Kapitel 3

Einstufige Losgrößenplanung

Innerhalb der Produktionsplanung liegt die dispositive Aufgabe hauptsächlich in der Bestimmung der Losgrößen.[1] Diese müssen im Allgemeinen für mehrere Produkte und deren Vorprodukte bestimmt werden, so dass ein mehrstufiges Losgrößenproblem zu lösen ist. Trotzdem ist es wichtig, sich mit der einstufigen Losgrößenplanung zu beschäftigen, da sie in vielerlei Hinsicht eine Rolle für die mehrstufige Losgrößenplanung spielt.

Zum einen treten einstufige Losgrößenprobleme in den Lösungsverfahren für mehrstufige Losgrößenprobleme, die das Problem mit Hilfe von Dekomposition[2] lösen, als Teilprobleme auf. In diesem Fall benötigt man effiziente Algorithmen zur Lösung der einstufigen Probleme. Zum anderen können für die einstufigen Losgrößenprobleme Schnittebenen beschrieben werden, welche z.T. a priori dem mehrstufigen Modell hinzugefügt werden können. Hierdurch kann die Modellformulierung verschärft und u.U. die Lösungsdauer gesenkt werden. Ebenfalls lassen sich die Schnittebenen in einem Branch&Cut-Verfahren zur Lösung des mehrstufigen Problems einsetzten.

Durch eine Redefinition der Entscheidungsvariablen kann man eine schärfere Modellformulierung mitunter sogar die Beschreibung der konvexen Hülle des Lösungsraumes im einstufigen Fall erreichen. Die redefinierten Variablen können auf den mehrstufigen Fall übertragen und mit den Schnittebenen kombiniert werden, wodurch eine schärfere Modellformulierung entstehen kann.

Somit ist das Studium von einstufigen Losgrößenproblemen notwendig für die effiziente Lösung von mehrstufigen Losgrößenproblemen. In den folgenden beiden Abschnitten wird zuerst auf die Losgrößenplanung für ein Produkt ohne und dann mit Kapazitätsrestriktionen eingegangen.

[1] Vgl. Kapitel 1.
[2] Z.B. Danzig-Wolfe-Dekomposition oder Lagrange-Dekomposition.

Im dritten Abschnitt wird die einstufige Losgrößenplanung für mehrere Produkte erläutert. Die Übertragung der Ergebnisse der einstufigen Losgrößenplanung auf den mehrstufigen Fall findet in den Abschnitten 4.4 und 4.5 statt.

3.1 Einstufige Losgrößenplanung mit unbeschränkten Kapazitäten

Den klassischen Ansatz zur Lösung von einstufigen unkapazitierten Losgrößenproblemen stellt die EOQ-Formel (Economic Order Quantity) bzw. Andler-Formel dar[3]. Für einen konstanten kontinuierlichen Periodenbedarf d soll die optimale Produktionsmenge Q^* so bestimmt werden, dass die Periodenkosten bestehend aus Rüstkosten mit dem Rüstkostensatz f und Lagerkosten mit dem Lagerkostensatz h minimiert werden. Es ergibt sich die optimale Produktionsmenge Q^* zu

$$Q^* = \sqrt{\frac{2fd}{h}} \; .$$

Die Eindeckungszeit T^* ist die Dauer, die ein Los ausreicht, um die Nachfrage zu befriedigen, bzw. der Zeitabstand zwischen der Auflage von zwei Losen. Sie lässt sich aus Q^*/d berechnen

$$T^* = \sqrt{\frac{2f}{dh}} \; .$$

Mit Hilfe der EOQ-Formel können einstufige Losgrößenplanungsprobleme unter der Annahme von konstantem kontinuierlichem Periodenbedarf optimal gelöst werden.

Im Allgemeinen sind die Periodennachfragen d_t aber zeitvariant. Dies kann in das klassische Losgrößenmodell integriert werden, indem man den zeitinvarianten Periodenbedarf d durch den Mittelwert der im Planungshorizont T auftretenden Periodenbedarfe d_t schätzt $\bar{d} = 1/T \cdot \sum_{t=1}^{T} d_t$.

Berechnet man die optimale Losgröße und die Eindeckungszeit mit dem Mittelwert $\bar{d}$ und produziert diese Losgröße immer im Zeitabstand der Eindeckungszeit, führt diese Politik entweder zu erhöhten Lagerkosten oder zu Fehlmengen. Erhöhte Lagerkosten treten immer dann auf, wenn der Periodenbedarf während der Eindeckungszeit überschätzt wurde. Fehlmengen hingegen entstehen, wenn der Periodenbedarf während der Eindeckungszeit unterschätzt wurde.

[3] Vgl. [And29] und [Har15].

Zur Vermeidung von Fehlmengen bzw. erhöhten Lagerkosten muss entweder die Eindeckungszeit bei konstanter Losgröße dynamisiert oder bei konstanten Eindeckungszeiten muss die Losgröße an den tatsächlichen Bedarf angepasst werden. Wird die Losgröße konstant gehalten und die Eindeckungszeit dynamisiert, bedeutet dies, dass ein Los immer dann aufgelegt wird, wenn das Lager leer ist.[4] Sollen die Eindeckungszeiten konstant gehalten werden, muss die Losgröße dem tatsächlichen Bedarf bis zum Ende der Eindeckungszeit entsprechen.[5]

Aber auch mit den Anpassungen ist das klassische Losgrößenmodell nicht geeignet, die Losgrößen und Losauflagezeitpunkte für zeitvarianten Bedarf kostenminimal zu bestimmen, da Auflagezeitpunkte und Losgrößen nicht simultan bestimmt werden.[6] Demnach kommt es dadurch zu vermeidbaren Lager- und Rüstkosten. Diese Nachteile können durch die Verwendung eines simultanen Verfahrens überwunden werden. Dieses wird im folgenden Abschnitt eingeführt, indem das einstufige unkapazitierte Losgrößenproblem als mathematisches Modell formuliert und im Anschluss ein Lösungsansatz durch Dynamische Programmierung vorgestellt wird.

3.1.1 Modellformulierungen für das unkapazitierte einstufige Losgrößenproblem

Das einstufige Losgrößenproblem ohne Kapazitätsbeschränkungen, Single-Level Uncapacitated Lot-Sizing Problem (SLULSP)[7], lässt sich wie folgt beschreiben[8]: Für ein Produkt p ist in jeder Periode t im Intervall $[1...T]$ der Nettobedarf[9] d_t so zu befriedigen, dass die Summe aus Produktions-, Lager- und Rüstkosten minimal ist. Das Produkt kann gelagert werden, wobei der Lagerbestand am Ende einer Periode y_t sei. Der Lagerbestand am Anfang des Planungshorizontes y_0 ist auf Grund der Formulierung mit dem Nettobedarf null. Durch d_{tk} wird der kumulierte Nettobedarf zwischen den Perioden t und k bezeichnet, $d_{tk} = \sum_{j=t}^{k} d_j$. Jedes Mal wenn ein Los x_t aufgelegt wird, treten die Rüstkosten f_t auf und die binären Rüstvariablen z_t nehmen den Wert eins an. Es gibt weder Fehlmengen noch Nachlieferungen. Mit dem Lagerkostensatz h_t und dem Produktionskostensatz p_t ergibt sich für das SLULSP folgende Modellierung:

[4] Vgl. [Hei87], S. 34 ff.

[5] Dies wird in der Literatur als Period Order Quantity bezeichnet. Vgl. [Ber72], S. 23. Beide Anpassungen setzen voraus, dass die Losauflagezeitpunkte frei wählbar sind. Sind sie dies nicht, muss auf ganze Perioden gerundet werden.

[6] Vgl. [Gla75] S. 534 ff.

