Kapitel 4

Mehrstufige Losgrößenplanung mit Kapazitätsbeschränkungen

In diesem Kapitel werden unterschiedliche Modellformulierungen für das dynamische mehrstufige kapazitierte Losgrößenproblem, im Folgenden MLCLSP[1], dargestellt. Das MLCLSP lässt sich folgendermaßen beschreiben: Eine dynamisch auftretende Nachfrage d_{pt}^{prim} nach $|P|$ Produkten ist in den nächsten T Perioden so zu decken, dass die zur Nachfragedeckung notwendigen Kosten minimiert werden. Zur Produktion der Endprodukte werden Vorprodukte benötigt, die wiederum andere Vorprodukte benötigen können. Bei der Produktion fallen die Produktionskosten c_{pt} für eine Mengeneinheit p in der Periode t an. Die unverderblichen End- und Vorprodukte können gelagert werden, wobei die Lagerkosten in jeder Periode h_p betragen. Die Produktion der Produkte erfordert die Ressourcen m, welche nur in beschränkter Höhe C_{mt} in jeder Periode t zur Verfügung stehen. Neben dem Ressourcenverbrauch a_{pm} von Ressource m je produzierter Mengeneinheit von Produkt p können Rüstzeiten s_{pm} notwendig sein, um Produkt p mit der Ressource m herstellen zu können. Bei der Auflegung eines Loses von Produkt p entstehen die Rüstkosten f_p. Vorlaufverschiebungen, die sich durch Durchlaufzeiten oder durch eine geschlossene Produktion ergeben, können auf Grund der Größe der betrachteten Perioden vernachlässigt werden. Die Anfangslagerbestände y_{p0} und die Endlagerbestände am Ende des Planungshorizontes T sind für alle Produkte p vorgegeben.

Für dieses Problem werden in den folgenden Abschnitten unterschiedliche Modellformulierungen dargestellt. Im ersten Abschnitt wird auf die Besonderheiten von mehrstufigen Erzeugnisstrukturen eingegangen, bevor in Abschnitt zwei die Standardmodellformulierung für das MLCLSP angegeben ist. Im dritten Abschnitt werden Varianten des Modells für das MLCLSP

[1] Multi Level Capacitated Lot-Sizing Problem

beschrieben und im vierten Abschnitt Modellverschärfungen und zusätzliche Ungleichungen. Im fünften Abschnitt werden Reformulierungen der Variablen von der einstufigen Losgrößenplanung auf das MLCLSP übertragen.

4.1 Mehrstufige Erzeugnisstrukturen

Im dritten Kapitel wurden einstufige Erzeugnisstrukturen betrachtet. Einstufige Erzeugnisstrukturen treten in der arbeitsteiligen Industrie relativ selten auf. Ein bedeutender Ansatz, bei dem eine einstufige Erzeugnisstruktur betrachtet wird, ist der Master Production Schedule, bei dem auf aggregierter Datenbasis für die Endprodukte eine Grobplanung gemacht wird. Die meisten Produktionsprozesse, wie beispielsweise die Montage eines PKW's, die Trennung von Rohöl in seine unterschiedlichen Fraktionen oder die Bearbeitungsschritte zur Herstellung eines Turbinenlaufrades, sind mehrstufig, da das Endprodukt über mehrere Vorproduktstufen hergestellt und/oder aus mehreren Vorprodukten zusammengefügt wird.

Mehrstufige Erzeugnisstrukturen werden mit Hilfe von Produktionskoeffizienten[2] r_{qp} beschrieben. Sie geben an, wie viele Teile von Produkt q direkt in das übergeordnete Produkt p eingehen. Bezüglich der Struktur der Mehrstufigkeit unterscheidet man serielle, konvergierende, divergierende und generelle Erzeugnisstrukturen,[3] wobei im Folgenden nur zyklenfreie Erzeugnisstrukturen betrachtet werden. Die Erzeugnisstruktur kann in Dispositionsstufen St_p untergliedert werden. Die Dispositionsstufe der Endprodukte beträgt null, $St_p = 0$. Für ein Vorprodukt ergibt sich die Dispositionsstufe als der längste Weg zu einem Endprodukt

$$St_p = \max_{q \in N(p)} (St_q) + 1 \ ,$$

wobei mit $N(p)$ die Menge aller direkten Nachfolger des Produktes p bezeichnet ist.

Die Abbildung einer mehrstufigen Erzeugnisstruktur kann graphisch, tabellarisch oder über Matrizen erfolgen. Eine graphische Darstellungsform der Mehrstufigkeit ist der Gozintograph.[4] Beim Gozintographen werden die Erzeugnisse durch Knoten und deren Beziehungen untereinander durch Pfeile repräsentiert. Die mengenmäßigen Beziehungen können durch die Produktionskoeffizienten an den Pfeilen dargestellt werden.[5]

[2] Die Begriffe Produktions- und Direktbedarfskoeffizient werden synonym verwand.
[3] Vgl. Abbildung 4.1.
[4] Vgl. [Vaz62], S. 385.
[5] Vgl. Abbildung 4.1.

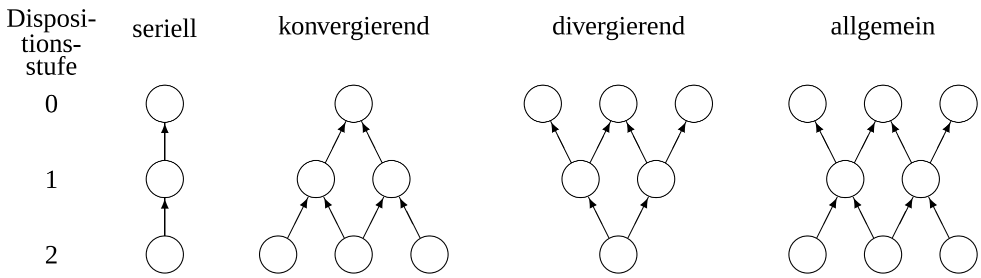

Abbildung 4.1: *Gozintograph einer seriellen, konvergierenden, divergierenden und allgemeinen Erzeugnisstruktur*

Die tabellarische Darstellung der Erzeugnisstruktur kann in Stücklisten und Gozintolisten erfolgen. Eine Stückliste ist ein mengenmäßiges Verzeichnis der in ein Produkt p eingehenden Produkte q.[6] Die Gozintoliste ist eine tabellarische Darstellung der Pfeile des Gozintographen durch die Produkte, die durch den Anfangs- und den Endknoten repräsentiert sind, und die Produktionskoeffizienten.

Eine Darstellung der Erzeugnisstruktur als Matrix, ist die Direktbedarfsmatrix. Sie ergibt sich aus allen Produktionskoeffizienten r_{qp}, wobei der Zeilenindex q durch die untergeordneten Produkte und der Spaltenindex p durch die übergeordneten Produkte gebildet wird. Geht kein Teil q in das Produkt p ein, dann ist der Direktbedarfskoeffizient null. Eine weitere Darstellung als Matrix ist die Verflechtungsbedarfsmatrix. Sie besteht aus den Verflechtungsbedarfkoeffizienten und gibt an, wie viele Mengeneinheiten von Produkt q in ein Produkt p insgesamt eingehen. Die Verflechtungsbedarfskoeffizienten r^v_{qp} können wie folgt bestimmt werden:[7]

$$r^v_{qp} = \sum_{k \in V_{(p)}} r_{kp} \cdot r^v_{qk} \quad ,$$

wobei $V_{(p)}$ die Menge aller Produkte k ist, die in p direkt eingehen und deren Produktionskoeffizient $r_{kp} > 0$.

Im Folgenden wird zwischen Endprodukten und Vorprodukten unterschieden. Endprodukte sind Produkte, für die es nur einen Primärbedarf, d.h. eine extern determinierte Nachfrage gibt. Sie gehen in keine anderen Produkte ein. Vorprodukte sind Produkte, die zur Herstellung anderer Produkte notwendig sind. Für Vorprodukte kann zusätzlich Primärbedarf existieren. Der externe Primärbedarf für das Produkte p in der Periode t wird mit d^{prim}_{pt} bezeichnet. Der Sekundärbedarf d^{sec}_{pt}, der Bedarf an Produkt p, der durch den Bedarf der übergeordneten Produkte q induziert wird, berechnet sich aus den Losgrößen x_{qt} der übergeordneten Produkte q multipliziert mit dem

[6] Zu den unterschiedlichen Stücklisten vgl. [Tem99], S. 111 ff.

