

## 2. Kapitel

### Theorie

Während im letzten Kapitel die Einordnung der Schwerewellen in die Atmosphäre behandelt und eine Übersicht über die verschiedenen Anregungsmechanismen vorgestellt wurde, befasst sich dieses Kapitel mit der mathematischen Beschreibung von Schwerewellen. Außerdem werden die Analyseprozeduren der Parameter vorgestellt, die später verwendet werden, um die Schwerewellen über Lindenberg zu charakterisieren.

Schwerewellen existieren aufgrund der exponentiellen Abnahme der Dichte mit der Höhe und wegen des hydrostatischen Gleichgewichtes in der Vertikalen. Wird ein Luftpaket aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt, vollführt es bei einer thermisch stabilen Luftschichtung (und wenn man Reibung ausschließt) eine ungedämpfte vertikale Schwingung um seine Gleichgewichtslage. Der Temperaturgradient der Atmosphäre ist hier immer kleiner als der adiabatische Temperaturgradient (siehe Abschnitt 1.1).

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0 \quad \text{stabil.} \quad (2.1)$$

Bleibt das nach oben ausgelenkte Luftpaket trotz adiabatischer Abkühlung wärmer als seine Umgebung, wird es weiter beschleunigt und von seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage nach oben entfernt. Diese Schichtung nennt man labil.

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0 \quad \text{labil, instabil.} \quad (2.2)$$

Ist der atmosphärische Temperaturgradient gleich dem adiabatischen Temperaturgradienten, so hat das Luftpaket immer die gleiche Temperatur wie die Umgebung und wird weder nach oben noch nach unten beschleunigt, die Schichtung ist neutral.

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{neutral.} \quad (2.3)$$

Die rücktreibende Kraft der Schwereoszillation bei einer stabilen Schichtung wird dabei durch die Auftriebskraft des Luftpakets bestimmt, die sich aus dem Dichteunterschied zur Umgebungsluft ergibt. Unter der Annahme, dass die vertikale Auslenkung gering ist und die Umgebung im hydrostatische Gleichgewicht ist, gilt also,

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

---

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g . \quad (2.4)$$

Die vertikale Beschleunigung des Luftpaketes ist gegeben durch:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left( \frac{g \partial \theta}{\theta \partial z} \right)_0 z = 0 , \quad (2.5)$$

mit der Dichte  $\rho$ , dem Druck  $p_0$ , der Erdbeschleunigung  $g$ , der potentiellen Temperatur  $\theta$ , und der Höhe  $z$  (der Index Null beschreibt hier das Ausgangsniveau).

Bei einer Zunahme der potentiellen Temperatur  $\theta$  mit der Höhe ist es üblich, den Teil in der Klammer von Gleichung ( 2.5 ) als Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  zu definieren:

$$N^2 \equiv \frac{g \partial \theta}{\theta \partial z} > 0 . \quad (2.6)$$

Die Schwereoszillation des Luftpaketes in einer stabil geschichteten Atmosphäre um seine Ruhelage hat also als Kreisfrequenz die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$ . Für Standardwerte der Atmosphäre beträgt die Periode dieser Schwerewellenoszillationen  $2\pi/N \sim 10$  min. Der Gradient der potentiellen Temperatur  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  das Stabilitätskriterium in den Gleichungen

( 2.1 )-( 2.3 ) findet sich in der Definition der Brunt-Väisälä-Frequenz wieder und damit stellt  $N$  ein Maß für die Stabilität der Luftschichtung im Schwerfeld der Erde dar.

Aus solchen Schwereoszillationen entstehen Schwerewellen, wenn eine stabil geschichtete Luftmasse z.B. über ein Gebirge strömt und viele dieser Schwereoszillationen ausgelöst werden. Die Schwerewellen können sich bis in die Stratosphäre ausbreiten, wobei die Wellenamplituden aufgrund der abnehmenden Dichte nach oben hin exponentiell zunehmen.

Die Frequenz dieser Wellen kann den durch die Schichtung der Atmosphäre bestimmten Wert von  $N$ , der Brunt-Väisälä-Frequenz, wie gleich aus der Dispersionsgleichung für Schwerewellen ersichtlich wird, nicht überschreiten.

### 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

Zur Beschreibung von Wellen in der Atmosphäre verwendet man die Perturbationstheorie, mit deren Hilfe man ein nichtlineares Differentialgleichungssystem in ein lineares überführen kann. Der Grundgedanke ist hierbei: Es gibt einen ungestörten bekannten Grundzustand, dem kleine Störungen überlagert sind. Für die Bewegungsgleichung bedeutet dies, dass man alle Variablen in zwei Teile teilt, ein Teil beschreibt dann den Grundzustand ( $\bar{x}$ ) und ein zweiter Teil beschreibt eine kleine Abweichung ( $x'$ ) vom Grundzustand. Damit erhält man folgenden Linearisierungsansatz:

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

---

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u} + u' & p &= \bar{p} + p' \\
 v &= \bar{v} + v' & \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\
 w &= \bar{w} + w'
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Mit diesem Linearisierungsansatz und der Voraussetzung das die Dichte und der horizontale Grundstrom des Grundzustandes konstant sind ( $\bar{\rho} = \rho_0$ ) lauten die zwei horizontalen Komponenten der Bewegungsgleichung für den zonalen und meridionalen Wind ( $u'$ ,  $v'$ ) :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv = -\rho_0^{-1} \frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu = -\rho_0^{-1} \frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{2.9}$$

wobei  $f$  die Inertial-Frequenz<sup>10</sup> in Abhängigkeit von der geographischen Breite der Erde ist. Die bewegungsgleichung für die vertikale Windkomponente lautet:

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\rho'}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{2.10}$$

Als vierte Grundgleichung wird die Kontinuitätsgleichung verwendet:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \tag{2.11}$$

Um  $v'$  und  $u'$  aus den Gleichungen ( 2.8 ) und ( 2.9 ) zu eliminieren, wird die zeitliche Ableitung zu der jeweils anderen Gleichung addiert, die zuvor mit  $f$  multipliziert wurde und man erhält:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + f^2 u' = -\rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} - f \rho_0^{-1} \frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + f^2 v' = -\rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial y \partial t} + f \rho_0^{-1} \frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{2.13}$$

Um die Anzahl der Variablen zu verringern, werden alle Variablen bis auf  $w'$  und  $p'$  eliminiert. Dazu wird die x-Ableitung von ( 2.8 ) zu der y-Ableitung von ( 2.9 ) addiert. Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung ( 2.11 ) und der Vorticity  $\zeta$

$$\zeta = \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right), \tag{2.14}$$

erhält man folgende Beziehung

---

<sup>10</sup> Die Inertial-Frequenz oder auch Coriolis Parameter berechnet sich mit  $f = \frac{4\pi}{24\text{std}} \sin \theta$ . Dabei

ist  $\theta$  die Breite.

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

---

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial z \partial t} + f \zeta = \rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} . \quad (2.15)$$

Mit Hilfe einer weiteren Gleichung für die Vertikalkomponente der relativen Vorticity  $\zeta$ , die die Inertial-Frequenz  $f$  und die Vertikalkomponente der Bewegung  $w'$  in Beziehung setzt und die man aus den Vertikalkomponenten der Bewegungsgleichung zusammen mit der Kontinuitätsgleichung erhält [Gill 1982]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - f \frac{\partial w}{\partial z} = 0 , \quad (2.16)$$

kann man nun entweder  $w'$  oder die Vertikalkomponente der Vorticity  $\zeta$  aus ( 2.15 ) eliminieren:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + f^2 \zeta = f \rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + f \rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} , \quad (2.17)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} = \rho_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) . \quad (2.18)$$

Mit einer anderen Gleichung für  $w'$  und  $p'$ , für die aus der vertikalen Impulsgleichung die Dichte  $\rho'$  eliminiert wurde, folgt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} + N^2 w' = -\rho_0^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial t} , \quad (2.19)$$

die die Beziehung zwischen der vertikalen Bewegung  $w'$  und dem Fluktuationsdruck  $p'$  ohne einen Rotationsterm beschreibt. Man erhält nun eine Gleichung nur für die vertikale Bewegung  $w'$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \rho_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right) + \frac{f^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + N^2 \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right) = 0 . \quad (2.20)$$

Eine häufig gemachte Approximation ist die Boussinesq-Approximation (z.B. [Gill 1982], bei der angenommen:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} w' \approx \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \quad (2.21)$$

wird. Physikalisch bedeutet dies, dass die vertikale Wellenlänge der Welle in den gestörten Größen klein ist gegen die Skalenhöhe der Dichte. Dies ist für Schwerewellen mit vertikalen Wellenlängen von 2-5 km in der Regel erfüllt. Aus ( 2.20 ) wird mit ( 2.21 ):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + f^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + N^2 \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right) = 0 . \quad (2.22)$$

Dies ist eine Schwingungsgleichung, deren Standardlösung

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

---

$$w' = w_0 e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \quad (2.23)$$

lautet. Substituiert man ( 2.23 ) in ( 2.22 ), erhält man eine algebraische Gleichung für die Wellenzahlen  $k$ ,  $l$ ,  $m$ , und die Frequenz  $\omega$  der Schwerewellen. Sie beschreibt den Zusammenhang dieser Größen, welche typisch ist für Schwerewellen in der Erdatmosphäre [Gill 1982, Gossard und Hooke 1975, Holton 1992]:

$$\omega^2 = \frac{f^2 m^2 + N^2 (k^2 + l^2)}{(k^2 + l^2 + m^2)}. \quad (2.24)$$

Löst man ( 2.24 ) nach  $m^2$  statt nach der Frequenz  $\omega$ , so erhält man:

$$m^2 = K_h^2 \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2}, \quad (2.25)$$

mit  $K_h = \sqrt{(k^2 + l^2)}$ , dem Betrag des horizontalen Wellenzahlvektors  $\mathbf{K}_h$ .

Da die Inertial-Frequenz  $f$  in der Atmosphäre immer kleiner als die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  ist wird deutlich, dass reale Lösungen der Dispersionsgleichung nur möglich sind, wenn  $\omega$  größer als die lokale Inertial-Frequenz  $f$  aber kleiner als die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  ist:

$$|f| \leq \omega \ll N. \quad (2.26)$$

Somit stellen  $f$  und  $N$  die natürlichen Grenzen für die Frequenz von Schwerewellen in der Atmosphäre dar.