[7] In Anlehnung an Wagner und Whitin [WW58], die das einstufige Losgrößenproblem ohne Kapazitätsbeschränkungen durch Dynamische Programmierung lösten, wird das Losgrößenproblem auch häufig mit WW bezeichnet.

[8] Vgl. [PW95], S. 251.

[9] Die Formulierung mit dem Nettobedarf ist äquivalent zur Formulierung mit dem Bruttobedarf, wobei dann der Lagerbestand am Anfang des Planungshorizonts berücksichtigt werden muss. Im Folgenden ist mit Bedarf immer der Nettobedarf gemeint. Zum Nettobedarf vgl. Kapitel 4.1.

Modell SLULSP

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T}(h_t \cdot y_t + p_t \cdot x_t + f_t \cdot z_t) \tag{3.1}$$

$$s.t. \quad y_{t-1} + x_t = y_t + d_t \qquad \forall t \tag{3.2}$$

$$x_t \leq d_{tT} \cdot z_t \qquad \forall t \tag{3.3}$$

$$x_t, y_t \geq 0 \qquad \forall t \tag{3.4}$$

$$z_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t \tag{3.5}$$

Durch die Zielfunktion (3.1) werden die Gesamtkosten bestehend aus Lager-, Produktions- und Rüstkosten minimiert. In der Restriktion (3.2) wird der Lagerbestand bilanziert. Durch die Rüstrestriktion (3.3) wird die Rüstvariable z_t immer auf eins gesetzt, wenn ein Los x_t aufgelegt wird.

Dieses Problem wurde mit konstanten Produktionskosten $p_t = p$ von Wagner und Whitin[10] durch Dynamische Programmierung[11] mit $O(n^2)$ Aufwand gelöst.[12] Die grundlegende Idee von Wagner und Whitin ist, dass es eine optimale Lösung gibt, bei der sich die Losgrößen aus kumulierten ganzen Periodenbedarfen zusammensetzen. Daraus ergibt sich für die optimale Lösung, dass in einer Periode entweder produziert wird, weil der Lagerbestand null ist, oder nicht produziert wird, weil die gesamte Nachfrage aus dem Lager befriedigt werden kann. Die Nachfrage wird bei einer kostenminimalen Lösung niemals teilweise aus dem Lager und teilweise durch die aktuelle Produktion befriedigt. Die Struktur der optimalen Lösung wird durch das Wagner-Whitin-Theorem beschrieben.[13]

Theorem 3.1.1 Wagner-Whitin-Theorem

I) Es gibt eine optimale Lösung für das SLULSP für die gilt, $y_{t-1} \cdot x_t = 0$ *für alle* $t \in \{1, ..., T\}$.

II) Es gibt eine optimale Lösung für das SLULSP, so dass, wenn $x_t > 0$ *ist,* $x_t = \sum_{l=t}^{t+k} d_l$ *für* $k \geq 0$ *gilt.*

c'_{tk} seien die Kosten, die entstehen, wenn in der Periode t der kumulierte Bedarf der Perioden t bis einschließlich k produziert wird. Benutzt man den Teil II des Wagner-Whitin-Theorems,

10 Vgl. [WW58].
11 Zur Dynamische Programmierung vergleiche [Bel57] und [Sch74].
12 In späteren Arbeiten [AP93], [FT91] und [WvHK92] wurden Algorithmen mit einer Komplexität von $O(n\, log\, n)$ entwickelt, welche im Fall von Wagner-Whitin-Kosten, $p_t + h_t \geq p_{t+1}$, das SLULSP in linearer Zeit lösen. Zangwill löst das SLULSP als Netzwerk-Fluss-Problem [Zan68], S. 433.
13 Vgl. [WW58], S. 91.

dann kann man in jeder Periode t die Kosten $c_{tk}^{'}$ für jede Periode k mit $k \geq t$ durch

$$c_{tk}^{'} = f_t + p_t \sum_{j=t}^{k} d_j + \sum_{i=t}^{k-1} h_i \sum_{j=i+1}^{k} d_j \tag{3.6}$$

berechnen. $H(k)$ seien die minimalen Gesamtkosten für die Befriedigung des Bedarfs in den Perioden $t = 1..k$

$$H(k) = \min_{t \in \{1..k\}} \{H(t-1) + c_{tk}^{'}\} \; . \tag{3.7}$$

Berechnet man für $k = 1..T$ mit $H(0) = 0$ alle $H(k)$, erhält man mit $H(T)$ die minimalen Gesamtkosten des SLULSP. Speichert man bei der Berechnung der $H(k)$ jeweils den letzten Losauflagezeitpunkt vor k, für den die Kosten $H(k)$ minimal werden, so kann durch eine Rückwärtsschleife die dazugehörige Lösung ermittelt werden[14]. Durch diese Vorwärtsrekursion und die Rückwärtsrechnung kann das SLULSP effizient gelöst werden.

3.1.2 Reformulierung der Variablen bei der einstufigen Losgrößenplanung

Für das SLULSP gibt es verschiedene Reformulierungen der Variablen, die zur Zielsetzung haben, eine schärfere Formulierung für das Problem zu erreichen. Eine schärfere Modellformulierung liegt dann vor, wenn die Reformulierung eine bessere Näherung der konvexen Hülle des Lösungsraumes ist[15]. Die Reformulierung als Simple-Plant-Location-Problem geht auf Krarup und Bilde[16] zurück. Die Formulierung als Kürzestes-Wege-Problem wurde von Eppen und Martin[17] mit der von Martin[18] beschriebenen Reformulierungstechnik eingeführt. Beide Reformulierungen sind in den folgenden Abschnitten dargestellt.[19]

[14] Die Vorgehensweise für den Fall, dass f_t für einige t negativ werden kann, findet man bei [PW94], S.252-253.
[15] Vgl. [Wol98], S. 12 ff.
[16] Vgl. [KB77].
[17] Vgl. [EM87].
[18] Vgl. [Mar87].
[19] Die bei Netzwerkflussproblemen häufig angewandte Formulierung als Multi-Commodity-Network-Flow-Problem kann bei Pochet und Wolsey [PW94], S. 255 gefunden werden. Die Formulierung als Multi-Commodity-Network-Flow-Problem kann durch einfache Variablensubstitution in die Simple-Plant-Location-Formulierung überführt werden, so dass sie hier nicht explizit dargestellt wird.

3.1.2.1 Formulierung des SLULSP als Kürzestes-Wege-Problem

Das SLULSP wurde von Eppen und Martin[20] als Kürzestes-Wege-Problem formuliert. Anschaulich kann man die Variablentransformation wie folgt erklären:

Jeweils am Anfang einer Periode wird entschieden, für wie viele Perioden produziert wird. Das heißt, man kann am Anfang der Periode t zum Zeitpunkt $t-1$ entscheiden, ob man nur für die Periode t, für die Perioden t und $t+1$, usw. oder für die Perioden t, $t+1$ bis T produziert. Jede dieser möglichen Entscheidungen wird durch eine Kante zwischen dem Anfangszeitpunkt $t-1$ der betrachteten Periode t und dem Endzeitpunkt k der Periode k, bis zu der der Bedarf produziert wird, dargestellt. Zu jeder Kante, die aus dem Knoten $t-1$ herausgeht, können direkt die Kosten bestimmt werden. Sie ergeben sich aus den Rüst-, den Produktions- und den Lagerkosten, für die in der Periode t produzierten Menge. Dabei muss die Menge, die für die Periode $t+1$ produziert wird, eine Periode lang gelagert werden, die Menge, die für die Periode $t+2$ produziert wird, zwei Perioden lang gelagert werden und die Menge, die in Periode t für die Periode k ($k \geq t$) produziert wird $k-t$ Perioden gelagert werden. Die Kosten $c_{tk}^{'}$ einer Kante vom Zeitpunkt $t-1$ bis zum Zeitpunkt k, bzw. der Entscheidung in der Periode t den Bedarf der Perioden von t bis einschließlich k zu produzieren, ergeben sich dann nach Gleichung (3.6).