[7] Die Verflechtungsbedarfsmatrix kann auch über die Invertierung der Technologiematrix ermittelt werden, wobei die Technologiematrix sich aus der Differenz von Einheits- und Direktbedarfsmatrix ergibt.

Produktionskoeffizienten:[8]

$$d_{pt}^{sec} = \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq} \cdot x_{qt} \quad ,$$

wobei $N_{(p)}$ die Menge aller Produkte ist, in die p direkt eingeht. Da der Sekundärbedarf von den Produktionsentscheidungen x_{qt} der übergeordneten Produkte abhängig ist, kann er erst bestimmt werden, wenn die Losgrößen der übergeordneten Produkte festgelegt wurden.

Der gesamte Bedarf nach einem Produkt p in einer Periode t ist der Bruttobedarf d_{pt}^{gross}, welcher sich in dem hier betrachteten Fall aus der Summe von Primär- und Sekundärbedarf ergibt:

$$d_{pt}^{gross} = d_{pt}^{prim} + d_{pt}^{sec} \ .$$

Der Nettobedarf d_{pt}^{net} nach einem Produkt p in Periode t ist der Bruttobedarf abzüglich des Anfangslagerbestandes y_{pt-1}:[9]

$$d_{pt}^{net} = \max(0, d_{pt}^{gross} - y_{pt-1}) \ . \tag{4.1}$$

Da der Sekundärbedarf von den Produktionsentscheidungen x_{qt} der übergeordneten Produkte abhängig ist, können auch Brutto- und Nettobedarf erst bestimmt werden, wenn die Losgrößen der übergeordneten Produkte festgelegt wurden und der Anfangslagerbestand bekannt ist. Verwendet man sie in einem Modell, sind sie Variablen.

Für eine scharfe Modellformulierung benötigt man im mehrstufigen Fall gute Obergrenzen für die Losgrößen, welche ex ante bestimmbar sein müssen. Im einstufigen Fall ließen sich diese Obergrenzen M_{ptk}^{prod} bzw. M_{tk}^{prod} aus dem Nettobedarf und einer zu berücksichtigenden Kapazität ableiten. Da der Nettobedarf im mehrstufigen Fall nicht ex ante bestimmbar ist, benötigt man ein anderes Konzept, mit dem Obergrenzen im voraus bestimmt werden können.

Analog zum Bruttobedarf wird der systemweite Bruttobedarf d_{pt}^{ge} als die Menge definiert, die von einem Produkt p in einer Periode t benötigt wird, um den Primärbedarf nach allen Endprodukten q zu befriedigen:

$$d_{pt}^{ge} = d_{pt}^{prim} + \sum_{q=1}^{|P|} r_{pq}^{v} \cdot d_{qt}^{prim} = d_{pt}^{prim} + \sum_{q \in N(p)} r_{pq} \cdot d_{qt}^{ge} \ .$$

Analog zum Nettobedarf definiert man den systemweiten Nettobedarf d_{pt}^{ne} als die Menge, die von einem Produkt p in einer Periode t benötigt wird, um den Primärbedarf nach allen Endprodukten q unter Berücksichtigung der Anfangslagerbestände aller Produkte in der ersten Periode des

[8] Verbrauchsorientierter Bedarf und Zusatzbedarf werden vernachlässigt.
[9] Ausstehende Bestellmengen, Vormerkungen und Sicherheitsbestände werden hier nicht berücksichtigt.

Planungszeitraumes y_{p0} zu befriedigen:[10]

$$d_{pt}^{ne} = \max(0, d_{pt}^{prim} + \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq}\, d_{pt}^{ne} - y_{pt}^{r}) \tag{4.2}$$

mit

$$y_{pt}^{r} = \max(0, y_{p0} - \sum_{k=1}^{t-1} (d_{pk}^{prim} + \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq}\, d_{pk}^{ne}))\ .$$

Mit dem systemweiten Bruttobedarf d_{pt}^{ge} und dem systemweiten Nettobedarf d_{pt}^{ne} lassen sich Obergrenzen für die Losgrößen bestimmen, da sie ex ante bestimmbar und somit für eine Modellformulierung Parameter sind. Dies wird in Kapitel 4.4 erläutert.

4.2 Modellformulierung für das MLCLSP

Für das MLCLSP gibt es verschiedene Modellformulierungen und Varianten, welche in diesem und in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden. Die in diesem Abschnitt dargestellte Standardformulierung benutzt die Losgrößenvariablen x_{pt}, die Rüstvariablen z_{pt} und die Lagerbestandsvariablen y_{pt} und ist die intuitivste der vorgestellten Modellformulierungen. Sie wird in der angegebenen Form bzw. mit geringen Abweichungen u.a. in [Der95] und [Sta97] benutzt.[11]

Modell MLCLSP

$$\min \quad \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} (h_p\, y_{pt} + c_{pt}\, x_{pt} + f_p\, z_{pt}) \tag{4.3}$$

$$s.t. \quad y_{pt-1} + x_{pt} - \sum_{i \in N_{(p)}} r_{pi}\, x_{it} - d_{pt}^{prim} = y_{pt} \quad \forall p, t \tag{4.4}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} (s_{pm}\, z_{pt} + a_{pm}\, x_{pt}) \leq C_{mt} \quad \forall m, t \tag{4.5}$$

$$x_{pt} - z_{pt}\, M \leq 0 \quad \forall p, t \tag{4.6}$$

$$x_{pt} \geq 0 \quad \forall p, t \tag{4.7}$$

$$z_{pt} \in \{0, 1\} \quad \forall p, t \tag{4.8}$$

$$y_{pt} \geq 0 \quad \forall p, t \tag{4.9}$$

Durch die Zielfunktion (4.3) werden die über alle Produkte und Perioden aufsummierten Lager-,

[10] Vgl. [Sta96], S. 563.

[11] Stadtler [Sta97, S. 562] bezeichnet diese Modellformulierung als I&L Modell (Inventory and Lotsize Model), wobei in Stadtlers Formulierung Überstunden auf den Ressourcen erlaubt sind, welche mit entsprechend hohen Kosten in der Zielfunktion berücksichtigt werden.

Produktions- und Rüstkosten minimiert, wobei die Produktionskosten nur relevant sind, wenn sie sich im Zeitablauf ändern. Die Lagerbilanzgleichungen (4.4) verhindern das Auftreten von Fehlmengen. Die Kapazitätsrestriktionen (4.5) verbieten, dass mehr Ressourcen für die Produktion verwendet werden, als Kapazität vorhanden ist. Die Rüstbedingungen (4.6) sorgen dafür, dass immer dann, wenn produziert wird, auch gerüstet werden muss, wobei M eine hinreichend große Zahl bezeichnet.[12] Durch die Gleichungen (4.7) sind die Produktionsvariablen x_{pt} nach unten beschränkt, so dass sie nicht negativ werden können. Die binären Rüstvariablen z_{pt} nehmen durch (4.8) nur die Werte null oder eins an. Ein vorgegebener Endlagerbestand am Ende des Planungszeitraumes ist in der Endnachfrage in der letzten Periode berücksichtigt.

4.3 Varianten des Standardmodells für das MLCLSP

Zur Berücksichtigung von Lagerkosten in der Zielfunktion und zur Verhinderung von Fehlmengen wurden in der Standardformulierung für das MLCLSP Variablen für den physischen Lagerbestand y_{pt} eingeführt. Weitere Möglichkeiten sind die Formulierung mit dem systemweiten Lagerbestand e_{pt} oder eine Formulierung ohne Lagerbestandsvariablen. Beide Konzeptionen werden in den folgenden Unterabschnitten dargestellt.

