

# Kapitel 5

## Lösungsverfahren für das MLCLSP

Anfang der neunziger Jahre war noch kein Verfahren bekannt, das das MLCLSP befriedigend löste. Helber schrieb 1994:<sup>1</sup> „Als vorläufiges Ergebnis der referierten Arbeiten kann festgehalten werden, dass bislang leistungsfähige Verfahren für den Fall mehrerer Kapazitätsrestriktionen in generellen Erzeugnisstrukturen fehlen.“ Verfahren für konvergierende und serielle Erzeugnisstrukturen wurden u.a. von Maes<sup>2</sup>, Blackburn und Millen<sup>3</sup>, Raturi und Hill<sup>4</sup> und Toklu und Hill<sup>5</sup> beschrieben. Spätere Arbeiten für konvergierende oder serielle Erzeugnisstrukturen stammen von Harrison und Lewis<sup>6</sup> und Armentano et al..<sup>7</sup> Verfahren mit genereller Erzeugnisstruktur, bei denen nur eine Ressource berücksichtigt wird, wurden von Roll und Karni<sup>8</sup> und von Solomon<sup>9</sup> vorgeschlagen. Verfahren für die Lösung des MLCLSP mit genereller Erzeugnisstruktur und mehreren Kapazitäten wurden seit den neunziger Jahren entwickelt.

Helber und Tempelmeier<sup>10</sup> beschreiben einen heuristischen Lösungsansatz für das MLCLSP ohne Rüstzeiten. Für die Produkte einer Dispositionsstufe, die die gleiche Ressource benötigen, wird ein CLSP mit einer modifizierten Heuristik von Dixon und Silver<sup>11</sup> gelöst. Die einzelnen CLSP's werden beginnend mit der 0. Dispositionsstufe in aufsteigender Ordnung abgearbeitet. Für jede Dispositionsstufe ist die zur Verfügung stehende Kapazität durch die Restkapazität gegeben. Die Restkapazität ergibt sich aus der Kapazität abzüglich der bereits verplanten Kapazität.

---

<sup>1</sup> [Hel94], S. 56.

<sup>2</sup> Vgl. [MMVW91] und [MVW91].

<sup>3</sup> Vgl. [BM84].

<sup>4</sup> Vgl. [RH88].

<sup>5</sup> Vgl. [TW92].

<sup>6</sup> Vgl. [HL96].

<sup>7</sup> Vgl. [ABF01].

<sup>8</sup> Vgl. [RK91].

<sup>9</sup> Vgl. [Sal91], S. 119 ff.

<sup>10</sup> Vgl. [TH94].

<sup>11</sup> Vgl. zur Heuristik von Dixon und Silver [DS81].

Die Bedarfsmengen ergeben sich aus dem Primärbedarf und dem Sekundärbedarf, der durch die bereits gelösten CLSP's festgelegt ist. Jede Losgrößenfestlegung wird darauf untersucht, ob die CLSP's der Vorgängererzeugnisse, für die noch keine Losgrößen festgelegt wurden, zulässig zu lösen sind. Ist dies nicht der Fall, werden die Losgrößen so verändert, dass die noch nicht gelösten CLSP's zulässig gelöst werden können.<sup>12</sup> Durch die Lösung aller CLSP's erhält man einen zulässigen Produktionsplan für das MLCLSP. Tempelmeier und Helber untersuchen Varianten des Verfahrens.<sup>13</sup> Zum einen verwenden sie modifizierte Kostensätze in den CLSP's, welche sich nach dem Verfahren von Heinrich<sup>14</sup> berechnen. Zum anderen wird die Reihenfolge, in der die CLSP's zu lösen sind, nach einem modifizierten Dispositionsstufenverfahren festgelegt, das auf der Erzeugung eines zyklensfreien Ressourcengraphen beruht.<sup>15</sup> Da keine Variante die anderen dominiert und die Rechenzeit gering ist, schlagen Tempelmeier und Helber vor, immer alle Varianten zu lösen.<sup>16</sup> Helber erweitert das Verfahren für das MLCLSP mit Rüstzeiten, indem er die Dixon-Silver Heuristik modifiziert.<sup>17</sup>

Helber untersucht ebenfalls die Lösung des MLCLSP durch heuristische Suchverfahren, wie Tabu Search<sup>18</sup>, Genetische Algorithmen<sup>19</sup>, Evolutionsstrategien<sup>20</sup> oder Simulated Annealing<sup>21</sup>. Seine Ergebnisse zeigen, dass diese Verfahren derzeit nicht geeignet sind, das MLCLSP in realistischer Größenordnung zu lösen.<sup>22</sup>

Von Clark und Armentano<sup>23</sup> wurde ein Lösungsansatz entwickelt, bei dem zuerst die Kapazitätsrestriktionen vernachlässigt werden. Der resultierende Produktionsplan verletzt zumeist die Kapazitätsrestriktionen. Zur Beseitigung der Unzulässigkeiten wird eine Rückwärtsverlagerung von Produktionsmengen, d.h. eine Verlagerung von Produktionsmengen aus der Periode  $t$  in die Perioden  $1..t-1$ , vorgeschlagen.<sup>24</sup> Bestehen die Unzulässigkeiten bereits in den ersten Perioden, können diese Unzulässigkeiten häufig nicht durch eine alleinige Rückwärtsverlagerung beseitigt werden. Franca et al. konnten mit dem Verfahren Clark und Armentano nur 22% ihrer Testprobleme zulässig lösen.<sup>25</sup> Sie implementieren deshalb zusätzlich eine Vorwärtsverlagerung von

---

<sup>12</sup> Vgl. [TH94], S. 302 f.

