

ASPECTS OF FLUCTUATING MEMBRANES

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereiches Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
MARIA ELISA SARRAF BORELLI
aus São Paulo/Brasilien

Berlin, im Oktober 2000.

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Kleinert
Institut für Theoretische Physik
der Freien Universität Berlin
Arnimallee 14, 14195 Berlin

2. Gutachter: Prof. Dr. K.-D. Schotte
Institut für Theoretische Physik
der Freien Universität Berlin
Arnimallee 14, 14195 Berlin

Tag der Disputation: 23. Oktober 2000

Abstract

The behavior of systems consisting of fluid membranes is investigated. Firstly, the issue of the renormalizability of the Canham-Helfrich theory, which describes fluid membranes in terms of their surface and curvature energy, is studied. With help of a derivative expansion the one-loop corrections due to thermal fluctuations to the Canham-Helfrich energy functional of a nearly flat, stiff membrane with tension are calculated in the Monge parametrization. Contrary to previous studies, an arbitrary tilt of the surface is allowed to exhibit the nontrivial relations between the different, highly nonlinear terms accompanying the ultraviolet divergences. These terms are shown to have precisely the same form as those in the original energy functional, as necessary for renormalizability.

Secondly, the Canham-Helfrich model is extended to account for quantum fluctuations. The analysis of the extended model is carried out both in first-order perturbative theory, as well as non-perturbatively, in the limit of large dimensionality of the embedding space. In contrast to thermal fluctuations, which soften the membrane at large scales and turn it into a crumpled surface, quantum fluctuations are found to stiffen the membrane. The large-scale behavior of the membrane is studied at finite temperature, where a crumpling transition is found. The phase diagram of the quantum membrane is calculated exactly in the limit of large dimensionality of the embedding space.

Thirdly, a stack of tensionless membranes with nonlinear curvature energy and vertical harmonic interaction is studied. At low temperatures, the system forms a lamellar phase. At a critical temperature, the stack disorders vertically in a melting-like transition. The critical temperature for the transition is determined perturbatively in a one-loop calculation as a function of the bending rigidity. The critical exponents for the compressibility and specific heat of the stack are also calculated. In a non-perturbative calculation in a large number of dimensions of the embedding space, the full phase diagram of the stack is determined as a function of temperature and interlayer separation.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Verhalten von aus flüssigen Membranen bestehenden Systemen untersucht.

Zunächst wird die Frage der Renormierbarkeit der Canham-Helfrich-Theorie studiert, welche flüssige Membranen durch ihre Oberflächen- und Krümmungsenergie beschreibt. Mit Hilfe der Gradientenentwicklung werden die durch thermische Fluktuationen verursachten Ein-Schleifen-Korrekturterme des Canham-Helfrichschen Energie-Funktional für eine beinahe flache, steife Membran mit Oberflächenspannung in der Monge-Parametrisierung berechnet. Anders als bei früheren Arbeiten ist eine beliebige Neigung der Oberfläche gestattet, um die nicht-trivialen Beziehungen zwischen den unterschiedlichen, stark nicht-linearen Termen, welche die ultravioletten Divergenzen begleiten, zu zeigen. Es wird gezeigt, daß diese Terme genau die gleiche Form haben wie jene in dem ursprünglichen Energie-Funktional, was für die Renormierbarkeit nötig ist.

Dann wird das Canham-Helfrich-Modell erweitert, um auch Quantenfluktuationen zu berücksichtigen. Die Analyse des erweiterten Modells erfolgt sowohl mit der Störungstheorie erster Ordnung als auch nicht-störungstheoretisch im Grenzfall großer Dimensionalität des Einbettungsraumes. Im Gegensatz zu thermischen Fluktuationen, welche Membranen aufweichen und ihnen eine zerknitterte (crumpled) Gestalt geben, versteifen Quantenfluktuationen die Membranen. Das Verhalten der Membranen wird bei endlichen Temperaturen betrachtet, wo man auf einen Zerknitterungs-Phasenübergang (crumpling transition) stößt. Die Phasendiagramme der Quantenmembrane werden im Grenzfall großer Dimensionalität des Einbettungsraumes exakt berechnet.

Schließlich wird ein Stapel von spannungslosen Membranen mit nicht-linearer Krümmungsenergie und vertikalen harmonischen Wechselwirkungen untersucht. Bei niedrigen Temperaturen formt das System eine lamellare Phase. Bei einer kritischen Temperatur geht das System in eine vertikal ungeordnete Phase über. Die kritische Temperatur wird störungstheoretisch in einer Ein-Schleifen-Rechnung als Funktion der Krümmungssteifigkeit bestimmt. Die kritischen Exponenten für die Kompressibilität und spezifische Wärme des Stapels werden ebenfalls berechnet. In einer nicht-störungstheoretischen Berechnung, für große Dimensionalität des Einbettungsraumes, wird das gesamte Phasendiagramm des Stapels als Funktion von Temperatur und Abstand der einzelnen Schichten ermittelt.

Danksagung

All die Menschen zu nennen, die direkt oder indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, ist unmöglich. Einigen von ihnen möchte ich aber ausdrücklich meinen Dank aussprechen.

An erster Stelle danke ich Prof. Dr. Kleinert für das Stellen des interessantesten Themas und für die Betreuung der Arbeit. Unsere vielen Diskussionen - insbesondere gegen Ende der Arbeit - waren für die Entstehung dieser Arbeit sehr wertvoll.

