

Kapitel 1

Einleitung

“Wenn ein Halbstrahl sich innerhalb einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, bis er wieder in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, gleichzeitig aber sich ein Punkt auf diesem Halbstrahl mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Endpunkt des Halbstrahls aus bewegt, so wird der Punkt eine Spirale beschreiben.”

Archimedes (287–212 v.Chr.)

Sicherlich war ein Grund für Archimedes’ Beschäftigung mit Spiralen deren Häufigkeit in der Natur (z.B. in Schneckenhäusern) und in der Kunst (z.B. in den Köpfen ionischer Säulen). Diese Arbeit beschäftigt sich u.a. mit asymptotisch Archimedischen Spiralwellen in erregbaren Medien.

Ein erregbares Medium ist ein räumlich ausgedehntes System, das Signal- bzw. Wellenausbreitung ohne Dämpfung zulässt. Dabei muss eine so genannte Refraktärzeit vergehen ehe die nächste Welle das Medium wieder an derselben Stelle durchlaufen kann. Ein Beispiel sind Brände in einem Wald, wo das Feuer abgebrannte Stellen nicht erneut passieren kann bevor die Vegetation nachgewachsen ist. Ein anderes Beispiel sind La-Ola-Wellen in einem Fußballstadion [FHV02]. Im Gegensatz dazu breiten sich Schallwellen nur unter Dämpfung aus.

Weit ihrer Zeit voraus, beschrieben Wiener und Rosenblueth [WR46] bereits 1946 ein Modell über die Ausbreitung elektrischer Erregungsfronten im Herzgewebe als erregbares Medium. Diese elektrischen Wellen bewirken die Herzmuskelkontraktionen und können die Gestalt von Spiralen annehmen, welche für Herzrhythmusstörungen verantwortlich gemacht werden. Allerdings hängt die Art der Störung von der Dynamik der Spiralwelle ab. Mäandrierende Spiralwellen, etwa, können Herzflimmern verursachen [BVP03].

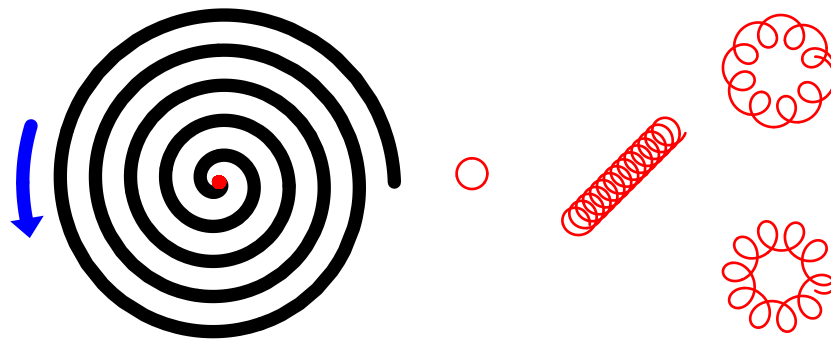


Abbildung 1.1: Rechtsgewundene, linksrotierende Spiralwelle (links) mit möglichen Spiralspitzendynamiken (rechts: starre Rotation, Drift und Mäander).

Um 1950 entdeckte der russische Chemiker Belousov eher zufällig die für die Untersuchung von Spiralwellen wegweisende Belousov-Zhabotinsky-Reaktion. Diese chemische Reaktion in einer Petrischale zeigt zeitliche Oszillationen, die dem zweiten Satz der Thermodynamik zu widersprechen schienen. Nachdem 1951 eine Veröffentlichung in einem Journal mit der Begründung zurückgewiesen worden war, dass dies offensichtlich nicht möglich sei, gelang es ihm erst 1959 seine Resultate zu publizieren. 1961 begann Zhabotinsky sich mit der Reaktion zu beschäftigen, doch es dauerte bis zu einer Konferenz in Prag 1968 ehe die Resultate im Westen bekannt wurden.