<sup>13</sup> Vgl. [TH94].

<sup>14</sup> Vgl. [Hei87], S. 155 ff.

<sup>15</sup> Vgl. [Hel94], S. 64 ff.

<sup>16</sup> Vgl. [TH94], S. 305.

<sup>17</sup> Vgl. [Hel94], S. 79 ff. und [Hel95].

<sup>18</sup> Vgl. [GL97].

<sup>19</sup> Vgl. [Gol89].

<sup>20</sup> Vgl. [Rec73].

<sup>21</sup> Vgl. [Kuh92].

<sup>22</sup> Vgl. [Hel94], S. 144 ff.

<sup>23</sup> Vgl. [CA95].

<sup>24</sup> Vgl. [CA95], S. 1211 ff.

<sup>25</sup> Vgl. [FABC97], S. 872.

Produktionsmengen zur Beseitigung der Unzulässigkeiten.<sup>26</sup>

Simpson und Erenguc<sup>27</sup> beschreiben ein iteratives Prioritätsregelverfahren zur Lösung von unkapazitierten mehrstufigen Losgrößenproblemen. In einer zweiten Arbeit erweitern sie dieses Verfahren auf den kapazitätsbeschränkten Fall.<sup>28</sup>

Exakte Lösungsverfahren durch Branch & Cut wurden von Pochet und Wosey<sup>29</sup> sowie von Belvaux und Wolsey<sup>30</sup> beschrieben. Belvaux und Wolsey benutzen das System bc-prod, ein spezialisiertes Branch & Cut System für Losgrößenprobleme.<sup>31</sup>

In den folgenden Abschnitten werden weitere heuristische Verfahren für das MLCLSP mit genereller Erzeugnisstruktur erläutert. Im ersten Abschnitt wird das auf der Lagrange-Relaxation basierende Verfahren von Tempelmeier und Derstroff<sup>32</sup> beschrieben. Das von Stadler<sup>33</sup> verwendete Verfahren zur Lösung des MLCLSP durch sequentielles Lösen von MIP-Relaxationen des MLCSP wird im zweiten Abschnitt dargestellt. Im dritten Abschnitt wird das Verfahren von Katok et. al.<sup>34</sup> eingeführt.

## 5.1 Lösung des MLCLSP durch Lagrange-Relaxation

Salomon<sup>35</sup> wendet die Lagrange-Relaxation<sup>36</sup> zur Lösung von unkapazitierten mehrstufigen Losgrößenproblemen an. Zur Lösung des MLCLSP wurde die Lagrange-Relaxation von Billington et al.<sup>37</sup> und von Derstroff und Tempelmeier<sup>38</sup> verwendet. Während Billington et al. nur eine beschränkte Ressource betrachten, können in dem Lösungsverfahren von Tempelmeier und Derstroff mehrere Ressourcen berücksichtigt werden. Derstroff erweitert die Heuristik auf den Fall, dass es keine eindeutige Produkt-Ressourcen-Zuordnung gibt, sondern dass unterschiedliche Ressourcen zur Produktion eines Produktes verwendet werden können.<sup>39</sup> Im Folgenden wird die Heuristik von Tempelmeier und Derstroff dargestellt.

---

<sup>26</sup> Vgl. [FABC97], S. 866 f.

<sup>27</sup> Vgl. [SE98].

<sup>28</sup> Vgl. [Tem99], S. 332 f.

<sup>29</sup> Vgl. [PW91].

<sup>30</sup> Vgl. [BW01].

<sup>31</sup> Vgl. [BW00].

<sup>32</sup> Vgl. [TD93], [Der95] oder [TD96].

<sup>33</sup> Vgl. [Sta00b].

<sup>34</sup> Vgl. [KLH98].

<sup>35</sup> Vgl. [Sal91], S. 109 ff.

<sup>36</sup> Zur Lagrangerelaxation siehe [Fis81].

<sup>37</sup> Vgl. [BMT86].

<sup>38</sup> Vgl. [TD93], [Der95] oder [TD96].

<sup>39</sup> Vgl. [Der95], S. 167 ff.

Ersetzt man im Modell MLCLSP die Lagerbilanzgleichung durch die Fehlmengenrestriktion (4.15) und setzt für die Lagerkosten in der Zielfunktion Gleichung (4.20) ein, kann das Modell MLCLSP um die Lagerstandsvariablen  $y_{pt}$  reduziert werden. Dieses Modell wurde in Kapitel 4.3.2 mit MLCLSPx bezeichnet.<sup>40</sup>

### Modell MLCLSPx

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T ((T-t+1) h_p^e x_{pt} + c_{pt} x_{pt} + f_p z_{pt}) - F \\
\text{s.t.} \quad & y_{p0} + \sum_{\tau=1}^t x_{p\tau} \geq \sum_{\tau=1}^t (d_{p\tau} + \sum_{i \in N(p)} r_{pi} x_{i\tau}) \quad \forall p, t \\
& \sum_{p=1}^{|P|} (s_{pm} z_{pt} + a_{pm} x_{pt}) \leq C_{mt} \quad \forall m, t \\
& x_{pt} - z_{pt} M \leq 0 \quad \forall p, t \\
& x_{pt} \geq 0 \quad \forall p, t \\
& z_{pt} \in \{0, 1\} \quad \forall p, t
\end{aligned}$$