### Verallgemeinerungen

Für die bisherigen Berechnungen war angenommen worden, dass sich die Schwerewellen in einer ruhenden Atmosphäre ausbreiten. Jedoch ist die Erdatmosphäre nicht „ruhend“. Der Horizontalwind ist weder sehr klein noch konstant mit der Höhe. Lediglich der mittlere Vertikalwind  $\bar{w}$  kann vernachlässigt werden, da er generell sehr klein ist. Dies hat zwei Konsequenzen: Die Schwerewellen verändern den Grundstrom und der Grundstrom verändert die Ausbreitung der Schwerewellen [Andrews et al. 1987].

Für eine Atmosphäre mit einem variierenden Grundstrom (Windvektor  $\bar{\mathbf{U}} = (u, v)$ ), würde die Lösung der Dispersionsgleichung deutlich komplizierter werden. Um das Lösen der komplizierteren Gleichungen zu vermeiden, führt man die sogenannte „intrinsische“ Wellenfrequenz  $\hat{\omega}$  bezüglich des Grundstromes  $\bar{\mathbf{U}}$  (also die Frequenz der Welle für einen Beobachter, der sich mit dem Grundstrom bewegt) ein:

$$\hat{\omega} = \omega - \mathbf{K}_h \cdot \bar{\mathbf{U}} = \omega - K_h \bar{U} \cos \chi, \quad (2.27)$$

wobei  $\chi$  der Winkel zwischen  $\mathbf{K}_h$  und  $\bar{\mathbf{U}}$  ist.

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

---

Für die Dispersionsgleichung und alle weiteren Gleichungen bedeutet diese Vereinfachung ein Ersetzen der bisherigen bodengebundene Frequenz  $\omega$  durch die intrinsische Frequenz  $\hat{\omega}$  der Schwerewellen.

$$m^2 = K_h^2 \frac{N^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}^2 - f^2} . \quad (2.28)$$

Wenn der horizontale Grundstrom  $\bar{U}$  sich auch noch zusätzlich mit der Höhe verändert, sind die linearisierten Bewegungsgleichungen ebenfalls komplizierter. Durch die Liouville-Green-Approximation, die Annahme, dass die Veränderung mit der Höhe langsam ist, sind die hergeleitete Dispersionsgleichung und die Polarisationsgleichungen in jeder Höhe jedoch weiterhin näherungsweise gültig.

In der Realität ändert sich der Grundzustand in der Horizontalen und mit der Zeit nur langsam, daher gilt die Beziehung zwischen der horizontalen Wellenzahl  $K_h$  und der bodengebundenen Phasengeschwindigkeit  $c_h$ :

$$c_h = \frac{\omega}{K_h} \quad (2.29)$$

ist konstant, solange man einer Wellengruppe folgt. Also sind die vertikale Wellenzahl  $m$  und die intrinsische Frequenz  $\hat{\omega}$  nur von den höhenabhängigen Eigenschaften des Mediums, in dem sich die Wellen ausbreiten, abhängig. Diese Abhängigkeit lässt sich durch folgende „Doppler verschobenen“ Gleichungen ausdrücken [Fritts und van Zandt 1987, Eckermann et al. 1995]:

$$\hat{\omega} = K_h (c_h - \bar{U} \cos \chi) ,$$

$$m = \frac{N}{|c_h - \bar{U} \cos a|} \sqrt{\left( \frac{1 - \frac{\hat{\omega}^2}{N^2}}{1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2}} \right)} ,$$

welche den Gleichungen ( 2.27 ) und ( 2.28 ) entsprechen.

### **Polarisationsgleichungen**

Weitere Beziehungen zwischen den Komponenten der Welle, die von Hines [1960] sogenannten Polarisationsgleichungen, ( 2.30 ) - ( 2.34 ), kann man durch Substitution des Lösungsansatzes ( 2.23 ) aus den entsprechenden Gleichungen erhalten. So erhält man z.B. die Beziehung zwischen  $u$  und  $v$ , ( 2.30 ), aus den Bewegungsgleichungen ( 2.12 ) und ( 2.13 ). Sie sind in Standardwerken wie Gill [1982] und Gossard und Hooke [1975] ausführlich hergeleitet und hier nur für die später bei der Berechnung der Schwerewelleneigenschaften verwendeten Fluktuationsgrößen der Windkomponenten  $u'$ ,  $v'$  und  $w'$  und der Temperatur  $T'$  wiedergegeben:

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

---

$$v' \approx i \frac{f}{\hat{\omega}} u', \quad (2.30)$$

$$w' \approx \frac{-k_h}{m} u', \quad (2.31)$$

$$\hat{T}' = -\frac{iN^2}{g\hat{\omega}} w', \quad (2.32)$$

$$\frac{p'}{\rho_0} = \frac{\hat{\omega}^2 - f^2}{k\hat{\omega} + if} u', \quad (2.33)$$

$$-\frac{\rho'}{\rho_0} = \hat{T}' = -\frac{iN^2}{g\hat{\omega}} w'. \quad (2.34)$$

Hierbei wird die normalisierte Temperaturfluktuation  $\hat{T}'$ ,

$$\hat{T}' = T' / \bar{T} \quad (2.35)$$

verwendet. Es ist bei der Untersuchung von Schwerewellen sinnvoll, die normalisierte Temperaturfluktuation statt der einfachen Temperaturfluktuationen zu verwenden. Die Gründe hierfür werden in Abschnitt 2.4.2 erklärt.

### Phasengeschwindigkeit der Welle

Für die Phasengeschwindigkeit von Schwerewellen, die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen ausbreitet, gelten folgende Beziehungen deren Herleitung z.B. in Holton [1992] zu finden ist:

Intrinsische Phasengeschwindigkeit (für den Beobachter, der mit dem Grundstrom mitdriftet):

Vertikale Komponente:  $\hat{c}_v = \frac{\hat{\omega}}{m} . \quad (2.36)$

Horizontale Komponente:  $\hat{c}_h = \frac{\hat{\omega}}{K_h} . \quad (2.37)$

Bodengebundene Phasengeschwindigkeit

$$c = \left| \hat{c} + \bar{U} \cdot \cos(\arctan(\bar{u}, \bar{v}) - \varphi) \right| . \quad (2.38)$$

Schwerewellen sind dispersive Wellen, ihre Phasengeschwindigkeit variiert mit der horizontalen Wellenzahl  $k$ . Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der eine beobachtbare Energie sich ausbreitet, siehe folgende Abbildung 2.1:

## 2.1 Dispersionsgleichung für Schwerewellen

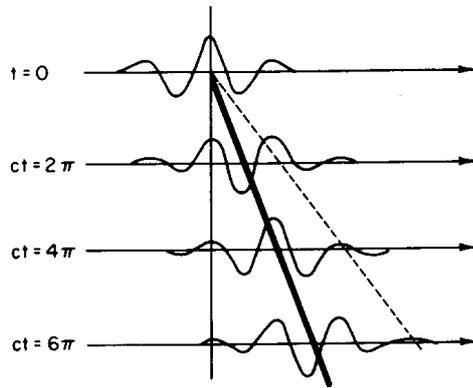


Abbildung 2.1: Ausbreitung einer Wellengruppe. Die dicke Linie zeigt die Gruppengeschwindigkeit und die gestrichelte Linie die Phasengeschwindigkeit. Aus Holton [1992].

Für die horizontale Gruppengeschwindigkeit von Schwerewellen gilt näherungsweise eine Beziehung zu der Kombination von intrinsischer Geschwindigkeit mit dem horizontalen Wind [Eckermann 1992, Vincent und Alexander 2000].

$$c_{g_h} \approx \hat{c} + \bar{U} , \quad (2.39)$$

$$c_{g_x} \approx \hat{c}_x + \bar{u} , \quad (2.40)$$

$$c_{g_y} \approx \hat{c}_y + \bar{v} . \quad (2.41)$$

Auf diese Weise ist es möglich, aus den Größen, die man mit Radiosondenmessungen erhält, auch die Gruppengeschwindigkeit der Schwerewellen näherungsweise zu bestimmen.

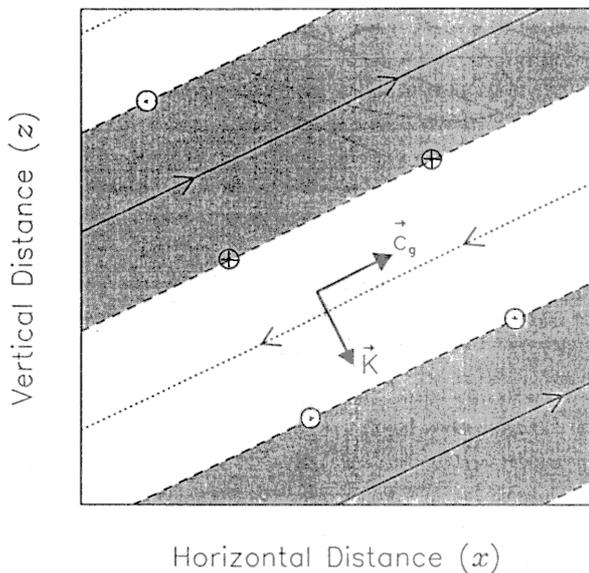


Abbildung 2.2: Schematische Illustration der Geschwindigkeitsfluktuationen in der x-z-Ebene für eine sich zonal ausbreitende ( $l=0$ ) Schwerewelle [Nach Allen 1996]. Die durchgezogenen Linien markieren die maximale Geschwindigkeitsfluktuation und die gepunkteten Linien die minimale Geschwindigkeitsfluktuation. Gestrichelte Linien markieren die Nulllinie der Geschwindigkeitsfluktuation. Mit Pfeilen ist die Richtung ( $\oplus$  in die Ebene nach Norden und  $\ominus$  aus der Ebene heraus nach Süden) des Geschwindigkeitsfluktuations-Vektoren an verschiedenen Stellen bezeichnet. Außerdem ist die Beziehung des Gruppengeschwindigkeits-Vektors  $\mathbf{c}_g$  und des Wellenzahlvektors  $\mathbf{K}$  eingezeichnet.

Die Abbildung 2.2 gibt ein physikalisches Bild einer Schwerewellenbewegung. Eine Eigenschaft von Schwerewellen ist es, dass die Vertikalkomponente der Gruppengeschwindigkeit in entgegengesetzte Richtung der Vertikalkomponente der Phasengeschwindigkeit zeigt [Gossard und Hooke 1975, Gill, 1982]. Das bedeutet dass eine abwärtsge-

richtete Phase gleichbedeutend ist mit aufwärtsgerichtetem Energietransport und umgekehrt. Die Gruppengeschwindigkeit ist parallel zu den Linien gleicher Phase und senkrecht zu der Phasengeschwindigkeit, die wiederum parallel zu dem Wellenzahlvektor ist.

