2.4: Vektorfeld der regularisierten Krümmungsgleichung (2.34) mit Gleichgewichten (blau) und linkseindeutiger Zentrumsmannigfaltigkeit (rot) für Rotationsgeschwindigkeit $\omega = 1/5$ und $U(\kappa) = 1 - \kappa$, alias $\Gamma(U) = 1 - U$.

Beschränktheits- und Vorzeichenannahme. Diese Lösungen stellen alle asymptotisch Archimedische Spiralwellen dar.

Die Entwicklung (2.35) liefert auf der Zentrumsmannigfaltigkeit folgende Entwicklung für $s \to \infty$:

$$\kappa_s = -\frac{c}{\omega}\kappa^3 + \dots . \tag{2.36}$$

Wird die Kurve z in Polarkoordinaten $z = r\exp(i\varphi)$ dargestellt, so kann folgendes Grenzverhalten gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} U &= c \\ \lim_{s\to\infty} \varphi &= -\infty \\ \lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} &= -\frac{c}{\omega}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Damit beschreibt $z(s)$ tatsächlich asymptotisch Archimedische Spiralwellen.

Allerdings liefert nicht jeder Anfangswert auf der linksseitigen Zentrumsmannigfaltigkeit $V = \Phi(\omega, U)$ des Gleichgewichts $(U, V) = (c, 0)$ eine Lösung von (2.31). Vielmehr müssen ω und $U(0)$ folgende Gleichung erfüllen:

$$\omega = \Phi(\omega, U(0)), \tag{2.38}$$

da $V(0) = U_s(0) = \omega$ gilt. Die Lösungen dieser Gleichung ergeben gerade das Birfukationsdiagramm 2.3. Die verschiedenen Kurven des Bifurkationsdiagramms 2.3 entsprechen den unterschiedlichen Schnittpunkten der Linie $V = \omega$ mit der linksseitigen Zentrumsmannigfaltigkeit im Phasenportrait 2.4. Die gefundenen Lösungen der Gleichung (2.31) liefern über den streng monotonen Zusammenhang $\kappa = \Gamma(U)$ Lösungen von (2.28).

Einige der Lösungen des Bifurkationsdiagramms 2.3 sind allerdings sich selbst schneidende Spiralwellen, die im Far-Field asymptotisch Archimedisch sind. Damit beenden wir die kurze Präsentation der Ergebnisse von [FGT06].

2.5 Zeitabhängige Spiralwellenlösungen des Eikonalflusses

Wir kommen nun zu den zeitabhängigen Lösungen des Eikonalflusses. Zeitlich variierende externe Anregungen spiegeln sich in der krümmungsunabhängigen, aber zeitabhängigen Normalengeschwindigkeit $c(t)$ und in der Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze $G(t)$ wieder. Wir werden annehmen, dass $c(t)$, $G(t)$ und die Krümmung in der Spitze $\kappa_0(t)$ positive stetige Funktionen sind. Aus der kinematischen Gleichung (2.5) folgt dann:

$$\kappa_t + c(t)\left(\kappa \int_0^s \kappa \mathrm{d}\sigma\right)_s + G(t)\kappa_s = 0 \tag{2.39}$$

mit Dirichlet-Randbedingung $\kappa(t,0) = \kappa_0(t)$ bei $s = 0$.

Nach Einführung des negativen Tangentenwinkels $w(t,s) = \int_0^s \kappa(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma$ erhalten wir aus (2.39) eine nichtlineare hyperbolische Erhaltungsgleichung:

$$\begin{aligned} w_t + (c(t)w + G(t))w_s &= G(t)\kappa_0(t) \\ w(t,0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Für $G(t) \neq 0$ folgt die Dirichlet-Randbedingung $\kappa(t,0) = \kappa_0(t)$ der Eikonalgleichung (2.39) aus $w_s(t,0) = \kappa(t,0)$. Die Erhaltungsgleichung (2.40) kann mit Charakteristiken gelöst werden wie bereits Mikhailov, Davydov und Zykov in dem Übersichtsartikel [MDZ94] erkannten. Wir werden jedoch darüber hinaus zeigen, dass periodische Störungen zu Superspiralstrukturen führen können. Die Charakteristiken der nichtlinearen hyperbolischen Erhaltungsgleichung (2.39) erfüllen:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c(t)w + G(t) \\ \dot{w} &= G(t)\kappa_0(t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

mit $\dot{} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$.

Wir können (2.41) explizit lösen:

$$\begin{aligned} w(t, s(t, t_0)) &= \int_{t_0}^{t} G(\tau)\kappa_0(\tau)\mathrm{d}\tau \\ s(t, t_0) &= \int_{t_0}^{t} \Big(G(\tau) + c(\tau) \int_{t_0}^{\tau} G(\tau')\kappa_0(\tau')\mathrm{d}\tau'\Big)\mathrm{d}\tau \quad \text{mit } -\infty < t_0 \leq t. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Wir nehmen dabei an, dass die Kontrollparameter $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Wir brauchen dann keine Anfangsbedingung bei $t = 0$, d.h. wir geben nicht die Krümmung bzw. die Kurve zum Zeitpunkt 0 vor. Unter unserer Positivitätsannahme an die Kontrollparameter starten dann alle Charakteristiken auf der t-Achse und laufen nach rechts im t-s-Diagramm, siehe Abbildung 2.5.

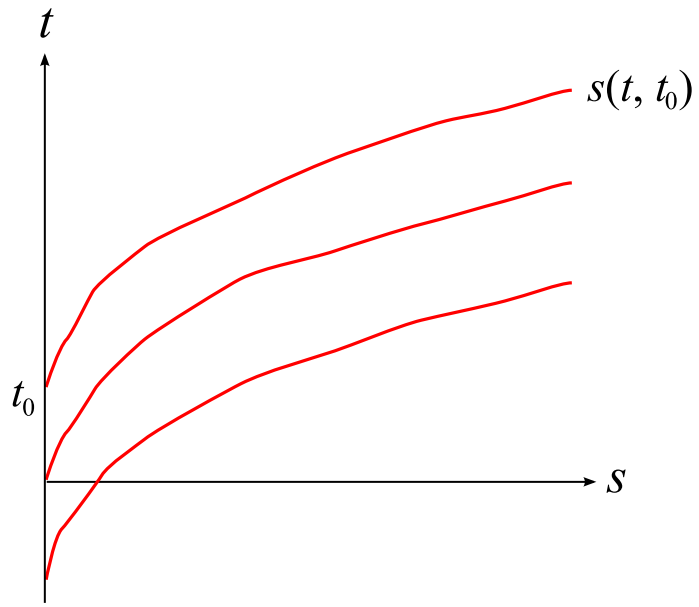

Abbildung 2.5: Charakteristiken (2.42) der Erhaltungsgleichung (2.40), wenn die Kontrollparameter positiv und für alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

In (2.42) haben wir die Anfangswerte für die Gleichungen der Charakteristiken (2.41) so gewählt, dass $s(t_0, t_0) = 0$ und $w(t_0, s(t_0, t_0)) = w(t_0, 0) = 0$ erfüllt sind. Da $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ positiv angenommen wurden, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0} s(t, t_0) = -G(t_0) - G(t_0)\kappa_0(t_0) \int_{t_0}^{t} c(\tau)\mathrm{d}\tau < 0 \quad \text{für} -\infty < t_0 \leq t. \tag{2.43}$$

Für jeden festen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist daher $t_0 \mapsto s(t, t_0)$ ein Diffeomorphismus von $t_0 \in (-\infty, t]$ nach $[0, +\infty)$. Wir haben gezeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 |\ t_0 \leq t\} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \\ (t, t_0) &\mapsto (t, s(t, t_0)) \end{aligned} \tag{2.44}$$

ein Diffeomorphismus ist. Es existiert also eine Funktion $t_0(t, s)$, so dass lax geschrieben $s(t, t_0(t, s)) = s$ gilt.

Wir können also die Erhaltungsgleichung (2.40) für alle $t \in \mathbb{R}$ und $s \geq 0$ lösen. Für konstante Funktionen c, G, κ_0 erhalten wir

$$s(t, t_0) = G(t - t_0) + \frac{cG\kappa_0}{2}(t - t_0)^2 \tag{2.45}$$

$$\tag{2.46}$$

und damit

$$t - t_0 = -\frac{1}{c\kappa_0} + \sqrt{\frac{1}{c^2\kappa_0^2} + \frac{2}{cG\kappa_0}s(t, t_0)}. \tag{2.47}$$

Aus

$$w(t, s(t, t_0)) = (t - t_0)G\kappa_0 \tag{2.48}$$

folgt dann

$$w(t, s) = w(s) = -\frac{G}{c} + \sqrt{\left(\frac{G}{c}\right)^2 + 2\kappa_0\frac{G}{c}s}. \tag{2.49}$$

Wir sehen, dass jede Lösung der Erhaltungsgleichung (2.40) mit positiven, zeitunabhängigen Koeffizienten c, G, κ_0 automatisch zeitunabhängig sein muss. Dies liegt an der Randbedingung $w(t, 0) = 0$. Wir gewinnen damit die Lösung (2.19), die wir auf der Suche nach stationären Lösungen gesucht haben, zurück.