4.3.1 Der systemweite Lagerbestand

Unter dem systemweiten Lagerbestand e_{pt} (echelon stock)[13] versteht man alle Teile eines Produktes im Produktionssystem unabhängig davon, ob sie noch als Vorprodukt vorhanden oder bereits in übergeordneten Produkten aufgegangen sind.[14] Bei den Endprodukten entspricht der systemweite Lagerbestand dem physischen Lagerbestand ($e_{pt} = y_{pt}$), da die Endprodukte nicht in andere Produkte eingehen. Für die Vorprodukte ergibt sich der systemweite Lagerbestand aus der Summe des physischen Lagerbestandes und der Anzahl an Teilen, die bereits in die übergeordneten Produkte eingegangen sind. Letztere berechnet sich aus dem systemweiten Lagerbestand aller Nachfolger multipliziert mit den Produktionskoeffizienten

$$e_{pt} = y_{pt} + \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq}\, e_{qt} \qquad \forall p, t \; . \tag{4.10}$$

[12] Die Formulierung mit M ergibt keine scharfe Restriktion. Verbesserungen, die das M so klein wie möglich machen, werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.
[13] Vgl. [CS60], S. 475-490.
[14] Vgl. [BW01], S. 996-997.

Setzt man den systemweiten Lagerbestand nach Gleichung (4.10) in die Lagerbilanzgleichung (4.4) ein, erhält man

$$e_{pt} - e_{pt-1} - x_{pt} = -d_{pt}^{prim} + \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq} \left(e_{qt} - e_{qt-1} - x_{qt} \right) \qquad \forall p, t \; . \tag{4.11}$$

Für die Endprodukte $p \in E$ vereinfacht sich Gleichung (4.11), da kein Sekundärbedarf auftritt, d.h. die Summation über die Nachfolger entfällt

$$e_{pt} = e_{pt-1} + x_{pt} - d_{pt}^{prim} \qquad \forall p \in E, t \; . \tag{4.12}$$

Betrachtet man ein Produkt auf der 1. Dispositionsstufe, d.h. die Produkte gehen lediglich in Endprodukte ein, dann kann der rechte Faktor in der Summe $(e_{qt} - e_{qt-1} - x_{qt})$ von Gleichung (4.11) durch Gleichung (4.12) ersetzt werden, so dass dann in der Summe die Endnachfrage multipliziert mit dem Produktionskoeffizienten steht

$$e_{pt} - e_{pt-1} - x_{pt} = -d_{pt}^{prim} - \sum_{q \in E} r_{pq} \, d_{qt}^{prim} \; .$$

Für die Produkte der 2. und der weiteren Dispositionsstufen kann der Bedarf der Endprodukte so einfach nicht eingesetzt werden. In der Gleichung für Produkte der 2. Dispositionsstufe kann der rechte Faktor in der Summation $(e_{qt} - e_{qt-1} - x_{qt})$ durch die Gleichung für die 1. Dispositionsstufe eingesetzt werden

$$e_{pt} - e_{pt-1} - x_{pt} = -d_{pt}^{prim} - \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq} \left(\sum_{i \in E} r_{qi} \, d_{it}^{prim} + d_{qt}^{prim} \right) \; .$$

Der systemweite Lagerbestand der 1. Dispositionsstufe kann aus den Gleichungen für den systemweiten Lagerbestand der 2. Dispositionsstufe eliminiert werden, indem er durch den Primärbedarf aller nachfolgenden Produkte multipliziert mit dem Direktbedarfskoeffizienten ersetzt wird. Durch Umformen erhält man

$$e_{pt} - e_{pt-1} - x_{pt} = -d_{pt}^{prim} - \sum_{q \in P} r_{pq}^{v} \, d_{qt}^{prim} = -d_{pt}^{ge} \; . \tag{4.13}$$

Für die weiteren Dispositionsstufen kann auf dieselbe Art und Weise die Bilanz für den systemweiten Lagerbestand ermittelt werden. Für die weiteren Dispositionsstufen ergibt sich ebenfalls Gleichung (4.13), so dass sie für alle Produkte gültig ist.

Da die systemweiten Lagerbestände in dieser Formulierung unabhängig voneinander sind, werden durch Gleichung (4.13) keine Fehlmengen verhindert. Dazu muss zusätzlich gefordert werden, dass der systemweite Lagerbestand mindestens so groß sein muss, wie die Anzahl an Komponenten, die bereits in die direkten Nachfolger eingegangen ist

$$e_{pt} \geq \sum_{q \in N_{(p)}} r_{pq}\, e_{qt} \qquad \forall p, t\;. \tag{4.14}$$

Mit den Gleichungen (4.14) und (4.13) kann der systemweite Lagerbestand in das MLCLSP aufgenommen werden. Die Echelon-Lagerkosten h_p^e für den systemweiten Lagerbestand erhält man aus[15]

$$h_p^e = h_p - \sum_{q \in V_{(p)}} r_{qp}\, h_q\;.$$

Die gesamten Lagerkosten, welche in der Zielfunktion (4.3) angesetzt werden, ergeben sich dann aus

$$\sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} h_p^e\, e_{pt}\;.$$

Der Vorteil der Formulierung mit dem systemweiten Lagerbestand liegt darin, dass die Gleichungen für die Lagerbestände (4.13) die einfache Struktur der Einproduktgleichung (3.2) haben, so dass sich durch diese Formulierung die Ungleichungen für den Einproduktfall auf den Mehrproduktfall übertragen lassen.[16]

4.3.2 Formulierung der Lagerbilanzen durch Ungleichungen

Statt der Lagerbilanzen (4.4) können Ungleichungen formuliert werden, welche das Auftreten von Fehlmengen verhindern. Dazu muss für jedes Produkt p bis zu jedem Zeitpunkt t die Summe der akkumulierten Lagerzugänge größer oder gleich der Summe der akkumulierten Lagerabgänge sein

$$y_{p0} + \sum_{\tau=1}^{t} x_{p\tau} \geq \sum_{\tau=1}^{t} \Big(d_{p\tau}^{prim} + \sum_{i \in N_{(p)}} r_{pi}\, x_{i\tau}\Big)\;. \tag{4.15}$$

Der Lagerbestand in einer Periode t für ein Produkt p berechnet sich dann über die Summe der Zugänge bis zur Periode t vermindert um alle Lagerabgänge bis zur Periode t

$$y_{pt} = y_{p0} + \sum_{\tau=1}^{t} x_{p\tau} - \sum_{\tau=1}^{t} \Big(d_{p\tau}^{prim} + \sum_{i \in N_{(p)}} r_{pi}\, x_{i\tau}\Big)\;. \tag{4.16}$$

Setzt man y_{pt} in die Zielfunktion (4.3) und die Fehlmengenrestriktion (4.15) für die Lagerbilanzgleichung (4.4) in das Modell MLCLSP ein, werden keine Variablen für den Lagerbestand

[15] Vgl. [CS60].
[16] Vgl. [BW01], S. 996-997.

benötigt. Der Term für die gesamten Lagerkosten in der Zielfunktion (4.3) ergibt sich durch

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{|P|} h_p \sum_{t=1}^{T} y_{pt} \\
&= \sum_{p=1}^{|P|} h_p \sum_{t=1}^{T} \left(y_{p0} + \sum_{\tau=1}^{t} x_{p\tau} - \sum_{\tau=1}^{t} \left(d_{p\tau}^{prim} + \sum_{i \in N_{(p)}} r_{pi}\, x_{i\tau} \right) \right) \\
&= \sum_{p=1}^{|P|} \left(\sum_{t=1}^{T} h_p\, y_{p0} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} h_p\, x_{p\tau} - \right. \\
&\qquad \left. \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_{(p)}} h_p\, r_{pi}\, x_{i\tau} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} h_p\, d_{p\tau}^{prim} \right) .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Für ein Produkt p ergeben sich die Lagerkosten durch die Lagerkosten, die entstehen, wenn es keine Lagerabgänge gäbe $\sum_{t=1}^{T} h_p\ y_{p0} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} h_p\ x_{p\tau}$, vermindert um die Lagerkosten, die auf Grund von Primär- und Sekundärnachfrage nicht entstehen $\sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_{(p)}} h_p\ r_{pi}\ x_{i\tau} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} h_p\ d_{p\tau}^{prim}$. Der Term $\sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} h_p\, y_{p0} - \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} h_p\, d_{p\tau}^{prim}$ ist konstant und wird im Folgenden mit F bezeichnet