Die klassische BZ-Reaktion, eine katalytische Oxidation von Malonsäure und Bromat in saurer Umgebung, erfolgt typischerweise in einer Petrischale. Ferner ist die BZ-Reaktion lichtempfindlich, d.h. durch eine Bestrahlung der Lösung lässt sich die Erregbarkeit des Mediums in Abhängigkeit von der Lichtintensität herabsetzen. Allerdings existieren auch andere Varianten der BZ-Reaktion.

Rotierende Spiralwellen wurden Anfang der 70er Jahre erstmals von Winfree in der BZ-Reaktion [Win72] nachgewiesen. Auch bei der Untersuchung von Scroll-Wellen, dem dreidimensionalen Analogon zu Spiralwellen, war der amerikanische Wissenschaftler Pionier.

Spiralwellen sind typische Muster in erregbaren Medien. Sie werden in biologischen, chemischen, physikalischen und physiologischen Systemen beobachtet. In der Entwicklungsbiologie beispielsweise ist der Schleimpilz *Dictyostelium discoideum* einer der meist untersuchten Organismen. Seine Zellen leben unabhängig voneinander in der Erde solange Nahrung in Form von Bakterien vorhanden ist. Wird die Nahrung knapp, häufen sich ausgehungerte Zellen an und bilden einen multizellulären Organismus. Der Zellhaufen

bewegt sich zu einer Stelle mit besseren Lebensbedingungen, wo er dann einen Stiel und Fruchtkörper ausbildet und Sporen aussendet. Damit beginnt ein neuer Lebenszyklus. Die Aggregation der Zellen erfolgt durch chemische Impulse und kann in Form von Spiralwellen sichtbar sein [FL98]. Ein anderes Beispiel ist die katalytische CO-Oxidation auf Platinoberflächen [BM03].

Zwei verschiedene mathematische Modellierungsansätze werden zur Untersuchung von Spiralwellen benutzt, wobei beide schon in Ansätzen bei Wiener und Rosenblueth vorhanden waren [WR46]. Zum einen wurden Reaktions-Diffusionssysteme zur Beschreibung herangezogen [FSSW96, SSW97, Sch98, SSW99]. Diese Herangehensweise verfolgte ich auch in meiner Diplomarbeit [Jan03], wo ich mich für die mathematische Untersuchung von Spiralwellen im gitterperiodisch beleuchteten BZ-Medium interessierte. Zum anderen wird die so genannte Kinematische Theorie zur Untersuchung von Spiralwellen angewandt. Dabei wird idealisierend angenommen, dass sich eine Wellenfront in dem zweidimensionalen, unbeschränkten Medium als eine Linie mit einem Anfangspunkt darstellen lässt. Diese Kurve bewege sich an jeder Stelle mit einer Normalengeschwindigkeit U , die von der Krümmung an dieser Stelle abhängen darf. Das Ende der Linie soll der Spitze entsprechen und darf eine Tangentialgeschwindigkeit besitzen, siehe Abbildung 1.2. Mathematisch untersucht und mithilfe singulärer Störungstheorie

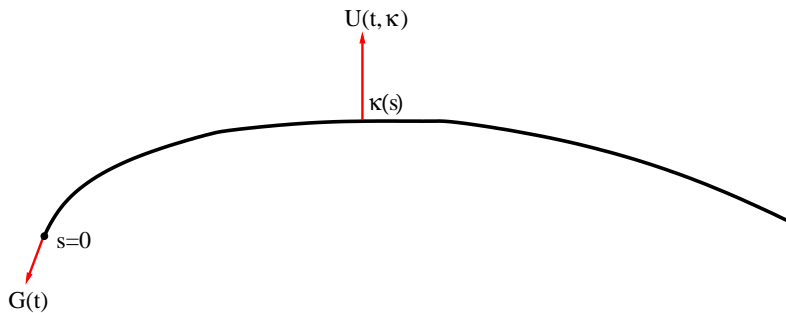


Abbildung 1.2: Kurve über Bogenlänge s parametrisiert mit Spitze bei $s = 0$, Krümmung κ , Normalengeschwindigkeit U und Spitzentangentialgeschwindigkeit G .

teilweise hergeleitet wurde die Kinematische Theorie z.B. in [MZ91, KT92, Kee92, MDZ94, Mik03], siehe auch Abschnitt 2.1.