Nehmen wir nun an, dass die Kontrollparameter $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ nicht nur positiv sind, sondern einen echten Abstand von der Null halten und zudem von oben beschränkt sind:

$$0 < m < c(t), G(t), \kappa_0(t) < M \quad \text{für Konstanten } m,\ M. \tag{2.50}$$

Es gilt dann nach (2.42)

$$\begin{aligned} \kappa(t, s(t, t_0)) = w_s(t, s(t, t_0)) &= \frac{\frac{\mathrm{d}w(t, s(t, t_0))}{\mathrm{d}t_0}}{\frac{\mathrm{d}s(t, t_0)}{\mathrm{d}t_0}} \\ &= \frac{\kappa_0(t_0)}{1 + \kappa_0(t)\int_{t_0}^t c(\tau)\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_0(t_0)} + \int_{t_0}^t c(\tau)\mathrm{d}\tau}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Damit erhalten wir, wenn $\kappa_0(t)$ stetig differenzierbar ist:

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa_s(t,s(t,t_0))}{\kappa(t,s(t,t_0))^3} &= \frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\frac{1}{\kappa(t,s(t,t_0)))^2}}{\frac{\mathrm{d}s(t,t_0)}{\mathrm{d}t_0}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\kappa_0(t_0)} + \int_{t_0}^{t} c(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\left(-\frac{\kappa_0'(t_0)}{\kappa_0(t_0)^2} - c(t_0)\right)}{-G(t_0) - G(t_0)\kappa_0(t_0)\int_{t_0}^{t} c(\tau)\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\frac{\kappa_0'(t_0)}{\kappa_0(t_0)^2} + c(t_0)}{G(t_0)\kappa_0(t_0)}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Vergleiche (2.52) mit der Entwicklung $\kappa_s = -\frac{c}{\omega}\kappa^3 + \dots$ (2.36) für starr rotierende Spiralwellenlösungen des Krümmungsflusses, siehe auch Kapitel 3.

Wenn wir nur mal in diesem Absatz annehmen, dass $\kappa_0(t)$ nur langsam in t variiert, genauer, $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\kappa(t)\right|$ klein genug ist, gilt für alle $s \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$0 < l < -\frac{\kappa_s(t,s)}{\kappa(t,s)^3} < L \quad \text{für Konstanten } l,\, L. \tag{2.53}$$

Aus (2.53) folgt

$$0 \leq 2ls \leq \frac{1}{\kappa(t,s)^2} - \frac{1}{\kappa_0(t)^2} \leq 2Ls \tag{2.54}$$

und damit

$$\kappa_0(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2ls + \frac{1}{\kappa_0(t)^2}}} \geq \kappa(t,s) \geq \frac{1}{\sqrt{2Ls + \frac{1}{\kappa_0(t)^2}}}. \tag{2.55}$$

Insbesondere folgt aus (2.53), dass $\frac{1}{\kappa(t,s)^2}$ in s streng monoton wächst, also $\kappa(t,s)$ in s streng monoton fällt. Ungleichung (2.55) liefert uns sogar, dass für $s \to \infty$ der Ausdruck $\kappa(t,s)\cdot s^{\frac{1}{2}}$ beschränkt ist.

Für den negativen Tangentenwinkel gilt nach (2.42) und (2.51)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(w(t,s(t,t_0))\big)^2 = 2w(t,s(t,t_0))\cdot\kappa(t,s(t,t_0)) = 2\frac{\int_{t_0}^{t} G(\tau)\kappa_0(\tau)\mathrm{d}\tau}{\frac{1}{\kappa_0(t_0)} + \int_{t_0}^{t} c(\tau)\mathrm{d}\tau}. \tag{2.56}$$

Wieder unter der Positivitäts- und Beschränktheitsannahme (2.50) für $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ ist die nicht-negative Funktion $\big(w(t,s)\cdot\kappa(t,s)\big)$ nach oben beschränkt (etwa durch $L' > 0$) und verschwindet bei $s = 0$:

$$0 \leq w(t,s)\cdot\kappa(t,s) \leq L'. \tag{2.57}$$

Also ist

$$0 \leq w(t,s)^2 \leq 2L's \tag{2.58}$$

und damit

$$0 \leq w(t,s) \leq \sqrt{2L's} \quad \text{für alle } s \geq 0. \tag{2.59}$$

Andererseits folgt aus (2.56) auch, dass ein $\hat{s} > 0$ und ein $l' > 0$ existieren mit

$$0 < l' \leq w(t,s) \cdot \kappa(t,s) \quad \text{für alle } s \geq \hat{s}. \tag{2.60}$$

Es folgt dann

$$2l'(s - \hat{s}) \leq w(t,s)^2 - w(t,\hat{s})^2 \tag{2.61}$$

und damit

$$\sqrt{2l'(s-\hat{s}) + w(t,\hat{s})^2} \leq w(t,s) \quad \text{für alle } s \geq \hat{s}. \tag{2.62}$$

2.5.1 Rekonstruktion der Kurve

Nun, da wir in Abschnitt 2.5 die Krümmung $\kappa(t,s)$ der Kurve $Z(t,s)$ bestimmen konnten, die sich als Lösung des Krümmungsflusses (2.39) ergibt, muss $Z(t,s)$ aus $\kappa(t,s)$ bzw. $w(t,s)$ zurückgewonnen werden. Nach Definition (2.6) und den Frenetschen Formeln (2.7) gilt:

$$Z_{ss}(t,s) = -i\kappa Z_s(t,s). \tag{2.63}$$

Parametrisierung über die Bogenlänge s liefert $|Z_s(t,s)| = 1$ für alle $s \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Der negative Tangentenwinkel $\tilde{w}(t,s)$ ist daher definiert durch

$$Z_s(t,s) = e^{-i\tilde{w}(t,s)}. \tag{2.64}$$

(2.64) eingesetzt in (2.63) liefert:

$$\tilde{w}_s(t,s) = \kappa(t,s) \tag{2.65}$$

Wir erhalten damit

$$\tilde{w}(t,s) = \int_0^s \kappa(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma - \alpha(t) = w(t,s) - \alpha(t), \tag{2.66}$$

wobei $\alpha(t) := -\tilde{w}(t,0)$ der Tangentenwinkel in der Spitze $s = 0$ ist, also

$$Z_s(t,0) = e^{i\alpha(t)}, \tag{2.67}$$

erfüllt.

Wir werden nun die Dynamik der Spiralspitze angeben. Wir bezeichnen die Position der Spitze kurz mit $z(t)$, also $z(t) := Z(t,0)$. Der Tangentenwinkel $\alpha(t)$ und die Position $z(t)$ erfüllen folgende Differentialgleichung (siehe z.B. [MDZ94]):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= G(t)\kappa_0(t) \\ \dot{z} &= e^{i\alpha}(ic(t) - G(t)). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Die erste Gleichung von (2.68) ergibt sich aus (2.6), (2.7) und der Definition des negativen Tangentenwinkels (2.64):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} U = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} (\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{Z}_{ts} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{n}_s)\big|_{s=0} \\ &= ((-i\tilde{w}_t \mathbf{Z}_s) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{Z}_t \cdot (\kappa \mathbf{Z}_s))\big|_{s=0} = (-\tilde{w}_t + \kappa \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{Z}_s)\big|_{s=0} \\ &= \alpha_t - \kappa_0(t)G(t). \end{aligned} \tag{2.69}$$

Die Gleichung für die Spitze $z(t)$ folgt direkt aus den Modellierungsannahmen, dass die Kurve in der Spitze eine Tangentialgeschwindigkeit von $G(t)$ und eine Normalengeschwindigkeit von $U(t) = c(t)$ besitzt; siehe Abbildung 2.6.

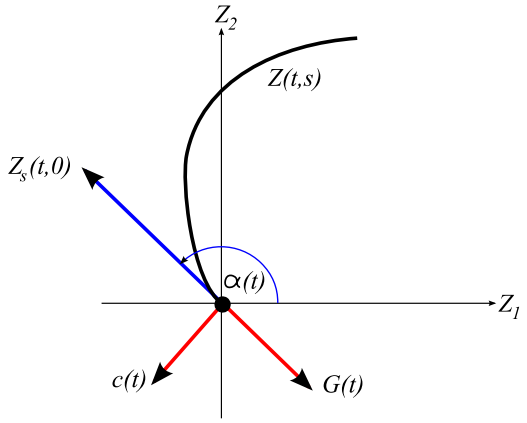

Abbildung 2.6: Kurve $Z(t,s)$ mit Tangentenwinkel $\alpha(t)$ und eingetragener Normalengeschwindigkeit $c(t)$ und Tangentialgeschwindigkeit $G(t)$ in der Spitze $s = 0$.