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} h_p\, y_{p0} - \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} h_p\, d_{p\tau}^{prim} \\
&= \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} h_p\, y_{p0} - \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} (T - t + 1) h_p\, d_{pt}^{prim} .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Der Ausdruck $\sum_{p=1}^{P} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_{(p)}} h_p\ r_{pi}\ x_{i\tau}$ lässt sich weiter vereinfachen.[17] Betrachtet man für ein Produkt p den bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen Sekundärbedarf, ergibt sich dieser durch $\sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_{(p)}} r_{pi}\ x_{i\tau}$. Diese von p aus dem Lager entnommene Menge muss der bei den Nachfolgern i angekommenen Menge entsprechen: $\sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_{(p)}} r_{pi}\ x_{i\tau} = \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i: p \in V_{(i)}} r_{pi}\ x_{i\tau}$. Die Verminderung der Lagerkosten von Produkt p durch den Abgang muss mit dem Lagerkostensatz h_p bewertet werden. Summiert man über alle Zeitpunkte t und alle Produkte p, erhält man folgenden Ausdruck für die Verminderung der Lagerkosten durch die Sekundärnachfrage

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in N_{(p)}} h_p\, r_{pi}\, x_{i\tau} = \sum_{i=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{p \in V_{(i)}} h_p\, r_{pi}\, x_{i\tau} \\
&= \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i \in V_{(p)}} h_i\, r_{ip}\, x_{p\tau} .
\end{aligned} \tag{4.19}$$

[17] Vgl. [Der95], S. 70-73.

Setzt man (4.18) und (4.19) in die Gleichung (4.17) ein entsteht folgender Ausdruck für die Lagerkosten

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{|P|}\sum_{t=1}^{T} h_p\, y_{pt} &= \sum_{p=1}^{|P|}\Big(\sum_{t=1}^{T}\sum_{\tau=1}^{t} h_p\, x_{p\tau} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{i\in V_{(p)}} h_i\, r_{pi}\, x_{p\tau}\Big) - F \\ &= \sum_{p=1}^{|P|}\sum_{t=1}^{T}\sum_{\tau=1}^{t} x_{p\tau}\Big(h_p - \sum_{i\in V_{(p)}} h_i\, r_{pi}\Big) - F \\ &= \sum_{p=1}^{|P|}\sum_{t=1}^{T}\sum_{\tau=1}^{t} x_{p\tau} h_p^e - F \\ &= \sum_{p=1}^{|P|}\sum_{t=1}^{T}(T-t+1)x_{pt}\, h_p^e - F\ .\end{aligned} \tag{4.20}$$

Das Modell, in dem die Lagerbilanzgleichung durch die Fehlmengenrestriktion (4.15) ersetzt wurde und in dem die Lagerkosten in der Zielfunktion nach Gleichung (4.20) berücksichtigt sind, wird im Folgenden mit MLCLSPx bezeichnet.[18] Das Modell MLCLSPx ist für das Lösungsverfahren durch Lagrangemultiplikation von großer Bedeutung.[19]

4.4 Verschärfungen und Ungleichungen für das MLCLSP

Je besser eine Modellformulierung die konvexe Hülle des Lösungsraumes approximiert, um so geringer ist die Dualitätslücke und um so leichter ist es in der Regel, das Problem zu lösen. In diesem Abschnitt werden Möglichkeiten dargestellt, durch Obergrenzen und zusätzliche Ungleichungen die Modellformulierung für das MLCLSP zu verbessern. In den ersten beiden Unterabschnitten wird auf die Berechnung von Obergrenzen für die Losgrößenvariablen eingegangen. Im dritten Unterabschnitt wird gezeigt, wie Ungleichungen für den einstufigen Fall auf das MLCLSP übertragen werden können. Im vierten und fünften Unterabschnitt werden weitere Ungleichungen vorgestellt.

4.4.1 Die maximale Produktion

Die Obergrenze für die maximale Produktion M in der Rüstrestriktion (4.6) hat Einfluss auf die Güte der Formulierung, da durch kleinere Obergrenzen die Formulierung des MLCLSP schärfer wird. Die Obergrenzen dürfen aber nicht so klein gewählt werden, dass sie zulässige Lösungen abschneiden. Wird für jede Periode gesondert die maximale Produktion M_{pt} berechnet, muss für

[18] Vgl. [BMT86], S. 992 und [Der95], S. 73
[19] Vgl. Kapitel 5.1.

Ungleichung (4.6)

$$x_{pt} \leq M_{pt}\, z_{pt} \qquad \forall p,t \tag{4.21}$$

geschrieben werden.

Beim MLCLSP ist die Produktion zum einen durch die Kapazitäten der zur Produktion von Produkt p benötigten Ressourcen m beschränkt. Zum anderen beschränkt die Nachfrage in den Perioden t bis T die Losgrößen, da maximal der gesamte Bedarf dieses Zeitraumes in t produziert werden kann[20]

$$M_{pt} = \min\left(\min_{m:a_{pm}>0}\left(\frac{C_{mt} - s_{pm}}{a_{pm}}\right), \sum_{k=t}^{T} d_{pk}^{ne}\right) \qquad \forall p,t\ . \tag{4.22}$$

Berechnet man die maximale Produktion in jeder Periode nach Gleichung (4.22), entspricht M_{pt} so lange der Kapazität, wie die kumulierte Nachfrage der folgenden Perioden größer ist als die Kapazität. Danach entspricht M_{pt} der kumulierten Nachfrage der folgenden Perioden, da die kumulierte Nachfrage der folgenden Perioden bis zum Planungshorizont in jeder weiteren Periode abnimmt. In dieser Berechnung ist nicht der Ressourcenverbrauch von anderen Produkte berücksichtigt.

4.4.2 LP basierte Verschärfungen für die maximale Produktion

Eine Möglichkeit, den Bedarf und den Ressourcenverbrauch von anderen Produkten bei der Berechnung der maximalen Produktion M_{pt} zu berücksichtigen, ist die Lösung eines Linearen Programms, in dem die maximal in t von p produzierbare Menge bestimmt wird. Das Lineare Programm besteht aus den Restriktionen des MLCLSP und einer Zielfunktion, die die Losgröße maximiert.[21]

$$M_{qk} = \max \qquad x_{qk} \tag{4.23}$$

$$s.t. \quad \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} (h_p\, y_{pt} + c_{pt}\, x_{pt} + f_p\, z_{pt}) \leq z^{best} \tag{4.24}$$

$$(4.4), (4.5), (4.7), (4.9), (4.21)$$

$$0 \leq z_{pt} \leq 1 \qquad \forall p,t \tag{4.25}$$

$$z_{qk} = 1$$

[20] Vgl. [Sha93], S. 375.

[21] Die in den folgenden Unterabschnitten dargestellten Ungleichungen können zusätzlich dem Linearen Programm hinzugefügt werden, um möglichst kleine Obergrenzen zu erhalten.

Dieses Lineare Programm (LP) berechnet die maximal produzierbare Menge vom Produkt p in der Periode t. Zur Berechnung aller M_{qk} muss das LP für jedes Produkt q in jeder Periode k gelöst werden. Zusätzlich ist die maximale Produktion durch die Kosten einer bekannten ganzzahligen Lösung z^{best} beschränkt (4.24), da eine Produktionsmenge für Produkt p in Periode t, welche höhere Gesamtkosten als z^{best} verursacht, nicht optimal ist. z^{best} ist durch die Kosten der besten bekannten zulässigen Lösung gegeben, welche z.B. durch die in Kapitel 5 und 6 dargestellten Heuristiken berechnet werden kann. Da im LP Rüstzeiten und Rüstkosten nur linear approximiert werden, ist die maximale Produktion größer als bei einer ganzzahligen Berücksichtigung der Rüstzeiten und Rüstkosten. Die Bestimmung der maximal produzierbaren Mengen mit Hilfe von binären Rüstvariablen ist an sich schon ein so komplexes Problem, dass lediglich die Relaxation berechnet werden kann. Bei großen Problemen mit vielen Produkten und Perioden kann die Berechnung der LP's zu zeitaufwendig sein. Eine weitere Methode, durch die der Bedarf und der Ressourcenverbrauch der anderen Produkte bei der Bestimmung der maximalen Produktion berücksichtigt wird, wird im Unterabschnitt 4.4.5 angegeben.