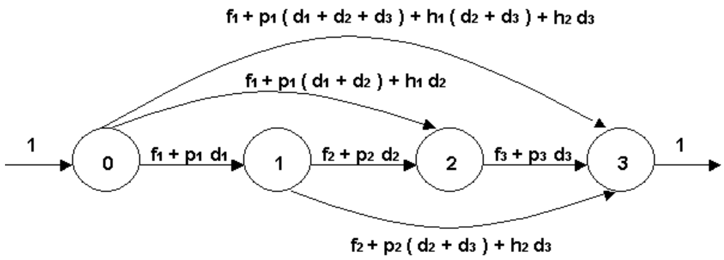

Abbildung 3.1: *Darstellung des einstufigen unkapazitierten Losgrößenproblems als Kürzestes-Wege-Problem*

Dieses Kürzeste-Wege-Problem ist in Abbildung (3.1) für den Planungshorizont $T = 3$ dargestellt. Mit den Variablen w_{kt}, die den Fluss zwischen dem Knoten $k-1$ und dem Knoten t ($k \leq t$) darstellen kann das SLULSP als Kürzestes-Wege-Problem formuliert werden:

[20] Vgl. [EM87].

Modell SLULSP^{SR}

$$\min \quad \sum_{k=1}^{T} \sum_{t=k}^{T} c'_{kt} w_{kt} \tag{3.8}$$

$$s.t. \quad \sum_{k=1}^{T} w_{1k} = 1 \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{t} w_{kt} = \sum_{k=t+1}^{T} w_{t+1k} \quad \forall t \in \{1...T-1\} \tag{3.10}$$

$$1 = \sum_{k=1}^{T} w_{kT} \tag{3.11}$$

$$0 \leq w_{kt} \leq 1 \quad \forall k \in \{1...T\}, t \in \{k...T\} \tag{3.12}$$

Die Lösung des SLULSP^{SR} in der Kürzesten-Wege-Formulierung ist ganzzahlig, da der Fluss auf dem kürzesten Weg eins ist.

Für die weiteren Betrachtungen mit Kapazitäten und den mehrstufigen Fall, ist es nützlich, die Rüstvariablen in der Kürzesten-Wege-Formulierung explizit aufzunehmen und die Kantenkosten c_{tk} auf den Perioden von t bis k ($t \leq k$) zu betrachten. Dabei ergeben sich die Kantenkosten aus den Produktions- und Lagerkosten, $c_{tk} = p_t \cdot \sum_{j=t}^{k} d_j + \sum_{i=t}^{k-1} h_i \cdot \sum_{j=i+1}^{k} d_j$. Damit lässt sich das SLULSP unter expliziter Berücksichtigung der Rüstvariablen als Kürzestes-Wege-Problem wie folgt formulieren:

Modell SLULSP$^{SR}_{expl}$

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=t}^{T} c_{tk} w_{tk} + \sum_{t=1}^{T} f_t z_t \tag{3.13}$$

$$s.t. \quad \sum_{k=1}^{T} w_{0k} = 1 \tag{3.14}$$

$$\sum_{k=1}^{t} w_{kt} = \sum_{k=t+1}^{T} w_{tk} \quad \forall t \in \{1,..,T-1\} \tag{3.15}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{T} w_{kT} \tag{3.16}$$

$$\sum_{k=t}^{T} w_{tk} \leq z_t \quad \forall t \tag{3.17}$$

$$0 \leq w_{tk} \leq 1 \quad \forall t \in \{1..T\}, k \in \{t,...,T\} \tag{3.18}$$

$$0 \leq z_t \leq 1 \quad \forall t \tag{3.19}$$

In Abbildung (3.2) ist das SLULSP als Kürzestes-Wege-Problem mit expliziter Berücksichtigung der Rüstvariablen zur Veranschaulichung dargestellt. Pochet und Wolsey[21] zeigen, dass das SLULSP$^{SR}_{expl}$ in dieser Formulierung äquivalent zur Kürzesten-Wege-Formulierung und dementsprechend die Lösung des linearen Programms bereits ganzzahlig ist.

[21] In [PW94], S. 253-254 werden die Kantenkosten mit $(p_t + \sum_{j=t}^{T} h_j) \cdot d_{tk} = c_t \cdot d_{tk}$ angegeben. Dies erhält man, indem man die Lagerstände $y_t = \sum_{k=1}^{t}(x_k - d_k)$ in der Zielfunktion substituiert. Zusätzlich muss dann in der Zielfunktion die Konstante $\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{t} d_k h_t = \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=t}^{T} d_t h_k$ abgezogen werden.

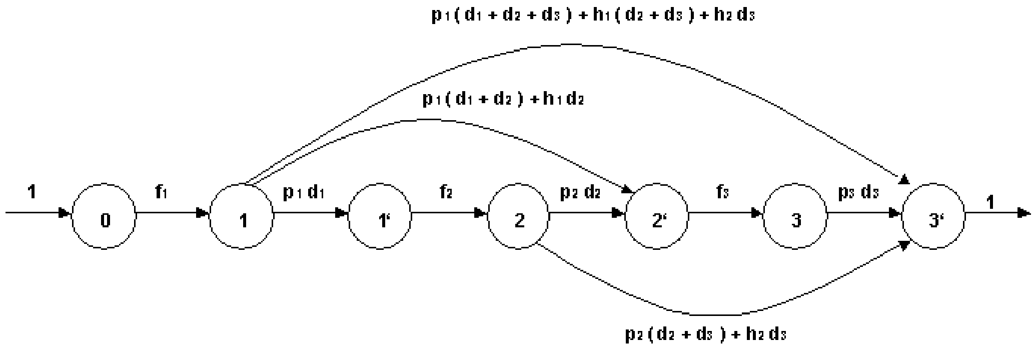

Abbildung 3.2: *Darstellung des einstufigen Losgrößenproblems als Kürzestes-Wege-Problem mit expliziter Berücksichtigung der Rüstvariablen*

3.1.2.2 Formulierung des SLULSP als Plant-Location-Problem

Die Plant-Location-Formulierung des SLULSP wurde von Krarup und Bilde[22] eingeführt. Sie fassen das SLULSP als multiples Standortproblem ohne Kapazitätsrestriktionen auf.[23] Die möglichen Produktionszeitpunkte stellen die Standorte und die Nachfragezeitpunkte stellen die Kun-

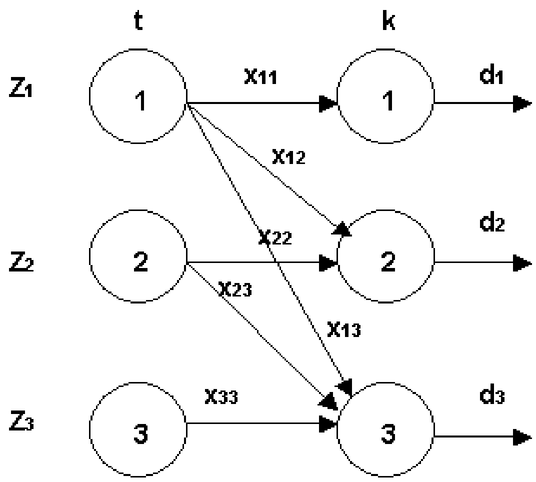

Abbildung 3.3: *Darstellung des einstufigen Losgrößenproblems als Plant-Location-Problem*

den dar. Jede Nachfrage in Periode k kann durch die Produktion in Periode t gedeckt werden, wobei $t \leq k$ sein muss. Dies wird durch die Variable x_{tk} modelliert[24], die die Menge darstellt,

[22] Vgl. [KB77], S. 172 f.