Unter den Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe gilt mein besonderer Dank Dr. Adriaan M. J. Schakel, der mir - vor allem am Anfang - wegweisend zur Seite gestanden hat.

Des weiteren danke ich Dr. Boris Kastening und Dr. Bruno van den Bosche für viele inspirierende Diskussionen und das kritische Lesen dieser Arbeit.

Und schließlich danke ich natürlich auch dem DAAD - insbesondere Frau Wahre - für die finanzielle Unterstützung und organisatorische Betreuung meines Aufenthaltes hier in Deutschland.

Lebenslauf

Name Maria Elisa Sarraf Borelli
Geburtsdatum 24. Mai 1973
Geburtsort São Paulo/Brasilien

Schulbildung 03/80-11/83 brasilianische Primärschule
03/84-11/87 brasilianisches Gymnasium
03/88-11/90 brasilianische High School
11/90 brasilianische Hochschulreife

Studium 03/91-11/94 Molekular-Wissenschaften
an der Universidade de São Paulo
11/94 Bakkalaureus in Molekular-Wissenschaften
03/95-11/96 Anfertigung einer Master-Dissertation
am Instituto de Física der Universidade de São Paulo
bei Prof. Dr. Carlos E. I. Carneiro, Thema:
“Untersuchung der thermischen Schwankungen
in Membranen unter der Anwendung der Feldtheorie”
12/96 Master in Wissenschaften - Festkörperphysik
seit 04/97 Wissenschaftliche Mitarbeiterin
an der Freien Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik

Contents

1	Introduction	1
1.1	The chemical structure of cellular membranes	2
1.2	Biological membrane models	3
1.3	Simplified membrane models	5
1.3.1	Crystalline membranes	6
1.3.2	Hexatic membranes	7
1.3.3	Fluid membranes	8
2	General Properties of Fluid Membranes	11
2.1	Canham-Helfrich model	11
2.2	A little differential geometry	13
2.3	Monge parametrization	17
2.4	Faddeev-Popov determinant	19
2.5	Harmonic approximation	21
2.6	Anharmonic terms and renormalization	22
3	Derivative Expansion	31
3.1	Quantum corrections to effective action	31
3.2	Comparison with graphical method	36
3.3	Coordinate-dependent mass	37
4	Derivative Expansion for Fluid Membranes	41
5	Quantum Fluctuations of Fluid Membranes	49
5.1	The model	50

5.2	Perturbative calculation	51
5.2.1	Zero temperature	51
5.2.2	Finite temperature	55
5.3	Large- d calculation	58
5.3.1	Simplified model for large d	59
5.3.2	Auxiliary field variable approximation	59
5.3.3	Zero temperature	60
5.3.4	Finite temperature	63
6	Stacks of Membranes	69
6.1	The model	70
6.2	Perturbative calculation	71
6.3	Large- d calculation	76
6.4	The model in large d	77
6.4.1	Infinite stack	78
6.4.2	Finite stack of many membranes	80
6.4.3	Finite number of membranes	83
6.5	Properties of phases	86
7	Conclusions and Perspectives	91
A	FORM Programs	95
A.1	Calculation of functional derivatives	95
A.2	Calculation of the functional trace	102
B	Integrals	115
B.1	Tensor structure	115
B.2	Evaluation of integrals in dimensional regularization	124
C	The renormalization group	127
C.1	The renormalization group transformation	127
C.2	Critical surface and fixed points	128
C.3	Linearization near a fixed point	129
C.4	A simple example: the Ginzburg-Landau model	130
C.4.1	The Gaussian fixed point	132

C.4.2 Non-Gaussian fixed point 132

D Some Explicit Calculations 135

D.1 Correlation functions 135

D.2 Series expansion 137

Bibliography 143

List of Figures

1.1	Schematic representation of a phospholipid molecule	3
1.2	Schematic representation of amphiphiles in aqueous solution	4
1.3	The fluid mosaic model.	5
2.1	Principal curvature radii of a surface	12
2.2	Infinitesimal element of area of a surface.	14
2.3	Magnitude of the curvature of planar curves.	15
2.4	Sign of the curvature of a planar curve.	15
2.5	Principal curvatures of a surface.	16
2.6	Different cases for the two principal curvatures.	16
2.7	Monge parametrization.	18
2.8	Beta-function for the Canham-Helfrich model.	29
4.1	Behavior of one-loop integrals.	45
5.1	Flow diagrams for the quantum membrane.	58
5.2	Effective action at $T = 0$ for the quantum membrane.	62
5.3	Physical branch of the solution of the saddle-point equation for the quantum membrane.	63
5.4	Behavior of ρ^{-1} for fixed L^2	66
5.5	Phase diagram of the quantum membrane.	67
6.1	Schematic representation of a stack of membranes.	70
6.2	Shortest distance between membranes in a stack.	71
6.3	Flow diagram of a stack of membranes.	74
6.4	Free energy density and specific heat of a stack of membranes.	76
6.5	Free energy density of an infinite stack of membranes.	80
6.6	Behavior of ρ^{-1} as a function of T for a stack of membranes.	83

6.7	Qualitative phase diagram of a stack of membranes.	86
6.8	Interpretation of the vertical melting of the stack as a smectic-to-nematic phase transition.	89
C.1	Flow diagrams for the Ginzburg-Landau model.	133