4.4.3 Übertragung der Ungleichungen für die einstufige Losgrößenplanung auf das MLCLSP

Die Ungleichungen für einstufige Losgrößenprobleme können über den systemweiten Lagerbestand e_{pt} und den systemweiten Nettobedarf d^{ne}_{pt} auf den mehrstufigen Fall übertragen werden. In den Untersuchungen im Kapitel 6 werden die speziellen (l,S)-Ungleichungen 3.29 und die MIR-Ungleichungen 3.33 in der Heuristik verwendet, weshalb sie im Folgenden für den mehrstufigen Fall dargestellt sind. Für die (l,S)-Ungleichungen ergibt sich im mehrstufigen Fall

$$e_{pt-1} \geq d^{ne}_{ptl} - \sum_{k=t}^{l} d^{ne}_{pkl} \cdot z_{pk} \ . \tag{4.26}$$

Berücksichtigt man zusätzlich Kapazitätsrestriktionen erhält man

$$e_{pt-1} \geq d^{ne}_{ptl} - \sum_{k=t}^{l} \min(M_{pt}, d^{ne}_{pkl}) \cdot z_{pk} \ . \tag{4.27}$$

Die MIR-Ungleichungen 3.33 können für den mehrprodukt Fall mit $\hat{M}^{prod}_{pkl} = \max_{k=t..l}(\min(M_{pt}, d^{ne}_{pkl}))$ folgendermaßen geschrieben werden

$$\frac{e_{pk-1}}{\hat{M}^{prod}_{pkl}} \geq \left(\frac{d^{ne}_{pkl}}{\hat{M}^{prod}_{pkl}} - \left\lfloor \frac{d^{ne}_{pkl}}{\hat{M}^{prod}_{pkl}} \right\rfloor \right) \cdot \left(\left\lceil \frac{d^{ne}_{pkl}}{\hat{M}^{prod}_{pkl}} \right\rceil - \sum_{i=k}^{l} z_{pi} \right) \ . \tag{4.28}$$

4.4.4 Zusätzliche Ungleichungen für die Rüstvariablen

Im einprodukt Fall kann eine minimale Rüstanzahl R_t^{min}, d.h. die Mindestanzahl an Perioden zwischen der ersten Periode und der Periode t in denen gerüstet werden muss, einfach berechnet werden[22]

$$R_t^{min} = \left\lceil \frac{d_{1t}}{\hat{C}} \right\rceil \qquad , \tag{4.29}$$

wobei $\hat{C}$ durch $\max_{k\in 1..t} \frac{C_t - s_t}{a_t}$ gegeben ist. Sind mehrere Produkte zu berücksichtigen, welche um eine Ressource m konkurrieren, erhält man auf diese einfache Art keine guten Untergrenzen für die minimale Rüstanzahl R_{pt}^{min} eines Produktes p, da der Ressourcenverbrauch der anderen Produkte nicht berücksichtigt wird. In diesem Fall können die minimalen Rüstanzahlen R_{pt}^{min} durch ein LP ermittelt werden, welches die Anzahl an Rüstvariablen von der ersten bis zur Periode t minimiert.

$$\begin{aligned} R_{pt}^{min} = \min \quad & \left\lceil \sum_{k=1}^{t} z_{pk} \right\rceil \\ s.t. \quad & (4.4), (4.5), (4.7), (4.9), (4.21), (4.24), (4.25) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Mit der minimalen Rüstanzahl R_{pt}^{min} können Ungleichungen formuliert werden, die die Summe der Rüstvariablen zwischen der ersten Periode und der Periode t nach unten beschränken

$$\sum_{k=1}^{t} z_{pk} \geq R_{pt}^{min} \; . \tag{4.31}$$

Fügt man diese Restriktionen dem Modell MLCLSP$_{LP}$[23] hinzu, kann dadurch der Wert der Lösung erhöht und die Ganzzahligkeitslücke verringert werden, worauf in den numerischen Untersuchungen im Kapitel 6 genauer eingegangen wird.

[22] Vgl. Abschnitt 3.2.4.

[23] Das Modell MLCLSP$_{LP}$ erhält man, indem man Gleichung 4.8 im Modell MLCLSP auf Seite 48 durch Gleichung 4.25 ersetzt.

4.4.5 Aus den Kapazitätsrestriktionen abgeleitete Ungleichungen

Die grundlegende Idee für die Ableitung von Ungleichungen durch die Kapazitätsbeschränkung liegt darin, dass in jeder Periode $t = 1..T$ für jede Ressource m eine Restkapazität C^R_{mt} berechnet werden kann. Sind Rüstzeiten nicht zu berücksichtigen, gibt die Restkapazität C^R_{mt} an, wie viel von der bis zum Zeitpunkt t bereitgestellten Gesamtkapazität übrig ist, nachdem die bis zum Zeitpunkt t aufgetretene externe Nachfrage befriedigt wurde

$$C^R_{mt} = \sum_{k=1}^{t} \left(C_{mk} - \sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d^{ne}_{pk} \right) \qquad \forall m, t \; .$$

Sollen Rüstzeiten berücksichtigt werden, ist die Restkapazität C^R_{mt} eine obere Schranke für die Kapazität, die genutzt werden kann, um für den externen Bedarf in $t + 1..T$ zu produzieren, da öfter als die minimale Rüstanzahl R^{min}_{pt} gerüstet werden kann

$$C^R_{mt} = \sum_{k=1}^{t} \left(C_{mk} - \sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d^{ne}_{pk} \right) - \sum_{p \in P} s_{pm} * R^{min}_{pt} \qquad \forall m, t \; .$$

Mit Hilfe der Restkapazität wurden von Maes et al.[24] Ungleichungen abgeleitet. Maes et al. berücksichtigen bei der Berechnung der Restkapazität nur die externe Nachfrage, nur eine Kapazität und keine Rüstzeiten. Hier werden die Ungleichungen für mehrere Kapazitäten mit Rüstzeiten und dem Nettobedarf d^{ne}_{pt} dargestellt. Der Kapazitätsverbrauch von Kapazität m infolge der Produktion des Nettobedarfes d^{ne}_{pt+1} von Produkt p in Periode $t + 1$ in einer Periode vor $t + 1$ ist $a_{pm} \cdot d^{ne}_{pt+1}$.[25] Die Menge Q_{mt} sei die maximale Menge von Produkten, deren gesamter Bedarf in $t + 1$ bereits vor $t + 1$ mit der Restkapazität C^R_{mt} produziert werden kann. Sie ergibt sich, indem man die Produkte in aufsteigender Ordnung nach ihrem Kapazitätsverbrauch in die Menge aufnimmt, solange der gesamte Kapazitätsverbrauch der in der Menge Q_{mt} enthaltenen Produkte kleiner als die Restkapazität ist, wobei Produkte mit einem Kapazitätsverbrauch von null mitgezählt werden. Damit erhält man folgende zulässige Ungleichung:

Theorem 4.4.1 *Eine zulässige Ungleichung für das MLCLSP ist*[26]

$$\sum_{p \in P} z_{pt+1} \geq |P| - |Q_{mt}| \qquad \forall m, t \; . \tag{4.32}$$

[24] Vgl. [MMVW91], S. 138-139.
[25] Rüstzeiten werden hier nicht berücksichtigt, da in der Produktionsperiode vor $t + 1$ bereits für das Produkt p gerüstet worden sein kann.
[26] Vgl. [MMVW91], S. 139.