Das Modell MLCLSPx kann mit den Lagrangemultiplikatoren  $v_{mt}$  für die Kapazitätsrestriktionen und  $u_{pt}$  für die Fehlmengenrestriktionen relaxiert werden. Das sich ergebende lagrangerelaxierte Modell MLCLSPx-LR zerfällt in  $|P|$  Einprodukt-Probleme SLULSPx<sub>p</sub>,  $p \in P$ :<sup>41</sup>

### Modell SLULSPx<sub>p</sub>

$$\min \sum_{t=1}^T (c_{pt}^{LR} x_{pt} + f_{pt}^{LR} z_{pt}) \quad (5.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\tau=1}^t x_{p\tau} \geq \sum_{\tau=1}^t d_{p\tau}^{ne} \quad \forall t \quad (5.2)$$

$$x_{pt} - z_{pt} M \leq 0 \quad \forall t \quad (5.3)$$

$$x_{pt} \geq 0 \quad \forall t \quad (5.4)$$

$$z_{pt} \in \{0, 1\} \quad \forall t \quad (5.5)$$

mit

$$c_{pt}^{LR} = (T-t+1) h_p^e + c_{pt} + \sum_{\tau=t}^T \left( \sum_{q \in V(p)} a_{qp} u_{q\tau} - u_{p\tau} \right) + \sum_{m=1}^R a_{pm} v_{mt}$$

und

$$f_{pt}^{LR} = f_p + \sum_{m=1}^R s_{pm} v_{mt}.$$

Die Restriktionen (5.2) werden in das Modell SLULSPx<sub>p</sub> aufgenommen, um die Losgrößenbil-

<sup>40</sup> Vgl. [BMT86], S. 992 und [Der95], S. 73.

<sup>41</sup> Vgl. [TD93], S. 66.

dung zu forcieren.<sup>42</sup> Es ergibt sich für jedes Produkt  $p$  ein einstufiges Losgrößenproblem vom Typ Wagner-Whitin (SLULSP), welches mit Dynamischer Programmierung gelöst werden kann.<sup>43</sup>

Das von Tempelmeier und Derstroff vorgeschlagene Verfahren auf der Grundlage der Lagrange-Relaxation setzt sich aus den folgenden drei Schritten innerhalb einer Iteration zusammen:<sup>44</sup>

1. Bestimmung einer unteren Schranke durch die Lösung aller Modelle SLULSP $x_p$ .
2. Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren.
3. Verbesserung der obere Schranken durch eine Heuristik.

Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis die Differenz zwischen oberer und unterer Schranke kleiner als ein vorher festgelegter Wert ist bzw. eine maximale Iterationsanzahl erreicht wurde. Die beste zulässige Lösung, die gefunden wurde, ist durch die kleinste obere Schranke gegeben.

Im ersten Schritt einer Iteration ergibt sich die untere Schranke für das MLCLSP aus den Lösungen der  $|P|$  Probleme SLULSP $x_p$   $p \in P$  mit den aktuellen Lagrange-Multiplikatoren durch

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T ((T-t+1) h_p^e x_{pt} + c_{pt} x_{pt} + f_p z_{pt}) - F \\ & + \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T u_{pt} \left( \sum_{\tau=1}^t (d_{p\tau} + \sum_{i \in N(p)} r_{pi} x_{i\tau} - x_{p\tau}) - y_{p0} \right) \\ & + \sum_{m=1}^R \sum_{t=1}^T v_{mt} \left( \sum_{p=1}^{|P|} (s_{pm} z_{pt} + a_{pm} x_{pt}) - C_{mt} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es können bei der Lösung der SLULSP $x_p$  für  $p \in P$  sowohl Fehlmengen als auch Überkapazitäten auftreten. Um dies zu vermeiden, werden im zweiten Schritt jeder Iteration die Lagrange-Multiplikatoren angepasst. Dazu benutzen Tempelmeier und Derstroff ein iteratives Verfahren der Subgradientenoptimierung.

Im Anschluss an die Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren wird im dritten Schritt versucht, die obere Schranke für den Zielfunktionswert zu verbessern. Die obere Schranke wird heuristisch berechnet, indem zuerst ein fehlmengenfrier Produktionsplan erzeugt wird. Dazu werden die Ungleichungen (5.2) im Modell SLULSP $x_p$  durch die Ungleichungen

$$\sum_{\tau=1}^t x_{p\tau} \geq \sum_{\tau=1}^t d_{p\tau}^{net}$$

<sup>42</sup> Vgl. [Der95], S. 74.

<sup>43</sup> Vgl. Abschnitt 2.1.1. Derstroff löst die einstufigen Losgrößenprobleme durch den Algorithmus von Evans. Vgl. [Eva85].

<sup>44</sup> Vgl. [TD93], S. 65.

ersetzt. Die so veränderten Modelle werden dann nach dem Dispositionsstufenverfahren, beginnend mit den Produkten der 0. Dispositionsstufe bis zur letzten Dispositionsstufe, gelöst. Durch diese Reihenfolge sind die Losgrößen der Nachfolger in der Erzeugnisstruktur zur Berechnung der Nettobedarfe<sup>45</sup>  $d_{pt}^{net}$  bekannt. Die so ermittelte Lösung kann aber noch die Kapazitätsrestriktionen verletzen. Ist die Durchführung des Produktionsplanes nur mit Überkapazitäten möglich, so werden diese durch ein iteratives heuristisches Verfahren beseitigt. Dabei werden Losgrößen oder Teile von Losgrößen aus Perioden mit Überkapazitäten in frühere oder spätere Perioden verschoben, ohne Fehlmengen zu erzeugen. Führt das Verschieben von Produktionsmengen zu einem fehlmengenfreien Produktionsplan, der die Kapazitätsrestriktionen einhält, wird im weiteren Verlauf versucht, den Zielfunktionswert zu verbessern. Verursacht die dabei gefundene zulässige Lösung geringere Kosten als die bisherige obere Schranke, wird diese aktualisiert.