### 2.2 Spektraltheorie der Schwerewellen

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, haben Radiosondenmessungen für die Beobachtung von Schwerewellen eine besondere Bedeutung. Radiosonden liefern gleichzeitig Vertikalprofile der unteren Atmosphäre bis ~35 km Höhe von den Größen Wind und Temperatur mit hoher vertikaler Auflösung (~50 m) und werden täglich von Wetterstationen überall auf der Welt gestartet. Innerhalb dieser hochaufgelösten Vertikalprofile kann man mesoskalige Fluktuationen erkennen (Abbildung 2.3).

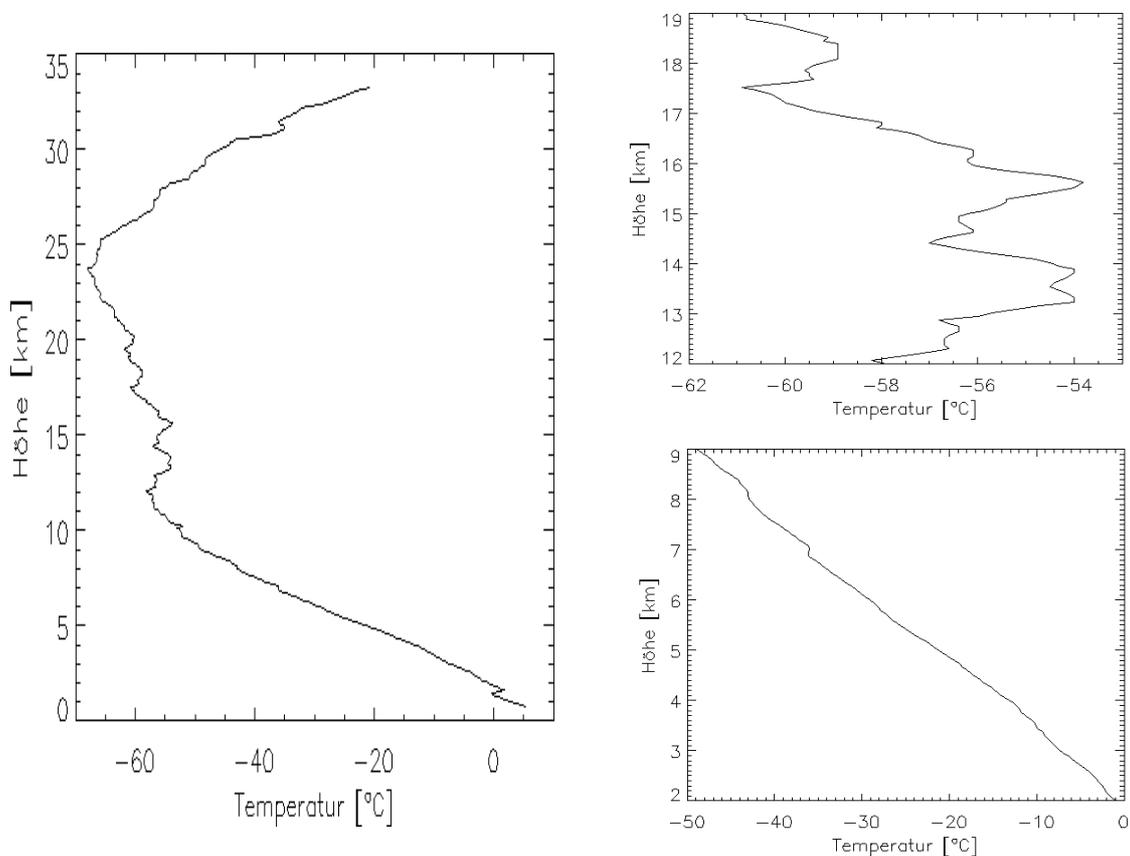


Abbildung 2.3: Links, ein typisches Temperaturprofil einer Radiosonde aus Lindenberg vom 4.4.1996, 06:00 UTC. Rechts, die vergrößerten Ausschnitte zweier 7 km umfassenden Bereiche innerhalb der Troposphäre, 2-9 km, und unteren Stratosphäre, 12-19 km.

Zur Interpretation dieser Fluktuationen wurden mehrere Theorien entwickelt. Eine Theorie besagt, dass die Fluktuationen durch Überlagerung vieler Schwerewellen entstehen [Dewan 1979; van Zandt 1982]. Andere [Gage 1979, Lilly 1983, Gage und Nastrom 1985] dagegen waren der Meinung, dass zweidimensionale Turbulenzen der Hauptgrund für die

## 2.2 Spektraltheorie der Schwerewellen

beobachteten mesoskaligen Fluktuationen seien. Heute ist man sich sicher, dass Schwerewellen den Hauptanteil für diese Fluktuationen ausmachen [z.B. Vincent und Eckermann 1990]. Vincent und Eckermann untersuchten mit Hilfe von Radargeräten mesoskalige Windfluktuationen im Zusammenhang mit Kaltfrontdurchgängen in Adelaide, Australien. Sie argumentierten, dass zweidimensionale Turbulenzen rein horizontale Bewegungen sind. Wenn diese die Ursache für die beobachteten Fluktuationen wären, müsste eine kleinskalige Energiequelle im gesamten Höhenbereich, in dem gleichzeitig Fluktuationen beobachtet werden, also von der Troposphäre bis in die untere Stratosphäre, zu finden sein. In der unteren Stratosphäre kann man jedoch eine solche Quelle aufgrund der dortigen stabilen Schichtung der Atmosphäre nicht nachweisen.

Powerspektren von mesoskaligen Fluktuationen in der Atmosphäre oder dem Ozean auszurechnen, ist inzwischen Standard geworden. So liegen Spektren von verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten vor. Zur Interpretation der Form dieser Spektren wurden mehrere Theorien entwickelt:

Eine umfassende Beschreibung des Wellenfeldes gab zunächst van Zandt [1985]. Er zeigte, dass die Amplituden in einem Powerspektrum der vertikalen Wellenzahl aus Fluktuationen des horizontalen Windes mit der Höhe langsamer anwachsen, als die Amplituden des Frequenzspektrums aus dem horizontalen Wind. Das vertikale Wellenzahlspektrum genügt in etwa der Form  $F(m) \propto m^{-t}$ , und die Steigung  $t$  liegt zwischen 2 und 3. Das Frequenzspektrum hat die Form  $F(\omega) \propto \omega^p$  mit einer Steigung  $p$  zwischen 1.5 und 2. Smith et al. [1987] sammelten Spektren der vertikalen Wellenzahl für verschiedene Höhenbereiche, aus der Troposphäre bis hin zur Thermosphäre.

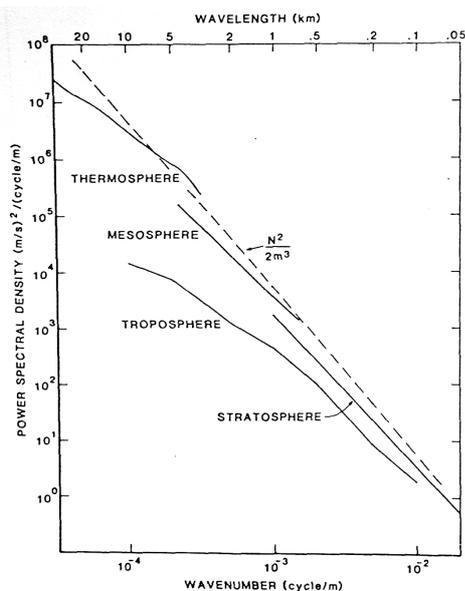


Abbildung 2.4: Vertikale-Wellenzahl-Powerspektren aus verschiedenen Höhen mit verschiedenen Instrumenten beobachtet. [Smith et al. 1987].

In Abbildung 2.4 kann man erkennen, dass die Amplituden von Wellenzahlspektren aus verschiedenen Höhen bei großer vertikaler Wellenzahl (kleiner vertikaler Wellenlänge) ähnlich sind. Sie scheinen an die gestrichelte Linie gebunden zu sein. Diese Beobachtung führte zu der Vermutung, dass es ein Sättigungslimit für die Amplitude von Schwerewellen innerhalb der Atmosphäre gibt.

Angenommen, eine in Bodennähe entstandene Schwerewelle, die sich vertikal nach oben und zonal in der mittleren Atmosphäre ausbreitet, hat eine Amplitude  $U'_0$  der horizontalen Geschwindigkeit und eine vertikale Wellenzahl  $m_0$ . Wenn diese Welle weder eine sehr kleine (damit der Coriolis-Effekt vernachlässigt werden kann, der auf langsame langwellige Wellen wirken würde) noch eine sehr große intrinsische Frequenz hat, ist in der Höhe  $z$  die Wellenamplitude  $U'(z)$  gegeben durch

$$U'(z) = U'_0 \left( \frac{m}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{z/2H_p}, \quad (2.42)$$

mit  $H_p$  =Skalenhöhe. Die Amplitude einer solchen Welle wächst exponentiell an, da sie sich vertikal in die nach oben dünner werdende Atmosphäre ausbreitet. Unter Umständen kann die Amplitude so groß werden, dass ein vertikaler Temperaturgradient entsteht, welcher die adiabatische Abkühlungsrate der Umgebung übersteigt, so dass die Welle instabil wird. Dies tritt ein, wenn für die Amplitude der Windgeschwindigkeit  $U'(z)$  folgender Zusammenhang gilt [Fritts 1984]:

$$U'(z) \geq |\bar{U} - c_h| \approx \frac{N}{m}. \quad (2.43)$$

Die Sättigungstheorie in ihrer einfachsten Form besagt, dass die Wellen in dieser Höhe nicht völlig dissipieren [Lindzen 1981, Fritts 1984, Dunkerton 1989]. Es wird nur soviel turbulente Diffusion produziert, dass die Größe der Amplitude  $U'(z)$  an der Instabilitätsgrenze  $N/m$  bleibt. Dewan und Good [1986] entwickelten eine Theorie, wonach das Sättigungslimit der Spektralampplituden für Fluktuationen aus dem Horizontalwind proportional ist zu  $N^2/m^3$ . Smith et al. [1987] erweiterten diese Theorie um die Überlagerung von ungesättigten Schwerewellen und kamen zu folgendem, quasi empirischen Ausdruck für das Powerspektrum der vertikalen Wellenzahl:

$$A(m) = \frac{N^2}{6m^{*3}} \frac{1}{[1 + (m/m^*)^3]}. \quad (2.44)$$

Dieses Modellspektrum ist in Abbildung 2.5 illustriert. Wellen, deren vertikale Wellenzahlen größer sind als die *Übergangswellenzahl*  $m^*$ , sind gesättigt und weisen ein Spektrum mit der Steigung  $m^{-3}$  auf. Wellen mit vertikalen Wellenzahlen kleiner als die Übergangswellenzahl  $m^*$ , sind ungesättigt und zeigen ein Spektrum, dessen Amplitude mit  $e^{z/H_p}$  wächst. Die ursprüngliche Formel, auf der die Gleichung (2.44) beruht, ist von Desaubies

## 2.3 Parametrisierungsmodell

[1976] aufgestellt worden, um Wellenspektren im Ozean zu modellieren. Später wurde sie von van Zandt [1985] und von Smith et al. [1987] auf die Atmosphäre übertragen, da sie die beobachtete Spektralform in dem Übergangsbereich zwischen ungesättigten und gesättigten Spektrum am besten wiedergibt.