Weitere Ungleichungen lassen sich mit Hilfe der Restkapazität ableiten. Die in einer Periode zur Verfügung stehende Restkapazität kann genutzt werden, um den Bedarf von Produkten in den auf t folgenden Perioden zu produzieren. Somit ist die Menge, die in den Perioden $1..t$ für die Perioden $t+1..T$ produziert werden kann, durch die Restkapazität beschränkt. Wenn die Restkapazität in $t-1$ nicht ausreicht, um den Bedarf von t bereits in den Perioden vor t zu produzieren, dann muss für das Produkt p in t gerüstet werden. Es ergibt sich folgende Ungleichung

$$\sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d_{pt}^{ne} \cdot (1 - z_{pt}) \leq C_{mt-1}^{R} \qquad \forall m, t$$

bzw.

$$\sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d_{pt}^{ne} \cdot z_{pt} \geq \sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d_{pt}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \qquad \forall m, t \; . \tag{4.33}$$

Die Ungleichungen (4.33) beschränken den Lösungsraum nur, wenn die rechte Seite der Ungleichung positiv ist, d.h. nicht alle Produkte vor t produziert werden können. Ist die rechte Seite negativ, können die Bedarfe von mehreren aufeinander folgenden Perioden betrachtet werden. Die Ungleichung nimmt dann folgende Form an

$$\sum_{k=t}^{K} \sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d_{pk}^{ne} \cdot z_{pt} \geq \sum_{k=t}^{K} \sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d_{pk}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \qquad \forall m, t \tag{4.34}$$

mit

$$K = \min_{g=t..T} \{ g : \sum_{k=t}^{g} \sum_{p \in P} a_{pm} \cdot d_{pk}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \geq 0 \} \; .$$

Betrachtet man den gesamten Ressourcenverbrauch eines Produktes, dann lässt sich dieser durch den eigenen Ressourcenverbrauch und den gesamten Ressourcenverbrauch aller eingehenden Produkte multipliziert mit dem Direktbedarfskoeffizienten angeben

$$a_{pm}^{ges} = a_{pm} + \sum_{q \in P} r_{qp} \cdot a_{qm}^{ges} \qquad \forall m, p \; .$$

Analog zur Gleichung (4.33) kann für die Produkte p einer Produktionsstufe i ($p \in St_i$) mit den Gesamtverbrauchskoeffizienten eine Ungleichung abgeleitet werden. Reicht die Restkapazität der Vorperiode nicht aus, um den gesamten Ressourcenbedarf der Produktion der Produkte einer Dispositionsstufe zu decken, dann muss für mindestens so viele Produkte der Dispositionsstufe gerüstet werden, dass die Restkapazität ausreicht, um den Ressourcenbedarf der Produkte zu decken, für die nicht gerüstet wurde

$$\sum_{p \in St_i} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pt}^{ne} \cdot z_{pt} \geq \sum_{p \in St_i} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pt}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \qquad \forall i, m, t \; . \tag{4.35}$$

Durch die Gleichungen (4.35) können im Vergleich zu (4.33) schärfere Restriktionen generiert werden, wenn die selben beschränkten Ressourcen zur Produktion auf mehreren Produktionsstufen benötigt werden. Im gesamten Ressourcenverbrauch a_{pm}^{ges} ist dann der Ressourcenverbrauch der Vorprodukte berücksichtigt. Ist die rechte Seite von Gleichung (4.35) negativ, können die auf t folgenden Perioden miteinbezogen werden

$$\sum_{k=t}^{K} \sum_{p \in St_i} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pk}^{ne} \cdot z_{pt} \geq \sum_{k=t}^{K} \sum_{p \in St_i} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pk}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \qquad \forall i, m, t \tag{4.36}$$

mit

$$K = \min_{g=t..T} \{g : \sum_{k=t}^{g} \sum_{p \in St_i} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pk}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \geq 0\} \ .$$

Eine dritte Ungleichung mit Hilfe der Restkapazität ergibt sich für ein Produkt. Es kann angegeben werden, wie viele Perioden die Restkapazität ausreicht, um den Bedarf dieses Produktes zu produzieren

$$\sum_{k=t}^{K} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pk}^{ne} \cdot z_{p,t} \geq \sum_{k=t}^{K} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pk}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \qquad \forall p, m, t \tag{4.37}$$

mit

$$K = \min_{g=t..T} \{g : \sum_{k=t}^{g} a_{pm}^{ges} \cdot d_{pk}^{ne} - C_{mt-1}^{R} \geq 0\} \ .$$

Zusätzlich zu der Ungleichung von Maes lassen sich somit drei weitere Ungleichungen für die Restkapazität finden:

- Ungleichungen, die die Ressourcenverbräuche aller Produkte berücksichtigen (4.34),
- Ungleichungen, die die Gesamtressourcenverbräuche aller Produkte einer Produktionsstufe berücksichtigen (4.36) und
- Ungleichungen, die die Gesamtressourcenverbräuche eines Produktes berücksichtigen (4.37).

Allgemein können diese Ungleichungen (4.34),(4.36),(4.37) mit den Parametern g_j, $g_j \geq 0$, den Rechten Seiten $RHS_1 \geq 0$ und den binären Variablen z_j folgendermaßen beschrieben werden

$$\sum_{j \in J} g_j \cdot (1 - z_j) = \sum_{j \in J} g_j \cdot \bar{z}_j \leq RHS_1 \ . \tag{4.38}$$

Ungleichungen von Typ (4.38) stellen eine Knapsackrestriktion dar. Für Knapsackrestriktionen können Cover-Cuts abgeleitet werden, die durch eine Lift-Prozedur weiter verschärft werden können.[27] Die Cover-Cuts kann man entweder a priori oder in einem Branch&Cut Algorithmus erzeugen. Alternativ ist es möglich, die originären Ungleichungen dem Programm hinzu zu fügen, damit die Optimierungssoftware selbständig Cover-Cuts erzeugt.

Die Restkapazität kann zudem auch genutzt werden, um die maximale Produktion zu berechnen. Die Menge, die in einer Periode t produziert wird, lässt sich unterteilen in die Menge die für den Bedarf der Periode t und die Menge die für den Bedarf der auf t folgenden Perioden hergestellt wird. Für den Bedarf der Periode t kann maximal die systemweite Nettonachfrage hergestellt werden. Die Produktion für auf t folgende Perioden ist durch die Restkapazität begrenzt. Somit ergibt sich die maximale Produktion zu

$$M_{pt} = \min\left(d_{pt}^{ne} + \min_{m:a_{pm}^{ges}>0}\left(\frac{C_{mt}^{R}}{a_{pm}^{ges}}\right), \min_{m:a_{pm}>0}\left(\frac{C_{mt} - s_{pm}}{a_{pm}}\right), \sum_{k=t}^{T} d_{pt}^{ne}\right) . \tag{4.39}$$

Berechnet man die maximale Produktion mit Gleichung (4.39), ergeben sich fast dieselben Werte, die man durch die Lösung des LP's in Abschnitt 4.4.2 erhält. Aus diesem Grund wurde die maximale Produktion im Folgenden mit der Gleichung (4.39) bestimmt.

4.5 Reformulierungen der Variablen für das MLCLSP

Im vorigen Abschnitt wurden Möglichkeiten zur Verschärfung der Modellformulierung für das MLCLSP durch kleinere Obergrenzen für die Losgrößenvariablen und durch zusätzliche Ungleichungen beschrieben. Eine weitere Möglichkeit den Lösungsraum schärfer zu formulieren, ist die Reformulierung der Variablen. In diesem Abschnitt werden die Variablenreformulierungen vom einstufigen Fall auf den mehrstufigen Fall übertragen. Zuerst wird die Formulierung des MLCLSP in Anlehnung an das Simple-Plant-Location Problem, im Anschluss daran die Kürzeste-Wege-Formulierung für das MLCLSP vorgestellt.

[27] Vgl. [Wol98], S. 147-155.