Derstroff und Tempelmeier lösen mit dem Verfahren eine große Anzahl von Testproblemen und zeigen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens. Stadtler<sup>46</sup> verwendet die Tempelmeier Derstroff-Heuristik zum Vergleich mit seinem Verfahren, das im nächsten Abschnitt dargestellt ist.

---

<sup>45</sup> Vgl. Gleichung (4.1).

<sup>46</sup> Vgl. [Sta00b].

## 5.2 Das Verfahren von Stadtler

Stadtler verwendet einen zeitorientierten Dekompositionsansatz für das MLCLSP.<sup>47</sup> In Anlehnung an eine rollierende Planung löst er das MLCLSP beginnend mit der ersten Periode für ein Zeitfenster, in dem die Rüstvariablen berücksichtigt werden. Das prinzipielle Vorgehen des Verfahrens von Stadtler ist in Abbildung (5.1) graphisch veranschaulicht.

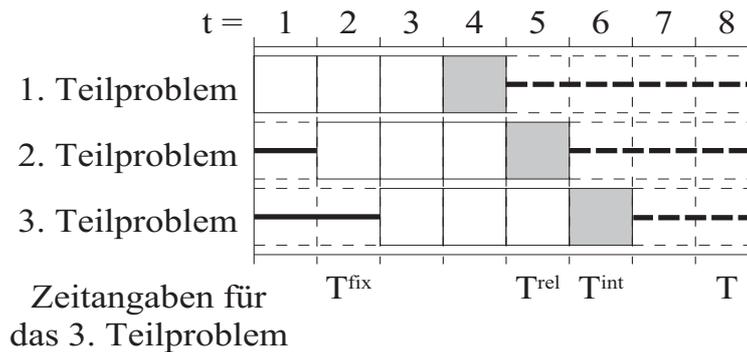


Abbildung 5.1: Beispielhafte Darstellung der Zeitfenster im Verfahren von Stadtler

In Abbildung (5.1) sind die ersten drei Teilprobleme für einen Planungshorizont  $T$  von acht Perioden dargestellt. Ein Teilproblem der heuristischen Dekomposition ist durch das Zeitfenster und die davor und dahinter liegenden Perioden gegeben.  $T^{\text{fix}}$  ist die letzte Periode vor dem Zeitfenster,  $T^{\text{int}}$  ist die letzte Periode des Zeitfensters und  $T^{\text{rel}}$  ist die letzte Periode im Zeitfenster, für die die Rüstvariable ganzzahlig ist. In den Perioden vor dem Zeitfenster, dies sind die Kästchen mit durchgezogener Linie in Abbildung (5.1), sind die Rüstvariablen fixiert. Im Zeitfenster werden die Rüstvariablen ganzzahlig, das sind die weißen Kästchen in Abbildung (5.1), oder relaxiert, das sind die grauen Kästchen in Abbildung (5.1), berücksichtigt. Hinter dem Zeitfenster, das sind die Kästchen mit gestrichelter Linie in Abbildung (5.1), findet keine explizite Berücksichtigung der Rüstvariablen statt.

Beginnt man mit dem ersten Teilproblem und löst es, erhält man eine Lösung, in der die ersten Perioden bis zum Ende des Zeitfensters ganzzahlig bzw. relaxiert berücksichtigt werden. Fixiert man jetzt die Rüstvariablen der ersten Periode und schiebt das Zeitfenster um eine Periode in die Zukunft, ergibt sich das zweite Teilproblem. In der Lösung des zweiten Teilproblems sind alle Rüstvariablen von der ersten Periode bis zu der Periode im Zeitfenster, in der die Rüstvariablen ganzzahlig betrachtet werden  $T^{\text{rel}}$ , ganzzahlig. Fixiert man wiederum die Rüstvariablen der zweiten Periode und schiebt das Zeitfenster um eine Periode in die Zukunft, ergibt sich das dritte Teilproblem. Setzt man dieses Verfahren fort, ergibt sich mit der ersten Lösung eines Problems,

<sup>47</sup> Vgl. [Sta00b].

in dem die Rüstvariablen der Periode  $T$  ganzzahlig berücksichtigt werden, eine ganzzahlige Lösung für das MLCLSP.<sup>48</sup>

Im Zeitfenster von  $T^{fix} + 1$  bis  $T^{int}$  in Beispiel in Abbildung (5.1) werden die ersten drei Perioden ganzzahlig berücksichtigt und die letzte Periode relaxiert. In jedem Durchlauf wird nur die erste Periode des Zeitfensters fixiert und das Zeitfenster um eine Periode nach vorne geschoben. Die Größe des Zeitfensters  $\gamma = T^{int} - T^{fix}$ , die Anzahl der relaxierten Perioden im Zeitfenster  $\theta = T^{int} - T^{rel}$  und die Anzahl der überlappenden Perioden von zwei aufeinander folgenden Teilproblemen  $\psi$  können variiert werden. Durch die Parameterkombination  $\gamma/\theta/\psi$  kann das Verfahren von Stadtler gesteuert werden.