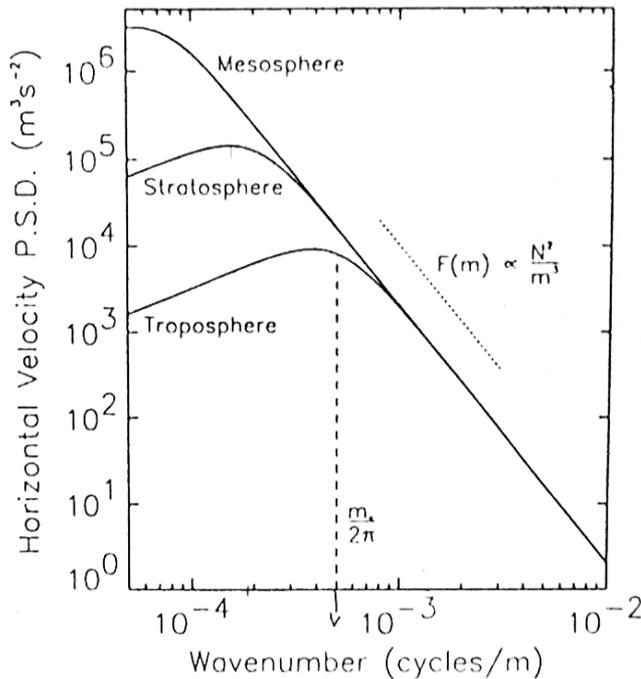


Abbildung 2.5 Modellspektren für  $m^*=(2 \text{ km})^{-1}$ ,  $(5 \text{ km})^{-1}$ ,  $(10 \text{ km})^{-1}$ . Gestrichelt ist die Übergangswellenzahl  $m^*$  für das Spektrum der Troposphäre,  $m^*=(2 \text{ km})^{-1}$  eingezeichnet. Auf der y-Achse ist die Amplitude (Powerspectraldensity, P.S.D.) des horizontalen Windes in  $\text{m}^3/\text{s}^2$  und auf der x-Achse die vertikale Wellenzahl (wavenumber) in cycles/m eingetragen. [Smith et al. 1987].

## 2.3 Parametrisierungsmodell

Das in diesem Abschnitt ausführlich vorgestellte Parametrisierungsmodell von Fritts und van Zandt [1993] basiert weitgehend auf der linearen Instabilitätstheorie der Schwerewellen-Sättigung von Dewan und Good [1986]. Das spektrale Modell genügt der Schwerewellen-Dispersionsgleichung und den Polarisationsgleichungen unter der Boussinesq-Approximation (nicht-hydrostatische und Rotationseffekte sind erlaubt). Neu ist, dass für dieses Modell die Varianz der Geschwindigkeit des Horizontalwindes und die Ausbreitungsrichtung der Wellen berücksichtigt werden. Das Richtungsspektrum der Wellen definiert den vertikalen Netto-Fluss von horizontalem Impuls. Die Veränderung des Impulsflusses definiert die dazugehörige Beschleunigung des Grundstromes.

Das Modell von Fritts und van Zandt [1993] und Fritts und Lu [1993] beschreibt den Einfluss eines breiten Spektrums von Wellen auf den mittleren Zustand der Atmosphäre. Als Ansatz für das Modell wird angenommen, dass ein sich nach oben ausbreitendes Energiespektrum  $E$  separierbar ist in die Abhängigkeit von der vertikalen Wellenzahl  $m$ , der intrinsischen Frequenz  $\hat{\omega}$  und der Ausbreitungsrichtung  $\phi$  :

$$E(\mu, \hat{\omega}, \phi) = E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) . \quad (2.45)$$

## 2.3 Parametrisierungsmodell

---

Dabei ist  $\mu = \frac{m}{m^*}$ .

Die Annahme der Separierbarkeit ist durch Beobachtungen von Fritts und Wang [1991] belegt. Jedoch gibt es keine theoretische Grundlage, dass das Spektrum total separierbar sein muss [Fritts und van Zandt 1993].

Das vertikale Wellenzahlspektrum  $A(\mu)$  ist durch das verallgemeinerte Desaubies-Spektrum [Desaubies 1976],

$$A(\mu) = A_0 \frac{\mu^s}{1 + \mu^{s+t}}, \quad (2.46)$$

$$A_0 = [(s+t)/\pi] \sin[\pi(s+1)/(s+t)] \text{ und} \quad (2.47)$$

$$\int_0^\infty A(\mu) d\mu = 1$$

gegeben. Als Frequenzspektrum wird

$$B(\hat{\omega}) = B_0 \hat{\omega}^{-p}, \quad (2.48)$$

$$B_0 = (p-1)f^{p-1} \left[ 1 - (f/N)^{p-1} \right]^{-1} \quad \text{für } p \neq 1 \quad (2.49)$$

angenommen. Der Parameter  $p$  wird in der Literatur meistens mit 5/3 festgesetzt [Smith et al. 1987, Weinstock 1990]. Dieser Wert basiert auf Frequenzspektren aus dem beobachteten Horizontalwind und der Temperatur. Diese Form ergab sich als beste Anpassung an beobachtete Daten [Fritts und van Zandt 1993]. Auch hier sei wieder:

$$\int_f^N B(\hat{\omega}) d\hat{\omega} = 1, \quad (2.50)$$

Das Spektrum  $\Phi(\phi)$  ist ein Maß für die Orientierung und Richtung des Wellenfeldes (mit  $\phi$  gemessen im Uhrzeigersinn von Osten) und ist ebenfalls normiert, so dass

$$\int_0^{2\pi} (\Phi\phi) d\phi = 1 \quad (2.51)$$

gilt.

Die spektrale Energiedichte  $E_0$  ist von Fritts und van Zandt [1993] als Messgröße für die Schwerewellenaktivität gewählt worden.

Die gesamte (kinetische und potentielle) Energie  $E_0$  der Welle pro Masseneinheit (spektrale Energiedichte) ist definiert durch [z.B. Gill 1982]:

$$E_0 = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) + \frac{1}{2} \left( \frac{g^2 \overline{\hat{T}'^2}}{N^2} \right), \quad (2.52)$$

wobei der Querstrich das Mittel über eine Wellenlänge bedeutet. Um  $E_0$  zu bestimmen, werden die gemessene Werte von den drei Windkomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und der Temperatur,

$T$  benötigt. Da der Anteil der Vertikalbewegung  $w$  an der kinetischen Energie gering ist, kann man diesen Beitrag für die Berechnung der kinetischen Energie vernachlässigen:

$$E_{kin} \approx \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}). \quad (2.53)$$

Aufgrund des zu großen zeitlichen Abstandes zwischen den Radiosondenaufstiegen kann kein Frequenzspektrum der Welle berechnet werden. Der spektrale Index  $p$  (die Steigung des Frequenzspektrums) kann jedoch über das Verhältnis kinetischer zu potentieller Wellenenergie bestimmt werden. Es gilt nach Vincent et al. [1996]:

$$(\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) = p \frac{g^2}{N^2} \overline{\hat{T}'^2}. \quad (2.54)$$

Das Verhältnis  $E_{kin}$  zu  $E_{pot}$  entspricht demnach der Steigung  $p$  des Frequenzspektrums der Schwerewellen.

### 2.3.1 Impulsfluss durch Schwerewellen

Die in dieser Arbeit angewandte Theorie des Impulsflusses ist beschrieben bei Eckermann et al. [1996] und beruht ebenfalls auf dem Schwerewellen-Spektralmodell von Fritts und van Zandt [1993]. Die Technik ermöglicht es, den Vertikalfluss des zonalen und meridionalen Impulses aus den Radiosondenmessungen von Horizontalwind und Temperatur abzuschätzen.

Der Vertikalfluss des zonalen und meridionalen Impulses pro Masseneinheit ( $\overline{u}_t$  und  $\overline{v}_t$ ) einer monochromatischen<sup>11</sup> Welle ist definiert durch (z.B. Fritts und Vincent [1987]):

$$\begin{aligned} \overline{u}_t &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \left( \overline{u'w'} \cdot \left( 1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \right) \right) \\ \overline{v}_t &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz} \left( \overline{v'w'} \cdot \left( 1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Da die Vertikalbewegung  $w$  bei Radiosonden nicht gemessen wird, ist es nicht möglich, den Impulsfluss direkt zu bestimmen. Die Polarisationsgleichung (2.32) beinhaltet jedoch die Beziehung der fehlenden Vertikalbewegung  $w'$  zur normalisierten Temperaturfluktuation  $\hat{T}'$ . Mit (2.32) erhält man für eine monochromatische Welle:

$$\begin{aligned} \overline{u'w'} \cdot \left( 1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \right) &= \frac{g\hat{\omega}}{N^2} \overline{u'\hat{T}'_{+90}} \left( 1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \right) \\ \overline{v'w'} \cdot \left( 1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \right) &= \frac{g\hat{\omega}}{N^2} \overline{v'\hat{T}'_{+90}} \left( 1 - \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \right), \end{aligned} \quad (2.56)$$

---

<sup>11</sup> Wellen nur einer Wellenlänge.

wobei  $\hat{T}'_{+90} = i\hat{T}'$  ist. In den beobachteten Radiosondenprofilen findet man jedoch eher ein ganzes Spektrum von Wellen als monochromatische Wellen. Also muss (2.56) auf ein Spektrum von Wellen erweitert werden. Dies geschieht unter denselben Annahmen wie für das Parametrisierungsmodell von Fritts und van Zandt [1993], dass das Spektrum der Wellen in Abhängigkeit von vertikaler Wellenzahl  $m$ , intrinsische Frequenz  $\hat{\omega}$  und die Ausbreitungsrichtung  $\phi$  der Wellen aufzuteilen ist.