4.5.1 Formulierung des MLCLSP in Anlehnung an das Simple-Plant-Location-Problem

Die Formulierung von einstufigen Losgrößenproblemen als Simple-Plant-Location-Problem geht auf Krarup und Bilde zurück.[28] Rosling[29] und Maes et al. [30] benutzen diesen Ansatz für mehrstufige Losgrößenprobleme mit konvergierender Produktionsstruktur. Stadtler[31] untersucht das Lösungsverhalten dieser Formulierung im Vergleich zu anderen Modellformulierungen und benutzt den Ansatz in einer Heuristik.[32]

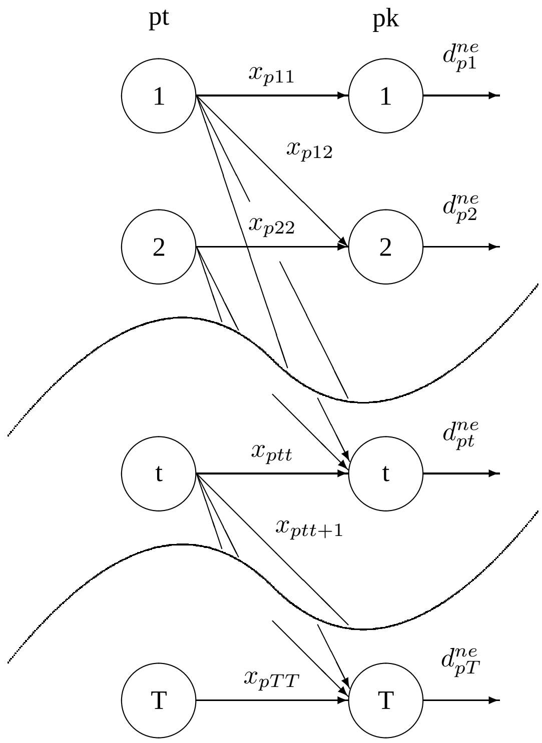

Abbildung 4.2: *Darstellung des Losgrößenproblems für ein Produkt p der mehrstufigen Erzeugnisstruktur als Standortplanungsproblem*

Bei der Simple-Plant-Location Formulierung[33] des MLCLSP wird jeder mögliche Produktionszeitpunkt pt als Standort einer Fabrik gesehen. Jeder mögliche Nachfragezeitpunkt pk wird als Standort eines Kunden interpretiert. Wenn eine Fabrik am Standort pt gebaut wird, können von dieser Fabrik pt alle Kunden pk, für die $k \geq t$ ist, beliefert werden[34]. Jeder Kunde pk fragt den

[28] Vgl.[KB77] und Abschnitt 2.1.2.2.
[29] Vgl. [Ros86].
[30] Vgl. [MMVW91], S. 137-138.
[31] Vgl. [Sta96], S. 568-569.
[32] Vgl. [Sta00b].
[33] Zum Simple-Plant-Location Problem vgl. [Mar99], S. 17-18.
[34] Bei den Lieferungen von Fabrik pt zu den Kunden pk, mit $k = 1..t-1$, würde es sich um Nachlieferungen handeln.

systemweiten Nettobedarf d_{pk}^{ne} nach. Die Losgröße eines Produktes p in einer Periode t ergibt sich aus den Lieferungen von Fabrik pt an die Kunden pk, wobei x_{ptk} die in Periode t für Periode k von Produkt p produzierte Menge ist. Dies ist in Abbildung (4.2) für ein Produkt p der mehrstufigen Erzeugnisstruktur graphisch dargestellt. Die in der Abbildung (4.2) dargestellten Restriktionen gelten für jedes Produkt. Sie sind durch Fehlmengenrestriktionen und Kapazitätsrestriktionen gekoppelt.

Der Anteil, der in t produzierten Menge zur Bedarfsdeckung in Periode k von Produkt p sei ϕ_{ptk} und ergibt sich aus $\phi_{ptk} = x_{ptk}/d_{pk}^{ne}$. Die Produktion in jeder Periode t ist durch die Kapazität C_{mt} der Ressource m beschränkt. Da die einzelnen Produkte die selben Kapazitäten zur Produktion benötigen, sind die Standortplanungsprobleme für die einzelnen Produkte p über die gemeinsamen Kapazitätsrestriktionen gekoppelt. Zudem ergeben sich die Nettobedarfe für die Vorprodukte aus den tatsächlichen Losgrößen der nachfolgenden Produkte, so dass Mehrstufigkeitsrestriktionen eingeführt werden müssen, die dafür sorgen, dass keine Fehlmengen entstehen. Mathematisch lässt sich das MLCLSP als Standortplanungsproblem folgendermaßen formulieren:[35]

Modell MLCLSP^{SPL}

$$\min \quad \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{k=t}^{T} (c_{pt} + (k-t)\, h_p^e)\, \phi_{ptk}\, d_{pk}^{ne} + f_p\, z_{pt} \right) \quad + F \tag{4.40}$$

$$\text{s.t.} \quad y_{p0} + \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=l}^{T} \phi_{plk}\, d_{pk}^{ne}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{t} d_{pk}^{prim} + \sum_{q \epsilon N_{(p)}} \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=l}^{T} r_{pq}\, \phi_{qlk}\, d_{qk}^{ne} \qquad \forall p, t \tag{4.41}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} s_{pm}\, z_{pt} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=t}^{T} a_{pm}\, \phi_{ptk}\, d_{pk}^{ne} \leq C_{mt} \qquad \forall m, t \tag{4.42}$$

$$\sum_{k=1}^{t} \phi_{pkt} = 1 \qquad \forall p, t \tag{4.43}$$

$$0 \leq \phi_{ptk} \leq z_{pt} \qquad \forall p, t, k \tag{4.44}$$

$$z_{pt} \in \{0, 1\} \qquad \forall p, t \tag{4.45}$$

Durch die Zielfunktion (4.40) werden die Produktions-, Lager- und Rüstkosten minimiert, wobei sich die Konstante F durch die Anfangslagerbestände zu Beginn des Planungshorizonts ergibt

$$F = \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} h_p^e \cdot \max(0, e_{p0} - \sum_{k=1}^{t} d_{pk}^{ge}) \; . \tag{4.46}$$

[35] Die hier angegebene Formulierung weicht von der bei [Sta96] auf Seite 570 angegeben Formulierung bei der Berechnung der Konstanten in der Zielfunktion ab, da die Formulierung bei Stadtler lediglich Anfangslagerbestände bei den Endprodukten zulässt.

Die Mehrstufigkeitsrestriktionen (4.41) verhindern Fehlmengen. Die Ungleichungen (4.42) sind die Kapazitätsrestriktionen. Die Restriktionen (4.43) sorgen dafür, dass in den Perioden bis t, der gesamte durch die Endnachfrage erzeugte Nettobedarf d_{pt}^{ge} nach Produkt p in t produziert wird. Die Restriktion ergibt sich aus der Mengenbilanz um die Knoten k in Abbildung (4.2). Zudem kann in Periode t Produkt p nur produziert werden, wenn gerüstet wird (4.44). Diese Restriktionen müssen für jedes Produkt p, jede Periode t und jede Periode $k = t..T$ aufgestellt werden, was zu $|P| \cdot T(\frac{T+1}{2})$ Restriktionen führt. Alternativ kann man auch die Restriktionen für jedes Produkt p und jede Periode t aggregieren, so dass lediglich $|P| \cdot T$ Restriktionen notwendig sind

$$\sum_{k=t}^{T} \phi_{ptk} d_{pk}^{ne} \leq z_{pt} \sum_{k=t}^{T} d_{pk}^{ne} \qquad \forall p, t \; . \tag{4.47}$$

Verwendet man die aggregierten Rüstrestriktionen (4.47) anstatt der disaggregierten Rüstrestriktionen (4.44), verliert die Modellformulierung an Schärfe. Verwendet man hingegen die disaggregierten Rüstrestriktionen (4.44) erhöht sich die Anzahl der Restriktionen beträchtlich, wodurch sich die Lösungsdauer der einzelnen Linearen Programme im Lösungsverfahren erhöht.

Ersetzt man die Summe $\sum_{k=t}^{T} d_{pk}^{ne}$ auf der Rechten Seite von Gleichung (4.47) durch die maximale Produktion M_{pt}, so ist es möglich die Formulierung der Restriktion zu verbessern. Berücksichtigt man nun beide Rüstrestriktionen in der Modellformulierung gleichzeitig, kann dadurch der LP-Wert des Modells MLCLSP^{SPL} gesteigert werden.[36] Da die Anzahl der disaggregierten Rüstrestriktionen quadratisch mit dem Planungshorizont T wächst, kann es sinnvoll sein, nur eine Teilmenge der Restriktionen dem Modell hinzuzufügen. Dies hat zur Folge, dass die Modellierung des Lösungsraumes schärfer wird, die Anzahl der Restriktionen aber nur moderat steigt.