Bezeichnen wir mit $z_0 := Z(0,0)$ die Anfangsposition der Spiralspitze und

mit $\alpha_0 := \alpha(0)$ den Anfangstangentenwinkel in der Spitze, so gilt nach (2.68):

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \int_0^t e^{i\alpha(\tau)}(ic(\tau) - G(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= z_0 + \int_0^t e^{i\left(\int_0^\tau G(\tau')\kappa_0(\tau')\mathrm{d}\tau' + \alpha_0\right)}(ic(\tau) - G(\tau))\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Nun können wir mithilfe von (2.70) die Dynamik der gesamten Kurve $Z(t,s)$ angeben:

$$\begin{aligned} Z(t,s) &\overset{(2.64)}{=} z(t) + \int_0^s e^{-i\tilde{w}(t,\sigma)}\mathrm{d}\sigma \\ &\overset{(2.66)}{=} z(t) + \int_0^s e^{-i(w(t,\sigma)-\alpha(t))}\mathrm{d}\sigma \\ &= z(t) + e^{i\alpha(t)}\int_0^s e^{-iw(t,\sigma)}\mathrm{d}\sigma \\ &= z(t) + e^{i\alpha(t)}\int_t^{t_0(s,t)} e^{-iw(t,s(t,\tau_0))}\frac{\mathrm{d}s(t,\tau_0)}{\mathrm{d}\tau_0}\mathrm{d}\tau_0, \end{aligned} \tag{2.71}$$

was nach (2.43) zu Folgendem führt:

$$\begin{aligned} Z(t,s) = z(t) &+ e^{i\alpha(t)}\int_t^{t_0(s,t)} e^{-iw(t,s(t,\tau_0))} \\ &\cdot\Big(-G(\tau_0) - G(\tau_0)\kappa_0(\tau_0)\int_{\tau_0}^t c(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\Big)\mathrm{d}\tau_0 \\ = z(t) &+ e^{i\alpha(t)}\int_t^{t_0(s,t)} e^{-iw(t,s(t,\tau_0))}(-i)\Big(-G(\tau_0)\kappa_0(\tau_0)\Big) \\ &\cdot i\left(\frac{1}{\kappa_0(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^t c(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\right)\mathrm{d}\tau_0. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Partielle Integration ergibt unter Berücksichtigung von (2.42)

$$\begin{aligned} Z(t,s) = z(t) &+ ie^{i\alpha(t)}\left(e^{-iw(t,s)}\left(\frac{1}{\kappa_0(t_0(s,t))} + \int_{t_0(t,s)}^t c(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\right) - \frac{1}{\kappa_0(t)}\right) \\ &- ie^{i\alpha(t)}\int_{t_0(t,s)}^t e^{-iw(t,s(t,\tau_0))}\left(\frac{\kappa_0'(\tau_0)}{\kappa_0(\tau_0)^2} + c(\tau_0)\right)\mathrm{d}\tau_0, \end{aligned} \tag{2.73}$$

was sich nach (2.64) schreiben lässt als

$$\begin{aligned} Z(t,s) = z(t) - ie^{i\alpha(t)}\frac{1}{\kappa_0(t)} + iZ_s(t,s)\left(\frac{1}{\kappa_0(t_0(t,s))} + \int_{t_0(t,s)}^{t} c(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\right) \\ - \int_{t_0(t,s)}^{t} iZ_s(t,s(t,\tau_0))\left(\frac{\kappa_0'(\tau_0)}{\kappa_0(\tau_0)^2} + c(\tau_0)\right)\mathrm{d}\tau_0. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Wir haben damit also die Dynamik der Spiralwelle $Z(t,s)$ in drei Summanden zerlegt,

$$\begin{aligned} Z(t,s) = \underbrace{Z(t,0)}_{z(t)} \underbrace{-ie^{i\alpha(t)}\frac{1}{\kappa_0(t)} + iZ_s(t,s)\left(\frac{1}{\kappa_0(t_0(t,s))} + \int_{t_0(t,s)}^{t} c(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\right)}_{Z^1(t,s)} \\ \underbrace{- \int_{t_0(t,s)}^{t} iZ_s(t,s(t,\tau_0))\left(\frac{\kappa_0'(\tau_0)}{\kappa_0(\tau_0)^2} + c(\tau_0)\right)\mathrm{d}\tau_0}_{Z^2(t,s)}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

wobei der erste Summand, $Z(0,t) = z(t)$, die Dynamik der Spiralspitze angibt. Wir werden nun zeigen, dass der zweite Summand hauptsächlich für die Spiralform der Lösung verantwortlich ist, während der dritte mit dem zweiten zur Superspiralstruktur beiträgt.

Wir nehmen wie in (2.50) wieder an, dass die Kontrollparameter $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ von unten und oben durch positive Konstanten beschränkt sind. Zusätzlich fordern wir das Gleiche für $\frac{\kappa_0'(t_0)}{\kappa_0(t_0)^2} + c(t_0)$, vergleiche mit (2.52)–(2.55). Die letzte Annahme ist keine notwendige Annahme für Spiralwellen, aber eine hinreichende, wie wir gleich sehen werden. Sei also

$$\begin{aligned} &0 < m < c(t), G(t), \kappa_0(t) < M, \\ &0 < m < \frac{\kappa_0'(t_0)}{\kappa_0(t_0)^2} + c(t_0) < M \quad \text{für Konstanten } m,\, M. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Sei t beliebig, aber fest gewählt. Unter Berücksichtigung von

$$Z_s(t,s(t,t_0)) \overset{(2.64),(2.66)}{=} e^{i\left(\alpha(t) - \int_{t_0}^{t} G(t_0)\kappa_0(t_0)\right)} \overset{(2.68)}{=} e^{i\left(\alpha_0 + \int_0^{t_0} G(t_0)\kappa_0(t_0)\right)}, \tag{2.77}$$

wobei $\alpha_0 := \alpha(0)$ sei, liefert die Parametrisierung der Kurve Z^1 über t_0

anstatt über die Bogenlänge s:

$$Z^1(t,s(t,t_0)) = -ie^{i\alpha(t)}\frac{1}{\kappa_0(t)} + \underbrace{ie^{i\left(\alpha_0+\int_0^{t_0} G(t_0)\kappa_0(t_0)\right)}\left(\frac{1}{\kappa_0(t_0)} + \int_{t_0}^{t} c(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\right)}_{\widetilde{Z}^1(t,t_0)}. \tag{2.78}$$

Dabei durchläuft t_0 die Werte von t bis $-\infty$. Der ausschließlich t-abhängige Anteil $-ie^{i\alpha(t)}\frac{1}{\kappa_0(t)}$ von $Z^1(t,s)$ hat keinen Einfluss auf die geometrische Form der Kurve $Z^1(t,s)$. Die Kurve $\widetilde{Z}^1$ legt also die Form von Z^1 fest. Schreiben wir $\widetilde{Z}^1$ in Polarkoordinaten erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}^1(t,t_0) &= \widetilde{r}^1(t,t_0)e^{i\widetilde{\varphi}^1(t,t_0)} \quad \text{mit} \\
\widetilde{r}^1(t,t_0) &= \frac{1}{\kappa_0(t_0)} + \int_{t_0}^{t} c(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0 \quad \text{und} \\
\widetilde{\varphi}^1(t,t_0) &= \alpha_0 + \int_0^{t_0} G(\tau_0)\kappa_0(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Für $\widetilde{Z}^1$ ist nun die Abhängigkeit von $\widetilde{r}^1(t,t_0)$ und $\widetilde{\varphi}^1(t,t_0)$ direkt ablesbar:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widetilde{r}^1}{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}^1} = \frac{\frac{\mathrm{d}\widetilde{r}^1}{\mathrm{d}t_0}}{\frac{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}^1}{\mathrm{d}t_0}} &\overset{(2.79)}{=} -\frac{\frac{\kappa_0'(t_0)}{\kappa_0(t_0)^2} + c(t_0)}{G(t_0)\kappa_0(t_0)} \\
&\overset{(2.52)}{=} \frac{\kappa_s(t,s(t,t_0))}{\kappa(t,s(t,t_0))^3}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Damit gilt mit unseren Schranken (2.76):

$$-\frac{M}{m^2} < \frac{\mathrm{d}\widetilde{r}^1}{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}^1} < -\frac{m}{M^2} < 0. \tag{2.81}$$

Archimedische Spiralwellen sind Kurven, die in Polarkoordinaten dargestellt $\frac{r}{\varphi} =$ konstant erfüllen, während asymptotisch Archimedische Spiralwellen $\lim_{\varphi\to\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} =$ konstant erfüllen. Nach unseren Annahmen ist für die Kurve $\widetilde{Z}^1$ die Ableitung $-\frac{\mathrm{d}\widetilde{r}^1}{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}^1}$ allerdings nur von unten und oben durch positive Zahlen beschränkt. Mit abnehmenden Winkel $\widetilde{\varphi}$ nimmt $\widetilde{r}$ mit beschränkter, variierender Rate zu. Die Kurve $\widetilde{Z}^1$ sieht also wie eine rechtsgewundene, linksrotierende Spiralwelle aus, die nicht asymptotisch Archimedisch sein muss.

Nun betrachten wir Z^2 und hoffen, dass die Struktur von Z^1 möglichst erhalten bleibt. Wieder parametrisieren wir Z^2 über t_0, $t \geq t_0 > -\infty$:

$$Z^2(t,s(t,t_0)) = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\kappa_0'(\tau_0)}{\kappa_0(\tau_0)^2} + c(\tau_0)\right)(-i)e^{i\left(\alpha_0+\int_0^{\tau_0} G(\tau_0')\kappa_0(\tau_0')\mathrm{d}\tau_0'\right)}\mathrm{d}\tau_0. \tag{2.82}$$

Da $\frac{\kappa_0'(\tau_0)}{\kappa_0(\tau_0)^2} + c(\tau_0)$ positiv ist, ist die Länge der Kurve Z^2 gerade durch

$$\begin{aligned}
\text{Länge}(Z^2) &= \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0} Z^2(t, s(t,\tau_0)) \right| \mathrm{d}\tau_0 \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\kappa_0'(\tau_0)}{\kappa_0(\tau_0)^2} + c(\tau_0) \right) \mathrm{d}\tau_0 \\
&= -\frac{1}{\kappa_0(t)} + \frac{1}{\kappa_0(t_0)} + \int_{t_0}^{t} c(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0 = -\frac{1}{\kappa_0(t)} + \widetilde{r}^1(t,t_0)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

gegeben. Der Längenzuwachs von Z^2 entspricht also genau dem radialen Zuwachs von $\widetilde{Z}^1$, also dem Zuwachs von $|\widetilde{Z}^1|$. Ferner ist

$$\arg\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0} Z^2(t,t_0) \right) = -\arg\left(\widetilde{Z}^1(t,t_0) \right), \tag{2.84}$$

d.h. die Kurve Z^2 wächst stets in Richtung $-\widetilde{Z}^1$. Folglich kann Z^2 die Spiralstruktur von Z^1 nicht zerstören und es kommt auch nicht zu Selbstüberschneidungen.