Nachdem der Ablauf des Verfahrens dargestellt ist, wird nun auf die zu lösenden Teilprobleme eingegangen. Sie bestehen aus Restriktionen, die den gesamten Planungshorizont  $t \in \{1..T\}$  berücksichtigen, Restriktionen, die sich auf das Zeitfenster beziehen, und Restriktionen, die die ersten beiden Restriktionen verbinden, sogenannte Linking Constraints. Die Restriktionen werden im Folgenden dargestellt.

Für jede Periode bis zum Planungshorizont stellt Stadtler eine Lagerbilanz auf, wobei mit  $z_{qk}^{fix}$   $k \leq T^{fix}$  die fixierten Rüstvariablen bezeichnet werden

$$y_{pt-1} + \underbrace{x_{pt}}_{\substack{\text{if } z_{pt}^{fix}=1 \\ \text{or } t > T^{fix}}} = y_{pt} + d_{pt}^{prim} + \sum_{\substack{q \in N(p) \\ \text{if } z_{qt}^{fix}=1 \\ \text{or } t > T^{fix}}} r_{pq} x_{qt} \quad \forall t, p. \quad (5.7)$$

Die Kapazitätsrestriktion müssen ebenfalls in jeder Periode  $t$  eingehalten werden.  $o_{mt}$  sind Variablen für Überstunden auf Ressource  $m$  in Periode  $t$

$$\sum_{\substack{p=1 \\ \text{if } z_{qt}^{fix}=1 \\ \text{or } t > T^{fix}}}^{|P|} a_{mp} x_{pt} + ST_{mt} \leq C_{mt} + o_{mt} \quad \forall t, m. \quad (5.8)$$

Rüstzeiten werden in der Kapazitätsrestriktion durch den Parameter  $ST_{mt}$  berücksichtigt. Dieser wird wie folgt berechnet

$$ST_{mt} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{|P|} s_{pm} \cdot z_{pt}^{fix} & \forall m = 1..R, t = 1..T^{fix} \\ \sum_{p=1}^{|P|} s_{pm} \cdot z_{pt} & \forall m = 1..R, t = T^{fix} + 1..T^{int} \\ LST_m^* & \forall m = 1..R, t = T^{int} + 1..T. \end{cases} \quad (5.9)$$

<sup>48</sup> Sind Rüstzeiten zu berücksichtigen, wird nicht notwendigerweise eine zulässige Lösung mit dem Verfahren gefunden.



die Perioden  $k \in \{T^{fix} + 1..T_{pt}^\tau\}$ . Der Zeitpunkt  $T_{pt}^\tau$  kann außerhalb des Zeitfensters liegen und soll den Truncated Horizon Effekt<sup>51</sup> internalisieren. Zur Berechnung der Zeitpunkte  $T_{pt}^\tau$  werden die Zeitpunkte  $\tau_{pt}^\mu$  benötigt, die angeben, wann das nächste Los aufgelegt wird, wenn in der Periode  $t$  produziert wurde. Zur Berechnung von  $\tau_{pt}^\mu$  löst Stadler ein einstufiges unkapazitiertes Losgrößenplanungsproblem mit der Silver-Meal Heuristik<sup>52</sup> für jedes Produkt  $p$  und jede Periode  $t$ . Die Zeitpunkte  $T_{pt}^\tau$  ergeben sich dann aus

$$T_{pt}^\tau = \max\{T^{int}, t + \max_{q \in N(p) \cup \{p\}} \{\tau_{qt}^\mu\} - 1\}. \quad (5.11)$$

Wird in  $t$  für die Nachfrage in  $k \in \{t..T_{pt}^\tau\}$  produziert, dann wird dies durch die Variablen  $x_{ptk}$  explizit abgebildet. Eine Produktion in  $t$  für die Nachfrage nach  $T_{pt}^\tau$  wird aggregiert durch die Variable  $x_{ptT}$  und den Bedarf  $d_{p, T_{pt}^\tau+1, T}^{ne}$  berücksichtigt.

Für das Zeitfenster ergeben sich folgende Gleichungen.<sup>53</sup> Für die Perioden  $t$  im Zeitfenster  $t \in \{T^{fix+1}..T^{int}\}$  muss der Bedarf gedeckt werden

$$\sum_{k=\max\{1, T^{fix}\}}^t x_{pkt} = d_{pt}^{ne} \quad \forall p, t \in \{T^{fix+1}..T^{int}\}. \quad (5.12)$$

Die Mengen, die im Zeitfenster  $k \in \{T^{fix+1}..T^{int}\}$  für eine Periode  $t$  nach  $T^{int}$ ,  $t \in \{T^{int+1}..T_{p, T^{int}}^\tau\}$ , produziert wurden, muss der Bedarf nicht gedeckt werden

$$\sum_{\substack{k=\max\{1, T^{fix}\} \\ T_{pk}^\tau > T^{int}}}^{T^{int}} x_{pkt} \leq d_{pt}^{ne} \quad \forall p, t \in \{T^{int+1}..T_{p, t}^\tau\}. \quad (5.13)$$

In den Perioden  $t$  im Zeitfenster kann für die Perioden  $k \in \{t..T_{pt}^\tau\}$  nur produziert werden, wenn gerüstet wurde

$$x_{ptk} \leq d_{pk}^{ne} z_{pt} \quad \forall p, t \in \{T^{fix+1}..T^{int}\}, k \in \{t..T_{pt}^\tau\}. \quad (5.14)$$

Für die auf das Zeitfenster folgenden Perioden  $k \in \{T_{pt}^\tau + 1..T\}$ , welche aggregiert betrachtet werden, kann ebenfalls nur produziert werden, wenn vorher gerüstet wurde

$$x_{ptT} \leq d_{p, T_{pt}^\tau+1, T}^{ne} z_{pt} \quad \forall p, t \in \{T^{fix+1}..T^{int}\}. \quad (5.15)$$

<sup>51</sup> Wird in einer rollierenden Planung der Planungshorizont zu kurz gewählt, sind die Entscheidungen in den ersten Perioden nicht notwendigerweise optimal. Dies wird als Truncated Horizon Effekt bezeichnet. Vgl. [Sta00a] oder [FT91].