[23] Zur Standortplanung siehe [DD96], S. 51 ff.

[24] Im Allgemeinen wird die Plant-Location-Formulierung mit den Variablen $\omega_{tk} = x_{tk}/d_k$ angegeben. Vgl. [KB77], S. 172, [PW94], S. 253. In dieser äquivalenten Formulierung stellen die Variablen ω_{tk} den Anteil der in k nachgefragten Menge dar, der in t produziert wird.

welche in t produziert wird, um die Nachfrage in k zu decken. Zur Veranschaulichung ist das SLULSP als Plant-Location-Problem ist in Abbildung (3.3) dargestellt.

Das SLULSP wird als Plant-Location-Problem folgendermaßen formuliert:

SLULSP^{SPL}

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} f_t \cdot z_t + \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=t}^{T} (p_t + \sum_{j=t}^{k-1} h_j) x_{tk} \tag{3.20}$$

$$s.t. \quad \sum_{k=1}^{t} x_{kt} = d_t \qquad \forall t \tag{3.21}$$

$$x_{tk} \leq d_k \, z_t \qquad \forall t, k \in \{t...T\} \tag{3.22}$$

$$x_{tk} \geq 0 \qquad \forall t, k \in \{t...T\} \tag{3.23}$$

$$z_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t \tag{3.24}$$

Die Zielfunktion (3.20) minimiert die Gesamtkosten, die sich aus Rüst-, Produktions- und Lagerkosten zusammensetzen. Die Gleichung (3.21) sorgt dafür, dass die Nachfrage in jeder Periode t gedeckt wird. Sie ergibt sich aus der Knotenbilanz um die Knoten k in Abbildung (3.3). Durch die Rüstbedingung, Gleichung (3.22), kann in t nur produziert werden, wenn in t auch gerüstet wurde.

Krarup und Bilde stellen das Theorem auf, dass die LP-Relaxation der Plant-Location-Formulierung bereits das SLULSP löst.[25] Dieses wurde von Barany et al. durch einen primal-dualen Beweis gezeigt.[26] Bei Tempelmeier[27] lässt sich sinngemäß folgende Überlegung finden: Jeder Kunde wird im Optimum der LP-Lösung nur vom kostengünstigsten Standort beliefert, da die Standorte nicht kapazitätsbeschränkt sind. Dementsprechend nehmen die Variablen x_{tk} entweder den Wert d_k oder null an. Dadurch werden in Gleichung (3.22) die relaxierten Rüstvariablen z_t bereits bei der LP-Relaxation auf null oder eins gesetzt. Damit ist die optimale Lösung der LP-Relaxation des SLULSP in der Simple-Plant-Location Formulierung ganzzahlig. Dementsprechend handelt es sich bei der Formulierung des SLULSP als Simple-Plant-Location-Problem um eine scharfe Formulierung, bei der bereits die Lösung der LP-Relaxation ganzzahlig ist.

---

[25] Vgl. [KB77], S. 171 und Theorem 4.
[26] Vgl. [BvRW84b].
[27] Vgl. [Tem99], S. 149.

3.1.3 Ungleichungen für das einstufige Losgrößenplanungsproblem

Für das einstufige dynamische Losgrößenproblem ohne Kapazitätsrestriktionen können scharfe Formulierungen durch Variablenreformulierungen gefunden werden. Aber auch durch zusätzliche Ungleichungen kann die Formulierung des SLULSP verschärft werden. Ziel der Verschärfung ist es, den Lösungsraum des gemischt-ganzzahligen Programms durch die konvexe Hülle aller ganzzahligen Extrempunkte darzustellen, da bei dieser idealen Formulierung bereits die LP-Relaxation ganzzahlig ist.[28] Dies kann zum einen durch die Reformulierung von Modellen erreicht werden,[29] zum anderen durch eine erweiterte Formulierung. Bei einer erweiterten Formulierung werden der Modellformulierung in den Originalvariablen oder einer äquivalenten Formulierung zusätzliche Ungleichungen hinzugefügt, die den Lösungsraum weiter beschränken.[30] Idealerweise definieren die zusätzlichen Ungleichungen Facetten und sind damit notwendig für die Beschreibung des Lösungsraumes durch die konvexe Hülle aller ganzzahligen Extrempunkte.[31] Für das einstufige unkapazitierte Losgrößenproblem sind solche zusätzlichen Ungleichungen abgeleitet worden. Diese sogenannten (l,S)-Ungleichungen werden im Folgenden dargestellt.[32] Weitere Ungleichungen, die auch mit Kapazitätsrestriktionen gültig sind, werden im Kapitel 2.2 untersucht.

Die (l,S)-Ungleichungen für das SLULSP sind von Barany et al.[33] abgeleitet worden.

Theorem 3.1.2 *Für jedes l, $1 \leq l \leq T$, jede Menge L, $L = \{1, ..., l\}$ und jede Menge S, $S \subseteq L$, ist*

$$\sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in L \setminus S} d_{il} \cdot z_i \geq d_{1l} \tag{3.25}$$

eine zulässige Ungleichung für das SLULSP.

Die Menge, die in den Perioden $1..l$ produziert wird, muss mindestens den Bedarf dieser Perioden d_{1l} decken:

$$\sum_{i=1}^{l} x_i = \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in L \setminus S} x_i \geq d_{1l} \; . \tag{3.26}$$

Die Menge, die in einer Periode i produziert werden kann, ist durch die gesamte Nachfrage bis

28 Vgl. [Wol98], S. 14 ff.
29 Vgl. die Modellformulierungen für das SLULSP in den vorangegangen Abschnitten.
30 Im Folgenden werden die Begriffe Ungleichung, Cut und Schnittebene äquivalent benutzt.
31 Eine Darstellung der Polyhydral-Theorie ist bei [Wol98], S. 142 ff. zu finden.
32 Die für das einstufige Problem abgeleiteten Schnittebenen können auf das mehrstufige Problem mittels des systemweiten Lagerbestandes (4.13) übertragen werden, da diese den Lagerbilanzgleichungen für das einstufige Modell strukturell entsprechen und die Mehrstufigkeit durch die Fehlmengenrestriktionen (4.14) abgebildet wird.
33 [BvRW84a], S. 1256.

zum Planungshorizont T beschränkt:

$$x_i \leq d_{iT} \cdot z_i = (d_{il} + d_{l+1T}) \cdot z_i \;.$$

Für die Befriedigung der Nachfrage bis zur Periode l, mit $l \leq T$, ist u. U. nur ein Teil der Produktion x_i vorgesehen. Wird nur der Zeitraum bis zur Periode l betrachtet, ist die obere Schranke für die Produktion in i, die maximal zur Befriedigung der Nachfrage bis l benutzt werden kann, durch d_{il} gegeben. Setzt man diese Schranke für die x_i mit $i \in L \setminus S$ in Gleichung (3.26) ein, erhält man die (l,S)-Ungleichungen (3.25).[34]

Barany et al. zeigen, dass fast alle (l,S)-Ungleichungen Facetten definieren und damit notwendig sind, um die konvexe Hülle des Lösungsraumes zu beschreiben.[35] Für die Nutzung der (l,S)-Ungleichungen in einem Branch&Cut-Algorithmus geben Barany et al. einen Separationsalgorithmus an. Will man durch bestimmte (l,S)-Ungleichungen eine Modellformulierung verbessern, ist es nützlich, diese umzuformen. Dazu benötigt man den Endlagerbestand y_l in der Periode l. Dieser ergibt sich aus der kumulierten Produktion bis l abzüglich der kumulierten Nettonachfrage:

$$\sum_{i=1}^{l} x_i - d_{1l} = \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in L \setminus S} x_i - d_{1l} = y_l \;.$$