Im Prinzip waren für diese Beobachtungen die Umformungen von (2.71)–(2.75) etwas übertrieben. Allerdings wird uns die Darstellung (2.75) später helfen explizit Beispiele zu berechnen. Alternativ könnten wir $Z(t,s) = z(t) + \int_0^s e^{-i\tilde{w}(t,\sigma)}\mathrm{d}\sigma$ direkt partiell integrieren, indem wir den Faktor $\frac{\kappa(t,s)}{\kappa(t,s)}$ im Integranden hinzufügen.

Folgendes Theorem haben wir damit bewiesen:

Theorem 2 *Seien die Funktionen für die Normalengeschwindigkeit $c(t)$, die Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze $G(t)$ und die Krümmung in der Spitze $\kappa_0(t)$ stetig, nach unten und oben durch positive Konstanten beschränkt. Ferner sei die Funktion $\kappa_0(t)$ stetig differenzierbar und $\frac{\kappa_0'(t)}{\kappa_0(t)^2} + c(t)$ ebenfalls nach unten und oben durch positive Konstanten beschränkt. Dann besitzt die Eikonalflussgleichung*

$$\begin{aligned}
\kappa_t + c(t)\left(\kappa \int_0^s \kappa(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma \right)_s + G(t)\kappa_s &= 0 \\
\kappa(t,0) &= \kappa_0(t)
\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung. Diese Lösung stellt eine rechtsgewundene, linksrotierende Spiralwelle dar, die nicht asymptotisch Archimedisch sein muss, deren Wellenfronten aber stets einen positiven, beschränkten Abstand besitzen. Insbesondere treten keine Selbstüberschneidungen auf.

2.5.2 Explizites Beispiel für Mäander, Drift und Superspiralen

Wir werden in diesem Abschnitt explizit eine Familie von Beispielspiralen für gegebene Kontrollparameter $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ berechnen, die je nach Wahl der Parameter starr rotierende asymptotisch Archimedische, driftende oder mäandrierende Spiralwellen liefern. Superspiralen und sogar Superspiralstrukturen zweiter Ordnung werden wir finden.

Wir nehmen dabei an, die Kontrollparameter ließen sich unabhängig voneinander frei wählen. Dies wird wohl in einer realistischen Modellierung zeitlich variierender externer Anregungen erregbarer Medien nicht der Fall sein. So wird bestimmt die zeitliche Entwicklung der Normalengeschwindigkeit $c(t)$ von der der Tangentialgeschwindigkeit $G(t)$ abhängen und umgekehrt. Sei

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \varepsilon_1 \sin t + \varepsilon_2 \sin \delta t \\ G(t) &= \frac{1}{a}\, c(t) \\ \kappa_0(t) &= \frac{1}{G(t)}. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Nach (2.68) haben wir damit die Rotationsfrequenz auf 1 festgesetzt, da $\dot{\alpha}(t) = G(t)\kappa_0(t) \equiv 1$ gilt. Nehmen wir zum Zeitpunkt $t = 0$ für den Tangentenwinkel in der Spitze $\alpha(0) = 0$ an, erhalten wir die einfache Rotationsdynamik der Spiralspitze:

$$\alpha(t) = t. \tag{2.86}$$

Zunächst wollen wir die Dynamik der Spiralspitze $z(t)$ bestimmen. Dazu

benötigen wir die Stammfunktionen einiger trigonometrischer Funktionen:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2\tau \,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}\sin 2\tau \\
\int \cos^2\tau \,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau \\
\int \sin\tau\cdot\cos\tau \,\mathrm{d}\tau &= -\frac{1}{4}\cos 2\tau \\
\int \sin\tau\cdot\sin\delta\tau \,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{\delta^2-1}\big(-\delta\sin\tau\cdot\cos\delta\tau + \sin\delta\tau\cdot\cos\tau\big) \\
\int \sin\tau\cdot\cos\delta\tau \,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{\delta^2-1}\big(\delta\sin\tau\cdot\sin\delta\tau + \cos\tau\cdot\cos\delta\tau\big) \\
\int \sin\delta\tau\cdot\cos\tau \,\mathrm{d}\tau &= -\frac{1}{\delta^2-1}\big(\delta\cos\tau\cdot\cos\delta\tau + \sin\tau\cdot\sin\delta\tau\big) \\
\int \cos\tau\cdot\cos\delta\tau \,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{\delta^2-1}\big(\delta\sin\delta\tau\cdot\cos\tau - \sin\tau\cdot\cos\delta\tau\big),
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

für $\delta \neq 1$.

Nun können wir nach (2.70) und (2.86) die Dynamik der Spiralspitze $z(t)$ bestimmen; wir nehmen vereinfachend $z_0 = 0$ an:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G(\tau) \\ c(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&\overset{(2.85)}{=} \int_0^t (1 + \varepsilon_1 \sin\tau + \varepsilon_2 \sin\delta\tau) \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\cos\tau - \sin\tau \\ -\frac{1}{a}\sin\tau + \cos\tau \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

Mithilfe der kleinen Formelsammlung (2.87) erhalten wir nun

$$
\begin{aligned}
z(t) = &\begin{bmatrix} -\frac{1}{a}\sin\tau + \cos\tau + \frac{\varepsilon_1}{4a}\cos 2\tau - \frac{\varepsilon_1}{2}\tau + \frac{\varepsilon_1}{4}\sin 2\tau \\ \frac{1}{a}\cos\tau + \sin\tau - \frac{\varepsilon_1}{2a}\tau + \frac{\varepsilon_1}{4a}\sin 2\tau \end{bmatrix}_0^t \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{a(\delta^2-1)}(\delta\cos\tau\cos\delta\tau + \sin\tau\sin\delta\tau) \\ -\frac{\varepsilon_1}{4}\cos 2\tau + \frac{\varepsilon_2}{a(\delta^2-1)}(\delta\sin\tau\cos\delta\tau - \sin\delta\tau\cos\tau) \end{bmatrix}_0^t \\
&+ \begin{bmatrix} +\frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}(\delta\sin\tau\cos\delta\tau - \sin\delta\tau\cos\tau) \\ -\frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}(\delta\cos\tau\cos\delta\tau + \sin\tau\sin\delta\tau) \end{bmatrix}_0^t .
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

Wir schreiben (2.89) in eine etwas übersichtlichere Form:

$$
\begin{aligned}
z(t) = &\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon_1}{2} t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1}{4} \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{\varepsilon_2}{\delta^2 - 1} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{a} \cos \delta t - \sin \delta t \\ -\frac{1}{a} \sin \delta t - \delta \cos \delta t \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon_1}{4a} + \frac{\varepsilon_2 \delta}{a(\delta^2 - 1)} \\ \frac{1}{a} - \frac{\varepsilon_1}{4} - \frac{\varepsilon_2 \delta}{\delta^2 - 1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

Betrachten wir die Dynamik der Spiralspitze $z(t)$ in (2.90) ein wenig genauer. Wir erinnern daran, dass durch die Wahl der Kontrollparameter in (2.85) die Rotationsfrequenz durch $\dot{\alpha}(t) = G(t)\kappa_0(t)$ auf 1 festgesetzt wurde. Setzen wir ε_1 auf 0, so lassen wir nur eine externe periodische Anregung der Frequenz $\delta \neq 1$ zu. Die Rotationsbewegung der Spiralspitze geht durch diese externe periodische Anregung mit Frequenz ungleich der Rotationsfrequenz in eine Bewegung mit den beiden unterschiedlichen Frequenzen 1 und δ über. Wählen wir beispielsweise $\varepsilon_2 = 1/3$, $a = 5$ und 11/10 bzw. 9/10 für die Anregungsfrequenz δ, so erhalten wir Abbildung 2.7.

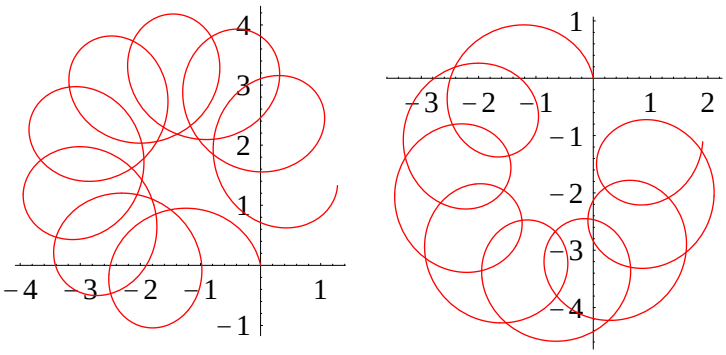

Abbildung 2.7: Bewegung der Spiralspitze $z(t)$ einer Spiralwelle mit externer periodischer Anregung $c(t) = 1 + \frac{1}{3} \sin \delta t$, $G(t) = \frac{1}{5}\ c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{1}{G(t)}$. Anregungsfrequenz δ nahe der Rotationsfrequenz 1 liefert Außenmäander für $\delta = \frac{11}{10}$ (links) und Innenmäander für $\delta = \frac{9}{10}$ (rechts).