Elementar lässt sich eine Gleichung für die Krümmung κ einer Kurve herleiten, die diesen Gesetzen folgt:

$$\kappa_t + U(t, \kappa)_{ss} + \left(\kappa \int_0^s \kappa U(t, \kappa) d\sigma \right)_s + G(t) \kappa_s = 0. \quad (1.1)$$

Dabei sei die Krümmung $\kappa = \kappa(t, s)$ über die Bogenlänge s parametrisiert, $G(t)$ die Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze und $U = U(t, \kappa)$ die Normalengeschwindigkeit, die von κ abhängen darf. Im Abschnitt 2.2 erfolgt eine Herleitung.

Beide Modellierungsansätze haben den Vorteil, dass sie die dem System inhärente Euklidische Symmetrie, die Gruppe der Translationen und Rotationen in der Ebene $SE(2)$, respektieren: Reaktions-Diffusionsgleichungen $u_t = D\Delta u + F(u)$ sind $SE(2)$ -äquivariant, wenn der Reaktionsterm F ein Superpositionsoperator ist, siehe zur Definition der Gruppenaktion [SSW97, Jan03]. In der Kinematischen Theorie ist die Euklidische Symmetrie automatisch berücksichtigt, da die partielle Differentialgleichung (1.1) eine Gleichung der Krümmung einer Kurve ist und die Krümmung einer translatierten oder rotierten Kurve der Krümmung der ursprünglichen Kurve entspricht.

Häufig wird die affin-lineare Gleichung $U(\kappa) = c - D\kappa$ als Abhängigkeit der Normalengeschwindigkeit von der Krümmung angenommen. Gerade Wellenfronten besitzen dann eine größere Normalengeschwindigkeit als positiv gekrümmte. Dieses Phänomen wurde auch im Experiment beobachtet [FMH88, PMnSGG⁺96, BDPMn⁺99]. Entsprechend wurde in [FGT06] beispielsweise gefordert, dass die Normalengeschwindigkeit $U = U(\kappa)$ monoton von der Krümmung κ abhängt. Dann wurden zeitunabhängige Lösungen von (1.1) gesucht. Man erhielt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, da $\kappa_t = 0$. Mithilfe der Zentrumsmanifoldtheorie konnten in [FGT06] starr rotierende Spiralwellenlösungen gefunden werden, siehe Abschnitt 2.4.

Bei Spiralwellen ist die Krümmung der Wellenfronten weiter entfernt von der Spitze allerdings sehr klein und die Normalengeschwindigkeit daher kaum von der Krümmung abhängig. In dieser Arbeit wird vereinfacht angenommen, dass die Normalengeschwindigkeit nicht von der Krümmung abhängt, aber zeitlich variieren darf,

$$U = c(t) \tag{1.2}$$

wobei die Krümmung $\kappa_0(t)$ und die Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze $G(t)$ ebenfalls zeitabhängig sein dürfen. Wir sprechen dann von einem Eikonalfluss.

In der lichtsensitiven BZ-Reaktion wurden mäandrierende und driftende Spiralwellen durch eine Bestrahlung mit einer periodisch variierenden Lichtintensität erzeugt [BE93, ZSM94]. Zeitabhängige Normalengeschwindigkeiten $U(t) = c(t)$ und Spitzentangentialgeschwindigkeiten $G(t)$ entsprechen zeitlich heterogenen und räumlich homogenen Beleuchtungen der BZ-Reaktion. Es stellt sich die Frage, ob sich die im Experiment beobachtbaren Dynamiken der Spiralwellen in diesem mathematischen Modell wiederfinden.