<sup>52</sup> Vgl. [SM73].

<sup>53</sup> Vereinfachend wird in der Darstellung davon ausgegangen, dass der Bedarf  $d_{pt}^{ne} \geq 0$  ist.

Die Gleichungen, die für den gesamten Planungshorizont gelten, und die Gleichungen für das Zeitfenster werden durch die Linking Constraints miteinander verbunden. Dies geschieht über den systemweiten Lagerbestand. Der systemweite Lagerbestand am Anfang des Zeitfensters  $e_{pT^{fix}}$  ergibt sich aus dem physischen Lagerbestand  $y_{pT^{fix}}$  und den Produkten  $p$ , die bereits in nachfolgende Erzeugnisse eingebaut sind  $\sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq} e_{qT^{fix}}$

$$e_{pT^{fix}} = y_{pT^{fix}} + \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq} e_{qT^{fix}} . \quad (5.16)$$

Dieser systemweite Lagerbestand kann zur Deckung der mit dem Primärbedarf das System verlassenden Menge von  $p$  in den Perioden  $T^{fix+1}$  bis  $T_{pT^{fix}}^{\tau}$  und der kumulierten Nachfrage in den Perioden  $T_{pT^{fix+1}}^{\tau} \dots T$  genutzt werden.

Die Gleichung für die Verwendung des systemweiten Lagerstandes erhält man aus einer Bilanz um den Knoten  $T^{fix}$  in Abbildung (5.2)

$$e_{pT^{fix}} = \sum_{t=T^{fix+1}}^{T_{pT^{fix}}^{\tau}} x_{pT^{fix}t} + x_{pT^{fix}T} . \quad (5.17)$$

Setzt man Gleichung (5.17) für  $p$  und für jedes  $q \in N_{(p)}$  in Gleichung (5.16) ein, erhält man die erste Linking Constraint<sup>54</sup>

$$\begin{aligned} y_{pT^{fix}} + \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq} \left( \sum_{t=T^{fix+1}}^{T_{qT^{fix}}^{\tau}} x_{qT^{fix}t} + x_{qT^{fix}T} \right) \\ = \sum_{t=T^{fix+1}}^{T_{pT^{fix}}^{\tau}} x_{pT^{fix}t} + x_{pT^{fix}T} \quad \forall p . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die zweite Linking Constraint ergibt sich für die in  $t \in \{T^{fix+1} \dots T^{int}\}$  produzierten Mengen  $x_{pt}$

$$x_{pt} = \sum_{k=t}^{T_{pt}^{\tau}} x_{ptk} + x_{ptT} \quad \forall p, t \in \{T^{fix+1} \dots T^{int}\} . \quad (5.19)$$

Die Restriktionen (5.7),(5.8),(5.12)-(5.15),(5.18) und (5.19) stellen das von Stadtler verwendete

<sup>54</sup> Vgl. [Sta00b], S. 18.

Modell dar. Durch die Zielfunktion werden die Kosten minimiert

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_p \sum_{t=T^{fix}+1}^{T^{int}} f_{pt} z_{pt} + \sum_{t=1}^{T^{fix}-1} h_{pt} x_{pt} \\
& + \sum_{t=\max\{T^{fix},1\}}^{T^{int}-1} \sum_{k=t}^{T^{int}} (k-t) h_{pt}^e x_{ptk} \\
& + \sum_p \sum_{t=\max\{T^{fix},1\}}^{T^{int}} (T^{int}-t) h_{pt}^e x_{ptT} + \sum_m \sum_{t=1}^T oc_{mt} e_{mt} \\
& + \sum_p \sum_{t=T^{fix}+1}^{T^{int}} \sum_{k=T^{int}+1}^{T_{pt}^r} b_{ptk} x_{ptk} + const.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Kosten ergeben sich aus den Überstundenkosten im gesamten Planungshorizont und den Rüst- und Lagerkosten bis zum Ende des Zeitfensters. Lager- und Rüstkosten von Produktionsmengen, die im Zeitfenster produziert aber erst in den auf das Zeitfenster folgenden Perioden verbraucht werden, werden durch die Boni  $b_{ptk}$  gesondert behandelt. Die Boni  $b_{ptk}$  sollen den Truncated Horizon Effekt<sup>55</sup> berücksichtigen. Sie berechnen sich durch<sup>56</sup>

$$b_{ptk} = \frac{c_{ptk}^{mod} - c_{ptk-1}^{mod}}{d_{pk}^{ne}} \tag{5.21}$$

mit

$$c_{ptk}^{mod} = \frac{T^{int} - t + 1}{k - t + 1} \cdot \left( f + \sum_{l=t}^k h_p^e (l - t) d_{pl}^{net} \right). \tag{5.22}$$

Stadtler untersucht seine Heuristik anhand von mehreren hundert Testproblemen.<sup>57</sup> Jedes Teilproblem wurde dabei unter einer Zeitvorgabe gelöst. Er vergleicht seine Heuristik mit dem Verfahren von Tempelmeier und Derstroff. Für fast alle Testproblemklassen kann Stadtler die Überlegenheit seiner Heuristik zeigen.