Wird dagegen $\varepsilon_2 = 0$ gesetzt, haben wir eine externe periodische Anregung der Frequenz 1. Anregungs- und Rotationsfrequenz stimmen überein. Dies führt auf eine langsame Driftbewegung der Ordnung ε_1. Die Wahl $\varepsilon_1 = 1/3$, $a = 5$ liefert Abbildung 2.8.

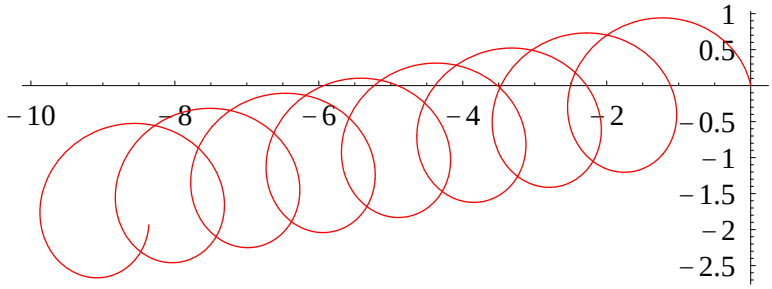

Abbildung 2.8: Bewegung der Spiralspitze $z(t)$ einer Spiralwelle mit externer periodischer Anregung $c(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin t$, $G(t) = \frac{1}{5}\ c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{1}{G(t)}$. Die Anregungs- und Rotationsfrequenz sind beide 1 und liefern daher eine Drift.

Sind sowohl ε_1 als auch ε_2 ungleich 0, so überlagern sich die beiden oben genannten Effekte. Beispielsweise erhalten wir Abbildung 2.9, wenn wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/3$, $a = 5$ und $11/10$ bzw. $9/10$ für die Anregungsfrequenz δ wählen.

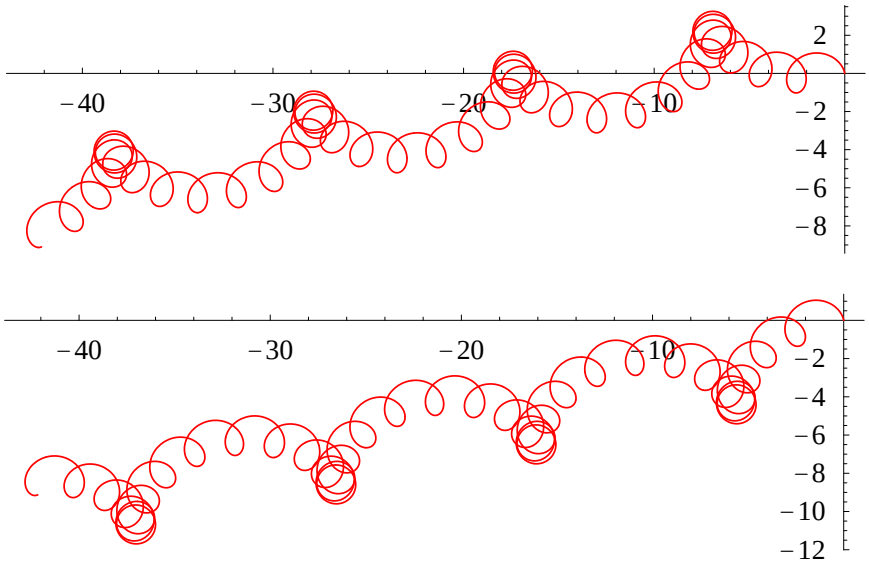

Abbildung 2.9: Bewegung der Spiralspitze $z(t)$ einer Spiralwelle mit externer periodischer Anregung $c(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{3}\sin \delta t$, $G(t) = \frac{1}{5}\ c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{1}{G(t)}$. Die Anregungsfrequenzen sind mit 1 bzw. $\delta = \frac{11}{10}$ (oben), $\delta = \frac{9}{10}$ (unten) gleich bzw. nahe der Rotationsfrequenz. Dies führt zu einer Überlagerung von Mäander und Drift.

Schließlich wenden wir uns der Dynamik der gesamten Spiralwelle zu. Wir

hatten in (2.75) die Spiralwellenlösung $Z(t,s)$ in drei Teile zerlegt $Z(t,s) = z(t) + Z^1(t,s) + Z^2(t,s)$. Die Kurven $Z(t,s)$, $Z^1(t,s)$ und $Z^2(t,s)$ lassen sich besser darstellen, wenn sie nicht über die Zeit t und der Bogenlänge $s \geq 0$ parametrisiert werden, sondern über Zeit t und $t \geq t_0(t,s) > -\infty$. Diese Umparametrisierung ergibt sich aus den Charakteristiken, siehe (2.42)–(2.44). Die umparametrisierten Kurven wollen wir mit $\hat{Z}$, $\hat{Z}^1$ und $\hat{Z}^2$ bezeichnen. Wir erhalten nach (2.78) und der Wahl der Kontrollparameter unseres Beispiels (2.85) für $\hat{Z}^1$:

$$\begin{aligned}\hat{Z}^1(t,t_0) &:= Z^1(t,s(t,t_0)) \\ &= \left(-\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon_1}{a}\sin t - \frac{\varepsilon_2}{a}\sin\delta t\right)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon_1}{a}\sin t_0\right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_2}{a}\sin\delta t_0 + \int_{t_0}^{t}(1+\varepsilon_1\sin\tau_0' + \varepsilon_2\sin\delta\tau_0')\,\mathrm{d}\tau_0'\right)\begin{pmatrix}-\sin t_0\\ \cos t_0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.91}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{Z}^1(t,t_0) = &\left(-\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon_1}{a}\sin t - \frac{\varepsilon_2}{a}\sin\delta t\right)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon_1}{a}\sin t_0\right. \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{a}\sin\delta t_0 + (t-t_0) - \varepsilon_1(\cos t - \cos t_0) \\ &\left. - \frac{\varepsilon_2}{\delta}(\cos\delta t - \cos\delta t_0)\right)\begin{pmatrix}-\sin t_0\\ \cos t_0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.92}$$

Schließlich betrachten wir $Z^2(t,t_0)$ und (2.82) mit unserer Wahl der Kontrollparameter (2.85) liefert:

$$\begin{aligned}\hat{Z}^2(t,t_0) &:= Z^2(t,s(t,t_0)) \\ &= -\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\kappa_0'(\tau)}{\kappa_0(\tau)^2} + c(\tau)\right)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\varepsilon_1}{a}\cos\tau + \frac{\varepsilon_2\delta}{a}\cos\delta\tau\right. \\ &\qquad \left. - 1 - \varepsilon_1\sin\tau - \varepsilon_2\sin\delta\tau\right)\begin{pmatrix}-\sin\tau\\ \cos\tau\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.93}$$

Mithilfe unserer kleinen Formelsammlung (2.87) lässt sich (2.93) ausrech-

nen:

$$\hat{Z}^2(t,t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{4a}\cos 2\tau - \frac{\varepsilon_2\delta}{a(\delta^2-1)}(\delta\sin\tau\sin\delta\tau + \cos\tau\cos\delta\tau) - \cos\tau \\ \frac{\varepsilon_1}{2a}\tau + \frac{\varepsilon_1}{4a}\sin 2\tau - \frac{\varepsilon_2\delta}{a(\delta^2-1)}(-\delta\sin\delta\tau\cos\tau + \sin\tau\cos\delta\tau) \end{bmatrix}_{t_0}^{t} + \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{2}\tau - \frac{\varepsilon_1}{4}\sin 2\tau + \frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}(-\delta\sin\tau\cos\delta\tau + \sin\delta\tau\cos\tau \\ -\sin\tau + \frac{\varepsilon_1}{4}\cos 2\tau + \frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}(\delta\cos\tau\cos\delta\tau + \sin\tau\sin\delta\tau) \end{bmatrix}_{t_0}^{t}. \tag{2.94}$$

In etwas kompakterer Darstellung ergibt sich:

$$\hat{Z}^2(t,t_0) = -\begin{bmatrix}\cos\tau \\ \sin\tau\end{bmatrix}_{t_0}^{t} + \frac{\varepsilon_1}{2}(t-t_0)\begin{pmatrix}1 \\ \frac{1}{a}\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1}{4}\begin{bmatrix}\cos 2\tau & -\sin 2\tau \\ \sin 2\tau & \cos 2\tau\end{bmatrix}_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} \\ 1\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}\begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\delta}{a}\cos\delta\tau + \sin\delta\tau \\ \frac{\delta^2}{a}\sin\delta\tau + \delta\cos\delta\tau\end{pmatrix}\Bigg|_{t_0}^{t}. \tag{2.95}$$