Die Polarisationsgleichung kann folgendermaßen für die zonale und vertikale Windkomponente und die Temperatur geschrieben werden:

$$E_{u'}(\mu, \hat{\omega}, \phi) = E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \left[ \cos^2 \phi + \frac{f^2}{\hat{\omega}^2} \sin^2 \phi \right] \gamma(\hat{\omega}), \quad (2.57)$$

$$E_{w'}(\mu, \hat{\omega}, \phi) = \frac{\hat{\omega}^2}{N^2} E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \delta_-(\hat{\omega}), \quad (2.58)$$

$$E_{\hat{T}'}(\mu, \hat{\omega}, \phi) = \frac{N^2}{g^2} E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \delta_-(\hat{\omega}), \quad (2.59)$$

wobei  $\delta_-(\hat{\omega}) = 1 \pm \frac{f^2}{\hat{\omega}^2}$  und  $\gamma(\hat{\omega}) = 1 - \frac{\hat{\omega}^2}{N^2}$  benutzt wurden.

Bildet man die Kovarianz des Windes  $u'$  mit der Temperatur  $\hat{T}'_{+90}$  durch folgende Integration,

$$\begin{aligned} \overline{u' \hat{T}'_{+90}} &= \int_0^\infty \int_0^N \int_0^{2\pi} \frac{N}{g} E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \cos \phi (\delta_-(\hat{\omega}) \gamma(\hat{\omega}))^{\frac{1}{2}} d\phi d\hat{\omega} d\mu \\ &= \frac{E_0 b_x N}{g} \int_f^N B_0 \hat{\omega}^{-p} (\delta_-(\hat{\omega}) \gamma(\hat{\omega}))^{\frac{1}{2}} d\hat{\omega} \\ &= \frac{E_0 b_x N}{g} D_{u' \hat{T}'_{+90}}(p, f, N), \end{aligned} \quad (2.60)$$

wobei  $b_x = \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \cos \phi d\phi$  ist (nach Fritts und van Zandt [1993]),

kann man die spektrale Energiedichte  $E_{u' \hat{T}'_{+90}}$  folgendermaßen aufschreiben:

$$E_{u' \hat{T}'_{+90}}(\mu, \hat{\omega}, \phi) = \frac{N}{g} E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \cos \phi (\delta_-(\hat{\omega}) \gamma(\hat{\omega}))^{\frac{1}{2}}. \quad (2.61)$$

Zwischen der Kovarianz und dem Fluss des zonalen Impulses lässt sich nach Fritts und van Zandt eine Beziehung herstellen:

$$E_{u'w'\delta_-}(\mu, \hat{\omega}, \phi) = \frac{\hat{\omega}}{N} E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \cos \phi \delta_-^{3/2}(\hat{\omega}) \gamma^{1/2}(\hat{\omega}) . \quad (2.62)$$

Integriert man über alle Wellen des Spektrums ist der vertikale Nettoimpulsfluss pro Masseneinheit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \overline{u'w'\delta_-} &= \int \int \int \frac{\hat{\omega}}{N} E_0 A(\mu) B(\hat{\omega}) \Phi(\phi) \cos \phi \delta_-^{3/2}(\hat{\omega}) \gamma^{1/2}(\hat{\omega}) d\phi d\hat{\omega} d\mu \\ &= \frac{E_0 b_x}{N} \int B_0 \hat{\omega}^{1-p} \delta_-^{3/2}(\hat{\omega}) \gamma^{1/2}(\hat{\omega}) d\hat{\omega} \\ &= \frac{E_0 b_x}{N} D_{u'w'\delta_-}(p, f, N). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die Kombination von ( 2.63 ) und ( 2.60 ) führt zu der Beziehung zwischen dem vertikalen Impulsfluss  $\overline{u'w'\delta_-}$  und der Kovarianz aus Wind und Temperatur  $\overline{u'\hat{T}'_{+90}}$  :

$$\overline{u'w'\delta_-} = \frac{g}{N^2} \left[ \frac{D_{u'w'\delta_-}(p, f, N)}{D_{u'\hat{T}'_{+90}}(p, f, N)} \right] \overline{u'\hat{T}'_{+90}} . \quad (2.64)$$

Die Gleichung ( 2.64 ) ist das spektrale Analogon zu Gleichung ( 2.56 ) und man erkennt beim Vergleich, dass das Verhältnis  $D_{u'w'\delta_-}$  zu  $D_{u'\hat{T}'_{+90}}$  als eine charakteristische intrinsische Wellenfrequenz  $\varpi$  interpretiert werden kann.

Der vertikale Fluss von zonalem Impuls ist also proportional zu der Kovarianz der zonalen Windfluktuationen und der normalisierten Temperaturfluktuation und kann in Abhängigkeit von der intrinsischen Frequenz  $\hat{\omega}$  aus Temperatur- und Windmessungen der Radiosonden bestimmt werden. Gleiches gilt analog auch für den vertikalen Fluss des meridionalen Impulses.

## 2.4 Analyseprozeduren

### 2.4.1 Radiosondendaten

Während eines Radiosondenaufstieges werden die meteorologischen Größen Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und relative Feuchte rF gemessen. Mit Hilfe von „*Radartracking*“ wird die Entfernung oder mit GPS die jeweilige Position bestimmt. Aus der Positionsmessung wird der Horizontalwind berechnet, und die geopotentielle Höhe wird mit Hilfe der barometri-

schen Höhenformel aus den PTU-Werten<sup>12</sup> berechnet. In Lindenberg werden täglich vier Radiosonden (alle 6 Stunden: 00:00 UTC<sup>13</sup>, 06:00 UTC, 12:00 UTC, 18:00 UTC) gestartet. Die zeitliche Auflösung beträgt für die Windmessungen 30 s, das entspricht 150 m Höhenauflösung und für die Temperatur 10 s, also 50 m.

Für den normalen Wetterdienst werden im Routinedienst von diesen Profilen nur die Hauptdruckflächen und die „markanten Punkte“ gespeichert und weiter verwendet. Dies entspricht etwa einer Höhenauflösung von 1-3 km in der Troposphäre und unteren Stratosphäre. Damit können Schwerewellen aber nicht aufgelöst werden. Seit einigen Jahren werden jedoch an immer mehr Stationen die hochaufgelösten Aufstiegsdaten archiviert. In der vorliegenden Arbeit werden die hochaufgelösten Radiosondendaten der Station Lindenberg (52.1°N, 14.1°E) in Brandenburg (~100 km südöstlich von Berlin) aus den vier Jahren 1995 bis 1998 untersucht.

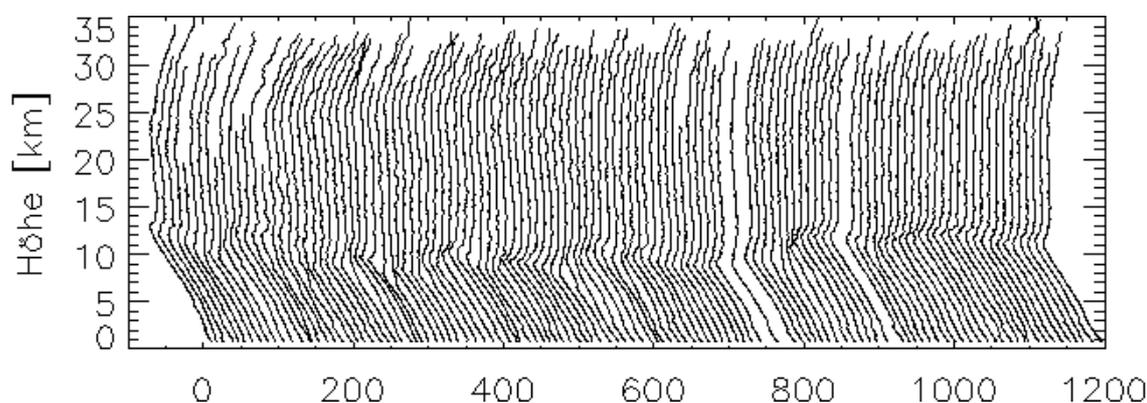


Abbildung 2.6: Temperaturprofile aus Radiosondendaten der Station Lindenberg vom April 1998. Die Profile (vier Profile pro Tag) sind mit einem Abstand von 10 Grad in zeitlicher Reihenfolge eingetragen. Auf der x-Achse ist die Temperatur in °C und auf der y-Achse die Höhe in km aufgetragen.

### Mögliche Fehlerquellen für die Analysen

Eine mögliche Fehlerquelle für die Analysen der Radiosondenprofile liegt daran, dass die Messungen der Radiosonde in der Höhe mit nicht gleichmäßigem Abstand erfolgen. Sie erfolgen zwar genau alle 10 s (Temperaturmessung) oder 30 s (Windmessung), aber der Höhenabstand liegt durch die leicht variierende Steiggeschwindigkeit zwischen 40 und 80 m (Temperaturmessung) und 150 und 200 m (Windmessung). Für den verwendeten Algorithmus der Fourieranalyse („FFT“) müssen sie jedoch in gleichmäßigen Höhenschritten vorliegen. Daher werden die Profile vor der Analyse mit einer kubischen Spline-

---

<sup>12</sup> PTU-Wert: P steht für Druck, T für Temperatur und U für Horizontalwind.

<sup>13</sup> UTC steht für die „*Universal Time Coordinated*“, die der Greenwich Zeit entspricht.

Funktion auf 50 m interpoliert. Ein Vergleich der Ergebnisse zwischen der verwendeten Standard FFT-Routine und einer weitaus Rechenzeit intensiveren Routine für Daten mit unterschiedlichen Abständen von Ferraz-Mello [1981] durch Allen [1995] ergab einer sehr gute Übereinstimmung beider Verfahren, so dass der Standardalgorithmus problemlos hier angewendet werden kann.