<sup>55</sup> Vgl. [Sta00b], S. 14 ff. und [Sta00a].

<sup>56</sup> Bei der Berücksichtigung von Rüstzeiten können zusätzlich Opportunitätskosten für den Ressourcenverbrauch berücksichtigt werden. Vgl. [Sta00b], S. 22 f.

<sup>57</sup> Vgl. [Sta00b], S. 23 ff.

### 5.3 Das Verfahren von Katok, Harrison und Lewis

Katok, Harrison und Lewis<sup>58</sup> erweitern ein Lösungsverfahren, das von Harrison und Lewis<sup>59</sup> für serielle Erzeugnisstrukturen entwickelt wurde, für generelle Erzeugnisstrukturen. Der Ausgangspunkt für die Verfahren liegt in der Beobachtung, dass sobald ein Rüstplan vorgegeben ist, d.h.  $z_{pt} = \hat{z}_{pt} \quad \forall p, t$ , sich das MLCLSP auf die Lösung eines Linearen Programms reduziert.

#### Modell MLCLSP<sup>z</sup>

$$\min \quad \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T (h_p y_{pt} + c_{pt} x_{pt} + f_p \hat{z}_{pt}) \quad (5.23)$$

$$s.t. \quad y_{pt-1} + x_{pt} - \sum_{i \in N(p)} r_{pi} x_{it} - d_{pt}^{prim} = y_{pt} \quad \forall p, t \quad (5.24)$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} a_{pm} x_{pt} \leq C_{mt} - \sum_{p=1}^P s_{pm} \hat{z}_{pt} \quad \forall m, t \quad (5.25)$$

$$0 \leq x_{pt} \leq M_{pt} \hat{z}_{pt} \quad \forall p, t \quad (5.26)$$

$$y_{pt} \geq 0 \quad \forall p, t \quad (5.27)$$

Wird der optimale Rüstplan vorgegeben, werden durch das LP-Modell MLCLSP<sup>z</sup> die optimalen Losgrößen erzeugt. In dem Verfahren von Katok et al. wird der Rüstplan durch ein Verfahren bestimmt, indem das nachstehende Modell LPR iterativ gelöst wird. Im Modell LPR werden die Rüstvorgänge implizit berücksichtigt, in dem die Technologiekoeffizienten  $a_{pm}$  so modifiziert werden, dass sie die Rüstzeiten berücksichtigen. Gleichzeitig werden die Produktions- und Lagerkostensätze so verändert, dass sie die Rüstkosten reflektieren. Das Modell LPR, welches die Auswirkungen der Rüstvorgänge approximiert, ist im Folgenden dargestellt.

#### Modell LPR<sup>60</sup>

$$\min \quad \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T (\tilde{h}_{pt} y_{pt} + \tilde{c}_{pt} x_{pt}) \quad (5.28)$$

$$s.t. \quad y_{pt-1} + x_{pt} - \sum_{i \in N(p)} r_{pi} x_{it} - d_{pt}^{prim} = y_{pt} \quad \forall p, t \quad (5.29)$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} \tilde{a}_{pmt} x_{pt} \leq C_{mt} \quad \forall m, t \quad (5.30)$$

$$0 \leq x_{pt} \leq \hat{M}_{pt} \quad \forall p, t \quad (5.31)$$

$$y_{pt} \geq 0 \quad \forall p, t \quad (5.32)$$

<sup>58</sup> Vgl. [KLH98].

<sup>59</sup> Vgl. [HL96].

<sup>60</sup> Katok et al. geben das Modell in einer allgemeinen MIP Formulierung an. Vgl. [KLH98], S. 864 f.

Wobei  $\hat{M}_{pt} = M_{pt} \cdot \hat{z}_{pt}$  ist.

Zu Beginn des Verfahrens wird das Modell LPR mit  $\tilde{a}_{pmt} = a_{pm}$ ,  $\tilde{c}_{pt} = c_{pt}$  und  $\tilde{h}_{pt} = h_{pt}$  gelöst. Mit den Losgrößen  $x_{pt}^*$  der optimalen Lösung des Modells LPR können dann die Parameter angepasst werden. Der zur Lösung gehörende Rüstplan wird ermittelt, indem für jedes Produkt und jede Periode, in der produziert wird, die Rüstvariable auf eins gesetzt wird

$$\hat{z}_{pt} = \begin{cases} 1 & , x_{pt}^* > 0 \\ 0 & , \text{sonst} . \end{cases}$$