Wiener und Rosenblueth [WR46] erkannten, dass eine Erregungsfront, die mit konstanter (zeit- und krümmungsunabhängiger) Normalengeschwindigkeit um ein kreisförmiges Hindernis läuft, die Evolvente des Kreises ist. Eine Kreisevolvente approximiert eine Archimedische Spiralwelle. Starr rotierende Spiralwellenlösungen für Eikonalflüsse werden in Abschnitt 2.3 behandelt.

Bereits in [MDZ94] wurde dargestellt, dass Gleichung (1.1) im Eikonalfluss-Fall (1.2) nach Integration über die Bogenlänge s in eine nichtlineare hyperbolische Erhaltungsgleichung überführt wird, die mittels Charakteristiken gelöst werden kann. Denn nach Einführung des negativen Tangentenwinkels durch $w(t, s) := \int_0^s \kappa(t, \sigma) d\sigma$ geht (1.1) für Eikonalflüsse (1.2) über in

$$\begin{aligned} w_t + (c(t)w + G(t))w_s &= G(t)\kappa_0(t) \\ w(t, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Es stellt sich heraus, dass eine positive Tangentialgeschwindigkeit in der Spitze $G(t) > 0$ wichtig ist. Wir werden in Abschnitt 2.5 zeigen, dass selbst nach der Vereinfachung einer krümmungsunabhängigen Normalengeschwindigkeit, reichhaltige Dynamiken der Spiralwellen auftreten können.

Mäandrierende oder driftende Bewegungen der Spiralspitze hinterlassen Spuren im Far-Field. Experimentell wurden so genannte Superspiralen beobachtet [PAV⁺91, LOPS96, BOF97, ZO00, OSL00]. Ein numerischer Nachweis für Krümmungsflüsse gelang in [PGP93]. Dabei wurde die Dynamik der Spiralspitze vorgegeben und die Kurve stückweise rekonstruiert. Auf linearisiertem Level wurden Superspiralen in [SS01] bei der Untersuchung von Reaktions-Diffusionssystemen gefunden. In dieser Arbeit gelingt erstmals im nichtlinearen Fall der analytische Nachweis von Superspiralstrukturen, indem wir Gleichung (1.3) untersuchen und eine externe Anregung in Form zeitabhängiger Funktionen $c(t)$, $G(t)$, $\kappa_0(t)$ zulassen.

Bei externer periodischer Anregung spielt das Verhältnis der Anregungs- und der Rotationsfrequenz eine wichtige Rolle. Ist die Anregungsfrequenz etwas über der Rotationsfrequenz, so erhalten wir Außenmäander, siehe Abbildung 1.3. Im Far-Field ist eine durch den Doppler-Effekt induzierte überlagerte linksgewundene Spiralwelle zu erkennen. Eine Anregungsfrequenz leicht unterhalb der Rotationsfrequenz liefert Innenmäander, siehe Abbildung 1.4. Im Gegensatz zu Abbildung 1.3 erhalten wir nun eine rechtsgewundene Superspirale. Stimmen Anregungs- und Rotationsfrequenz überein, erhalten wir eine Drift, siehe Abbildung 1.5. Die Driftdynamik der Spiralwellenspitze führt zu einer Stauchung der Spiralwellenstruktur in Driftrichtung. Diese beiden Phänomene in Abbildung 1.3 und 1.5 lassen sich durch eine externe periodische Anregung kombinieren, die resonante und nah-resonante Komponenten enthält, siehe Abbildung 1.6. Der resonante Anteil der externen Anre-