Weiterhin muss bei der Verwendung von Radiosondendaten zur Beobachtung von Schwerewellen berücksichtigt werden, dass es sich bei den gemessenen Profilen nicht um vertikale Schnitte über der Station handelt. Eine Radiosonde steigt langsam mit einer Vertikalgeschwindigkeit von etwa 5 m/s auf, und driftet horizontal mit dem Hintergrundwind ab. Die beobachteten vertikalen Skalen der Schwerewellen sind also nicht unbedingt die wahren vertikalen Skalen der Schwerewellen, da die Beobachtungen beeinflusst sind von den horizontalen und temporären Variationen des Wellenfeldes. Dieses Problem wurde von Sidi et al. [1988] und Gardner und Gardner [1993] näher untersucht und beide kamen zu dem Ergebnis, dass der daraus resultierende Fehler vernachlässigbar ist gegenüber den weitaus größeren Abweichungen innerhalb der berechneten Powerspektren der Fluktuationen, die durch die Trägheit des Temperatursensor bei der Anpassung an die Umgebungstemperatur in der Radiosonde entstehen.

Bei der Anpassung des Temperatursensors an die Umgebungstemperatur liegt eine gewisse Trägheit des Instrumentes vor. Diese ist bei der bei der Auswertung der Daten zu berücksichtigen. Bei der Auswertung bzw. Aufzeichnung der Profile durch den jeweiligen Wetterdienst ist die Trägheit so weit berücksichtigt worden, wie es für die Verwendung der Radiosondenprofile zur synoptischen Weiterverwendung z.B. in Analysen notwendig ist.

Berechnet man jedoch aus den Temperaturprofilen Powerspektren der vertikalen Wellenzahlen, treten doch noch weitere Abweichungen zwischen dem gemessenen Temperaturspektrum und dem wahren Temperaturspektrum auf.

Die folgende Korrekturmethode (basierend auf Allen [1996]) wird in dieser Arbeit verwendet:

Es wird angenommen, dass die Änderung der Temperatur des Sensors mit der Zeit proportional ist zu der Differenz der Temperatur des Sensors  $T_s$  und der Temperatur der Umgebung  $T$ , also

$$\frac{dT_s}{dt} = -\frac{1}{\tau} [T_s - T]. \quad (2.65)$$

$\tau$  ist hierbei die Anpassungszeit-Konstante des Temperatursensors, abhängig vom Typ des Sensors und der Umgebung, in der er benutzt wird.

Die Anpassungszeit eines Temperatursensors in einer sich mit der Zeit verändernde Umgebungstemperatur ist durch Gleichung ( 2.65 ) vollständig beschrieben. Für eine sich wellenförmig verändernden Umgebungstemperatur ist die Lösung der Gleichung für die An-

passungszeit im stationären Fall von besonderem Interesse. Als Lösung ergibt sich eine sogenannte Filterfunktion  $I(m)$ , die das Umgebungs-Spektrum  $X(m)$  in Beziehung zu dem gemessenen Spektrum  $X_s(m)$  in Abhängigkeit zu jeder Wellenzahl  $m$  setzt (nach Bath [1974]). Ist die Filterfunktion  $I(m)$  bekannt, kann das Umgebungsspektrum aus dem gemessenen Spektrum wiedergewonnen werden:

$$X(m) = \frac{X_s(m)}{I(m)} . \quad (2.66)$$

Angenommen der Ballon mit dem Sensor steigt mit einer vertikalen Geschwindigkeit von  $V_0$ , dann wird aus Gleichung ( 2.65 ) mit  $\beta = V_0 \cdot \tau$  :

$$\frac{dT_s}{dt} + \frac{1}{\beta} T_s = -\frac{1}{\beta} T . \quad (2.67)$$

Die Temperatur, die vom Sensor gemessen wird, verändert sich in Abhängigkeit von der Höhe aber unabhängig von der Zeit entsprechend folgender Gleichung:

$$T(z) = A e^{i(mz+\varphi)} \quad \text{mit } m = 2\pi / \lambda_z . \quad (2.68)$$

Man kann nun für den stationären Fall ( $\beta=\text{const.}$ ) die Lösung berechnen:

$$T_s(z) = \frac{A}{1 + im\beta} e^{i(mz+\varphi)} . \quad (2.69)$$

Damit ergibt sich eine Filterfunktion  $I(m) = 1/(1 + im\beta)$ , welche die Fouriertransformierte von  $T_s(z)$  zu der von  $T(z)$  für jede Wellenzahl  $m$  in Beziehung setzt. Da die spektrale Energiedichte das Quadrat der Fouriertransformierten ist, kann folgende Beziehung für das gemessene Powerspektrum der vertikalen Wellenzahl zum wahren Powerspektrum aufgestellt werden:

$$E_{T_s}(m) = \frac{1}{1 + (m\beta)^2} E_T(m) . \quad (2.70)$$

Hierbei sind  $E_{T_s}(m)$  und  $E_T(m)$  die Powerspektren der vertikalen Wellenzahlen von  $T_s(z)$  und  $T(z)$ . Gleichung ( 2.70 ) kann verwendet werden, um das beobachtete Powerspektrum der vertikalen Wellenzahlen aus den Temperaturfluktuationen zu korrigieren, vorausgesetzt, dass die Steiggeschwindigkeit der Radiosonde  $V_0$  und die Antwortzeit des Sensors  $\tau$  bekannt sind.

Nach Allen und Vincent [1995] und Turtiainen [1991a, 1991b] liegt die Anpassungszeit der verwendeten Väisälä-Sonden für den Troposphärenbereich bei nur 1-2 s, jedoch für die untere Stratosphäre in Höhen von bis zu 30 km etwa bei 8 s. Für das Powerspektrum der vertikalen Wellenzahlen ergibt sich somit eine zu kleine Amplitude (die Steigung ist zu steil) für große Wellenzahlen, welche mit Gleichung ( 2.70 ) korrigiert werden kann. Inner-

halb der Troposphäre ergeben sich nur unbedeutende Abweichungen, in der Stratosphäre sind sie jedoch erheblich, wie in Abbildung 2.7 dargestellt. Deshalb sind alle in dieser Arbeit vorgestellten stratosphärischen Powerspektren nach Gleichung ( 2.70 ) korrigiert worden.

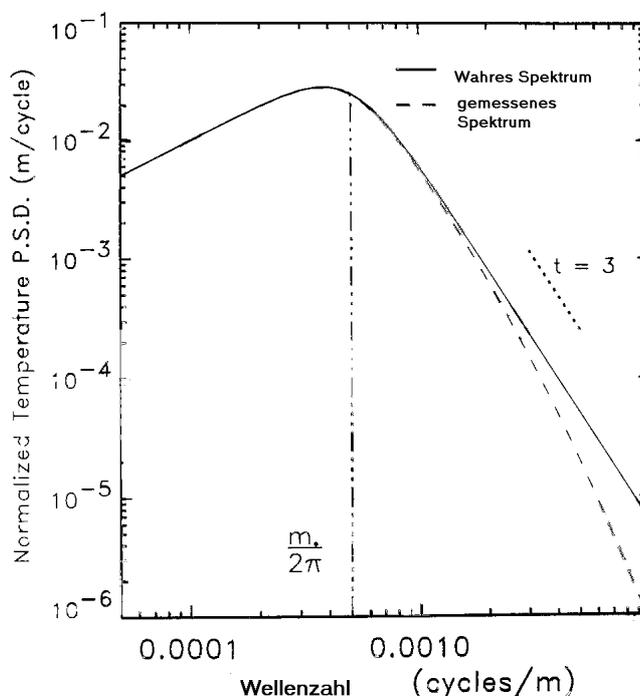


Abbildung 2.7: Das modifizierte Desaubies-Powerspektrum der vertikalen Wellenzahl und die Abweichung, die sich durch eine Anpassungszeit von 8 s ergibt. Nach Allen und Vincent [1995].

### Auswahl des zu untersuchenden Höhenbereiches $L$

Innerhalb des Parametrisierungsmodells von Fritts und van Zandt [1993] (Abschnitt 2.3) wird die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  als konstant angenommen. In der realen Atmosphäre variiert der Wert von  $N$  aber mit der Höhe (Abbildung 2.8). Die zu analysierenden Höhenbereiche wurden daher so gewählt, dass innerhalb des Intervalls  $N$  keine zu große Varianz aufweist. Die Brunt-Väisälä-Frequenz pendelt innerhalb der Troposphäre um den Wert Null. An der Tropopause ist eine deutliche Veränderung vorhanden (Abbildung 2.8). Dieser Sprung der Frequenz sollte möglichst nicht im Analyseintervall liegen. Innerhalb der unteren Stratosphäre ist  $N$  sehr viel größer als in der Troposphäre, die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  liegt im Höhenbereich von 12-30 km über Lindenberg zwischen Werten von 0.003 bis 0.007 (rad/s)<sup>2</sup>.

Folgende Bereiche sind daher ausgewählt worden:

1. Das Intervall 2-9 km in der Troposphäre.

Der Bereich der Tropopause ist gekennzeichnet durch ein Temperaturminimum. Während des Jahres wandert die Tropopausenhöhe in Lindenberg zwischen 9.5 km und 11.5 km (Abbildung 2.6). Der zu untersuchende Troposphärenbereich wurde auf 2-9 km festgelegt,

## 2.4 Analyseprozeduren

um planetarische Grenzschichteffekte auszuschließen. Mit der oberen Grenze von 9 km Höhe ist man das ganze Jahr über unterhalb der Tropopause. Damit beträgt die maximal auflösbare vertikale Wellenlänge jedoch nur  $\lambda_z = 7$  km.