Durch Umformen erhält man $\sum_{i \in S} x_i = y_l - \sum_{i \in L \setminus S} x_i + d_{1l}$. Setzt man dies in die (l,S)-Ungleichung ein und kürzt d_{1l} auf beiden Seiten, ergibt sich die (l,S)-Ungleichung in folgender Form:

$$\sum_{i \in L \setminus S} x_i \leq \sum_{i \in L \setminus S} d_{il} \cdot z_i + y_l \;.$$

Substituiert man die Menge $L \setminus S$ durch S' kann die (l,S)-Ungleichung (3.25) wie folgt geschrieben werden:

Korrolar 3.1.1 *Für jede Menge $S' \subseteq L = \{1...l\}$ mit $l \leq T$ gilt*[36]

$$\sum_{i \in S'} x_i \leq \sum_{i \in S'} d_{il} \cdot z_i + y_l \;. \tag{3.27}$$

Im Weiteren soll ein anschaulicher Spezialfall der (l,S)-Ungleichung abgeleitet werden. Betrachtet man dafür die Lagerbilanz zwischen den Perioden k und l mit $k < l$ und dem Anfangslager-

[34] Ein formaler Beweis für die Gültigkeit der (l,S)-Ungleichungen ist bei [BvRW84a], S. 1256 zu finden.
[35] Vgl. [BvRW84a], S. 1256 ff.
[36] Vgl. [Wol89], S. 180 und [BvRW84a], S. 1256.

bestand y_{k-1}, dann ergibt sich der Endlagerbestand in Periode l aus

$$y_l = y_{k-1} + \sum_{i=k}^{l} x_i - d_{kl} \ . \tag{3.28}$$

Wählt man $S' = k...l$ in der (l,S)-Ungleichung (3.27) und ersetzt den Endlagerbestand in der (l,S)-Ungleichung durch Gleichung(3.28), dann ergibt sich folgender Spezialfall:[37]

$$y_{k-1} \geq d_{kl} - \sum_{i=k}^{l} d_{il} \cdot z_i = \sum_{i=k}^{l} d_i(1 - z_k - ... - z_l) \ . \tag{3.29}$$

Dieser Spezialfall (Gl.(3.29)) der (l,S)-Ungleichung lässt sich folgendermaßen veranschaulichen: Wenn in den Perioden k bis l nicht produziert werden soll, dann muss das Anfangslager in der Periode k mindestens dem Bedarf der Perioden k bis l entsprechen. Diese $\frac{T}{2}(T+1)$ Ungleichungen können a priori dem Modell hinzugefügt werden, jedoch verschärfen schon wenige Ungleichungen den LP-Wert erheblich. Belvaux empfiehlt die T Cuts dem Programm hinzuzufügen, für die $k = l$ ist:[38]

$$y_{k-1} \geq d_k(1 - z_k) \ .$$

Welche dieser speziellen (l,S)-Ungleichungen der Modellformulierung hinzugefügt werden soll, wird Gegenstand der numerischen Untersuchungen sein.

[37] Vgl. [BW01], S. 995 (Gl. 14).

[38] Vgl. [BW01], S. 995. Diese Cuts wurden ebenfalls von Stadtler ([Sta96], S. 566) verwendet.

3.2 Kapazitierte Losgrößenplanung für ein Produkt

Kapazitäten müssen immer dann berücksichtigt werden, wenn Ressourcen wie Maschinen, Arbeitskräfte etc. die Produktion in einer Periode limitieren.[39] Die Produktion in jeder Periode t kann durch eine konstante Kapazität C oder durch eine zeitvariante Kapazität C_t beschränkt sein. Zudem kann es vorkommen, dass nicht nur durch die Produktion a Einheiten Kapazität verbraucht werden, sondern zusätzlich beim Rüstvorgang eine Rüstzeit s zu berücksichtigen ist. Im Folgenden wird zuerst der Fall von zeitvarianten Kapazitäten untersucht, an den sich der Spezialfall mit konstanten Kapazitäten anschließt. Bei der Losgrößenplanung für ein Produkt können Rüstzeiten immer implizit berücksichtigt werden, so dass nicht zwischen den Fällen mit und ohne Rüstzeiten unterschieden werden muss.

3.2.1 Modellformulierung für das kapazitierte einstufige Losgrößenplanungsproblem

Das Problem, in dem beschränkte variable Kapazitäten bei der Losgrößenplanung für ein Produkt berücksichtigt werden, wird im Folgenden Single-Item Capacitated Lot-Sizing Problem (SICLSP) genannt. Das SICLSP gehört zur Klasse NP[40], da eine einfache Reduktion zum Knapsack-Problem existiert[41]. Eine zulässige Lösung für das SICLSP lässt sich aber einfach finden[42]. Für den Fall variabler Kapazitäten besteht das SICLSP aus den Gleichungen (3.1),(3.2),(3.4) und (3.5). Gleichung (3.3) ändert sich folgendermaßen:

$$a \cdot x_t + s \cdot z_t \leq C_t \cdot z_t \qquad \forall t$$

bzw.

$$x_t \leq \frac{C_t - s}{a} \cdot z_t \qquad \forall t \; .$$

Da die Produktion in einer Periode t nicht größer sein kann als der kumulierte Bedarf bis zum Planungshorizont T, ergibt sich die maximale Produktion zu $M_{tT}^{prod} = \min(d_{tT}, \frac{C_t - s}{a})$. Die Rüstbedingung nimmt dann folgende Form an:

[39] Ressourcen, die die Produktion über den ganzen Planungshorizont beschränken, wie z.B. ein einzuhaltendes Budget, werden nicht berücksichtigt.
[40] Zur Komplexitätstheorie vgl. [GJ79] oder [Bac80].
[41] Vgl. [PW95], S. 275 und Gleichung 3.36.
[42] Vgl. [MMVW91], S. 135.

$$x_t \leq M_{tT}^{prod} \cdot z_t \qquad \forall t \; . \tag{3.30}$$

Sind keine Rüstzeiten zu berücksichtigen, wird s auf null gesetzt.[43]

3.2.2 Ungleichungen für das SICLSP

Für das SICLSP wurden Ungleichungen von Pochet[44], von Marchand und Wolsey[45] und von Miller et al.[46] abgeleitet. Eine Mixed-Integer-Rounding (MIR) Ungleichung für das SICLSP ist bei Belvaux und Wolsey[47] angegeben.

Die von Pochet abgeleiteten Ungleichungen sind Modifikationen der Flow-Cover-Cuts von Padberg et al.[48] und von van Roy und Wolsey[49]. Marchand und Wolsey leiten ihre Ungleichungen anhand des Continuous-Knapsack-Problem (CKP)[50] durch Fixierung von Variablen und sequentielles Liften ab. Miller et al. erhalten ihre beiden Klassen von Ungleichungen ebenfalls durch Fixierung und sequentielles Liften anhand des CKP, jedoch benutzen sie eine andere Reihenfolge beim Liften. In den folgenden beiden Unterabschnitten werden die MIR-Ungleichungen und die Ungleichungen von Pochet dargestellt. Die Ungleichungen von Marchand und Wosey und von Miller werden im dritten Unterabschnitt skizziert.