Wir sind nun in der Lage eine geschlossene Form der Kurve $Z(t,s)$ parametrisiert über $t \geq t_0 > -\infty$, $\hat{Z}(t,t_0)$, für unsere Wahl der Kontrollparameter (2.85) anzugeben, indem wir (2.90), (2.92) und (2.95) aufsummieren:

$$\begin{aligned}\hat{Z}(t,t_0) = &-\frac{\varepsilon_1}{a}\sin t\begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1}{2a}\begin{pmatrix}\cos 2t \\ \sin 2t\end{pmatrix} - \frac{\varepsilon_1}{2}t_0\begin{pmatrix}1 \\ \frac{1}{a}\end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix}1 + \frac{\varepsilon_1}{4a} + \frac{\varepsilon_2\delta}{a(\delta^2-1)} \\ \frac{1}{a} - \frac{\varepsilon_1}{4} - \frac{\varepsilon_2\delta}{\delta^2-1}\end{pmatrix} + \Bigg(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon_1}{a}\sin t_0 + \frac{\varepsilon_2}{a}\sin\delta t_0 + (t-t_0) \\ &\quad - \varepsilon_1(\cos t - \cos t_0) - \frac{\varepsilon_2}{\delta}(\cos\delta t - \cos\delta t_0)\Bigg)\begin{pmatrix}-\sin t_0 \\ \cos t_0\end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix}\cos t_0 \\ \sin t_0\end{pmatrix} - \frac{\varepsilon_1}{4}\begin{pmatrix}\cos 2t_0 & -\sin 2t_0 \\ \sin 2t_0 & \cos 2t_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} \\ 1\end{pmatrix} \\ &- \frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}\begin{pmatrix}\cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\delta}{a}\cos\delta t_0 + \sin\delta t_0 \\ \frac{\delta^2}{a}\sin\delta t_0 + \delta\cos\delta t_0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.96}$$

Wir vereinfachen (2.96) noch etwas:

$$
\begin{aligned}
\hat{Z}(t,t_0) = &-\begin{pmatrix} 1+\frac{\varepsilon_1}{4a}+\frac{\varepsilon_2\delta}{a(\delta^2-1)} \\ \frac{1}{a}-\frac{3\varepsilon_1}{4}-\frac{\varepsilon_2\delta}{\delta^2-1} \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon_1}{2}t_0\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\
&+\left(\frac{\varepsilon_2}{a}\sin\delta t_0 + (t-t_0) - \varepsilon_1\cos t - \frac{\varepsilon_2}{\delta}(\cos\delta t - \cos\delta t_0)\right)\begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \\
&+\begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1}{4}\begin{pmatrix} \cos 2t_0 & -\sin 2t_0 \\ \sin 2t_0 & \cos 2t_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&-\frac{\varepsilon_2}{\delta^2-1}\begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\delta}{a}\cos\delta t_0 + \sin\delta t_0 \\ \frac{\delta^2}{a}\sin\delta t_0 + \delta\cos\delta t_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

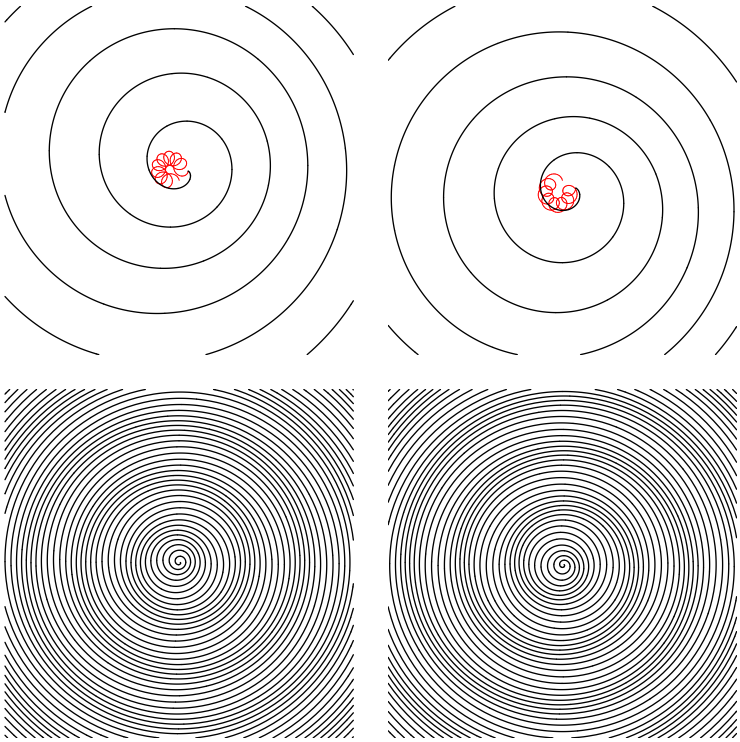

Abbildung 2.10: Spiralwellen mit externer periodischer Anregung $c(t) = 1+\frac{1}{3}\sin\delta t$, $G(t) = \frac{1}{5}\,c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{1}{G(t)}$. Anregungsfrequenz δ nahe der Rotationsfrequenz 1 liefert Außenmäander für $\delta = \frac{11}{10}$ (links) und Innenmäander für $\delta = \frac{9}{10}$ (rechts). Die mäandrierenden Spitzenbewegungen (oben) induzieren Superspiralstrukturen der Spiralen (unten).

Kehren wir zum Beispiel der mäandrierenden Spiralwellen zurück, siehe

Abbildung 2.7. Wir wählten $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1/3$, $a = 5$ und $11/10$ bzw. $9/10$ für die Anregungsfrequenz δ. Mithilfe von (2.97) können wir nun die gesamte Spiralwelle darstellen, siehe Abbildung 2.10. Die Mäanderbewegung der Spiralspitze induziert via eines Doppler-Effekts eine Superspiralstruktur. Eine externe periodische Anregung mit Frequenz $\delta = 11/10$ leicht oberhalb der Rotationsfrequenz 1 führte, wie bereits gesehen, auf eine Außenmäanderdynamik der Spitze. Während die Spirale selbst rechtsgewunden ist, ist die Superspirale linksgewunden. Eine externe periodische Anregung der Frequenz $\delta = 9/11$ hingegen, zwingt der Spiralspitze Innenmäander auf. Die Superspirale ist dann ebenso wie die Spirale selbst rechtsgewunden.

Was erwarten wir nun im Beispiel der driftenden Spiralspitze, siehe Abbildung 2.8, wo wir $\varepsilon_1 = 1/3$, $\varepsilon_2 = 0$ und $a = 5$ wählten? Die driftende Spiralspitze müsste über den Doppler-Effekt eine Stauchung der Spiralwellenstruktur in Richtung der Drift herbeiführen. Genau das können wir an der Gleichung (2.97) ablesen, siehe auch Abbildung 2.11.

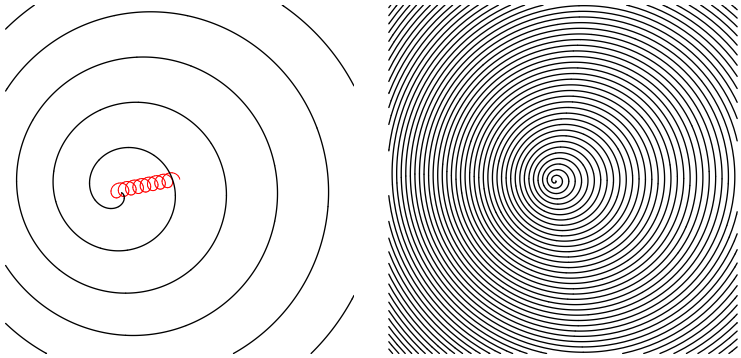

Abbildung 2.11: Spiralwelle mit externer periodischer Anregung $c(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin t$, $G(t) = \frac{1}{5}\ c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{1}{G(t)}$. Anregungsfrequenz und Rotationsfrequenz stimmen überein und induzieren eine driftende Spitzenbewegung (links) mit Doppler-Effekt (rechts).

Als zunächst letztes Beispiel zeigen wir wieder wie sich Mäander und Drift wie in Abbildung 2.9 überlagern. Die Wahl $\varepsilon_1 = 1/3$, $\varepsilon_2 = 1/3$, $a = 5$ und $\delta = 11/10$ bzw. $\delta = 9/10$ führt auf eine Überlagerung des Mäanders und der Drift, sowohl für die Spiralspitze als auch für die Superspiralstrukturen, siehe Abbildung 2.12.

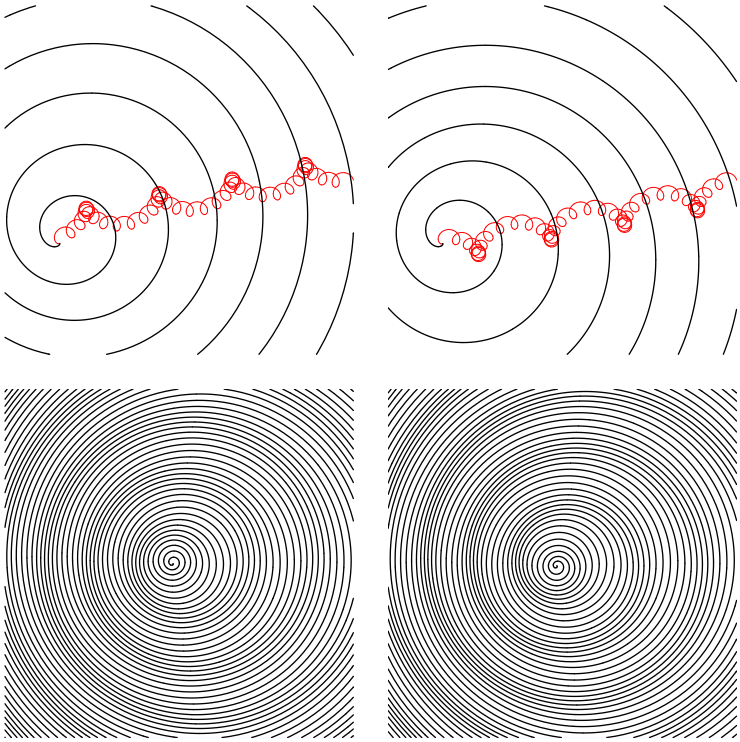

Abbildung 2.12: Spiralwellen mit externer periodischer Anregung $c(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{3}\sin \delta t$, $G(t) = \frac{1}{5}\ c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{1}{G(t)}$. Die Anregungsfrequenzen sind mit 1 bzw. $\delta = \frac{11}{10}$ (links), $\delta = \frac{9}{10}$ (rechts) gleich bzw. nahe der Rotationsfrequenz. Dies führt zu einer Überlagerung von Mäander und Drift, sowohl in der Bewegung der Spiralspitze als auch in der Superspiralstruktur.