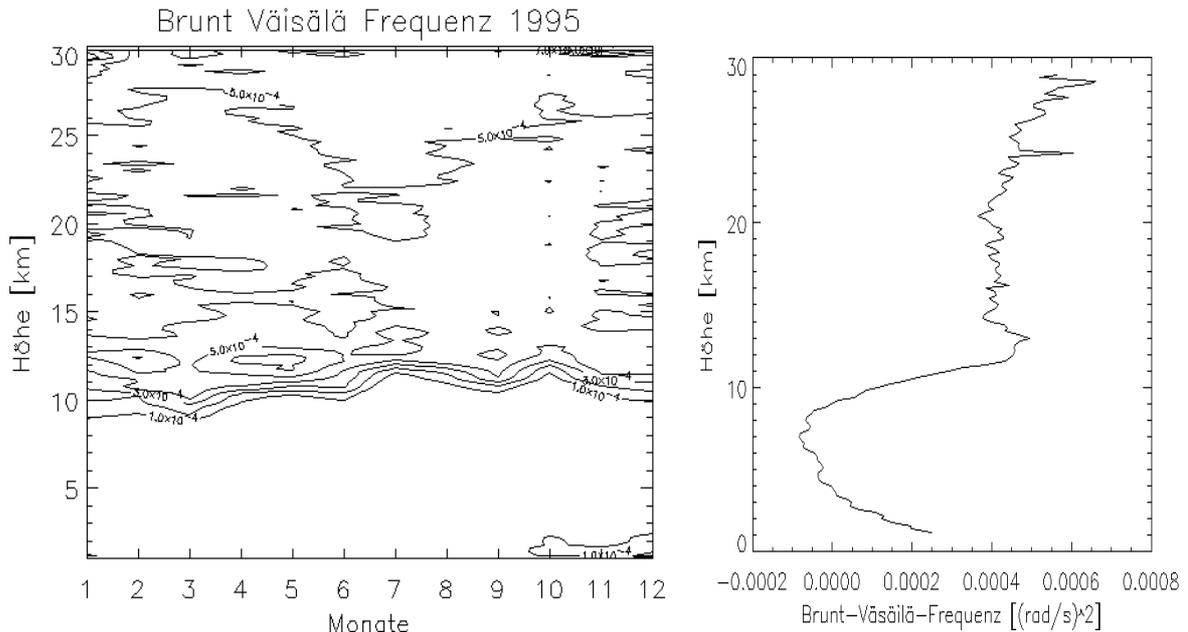


Abbildung 2.8: Höhen/Zeitschnitt der Brunt-Väisälä-Frequenz aus den Radiosondendaten von Lindenberg (links) und das über das ganze Jahr 1995 gemittelte Höhenprofil der Brunt-Väisälä-Frequenz (rechts).

### 2. Das Intervall 12-19 km in der Stratosphäre.

Dieses Intervall liegt direkt über dem Tropopausenbereich und ist genau so lang wie das troposphärische Intervall. Damit ist gewährleistet, dass in den Ergebnissen die Beiträge der Wellen mit den gleichen Wellenlängen enthalten sind wie in den Ergebnissen für die Troposphäre. Dieses Intervall endet allerdings gerade in etwa der Höhe, an der in Lindenberg im Sommer der stratosphärische Ostwind beginnt, etwa 18 km Höhe. Um zu untersuchen, ob dieser Ostwind einen Einfluss auf die Ausbreitung der Schwerewellen hat, wurde zusätzlich ein längeres Höhenintervall untersucht.

### 3. Das Intervall 12-30 km in der Stratosphäre.

30 km ist die oberste Höhe, die noch sinnvoll analysiert werden kann, da noch eine genügende Anzahl von Radiosondenprofilen diese Höhe erreichen. Bei diesem 18 km umfassenden Bereich werden vertikale Wellenlängen  $\lambda_z$  bis 18 km aufgelöst.

Die zu erwartenden vertikalen Wellenlängen liegen bei etwa 3 km. In Tabelle 2.1 sind die Ergebnisse von verschiedenen Autoren dargestellt. Alle Autoren haben übereinstimmend für die untere Stratosphäre vertikale Wellenlängen der beobachteten Schwerewellen von 2 bis 4 km gefunden, lediglich Guest et al. haben Schwerewellen mit noch kürzeren und längeren Wellenlängen von 1 bis 7 km gefunden:

Quelle	Länge und Breite	Vertikale Wellenlänge	Höhenintervall
Allen und Vincent [1995]	12°S-70°S/36°E-160°E	2.4-3 km 2.1-2.9 km	17-24 km 2-9 km
Guest et al. [2000]	55°S/159 E	1-7 km	12-30 km
Zink und Vincent [2001]	55°S/159 E	~4 km	20-28km
Vincent et al. [1996]	55°S/159 E	2-3 km	12-25 km
Vincent und Alexander [2000]	12°S/97°E	2 km	18-25 km
Ogino et al. [1995]	14°S/25°N	2.7 km	14-22 km

Tabelle 2.1: Übersicht der Ergebnisse für die vertikale Wellenlänge von Schwerewellen in anderen Arbeiten.

### 2.4.2 Spektralanalyse der Temperaturfluktuation

Grundlage für die Berechnung des vertikalen Wellenzahlspektrums ist die Fluktuation der Temperatur innerhalb des Radiosondenprofils. Aufgrund der Schwerewellen schwankt die gemessene Temperatur um eine sogenannte Hintergrundtemperatur. Als Hintergrundprofil wird ein Profil verwendet, welches man durch eine Polynominal-Anpassung 2. oder 3. Ordnung an das gemessene Temperaturprofil für das zu untersuchende Höhenintervall erhält. Von dem gemessenen Profil  $T$  wird das polynominal angepasste Hintergrundprofil  $\bar{T}$  subtrahiert,

$$T' = T - \bar{T} , \quad (2.71)$$

und man erhält die Abweichungen der Temperatur vom „ungestörten Normalzustand“ der Atmosphäre, das sogenannte Fluktuationsprofil  $T'$ .

Für ein kurzes Intervall von 7 km ist ein Polynom 2. Ordnung ausreichend, um die Hintergrundtemperatur anzunähern. Für den längeren Höhenbereich 12-30 km wurde als Anpassung ein Polynom 3. Ordnung verwendet. Die Hintergrundtemperatur weist im Höhenbereich von 12 km bis 30 km Variationen auf, die mit einem Polynom 3. Ordnung besser erfasst werden können. Als Beispiel ist in Abbildung 2.9 das Temperaturprofil vom 4.4.1998, 6:00 UTC dargestellt.

Im linken Teil ist der kurze Bereich von 12-19 km und eine Polynominalanpassung 2. Ordnung dargestellt. Hier schwankt die Temperatur mit der Höhe von 12-19 km nur zwischen etwa  $-65^{\circ}\text{C}$  und  $-55^{\circ}\text{C}$  und die Polynominalanpassung 2. Ordnung gibt eine hinreichend gut angepasste Hintergrundtemperatur wieder. Im rechten Teil der Abbildung 2.9 ist die Temperatur von 12-30 km dargestellt. Oberhalb von 19 km Höhe sinkt die Temperatur weiter bis auf  $-70^{\circ}\text{C}$  und steigt ab  $\sim 25$  km schnell auf fast  $-45^{\circ}\text{C}$ . Man sieht anhand der

## 2.4 Analyseprozeduren

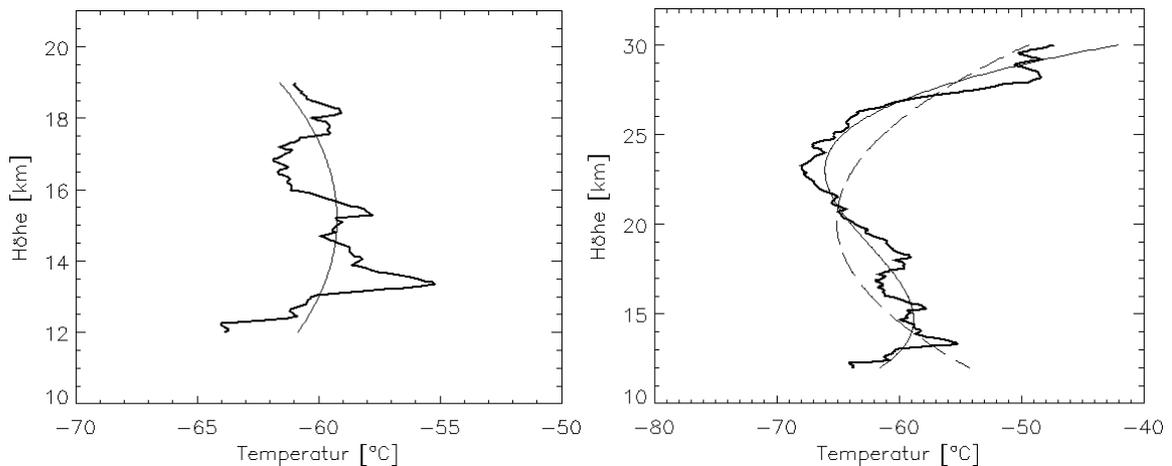


Abbildung 2.9 Temperaturprofil des Radiosondenaufstieges vom 4.4.1998, 06:00 UTC in Lindenberg. Links der Höhenbereich 12-19 km mit einer Polynominalanpassung 2. Ordnung und rechts der Höhenbereich 12-19 km mit der Polynominalanpassung 2. Ordnung (gestrichelt) und 3. Ordnung (dünne Linie).

Abbildung 2.9 deutlich, dass ein Polynom 2. Ordnung (gestrichelte Linie) die Temperaturänderungen sehr glättet. Die Differenz aus Hintergrundtemperatur und gemessener Temperatur wird stellenweise sehr groß, was eine hohe Fluktuation gleich hoher Wellenanteile bedeuten würde. Als Folge davon werden bei der Spektralanalyse unrealistische Parameter der Schwerewellen berechnet. Eine Polynominalanpassung 3. Ordnung (dünne durchgezogene Linie in Abbildung 2.9 rechts) liefert die realistischere Erfassung der Hintergrundtemperatur und gibt damit auch realistischer den Schwerewellenanteil am gemessenen Temperaturprofil wieder.

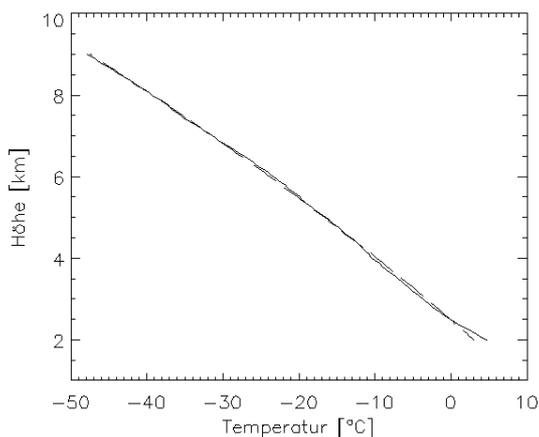


Abbildung 2.10: Temperaturprofil aus Radiosondendaten von Lindenberg vom 4.4.1998, 06:00 UTC. Dargestellt ist der Ausschnitt von 2-9 km Höhe. Im Diagramm links ist das gemessene Temperaturprofil (durchgezogene Linie) und das als Hintergrundtemperatur verwendete Polynom 2. Ordnung (gestrichelt) eingetragen. Rechts ist nur das Fluktuationsprofil,  $T' = \bar{T} - T$ , dargestellt.