3.2.2.1 Mixed-Integer-Rounding-Ungleichungen für das SICLSP

Mixed-Integer-Ungleichungen wurden zuerst von Gomory[51] zur Lösung von gemischt-ganzzahligen Programmen verwendet. Diese sogenannten Gomory-Cuts wurden u.a. von Balas et al. in einem Branch&Cut Algorithmus benutzt[52]. Die Äquivalenz von Mixed-Integer-Rounding-Ungleichungen und Gomory-Cuts wurde von Nemhauser und Wolsey[53] gezeigt.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Mixed-Integer-Rounding-Ungleichungen werden auf ag-

[43] Zeitvariante Kapazitätsverbräuche a_t und Rüstzeiten s_t können einfach in das Modell eingesetzt werden.
[44] Vgl. [Poc88].
[45] Vgl. [MW99].
[46] Vgl. [MNS00a].
[47] Vgl. [BW01], S. 995.
[48] Vgl. [PvRW85], S. 847 ff.
[49] Vgl. [vRTJW86], S. 202 ff. Marchand und Wolsey zeigen in [MW99], S. 365, dass die Flow-Cover-Cuts durch die MIR-Ungleichungen abgeleitet werden können.
[50] Das CKP ist ein Knapsack-Problem, bei dem zusätzlich eine kontinuierliche Variable berücksichtigt wird. Vgl. Seite 40.
[51] Vgl. [Gom63].
[52] Vgl. [BCCN96].
[53] Vgl. [NW90].

gregierte Lagerbilanzen angewendet. Bilanziert man den Lagerbestand zwischen den Perioden k und l ergibt sich

$$y_l = y_{k-1} + \sum_{i=k}^{l} x_i - d_{kl}$$

bzw. die Ungleichung

$$y_{k-1} + \sum_{i=k}^{l} x_i \geq d_{kl} \; .$$

Die Produktion in jeder Periode ist durch die maximale Produktion über die Rüstbedingungen (3.30) beschränkt. Die Produktion in Periode i, die zur Bedarfsdeckung bis zur Periode l verwendet wird, ist durch $M_{il}^{prod} = \min(d_{il}, \frac{C_i - s}{a})$ gegeben. Diese Obergrenzen können in die Ungleichung für die aggregierte Lagerbilanz eingesetzt werden:

$$y_{k-1} + \sum_{i=k}^{l} M_{il}^{prod} \cdot z_i \geq d_{kl} \; . \tag{3.31}$$

Mit $\hat{M}_{kl}^{prod} = \max_{i=k..l} M_{il}^{prod}$ erhält man

$$y_{k-1} + \hat{M}_{kl}^{prod} \sum_{i=k}^{l} z_i \geq d_{kl} \; . \tag{3.32}$$

Die Ungleichungen (3.32) können durch die Basic-Mixed-Integer-Rounding-Inequality und die Ungleichungen (3.31) durch die Mixed-Integer-Rounding-Inequality von Nemhauser und Wolsey verschärft werden. Beide MIR Ungleichungen sind im Folgenden angegeben.

Theorem 3.2.1 Basic-Mixed-Integer-Rounding-Inequality[54]

Für $X = \{(x, z) \epsilon R_+^p \times Z^n : \sum_{j \in J} g_j x_j + \sum_{j \in N} a_j z_j \leq b\}$*, mit* $N = \{1, ..., n\}$*,* $J = \{1, .., p\}$*,* $a_j, g_j, b \in R^1$ *für alle* j *und* $f = b - \lfloor b \rfloor > 0$ *ist die Ungleichung*

$$\sum_{j \in N} \lfloor a_j \rfloor z_j + \frac{1}{1-f} \sum_{j \in J^-} g_j x_j \leq \lfloor b \rfloor$$

mit $J^- = \{j \in J : g_j < 0\}$ *gültig für* X.

[54] Vgl. [NW88], S. 243.

Theorem 3.2.2 Mixed-Integer-Rounding-Inequality [55]

Für $X = \{(x,z)\epsilon R_+^2 \times Z^{|N|} : \sum_{i\epsilon N} a_i z_i + x^+ \leq b + x^-\}$, $f = b - \lfloor b \rfloor > 0$ *und* $f_i = a_i - \lfloor a_i \rfloor > 0$ *für* $i\epsilon N$ *ist die Ungleichung*

$$\sum_{i\epsilon N} \left(\lfloor a_i \rfloor + \frac{\max(0, f_i - f)}{1-f} \right) z_i \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x^-}{1-f}$$

gültig, wobei x^+/x^- *die Summe der kontinuierlichen Variablen mit positiven/negativen Koeffizienten bedeutet.*

Wendet man die Basic-Mixed-Integer-Rounding-Inequality auf die Ungleichung (3.32) mit $x = y_{k-1}$, $g = -1/\hat{M}_{kl}^{prod}$, $z_j = z_j$, $a_j = -1$ und $b = -d_{kl}/\hat{M}_{kl}^{prod}$ an, dann erhält man[56]

$$\frac{y_{k-1}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \geq \left(\frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} - \left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor \right) \left(\left\lceil \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rceil - \sum_{i=k}^{l} z_i \right) . \tag{3.33}$$

Die Ungleichung (3.33) lässt sich anschaulich für den Fall erklären, dass in jeder Periode maximal $\hat{M}_{kl}^{prod}$ produziert werden kann. Im rechten Faktor in Ungleichung (3.33) stellt dann $\left\lceil \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rceil$ die minimale Anzahl an Rüstvorgängen dar, die notwenig sind, um den Bedarf d_{kl} zu decken. Es fände in genau $\left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor$ Perioden die Produktion mit voller Kapazität statt. In einer Periode beträgt die Produktion zur Deckung des Bedarfs $\hat{M}_{kl}^{prod} \left(\frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} - \left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor \right)$. Ist die Anzahl an Rüstvorgängen $\sum_{i=k}^{l} z_i$ größer oder gleich der minimalen Rüstanzahl, ist die Rechte Seite der Ungleichung kleiner oder gleich null und die Ungleichung ist für den Anfangslagerbestand y_{k-1} nicht bindend. Sofern die Rüstanzahl jedoch um eins kleiner als die minimale Rüstanzahl ist, muss der Anfangslagerbestand mindestens den Wert der Produktion in der Periode haben, in der nicht mit voller Kapazität produziert wird ($y_{k-1} \geq \hat{M}_{kl}^{prod} \left(\frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} - \left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor \right)$). Im Fall, dass die Anzahl der Rüstvorgänge um zwei kleiner als die minimale Rüstanzahl ist, muss der Anfangslagerbestand größer sein als $\hat{M}_{kl}^{prod} + \hat{M}_{kl}^{prod} \left(\frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} - \left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor \right)$. Gleichzeitig stellt $y_{k-1} \geq \hat{M}_{kl}^{prod} + \hat{M}_{kl}^{prod} \left(\frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} - \left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor \right) \geq 2 \cdot \hat{M}_{kl}^{prod} \left(\frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} - \left\lfloor \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rfloor \right)$ ebenfalls eine zulässige Ungleichung dar. Da $\hat{M}_{kl}^{prod}$ die maximale Produktion in einer Periode zwischen k und l beschreibt, ist die minimale Rüstanzahl immer größer als $\left\lceil \frac{d_{kl}}{\hat{M}_{kl}^{prod}} \right\rceil$, wenn die maximalen Produktionen kleiner als $\hat{M}_{kl}^{prod}$ sind. Dementsprechend ist die Ungleichung (3.33) im Fall von variierenden maximalen Produktionsmengen nicht so scharf, wie im Fall von konstanten maximalen Produktionsmengen.

[55] Vgl. [Wol98], S. 127-128 und [NW90].
[56] Vgl. [BW01], S. 995.

Die Anwendung der Mixed-Integer-Rounding-Ungleichung auf die Ungleichung (3.31), nachdem die Ungleichung (3.31) durch λ dividiert wurde ($\lambda \geq 0$), mit $x^- = y_{k-1}/\lambda$, $a_i = -M_{il}^{prod}/\lambda$ und $b = -d_{kl}/\lambda$ ergibt

$$\sum_{i=k}^{l} \left(\frac{\max(0, f_i - f)}{1-f} - \left\lceil \frac{M_{il}^{prod}}{\lambda} \right\rceil \right) z_i \leq \frac{y_{k-1}}{\lambda(1-f)} - \left\lceil \frac{d_{kl}}{\lambda} \right\rceil \tag{3.34}$$

mit $f = \left\lceil \frac{d_{kl}}{\lambda} \right\rceil - \frac{d_{kl}}{\lambda} > 0$ und $f_i = \left\lceil \frac{M_{il}^{prod}}{\lambda} \right\rceil - \frac{M_{il}^{prod}}{\lambda} > 0$.[57]

Bei gegebenem λ können diese $\frac{T}{2}(T+1)$ MIR-Ungleichungen (3.33) und $\frac{T}{2}(T+1)$ MIR-Ungleichungen (3.34) a priori dem Programm hinzugefügt werden.