2.5.3 Explizites Beispiel für Target-Muster in der Superspiralstruktur

Neben Spiralwellen sind Target-Muster typische Phänomene zweidimensionaler erregbarer Medien. In einem dreikomponentigen Reaktions-Diffusionssystem untersuchten Zhan et al. ([ZGW+06]) den Übergang von starr rotierenden Spiralwellen zur Turbulenz durch Änderung einen Parameters. Als eine Zwischenstufe entdeckten sie numerisch eine überlagerte Superspiralstruktur in Form eines Target-Musters. Dieses Muster ergab sich allerdings durch eine Modulation der Amplitude der Konzentrationsprofile, während die Abstände der Spiralfronten nahezu konstant blieben. Die Spiralspitze mäandrierte leicht und erzeugte eine angedickte Kreislinie.

Im folgenden Beispiel finden wir Superspiralstrukturen, die wie Target-Muster aussehen. Diese ergeben sich natürlich aus einer Modulation des Wellenfrontenabstandes. Die Dynamik der Spiralspitze beschränkt sich auf einen schmalen Kreisring, siehe Abbildung 2.13.

Unsere Kontrollparameter wählen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} c(t) &= 10\left(1 + \frac{3}{10}\sin t\right) \\ G(t) &= \frac{1}{10}\,c(t) \\ \kappa_0(t) &= \frac{10}{G(t)}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Nach (2.68) haben wir nun im Gegensatz zum letzten Beispiel die Rotationsfrequenz auf $\dot{\alpha}(t) = G(t)\kappa_0(t) \equiv 10$ festgesetzt. Wieder gelte $\alpha(0) = 0$ und wir erhalten als Rotationsdynamik der Spiralspitze:

$$\alpha(t) = 10t. \tag{2.99}$$

Die Rotationsfrequenz ist also zehnmal so groß wie die Anregungsfrequenz. Man könnte wieder die Dynamik der Spiralspitze und der Kurve bestimmen. Wir verzichten hier auf diese Herleitung, geben das Ergebnis aber explizit an. Für die Spiralspitze $z(t)$ erhalten wir mit $z(0) = 0$:

$$z(t) = \frac{1}{330}\left(\begin{pmatrix}-329\\-43\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos 10t & -\sin 10t\\ \sin 10t & \cos 10t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}330 - \cos t + 100\sin t\\ 33 + 10\cos t + 10\sin t\end{pmatrix}\right). \tag{2.100}$$

Für die Spiralwelle $\hat{Z}(t, t_0)$ ergibt sich:

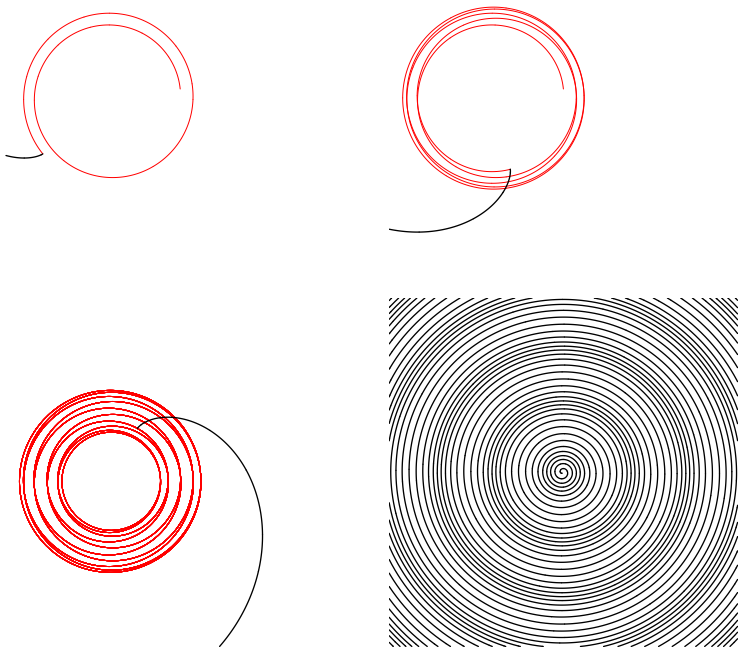

Abbildung 2.13: Spiralwellen mit externer periodischer Anregung $c(t) = 10\left(1 + \frac{3}{10}\sin t\right)$, $G(t) = \frac{1}{10}\ c(t)$, $\kappa_0(t) = \frac{10}{G(t)}$. Die Anregungsfrequenz ist mit 1 weit von der Rotationsfrequenz 10 entfernt. Die Spiralspitze zeigt eine Mäanderdynamik, hier dargestellt zu den Zeitpunkten $t = 1$ (oben links), $t = 3$ (oben rechts) und $t = 100$ (unten links). In der Superspiralstruktur ist ein Target-Muster zu erkennen (unten rechts).

$$\hat{Z}(t,t_0) = \frac{1}{330}\left(\begin{pmatrix} -329 \\ -43 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 10t_0 & -\sin 10t_0 \\ \sin 10t_0 & \cos 10t_0 \end{pmatrix} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \begin{pmatrix} 330 - \cos t_0 + 100 \sin t_0 \\ 33 + 3300(t - t_0) - 990 \cos t + 1000 \cos t_0 + 10 \sin t_0 \end{pmatrix} \right). \tag{2.101}$$

Wir sehen, dass die nach (2.99) auf 10 festgelegte Rotationsfrequenz die Rotationskomponente mit Frequenz 10 in (2.101) erzeugt. Die Anregungsfrequenz 1 führt in (2.101) zu einer langsamen Modulation des Wellenfrontenabstandes wie wir ihn auch in Abbildung 2.13 sehen. Der Abstand der Ringe des Target-Musters beträgt wie zu erwarten 10 Wellenfronten.

2.6 Kontrolle über die Spiralwellendynamik

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, kann das Auftreten bestimmter Dynamiken einer Spiralwelle im Herzgewebe zu Herzrhythmusstörungen führen. Kammerflimmern zum Beispiel ist eine häufige Todesursache in den Industriestaaten. Durch Verabreichung eines elektrischen Schocks können alle Herzzellen depolarisiert werden. Doch diese Methode ist für den Patienten nicht nur schmerzhaft, sondern kann auch zu Schäden am Herzgewebe führen, die das Wiederkehren von Kammerflimmern wahrscheinlicher machen. Deshalb interessiert man sich für weniger invasive Methoden.

Externe periodische Anregungen erregbarer Medien wurden in vielen Experimenten untersucht. Die katalytische Oxidation von Kohlenmonoxid auf Platinoberflächen kann durch die Partialdrücke von Kohlenmonoxid bzw. Sauerstoff oder durch die Temperatur beeinflusst werden. Beispielsweise wurde in [NvORE93] die Temperatur extern periodisch variiert und Spiralwellen damit zum Mäandrieren gebracht.

In der photosensitiven BZ-Reaktion kann die Erregbarkeit des Mediums durch Beleuchtung herabgesetzt werden. Experimentell sind zeitlich wie räumlich heterogene Beleuchtungen anwendbar. In [ZSM94] wurden numerisch und experimentell externe periodische Anregungen der BZ-Reaktion mittels einer zeitlich periodisch variierenden räumlich homogenen Beleuchtung untersucht. Verschiedene Spiralspitzendynamiken in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz wurden gefunden. In der BZ-Reaktion lassen sich ebenfalls gut Anregungen durch Rückkopplungskontrolle untersuchen. Beispielsweise erfolgte in [ZBB+04] eine Beleuchtung mit einer Lichtintensität

proportional zum Anteil des Mediums im angeregten Zustand in einer vorgegeben elliptischen Fläche. Der Attraktor der Spitzendynamik hing dabei von der Exzentrizität der Ellipse und der Zeitverzögerung der Anregung ab. In [ZBBE05] hing die Beleuchtungsintensität von dem Erregungszustand des Mediums in zwei vorher festgelegten Kontrollpunkten ab. Numerisch und experimentell wurde die Dynamik der Spiralspitze bestimmt.