4.5.2 Reformulierung des MLCLSP in Anlehnung an das Kürzeste-Wege-Problem

Eppen und Martin[37] entwickelten die Kürzeste-Wege-Formulierung für das CLSP.[38] Hierzu definieren sie die Variablen w_{ptk}, die den Anteil der Produktion in Periode t am akkumulierten Nettobedarf d_{ptk}^{ne} von Periode t bis zur Periode k darstellen. Die Variablen w_{ptk} können nur Werte zwischen null und eins annehmen. In der Abbildung (4.3) ist die Formulierung eines Kürzesten-Wege-Problems für die Losgrößen eines Produktes p graphisch dargestellt. Die Knoten entspre-

[36] Alternativ zur Berücksichtigung von beiden Rüstrestriktionen, kann auch die Anzahl der Flussvariablen ϕ_{ptk} beschränkt werden, indem jede Flussvariable ϕ_{ptk}, für die gilt, dass $\sum_{l=t}^{k} d_{pl}^{ne} \geq M_{pt} - d_{pk}^{ne}$, auf null fixiert wird.

[37] Vgl. [EM87], S. 842 ff.

[38] In der Originalformulierung werden mehrere Produkte, aber keine mehrstufige Produktionsstruktur beschrieben. Eine Formulierung, die die Mehrstufigkeit berücksichtigt, ist bei [Sta96],S. 571-572 zu finden.

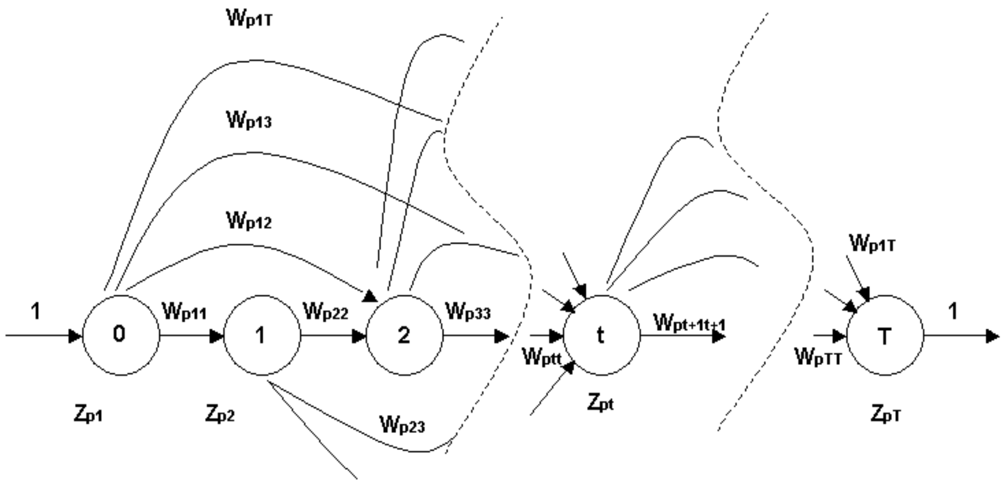

Abbildung 4.3: *Darstellung des Losgrößenproblems für ein Produkt p als Kürzestes-Wege-Problem*

chen dem Endzeitpunkten einer Periode. Die Betrachtung beginnt am Anfang der ersten Periode zum Zeitpunkt null und endet am Ende des Planungshorizontes T. Da die Variablen w_{ptk} auf den Perioden definiert sind, bildet ein Pfeil zwischen Zeitpunkt $t-1$ und dem Zeitpunkt k die Variable w_{ptk} ab. Zur einfacheren Darstellung wird der kumulierte Nettobedarf für Produkt p zwischen den Perioden t bis k mit $d_{ptk}^{ne} = \sum_{l=t}^{k} d_{pl}^{ne}$ mit $k \geq t$ bezeichnet.

In der Periode t wird die Menge $d_{pk}^{ne}\ \sum_{l=k}^{T} w_{ptl}$ für die Periode k produziert. Diese Menge muss $(k-t)$ Perioden gelagert werden, so dass die Echelon-Lagerkosten für die in Periode t für Periode k produzierte Menge $(k-t)\ h_p^e\ d_{pk}^{ne}\ \sum_{l=k}^{T} w_{ptl}$ betragen. Damit ergeben sich die Lagerkosten im Planungshorizont

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=t}^{T}(k-t)\ h_p^e\ d_{pk}^{ne}\ \sum_{l=k}^{T} w_{ptl}\ .$$

Zusätzlich werden noch Lagerkosten durch die Anfangslager y_{p0} zu Beginn des Planungshorizonts erzeugt. Diese stimmen mit der Konstanten F aus Gleichung (4.46) überein. Die Formulierung des MLCSP in Anlehnung an ein Kürzestes-Wege-Problem kann damit wie folgt beschrieben werden:

Modell MLCLSP^{SR}

$$\min \sum_{p=1}^{|P|}\sum_{t=1}^{T}\left(f_p\ z_{pt} + \sum_{k=t}^{T}(k-t)\ h_p^e\ d_{pk}^{ne}\ \sum_{l=k}^{T} w_{ptl}\right) \quad +F \tag{4.48}$$

$$\text{s.t.} \qquad y_{p0} + \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=l}^{T} d_{plk}^{ne}\ w_{plk} \geq$$

$$\sum_{k=1}^{t} d_{pk}^{prim} + \sum_{q\epsilon N_{(p)}}\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=l}^{T} r_{pq}\ d_{qlk}^{ne}\ w_{plk} \qquad \forall p,t \tag{4.49}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} s_{pm}\, z_{pt} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{k=t}^{T} a_{pm}\, d_{ptk}^{ne}\, w_{plk} \leq C_{mt} \qquad \forall m, t \tag{4.50}$$

$$\sum_{t=1}^{T} w_{p1t} = 1 \qquad \forall p \tag{4.51}$$

$$\sum_{k=1}^{t} w_{pkt} = \sum_{k=t+1}^{T} w_{pt+1k} \qquad \forall p, t < T \tag{4.52}$$

$$\sum_{k=t}^{T} w_{ptk} \leq z_{pt} \qquad \forall p, t \tag{4.53}$$

$$w_{ptk} \geq 0 \qquad \forall p, t, k \geq t \tag{4.54}$$

$$z_{pt} \in \{0, 1\} \qquad \forall p, t \tag{4.55}$$

Durch die Zielfunktion (4.48) werden die Rüst- und Lagerkosten minimiert. Die Restriktionen (4.49) verhindern Fehlmengen und die Ungleichungen (4.50) beschränken die Produktion durch die Kapazität C_{mt}. Die Gleichungen (4.51) und (4.52) sind die Knotenbilanzen. Durch die Rüstrestriktionen (4.53) kann nur produziert werden, wenn auch gerüstet wurde.

Stadtler[39] vergleicht unterschiedliche Modellformulierungen für das MLCLSP. Für die Berechnungen verwendet Stadtler ein Pentium mit 60 MHz. Dabei ergeben sich durch die SPL- und die SR-Formulierung ähnlich gute Werte für die LP-Relaxationen, welche deutlich über der Lösung des Modells MLCLSP$_{LP}$ liegen. Die Lösungsdauern für die SPL-Formulierung liegen auf Grund der höheren Anzahl an Restriktionen weit über den Lösungsdauern der SR-Formulierung. Aus diesem Grund untersucht Stadtler das Lösungsverhalten des Modells MLCLSP^{SPL} nur für kleine Probleme. Für größere Probleme findet Stadtler mit dem Modell MLCLSP wesentlich mehr zulässige Lösungen als mit dem Modell MLCLSP^{SR}. Dabei können durch das Modell MLCLSP in 16 Minuten für fast alle Testprobleme zulässige Lösungen gefunden werden, für 68% der Testprobleme gelingt dies mit dem Modell MLCLSP^{SR} in 30 Minuten nicht. Die mit dem Modell MLCLSP gefundenen Lösungen weichen im Durchschnitt nur 3% von den besten bekannten Lösungen ab. Diese Ergebnisse zeigen, dass die besten Untergrenzen durch eine LP-Relaxation der SR-Formulierung und SPL-Formulierung berechnet werden können. Für die Lösung des gemischt ganzzahligen Problems eignet sich am besten das Modell MLCLSP in der Standardformulierung.[40]

[39] Vgl. [Sta96].
[40] Vgl. [Sta96], S. 579.