3.2.2.2 Flow-Cover-Cuts für das SICLSP

Pochet definiert für ihre Ungleichungen zuerst einen Cover. Dazu werden folgende Vereinbarungen getroffen: Es sei $S \subseteq \{1, .., l\}$ mit $l \leq T$, $k = \min\{l \mid l \in S\}$ und $\hat{M}_{jl}^{prod} = \min\{\frac{C_j - s}{a}, d_{jl}\}$. Die Menge S ist ein Cover von $\{k, ..., l\}$, wenn $\sum_{t \in S} \hat{M}_{tl}^{prod} = d_{kl} + \lambda$ mit $\lambda \geq 0$ und $\hat{M}_S^{max} = \max_{t \in S}\{\hat{M}_{tl}^{prod}\} \geq \lambda$ ist. Damit lässt sich die Ungleichung von Pochet angeben.

Theorem 3.2.3 [58]

S sei ein Cover von $\{k, .., l\}$ und $L \subseteq \{k, ..., l\} \setminus S$. Dann ist die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j \in S \cup L} x_j + \sum_{j \in S} (\hat{M}_{jl}^{prod} - \lambda)^+ (1 - z_j) \leq \\ &\qquad\qquad d_{kl} + \textstyle\sum_{j \in L} \min\{\widetilde{M}_{jl}^{prod} - \lambda, \hat{M}_{jl}^{prod}\} z_j + y_l \end{aligned} \tag{3.35}$$

gültig mit $\widetilde{M}_{jl}^{prod} = \max\{\hat{M}_{jl}^{prod}, \hat{M}_S^{max}\}$.

Pochet gibt eine Heuristik für den Separationsalgorithmus an, mit dem die am stärksten verletzte Ungleichung gefunden werden soll. Sie präsentiert Testergebnisse für einstufige Losgrößenprobleme. Weitere numerische Ergebnisse sind bei Pochet und Wolsey[59] zu finden.

3.2.2.3 Continuous 0-1 Knapsack Cover Ungleichungen für das SICLSP

Marchand und Wolsey und Miller et al. leiten Klassen von Ungleichungen für das SICLSP anhand der Ungleichung (3.31) ab. Führt man die komplementären Rüstvariablen $\bar{z}_i = 1 - z_i$ ein,

57 Setzt man $\lambda = d_{kl}$ in (3.34) ergibt sich die Ausgangsgleichung (3.31).
58 Vgl. [Poc88], S. 110.
59 Vgl. [PW91], S. 61 ff.

kann die Ungleichung (3.31) wie folgt geschrieben werden:

$$\sum_{i=k}^{l} M_{il}^{prod} \cdot \bar{z}_i \leq \left(\sum_{i=k}^{l} M_{il}^{prod} - d_{kl} \right) + y_{k-1} \ . \tag{3.36}$$

Diese Ungleichung ist eine Instanz des *Continuous 0-1 Knapsack Problems* (CKP):

Continuous 0-1 Knapsack Problem

$$Y = \{(z, x) \in B^n \times R_+^1 : \sum_{i \in N} a_i \cdot z_i \leq b + x\}$$

mit $N = \{1, ..., n\}$, $a_j \in Z_+$, $j \in N$ und $b \in Z_+$. Für das *CKP* wurden durch sequentielles Liften zwei Klassen von facettendefinierenden Ungleichungen für Y, die *Continuous Cover Inequalities* und die *Continuous Reverse Cover Inequalities*, von Marchand und Wolsey[60] abgeleitet. Miller et. al. leiten zwei weitere Klassen ab.[61] Wendet man diese vier Klassen von Ungleichungen für das CKP auf Ungleichung (3.36) an[62], erhält man Ungleichungen für das CKP, die nach der Rücksubstitution der komplementären Rüstvariablen für das SICLSP gültig sind.

3.2.3 Modellformulierungen für das einprodukt Losgrößenproblem mit konstanten Kapazitäten

Sind beschränkte konstante Kapazitäten bei der Losgrößenplanung für ein Produkt zu berücksichtigen, ergibt sich die Modellformulierung für das Single-Item Constant Capacitated Lot-Sizing Problem (SICCLSP) aus den Gleichungen (3.1),(3.2),(3.4) und (3.5). In den Rüstbedingungen (3.3) ergibt sich die maximale Produktion aus $M_{tT}^{prod} = \min\{d_{tT}, \frac{C-s}{a}\}$. Die Rüstbedingungen können aber auch mit der konstanten Kapazität formuliert werden:

$$x_t \leq M_{tT}^{prod} \cdot z_t \leq \frac{C - s}{a} \cdot z_t \qquad \forall t \ . \tag{3.37}$$

Florian und Klein[63] entwickelten einen Dynamischen-Optimierungs-Ansatz für das SICCLSP, durch den das Problem in polynomineller Zeit gelöst wird. Pochet und Wolsey[64] zeigen, wie man das SICCLSP als Kürzestes-Wege-Problem formulieren kann.

[60] Vgl. [MW99], S. 22 ff.
[61] Vgl. [MNS00a], S. 302-306.
[62] Vgl. [MNS00a], S. 306-311.
[63] Vgl. [FK71], S. 16 f.
[64] Vgl. [PW93], S. 778 ff.

3.2.4 Ungleichungen für das einstufige Losgrößenplanungsproblem mit konstanten Kapazitäten

Ungleichungen für den Fall konstanter Kapazitäten, wurden von Leung, Magnanti und Vachanti[65], Pochet[66] und Pochet und Wolsey[67] abgeleitet. Diese sind im Folgenden dargestellt.

Die Ungleichungen von Pochet wurden für den Fall zeitvarianter Kapazitäten bereits eingeführt[68]. Mit der konstanten Kapazität C ergibt sich $M_S^{max} = M_{kl}^{prod}$ und $\widetilde{M}_{jl}^{prod} = M_{kl}^{prod}$. Damit geht Gleichung 3.35 über in:[69]

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j \in S \cup L} x_j + \sum_{j \in S} (M_{kl}^{prod} - \lambda)^+ (1 - z_j) \leq \\ d_{kl} + \textstyle\sum_{j \in L} \min\{M_{kl}^{prod} - \lambda, M_{jl}^{prod}\} z_j + y_l \ . \end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Ungleichungen von Pochet und Wolsey werden als (k,l,S,I)-Ungleichungen bezeichnet. Sie ergeben sich aus den MIR-Ungleichungen (3.33), indem für die maximale Produktion M_{kl}^{prod} die konstante Kapazität C eingesetzt wird:

$$y_{k-1} \geq \left(d_{kl} - C \left\lfloor \frac{d_{kl}}{C} \right\rfloor \right) \cdot \left(\left\lceil \frac{d_{kl}}{C} \right\rceil - \sum_{i=k}^{l} z_i \right) \ . \tag{3.39}$$

Diese Ungleichungen werden in zwei Schritten durch Verallgemeinerung in die (k,l,S,I)-Ungleichungen überführt. Für die erste Verallgemeinerung nimmt man an, dass $S \subseteq \{k..l\}$ und $k \in S$. Dann ergibt sich:

$$y_{k-1} + \sum_{j \in \{k...l\} \setminus S} x_j \geq \left(d_{kl} - C \left\lfloor \frac{d_{kl}}{C} \right\rfloor \right) \cdot \left(\left\lceil \frac{d_{kl}}{C} \right\rceil - \sum_{i \in S} z_i \right) \ . \tag{3.40}$$