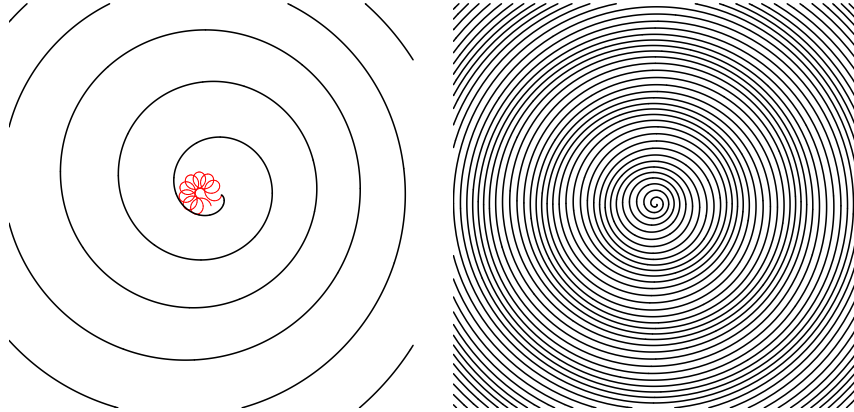


Abbildung 1.3: Mäandrierende Spirale infolge einer periodischen Anregungsfrequenz etwas oberhalb der Rotationsfrequenz mit Spiralspitzenbewegung (links) und Superspiralstruktur im Far-Field (rechts).

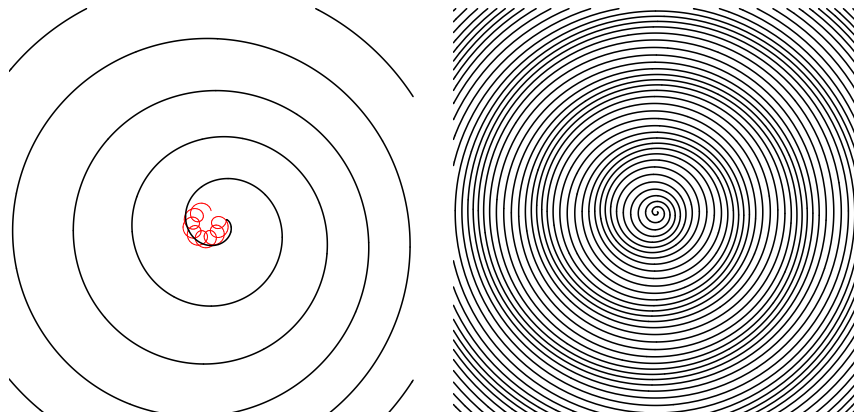


Abbildung 1.4: Mäandrierende Spirale infolge einer periodischen Anregungsfrequenz etwas unterhalb der Rotationsfrequenz mit Spiralspitzenbewegung (links) und Superspiralstruktur im Far-Field (rechts).

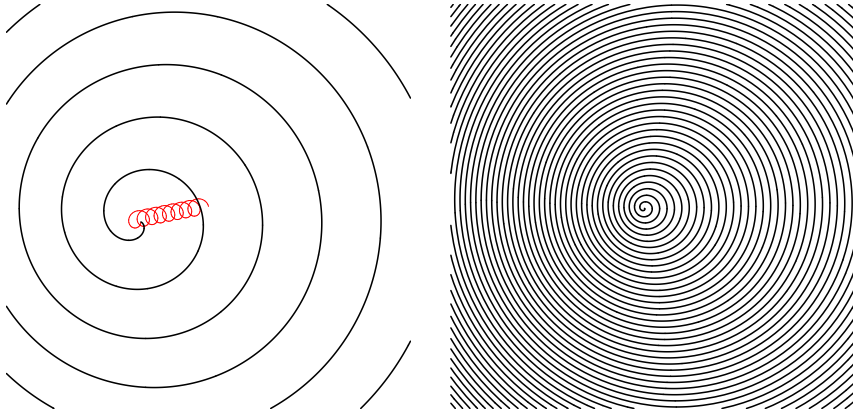


Abbildung 1.5: Driftende Spirale infolge einer resonanten Anregung mit driftender Spiralwellendynamik (links) und Doppler-Effekt im Far-Field (rechts).