Die Systemparameter $c(t)$, $G(t)$ und $\kappa_0(t)$ bestimmen vollständig die Dynamik der Spiralspitze. Werden z.B. $\kappa_0(t)$ und $c(t)/G(t)$ konstant gewählt, so erlaubt (2.68) nur starre Rotation. Andererseits können wir die Dynamik der Spiralspitze beliebig vorschreiben, wenn wir etwa $G(t) \cdot \kappa_0(t) \equiv 1$ annehmen, dafür aber $c(t)$ und $G(t)$ linear unabhängig voneinander wählen. Denn dann gilt $\alpha(t) = t$, wenn $\alpha(0) = 0$ gewählt wird, und wir erhalten nach (2.68):

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G \\ c \end{pmatrix}. \tag{2.102}$$

Wählen wir

$$\begin{aligned} c(t) &= \bar{c} + \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2} h(t) - t\right) \\ G(t) &= \bar{G} - \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} h(t) - t\right) \end{aligned} \tag{2.103}$$

mit $\bar{c}, \bar{G} > \varepsilon > 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{G} \\ \bar{c} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} h(t) - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} h(t) - t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{G} \\ \bar{c} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} h(t) \\ \sin \frac{\pi}{2} h(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.104}$$

Wie wir sehen ist der zeitunabhängige Anteil der Geschwindigkeiten c, G in (2.103), $\bar{c}$, $\bar{G}$, verantwortlich für die Rotationskomponente von $\dot{z}(t)$ in (2.104). Der zeitabhängige Anteil allerdings ermöglicht über die Kontrollfunktion $h(t)$ die Vorgabe einer langsamen Drift mit der Geschwindigkeit ε.

Wir haben gesehen, wie unterschiedliche Zeitabhängigkeiten der Kontrollparameter c, G, κ_0 die Driftdynamik beeinflussen bzw. ausschließen können. Ein Parameter λ aus einem kompakten, wegzusammenhängenden metrischen Raum Λ soll die Kontrollmöglichkeiten modellieren. In der photosensitiven BZ-Reaktion, wo die Kontrolle über die Lichtintensität der Beleuchtung des Mediums erfolgt, stellen wir uns Λ als abgeschlossenes reelles Intervall vor. Die Kontrollparameter sind damit λ-abhängig; $c(\lambda)$, $G(\lambda)$, $\kappa_0(\lambda)$. Es gilt:

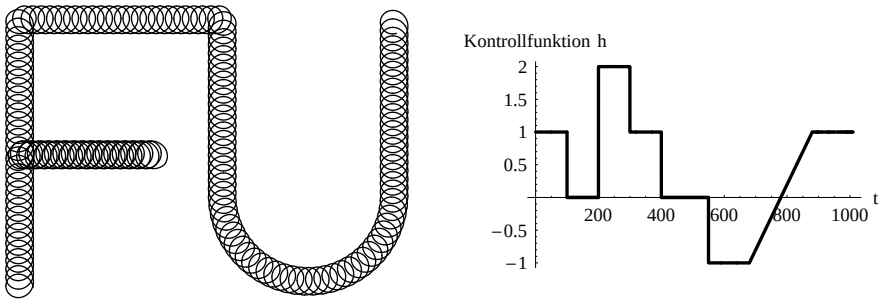

Abbildung 2.14: Steuerung der Dynamik der Spitze (links) über die Kontrollfunktion $h(t)$ (rechts).

Theorem 3 *Seien $c(\lambda)$, $G(\lambda)$, $\kappa_0(\lambda)$ positive, stetige Funktionen in $\lambda \in \Lambda$, Λ kompakt, wegzusammenhängend, und der Kontrolldurchmesser durch $d := \operatorname{diam}\left(\frac{ic-G}{\kappa_0 G}(\Lambda)\right)$ definiert. Dann ist die maximale nach einer Rotation zurückgelegte Driftstrecke nach unten durch $2d$ und nach oben durch πd beschränkt.*

Dabei bezeichne eine Rotation eine volle Umrundung des Tangentenwinkels α in der Spitze und die Driftstrecke den Abstand der Spitzenpositionen z vor und nach der Rotation. Mit maximaler Driftstrecke sei das Supremum der möglichen Driftstrecken unter jeder erlaubten Kontrolle, also Wahlen von $c(\lambda)$, $G(\lambda)$, $\kappa_0(\lambda)$ mit $\lambda = \lambda(t) \in \Lambda$ während einer Rotation, gemeint.

Ist $d = 0$ oder gleichbedeutend $\kappa_0(\lambda)$ und $\frac{c(\lambda)}{G(\lambda)}$ konstant in $\lambda \in \Lambda$, dann sind die zugehörigen Spiralwellen starr rotierend. Andernfalls gibt es eine Kontrollkurve in Λ, die jede vorgegebene Trajektorie des Spiral-Cores realisiert: Zu jeder vorgegeben Folge von Spiralspitzenpositionen mit Abstand kleiner als die maximale Driftstrecke existiert eine stetige Kontrolle $\lambda(t) \in \Lambda$, so dass die Spitze einer Spiralwelle, die sich anfangs auf der ersten vorgegeben Position befindet, nach jeder vollen Rotation auf der nächsten Position befindet.

Beweis:
Da nach Voraussetzung $\dot{\alpha} > 0$ ist, liefern die Differentialgleichungen für die Spitzendynamik (2.68):

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} = e^{i\alpha}\frac{ic-G}{\kappa_0 G} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa_0} \\ \frac{c}{G\kappa_0} \end{pmatrix}. \tag{2.105}$$

Wenn wir $b(\lambda) := \frac{ic(\lambda)-G(\lambda)}{\kappa_0(\lambda)G(\lambda)}$ definieren, erhalten wir für die Driftstrecke nach

einer Rotation beginnend beim Tangentenwinkel α_0 in der Spitze:

$$z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{2\pi+\alpha_0} e^{i\widetilde{\alpha}} b(\lambda(\widetilde{\alpha}))\mathrm{d}\widetilde{\alpha}, \tag{2.106}$$

wobei $\lambda(\widetilde{\alpha})$ eine wählbare Kontrollfunktion mit Werten in Λ bezeichnet.

Wir formen (2.106) um, damit wir den Einfluss des Kontrolldurchmessers d besser untersuchen können:

$$\begin{aligned} z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0) &= \int_{\alpha_0}^{\pi+\alpha_0} e^{i\widetilde{\alpha}} b(\lambda(\widetilde{\alpha}))\mathrm{d}\widetilde{\alpha} + \int_{\pi+\alpha_0}^{2\pi+\alpha_0} e^{i\widetilde{\alpha}} b(\lambda(\widetilde{\alpha}))\mathrm{d}\widetilde{\alpha} \\ &= \int_{\alpha_0}^{\pi+\alpha_0} e^{i\widetilde{\alpha}} \big(b(\lambda(\widetilde{\alpha})) - b(\lambda(\widetilde{\alpha} + \pi))\big)\mathrm{d}\widetilde{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Der Abstand $|z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0)|$ ließe sich maximieren, wenn wir in (2.107) $\lambda(\widetilde{\alpha})$ so wählen könnten, dass $b(\lambda(\widetilde{\alpha})) - b(\lambda(\widetilde{\alpha} + \pi)) = e^{i(\beta-\widetilde{\alpha})}d$ gilt. Dabei würde β die Driftrichtung festlegen. Wir erhalten dann:

$$z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0) = e^{i\beta}\pi d. \tag{2.108}$$

Der Kontrollbereich $b(\Lambda)$, der im ersten Quadranten der komplexen Ebene liegt, enthielte dann einen Kreis mit Durchmesser d. Dann könnten wir für $\lambda(\widetilde{\alpha})$ eine Parametrisierung der Kreislinie wählen, was wir im vorangehenden Beispiel (2.103) illustrierten.

Bei gegebenem Kontrolldurchmesser d lässt sich eine untere Schranke der maximalen Driftstrecke $|z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0)|$ angeben. Wir wählen in (2.107) $\lambda(\widetilde{\alpha})$ so, dass der maximale Durchmesser d realisiert wird, also $b(\lambda(\widetilde{\alpha})) - b(\lambda(\widetilde{\alpha} + \pi)) \equiv e^{i\beta}d$ für ein β gilt. Dies erreichen wir, indem wir zwei Punkte in Λ betrachten, die den Abstand d realisieren. Wir könnten dann für $\lambda(\widetilde{\alpha})$ jeweils für eine halbe Rotation den einen und für die andere Hälfte den anderen Punkt wählen.

Damit die Kontrollparameter stetig variieren wählen wir eine Folge von stetigen Wegen zwischen den zwei Punkten in Λ parametrisiert über die Zeit t, die den zuvor beschriebenen Grenzfall approximieren. Wir erinnern daran, dass die Stetigkeit wichtig war für die Existenz einer Lösung der Erhaltungsgleichung (2.40) für den negativen Tangentenwinkel w. Das Theorem 2 verlangt ferner, dass die Krümmung in der Spitze $\kappa_0(t)$ stetig differenzierbar ist und nicht zu stark variiert. Dies ist nun nicht mehr notwendigerweise der Fall. Daher können Selbstüberschneidungen auftreten. Die Ungleichungen (2.59) und (2.62) deuten darauf hin, dass es sich bei der Lösung der Erhaltungsgleichung wieder um eine Spiralwelle handelt.

Diesmal erhalten wir im Grenzfall der unstetigen Kontrolle und damit als maximale Driftstrecke den Betrag von

$$z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0) = 2ie^{i(\alpha_0+\beta)}d. \tag{2.109}$$

Natürlich können auch alle kürzeren Driftstrecken realisiert werden, indem kleinere Amplituden der Kontrolle gewählt werden. Außerdem kann die Richtung des Driftweges nach einer vollen Rotation, $\arg\left(z(2\pi + \alpha_0) - z(\alpha_0)\right)$, frei gewählt werden, da zu einer gegeben Kontrolle $\lambda(\alpha)$ eine Translation im Winkel unter Beibehaltung der Länge der Driftstrecke zu einer entsprechenden Änderung des Driftwinkels führt. Damit können im Sinne der Formulierung im Theorem alle vorgegebenen Trajektorien realisiert werden. $\square$