Die zweite Verallgemeinerung ergibt sich aus der Kombination dieser Ungleichungen. Für ein Intervall $[k, l]$ und eine Menge $S \subseteq \{k..l\}$ wählt man eine Menge $I \subseteq \{k..l\}$ derart, dass für jedes $i \in I$ entweder $i + 1 \in S$ oder $i = l$ ist. Abkürzend sei mit γ_{kl} das in k mindestens vorhandene Anfangslager bezeichnet, wenn nur $\lfloor d_{kl}/C \rfloor$ Mal gerüstet wird, d.h. $\gamma_{kl} = d_{kl} - C\lfloor d_{kl}/C \rfloor$. Ordnet man die Menge $\{\gamma_{ki}\}_{i \in I}$, so dass $\gamma_{k[1]} \leq \gamma_{k[2]} \leq ... \leq \gamma_{k[|I|]}$ gilt, dann ist die Menge $\{[1], [2], ..., [\mid I \mid]\}$ eine Permutation der Menge I, für die das Element [1] das Element mit dem kleinsten γ-Wert und das Element $[\mid \ I \ \mid]$ das Element mit dem größten γ-Wert ist.

[65] Vgl. [LMV89].
[66] Vgl. [Poc88].
[67] Vgl. [PW93].
[68] Vgl. Gleichung 3.35.
[69] Vgl. [Poc88], S. 111.

Für das Intervall $[k,l]$ und die Mengen S und I leiten Pochet und Wolsey[70] damit die (k,l,S,I)-Ungleichungen ab:

$$y_{k-1} + \sum_{j \in \{k...l\} \setminus S} x_j \geq \sum_{i=1}^{|I|} \left(\left(d_{k[i]} - C \left\lfloor \frac{d_{k[i]}}{C} \right\rfloor \right) - \left(d_{k[i-1]} - C \left\lfloor \frac{d_{k[i-1]}}{C} \right\rfloor \right) \right) \cdot \left(\left\lceil \frac{d_{k[i]}}{C} \right\rceil - \sum_{j=k, j \in S}^{[i]} z_j) \right) . \tag{3.41}$$

Für die exponentielle Anzahl der (k,l,S,I)-Ungleichungen ist kein polynomineller kombinatorischer Separationsalgorithmus bekannt. Für die Teilmenge der (k,l,S,I)-Ungleichungen, für die $S = \{k...l\}$ ist, existiert solch ein Algorithmus.[71]

3.3 Einstufige Losgrößenplanung für mehrere Produkte

Das Problem den Nettobedarf d_{pt} von den Produkten $p \in P$ in jeder Periode t zu decken und dabei eine gemeinsame Produktionskapazität C_t einzuhalten, wird als Capacitated Lot-Sizing Problem (CLSP) bezeichnet.[72] Jedes Produkt p kann gelagert werden, wobei der Lagerbestand der Produkte mit y_{pt} bezeichnet wird. Der Anfangslagerbestand zu Beginn des Planungshorizonts y_{p0} ist für alle Produkte null, da der Nettobedarf betrachtet wird. In jeder Periode ist die Produktion x_{pt} durch die Kapazität C_t beschränkt, wobei zur Produktion einer Mengeneinheit von p genau a_p Einheiten der Kapazität verbraucht werden. Jedes Mal wenn ein Los aufgelegt wird, muss gerüstet werden. Dabei treten Rüstkosten f_p[73] und Rüstzeiten s_p auf. Die kumulierte Produktion zwischen den Perioden t und k für Produkt p wird mit $d_{ptk} = \sum_{j=t}^{k} d_{pj}$ bezeichnet. Mit den Produktionskosten c_{pt} und den Lagerkosten h_p kann das CLSP wie folgt formuliert werden[74]:

[70] Vgl. [PW93], S. 772.
[71] Vgl. [PW94], S.273.
[72] Vgl. z.B. [Tem99], S. 167.
[73] In der Arbeit werden immer Rüstkosten berücksichtigt. Zur Losgrößenplanung ohne Rüstkosten mit Rüstzeiten vergleiche [Der95], S. 48.
[74] Vgl. [MNS00b], S. 2.

Modell CLSP

$$\min \quad \sum_{p=1}^{|P|} \sum_{t=1}^{T} (h_p\, y_{pt} + c_{pt}\, x_{pt} + f_p\, z_{pt}) \tag{3.42}$$

$$s.t. \quad y_{pt-1} + x_{pt} - d_{pt} = y_{pt} \qquad \forall p, t \tag{3.43}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} (s_p\, z_{pt} + a_p\, x_{pt}) \leq C_t \qquad \forall t \tag{3.44}$$

$$x_{pt} \leq M_{ptT}^{prod}\, z_{pt} \qquad \forall p, t \tag{3.45}$$

$$x_{pt} \geq 0\ ,\ y_{pt} \geq 0\ ,\ z_{pt}\ \in\ \{0,1\} \quad \forall p, t \tag{3.46}$$

Die Zielfunktion (3.42) minimiert die Rüst-, Lager- und Produktionskosten. Durch die Lagerbilanzen (3.43) wird sichergestellt, dass der Bedarf für alle Produkte in allen Perioden gedeckt wird. Die Kapazitätsrestriktionen (3.44) beschränken die Produktion auf die bereitgestellte Kapazität in jeder Periode. Die Rüstrestriktionen (3.45) sorgen dafür, dass ein Los nur aufgelegt werden kann, wenn vorher gerüstet wurde.[75] Die maximale Produktionsmenge in jeder Periode für jedes Produkt ergibt sich aus $M_{ptT}^{prod} = \min(d_{ptT}, \frac{C_t - s_p}{a_p})$.

Sind keine Kapazitäten zu berücksichtigen, d.h. falls $C_t \geq \sum_{p=1}^{|P|} d_{ptT} \quad \forall t$, dann zerfällt das CLSP für jedes Produkt p in ein SLULSP. Sind keine Rüstzeiten zu berücksichtigen, kann eine zulässige Lösung einfach gefunden werden[76]. Sind Rüstzeiten vorhanden, gehört bereits das Problem, eine zulässige Lösung zu finden, zur Klasse NP[77]. Neben vielen heuristischen Ansätzen[78] haben Pochet und Wolsey[79] und Belvaux und Wolsey[80] viele Instanzen des CLSP optimal gelöst, indem sie die Modellformulierung durch zulässige Ungleichungen verschärften. Dabei benutzen sie hauptsächlich die (l,S)-Ungleichungen und Ungleichungen für das SICLSP. Miller et al. geben Ungleichungen an, die mehrere Produkte gleichzeitig berücksichtigen[81]. Dazu relaxieren sie das CLSP zu einem kapazitierten einperiodigem mehrprodukt Modell mit Anfangslager und leiten für dieses Modell eine Cover-Ungleichung und eine Reverse-Cover-Ungleichung ab. Um diese für das CLSP zu nutzen, fixieren sie Variablen und leiten für das fixierte relaxierte Problem Gleichungen ab. Nach dem Zurückliften der fixierten Variablen erhalten sie dann Cover- bzw. Reverse-Cover Ungleichung für das CLSP.

[75] Erweiterungen des Modells wie Nach- und Vorlieferungen, Überstunden oder Umrüstkosten und -zeiten werden hier nicht berücksichtigt.
[76] Es wird in jeder Periode gerüstet.
[77] Vgl. [TTM89], S. 355.
[78] Vgl. z.B. [TTM89] oder [DBKZ92].
[79] Vgl. [PW91].
[80] Vgl. [BW01].
[81] Vgl. [MNS00b].