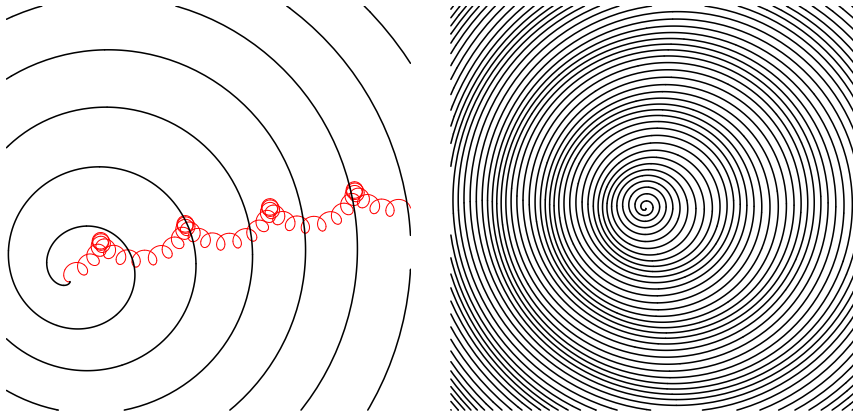


Abbildung 1.6: Driftende mäandrierende Spirale infolge einer Anregung mit resonanten und nah-resonanten Frequenzen mit Spiralwellendynamik (links) und Far-Field-Struktur (rechts).

gung induziert eine Drift der Spiralspitze und der nah-resonante Anteil eine Mäanderdynamik. Im Far-Field sehen wir daher eine driftende Superspirale.

Wie schon erwähnt spielt die Kontrolle der Spiralwellendynamik bei der Defibrillation des Herzgewebes eine wichtige Rolle [GMT06]. Durch geeignete Wahl der Systemparameter $c(t)$, $G(t)$ und $\kappa_0(t)$ lässt sich die Dynamik der Spiralspitze für Eikonalflüsse praktisch vorschreiben wie wir in Abschnitt 2.6 zeigen werden, siehe Abbildung 1.7.

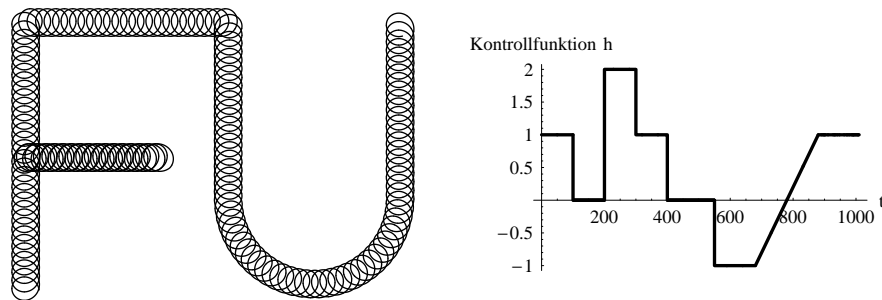


Abbildung 1.7: Steuerung der Dynamik der Spitze (links) über eine Kontrollfunktion $h(t)$ (rechts).

In Kapitel 3 werden wir starr rotierende Spiralwellenlösungen für Krümmungsflüsse und Eikonalflüsse vergleichen und in Kapitel 4 werden wir kurz die Verallgemeinerung der Kinematischen Theorie auf die dreidimensionalen Scroll-Wellen thematisieren. Durchweg werden wir linksrotierende, rechtsgewundene Spiralwellen betrachten, was allerdings keine Einschränkung der Ergebnisse darstellt.

Danksagung

Ich bedanke mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Bernold Fiedler dafür mein Interesse für dieses faszinierende Gebiet der Mathematik geweckt zu haben, für seine Ratschläge und seine Beharrlichkeit. Ich schulde auch den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Nichtlineare Dynamik Dank für ihre Unterstützung. Für ihre liebevolle Hilfe danke ich meinen Eltern und Sarah.

Meine Stelle und damit diese Arbeit wurden durch den Sonderforschungsbereich 555 der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert. Teile dieser Arbeit entstanden während meines Auslandsaufenthaltes an der Brown University in Providence, USA, teilweise gefördert durch ein Doktorandenstipendium des Deutschen Akademischen Auslandsdienstes (DAAD).