Damit können die Rüstzeiten in den Technologiekoeffizienten

$$\tilde{a}_{pmt} = a_{pm} + \frac{s_{mp} \cdot \hat{z}_{pt}}{x_{pt}^*}$$

und die Rüstkosten in den Produktionskostensätzen

$$\tilde{c}_{pt} = c_{pt} + \frac{f_p \cdot \hat{z}_{pt}}{x_{pt}^*}$$

berücksichtigt werden. Die Kostensätze  $\tilde{c}_{pt}$  und  $\tilde{h}_{pt}$  werden im Ablauf des Verfahrens weiter modifiziert. Dazu müssen die gesamten Lager-  $H = \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T h_p \cdot y_{pt}^*$  und Rüstkosten  $S = \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^T f_p \cdot \hat{z}_{pt}$  berechnet werden.  $\epsilon$  ist die Abweichung der Differenz von Rüst- und Lagerkosten bezogen auf die Gesamtkosten:

$$\epsilon = \frac{|S - H|}{S + H} .$$

Die Anpassung in Abhängigkeit von  $\epsilon$  geht auf das Optimalitätskriterium bei der EOQ-Formel zurück, nach dem sich im Kostenminimum Rüst- und Lagerkosten entsprechen. Mit  $\epsilon$  werden die Produktionskostensätze

$$\tilde{c}_{pt} = \begin{cases} \tilde{c}_{pt} \cdot (1 - \epsilon)^{N_{c_{pt}}} , & H > S \\ \tilde{c}_{pt} \cdot (1 + \epsilon)^{N_{c_{pt}}} , & H \leq S \end{cases}$$

und die Lagerkostensätze

$$\tilde{h}_{pt} = \begin{cases} \tilde{h}_{pt} \cdot (1 + \epsilon)^{N_{h_{pt}}} , & H > S \\ \tilde{h}_{pt} \cdot (1 - \epsilon)^{N_{h_{pt}}} , & H \leq S \end{cases}$$

angepasst, wobei  $N_{c_{pt}}$ ,  $N_{h_{pt}}$  und  $N_{a_{pmt}}$  angeben, wie häufig die Parameter schon modifiziert wurden. Mit den modifizierten Parametern wird das Modell erneut gelöst und die Parameter werden wieder angepasst. Dieser Vorgang findet so lange statt, bis entweder eine maximale Iterationsanzahl erreicht ist oder sich kein Modellparameter mehr verändert. Die Anzahl der Modifikationen ist für die Technologiekoeffizienten auf ein Mal und für die Kostenparameter auf zwei Mal be-

schränkt.<sup>61</sup> Dieses Verfahren bezeichnen Katok et al. als Coefficient Modification Subroutine with Cost Balancing im Folgenden CMSB genannt. Der Rüstplan, der durch die CMSB erzeugt wurde, muss nicht notwendigerweise zulässig für das MLCLSP sei. Um dies zu überprüfen, wird das Modell MLCLSP<sup>z</sup> mit dem fixierten Rüstplan gelöst.<sup>62</sup> Wird keine zulässige Lösung für den Rüstplan gefunden, bricht das Verfahren von Katok et al. an dieser Stelle ab. Ist der Rüstplan zulässig, schließen sich drei Verbesserungsschritte bestehend aus der Simple Setup Reduction (SSR), der Restricted Setup Reduction (RSR) und der Restricted Inventory Reduction (RIR) an.

In der SSR wird ausgehend von der zulässigen Lösung der CMSB immer eine Losgröße im Modell LPR, die nicht null ist, auf null fixiert. Wird eine bessere Lösung gefunden, wird diese gespeichert.

In der RSR werden alle Losgrößen auf null fixiert, die in der besten zulässigen Lösung der SSR den Wert null haben. Die originären Technologiekoeffizienten und Kostensätze werden wieder hergestellt und die Kapazitäten an den Rüstplan angepasst. Anschließend werden der Reihe nach alle Losgrößenvariablen  $x_{pt}$ , die einen Wert größer als null in der besten Lösung der SSR hatten, auf null fixiert. Die Fixierung wird für die Losgrößenvariablen  $x_{pk}$  mit  $k \in \{t - \alpha, \dots, t - 1, t + 1, \dots, t + \alpha\}$  aufgehoben, wobei  $\alpha$  eine ganze positive Zahl ist. Wiederum wird eine bessere Lösung gespeichert.

In der RIR werden ausgehend von der besten zulässigen Lösung nach der RSR alle Losgrößenvariablen auf null fixiert, die in der Lösung der RSR den Wert null hatten. Für jede Losgrößenvariable  $x_{pt}$ , die auf null fixiert wurde, wird die Fixierung aufgehoben. Ebenfalls wird die Fixierung der Nachbarvariablen  $x_{pk}$  mit  $k \in \{t - \alpha, \dots, t - 1, t + 1, \dots, t + \alpha\}$  aufgehoben und ein LP gelöst. Ergibt sich eine bessere Lösung, wird diese gespeichert.

Katok et al. konnten mit diesem Verfahren ihre Testprobleme zulässig lösen. Daskalov<sup>63</sup> löst einen Teil der von Stadtler benutzten Testprobleme mit dem Verfahren von Katok et al.. Die Lösung der Testprobleme ohne Rüstzeiten lagen im Mittel um über 37% von den von Stadtler veröffentlichten besten Lösungen. Für die Testprobleme mit Rüstzeiten konnten nur 26% zulässig gelöst werden.

<sup>61</sup> Bei Tempelmeier ist eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens zu finden. Vgl. [Tem99], S. 317 ff.

<sup>62</sup> Katok et al. überprüfen die Zulässigkeit eines Rüstplans, indem sie ein verändertes Modell LPR lösen. Dazu werden die Obergrenzen für die Losgrößen, für die nicht gerüstet wurde, auf null fixiert. Die Kapazitäten werden um die Rüstzeiten verringert, wenn gerüstet wurde, und es wird  $\tilde{a}_{pmt} = a_{pm}$  gesetzt. Vgl. [KLH98], S. 866.

<sup>63</sup> Vgl. [Das03].