In der Troposphäre (Abbildung 2.10, links) steigt die Temperatur weitgehend konstant an, und eine Anpassung 2. Ordnung ist im Bereich 2-9 km ausreichend. Das sich aus der Anpassung ergebende Fluktuationsprofil  $T'$  für den Bereich 2-9 km in der Troposphäre ist in Abbildung 2.10, rechts dargestellt.

Nach der Bildung des Fluktuationsprofils aus dem Temperaturprofil der Radiosonden wird das Profil der normalisierten Temperaturfluktuation,

$$\hat{T}' = T' / \bar{T} \quad , \quad (2.72)$$

das Verhältnis von Temperaturfluktuationen zu Hintergrundtemperatur berechnet.

Dieses Verfahren wird „*prewhitening*“ genannt. Der Grund für ein „*prewhitening*“ der Daten vor einer Spektralanalyse ist es, den Effekt von spektralen Löchern zu reduzieren (siehe Blackman Tukey [1958]). „*Prewhitening*“ durch Differenzieren ist sinnvoll, wenn das Spektrum, das berechnet werden soll, ein „*red noise*“-Spektrum ist. Das ist der Fall, wenn  $A(m) \propto m^{-t}$  und  $t$  positiv ist.

Aus den Profilen der normalisierten Temperaturfluktuation,  $\hat{T}'$  (Gleichung (2.72)), wird ein Spektrum der vertikalen Wellenzahl mit einer Fourier-Analyse (Fast-Fourier-Transformation) berechnet. Die beiden charakteristischen Größen des Wellenzahlspektrums, die Steigung  $t$  und die Übergangswellenzahl  $m^*$ , werden über die Anpassung an ein Modellspektrum bestimmt. An das Monatsmittel der Wellenzahlspektren wird mit dem „*Levenberg-Marquardt least squares curve fitting algorithm*“ (siehe Press et al. [1992]) ein Spektrum der Form

$$A(m) = A_0 \frac{\frac{m}{m^*}}{1 + \frac{m}{m^*}^{(t+1)}} \quad (2.73)$$

angepasst.

### 2.4.3 Vertikale Ausbreitungsrichtung der Wellen

Das beim Radiosondenaufstieg gemessene Windprofil kann in einen zonalen Anteil  $u$  und einen meridionalen Anteil  $v$  aufgeteilt werden. Diese Anteile werden genau wie bei den Temperaturprofilen mit Hilfe einer Polynominalanpassung 2. Ordnung in Fluktuationsprofile  $u'$  und  $v'$  und Hintergrundprofile  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  geteilt.

Aus den Windfluktuationen  $u'$  und  $v'$  lässt sich bestimmen, ob sich die Welle aufwärts oder abwärts ausbreitet. Trägt man die horizontalen Windkomponenten des Radiosondenprofils der Höhe nach gegeneinander auf, so kann man sehen, wie sich der Windhodograph mit der Höhe dreht und daraus ableiten, ob eine Aufwärts- oder Abwärtsbewegung der den Fluktuationen zugrundeliegenden Wellen erfolgt. In Abbildung 2.11 ist der Hodograph der Windfluktuation aus dem Radiosondenaufstieg vom 29.9.1996, 12:00 UTC für den Ausschnitt 12-19 km aufgezeichnet. Hier ist eine Nordwest-Südost-Orientierung der Ellipse

## 2.4 Analyseprozeduren

vorhanden und der Drehsinn ist im Uhrzeigersinn, also eine aufwärtsgerichtete Ausbreitung der Wellen, wie man an den kleinen Pfeilen in der zweidimensionalen Abbildung rechts erkennen kann.

Für eine Inertial-Schwerewelle mit der intrinsischen Frequenz  $\hat{\omega}$ , die sich in einer Atmosphäre der Inertial-Frequenz  $f$  ausbreitet, differieren  $u'$  und  $v'$  in Amplitude und Phase. Die Zonal- und Meridional Komponenten des Horizontalwindes hängen über die Polarisationsgleichung ( 2.30 ) nach Gossard und Hooke [1975] zusammen:

$$v' = \frac{l}{k} \left[ \frac{1 - i \left( \frac{f}{\hat{\omega}} \right) \left( \frac{k}{l} \right)}{1 + i \left( \frac{f}{\hat{\omega}} \right) \left( \frac{l}{k} \right)} \right] u' . \quad (2.74)$$

Diese Formel lässt auf eine elliptisch polarisierte Welle schließen. Im rechten Teil der Abbildung 2.11, der zweidimensionalen Darstellung des Windhodographens erkennt man etwa die Bildung einer Ellipse (gestrichelt eingezeichnet) durch die Komponenten  $u'$  und  $v'$  der Schwerewellen.

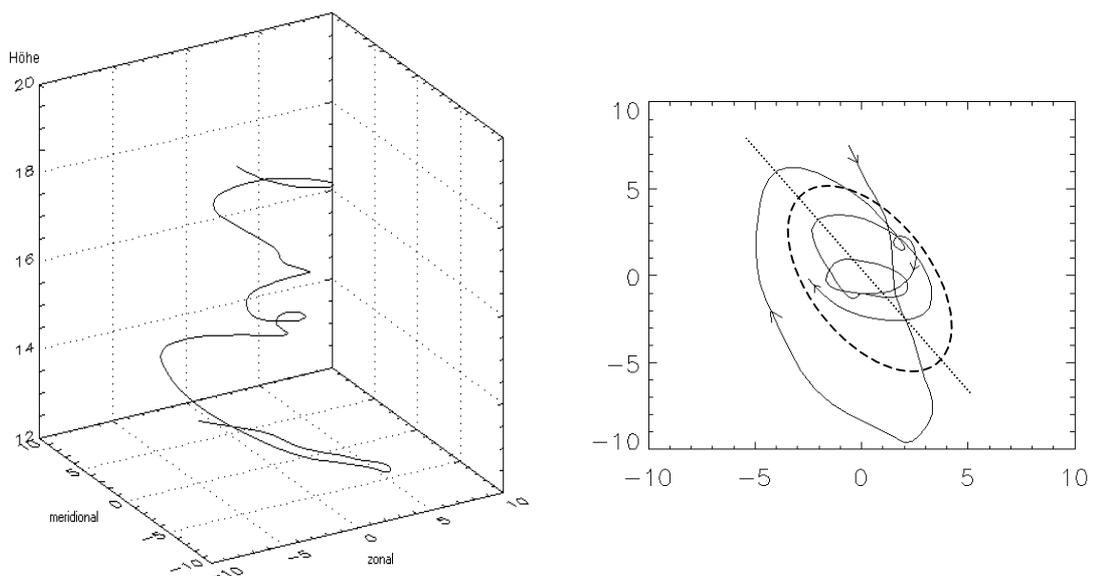


Abbildung 2.11: Hodograph der Windfluktuationen des Radiosondenprofils vom 29.9.1996, 12:00 UTC aus Lindenberg. Links die dreidimensionale Darstellung, aufgetragen sind die Windfluktuationen in zonaler Richtung (x-Achse in [m/s]) und meridionaler Richtung (y-Achse in [m/s]) gegen die Höhe in km auf der z-Achse. Rechts die x-y-Darstellung des gleichen Hodographens. Mit Pfeilen ist hier die Drehrichtung markiert.

Die Exzentrizität (das Verhältnis der Achsen) der Ellipse ist frequenzabhängig, und proportional zu  $f/\hat{\omega}$ . Die Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle hat einen horizontalen Anteil, der entlang der Hauptachse der Ellipse liegt. Je nach dem wie der Drehsinn der Ellipse mit der Höhe ist, kann man erkennen, ob die Wellenenergie aufwärts oder abwärts

verteilt wird. In der Nordhemisphäre ( $f > 0$ ) haben Wellen, die Energie aufwärts verteilen, durch den Coriolis-Effekt eine Drehrichtung der Ellipse im Uhrzeigersinn. Auf der Südhalbkugel ist dies genau umgekehrt.

Ein einfacher Weg, den Drehsinn der Ellipse zu bestimmen, ist es, aus den Fluktuationsprofilen von Zonal- und Meridionalwind ein Rotationsspektrum zu berechnen [Vincent 1984, Eckermann und Vincent 1989]. Das Rotationsspektrum teilt den Wind dabei in zwei Anteile: Drehrichtung im Uhrzeigersinn (die Vertikalkomponente der Gruppengeschwindigkeit ist positiv) und Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn (die Vertikalkomponente der Gruppengeschwindigkeit ist negativ).

Der horizontale Wind sei gegeben durch  $r(z) = u(z) + iv(z)$ .  $\mathfrak{R}(m)$  sei die Fouriertransformierte von  $r(z)$ ; dann kann man das rechtsgerichtete Spektrum  $RS_r(m)$  und das linksgerichtete Spektrum  $RS_l(m)$  bilden aus [z.B. Eckermann 1996]:

$$RS_r(m) \propto \mathfrak{R}_{-m} \mathfrak{R}_{-m}^* , \quad (2.75)$$

$$RS_l(m) \propto \mathfrak{R}_{+m} \mathfrak{R}_{+m}^* , \quad (2.76)$$

wobei  $\mathfrak{R}_{-m}$  und  $\mathfrak{R}_{+m}$  die komplexen Werte  $\mathfrak{R}$  für die Wellenzahlen  $-m$  und  $+m$  sind und der Stern die komplex konjugierte Variable markiert [Vincent 1984]. Die Summe aus beiden Anteilen ist gleich dem Powerspektrum der vertikalen Wellenzahl der horizontalen Windgeschwindigkeit.

Den Drehsinn der Windellipse erhält man auch subjektiv über eine Hodographenanalyse. Zeichnet man die Fluktuationen des zonalen Windes ( $u'$ ) gegen die des meridionalen Windes ( $v'$ ) auf, kann man aus der Drehrichtung des Hodographens den gleichen Schluss ziehen. In Abbildung 2.11 ist der Hodograph der Windfluktuation aus dem Radiosondenaufstieg vom 29.9.1996, 12:00 UTC für den Ausschnitt 12-19 km aufgezeichnet. Hier ist eine Nordwest-Südost-Orientierung der Ellipse vorhanden, und der Drehsinn ist im Uhrzeigersinn, also eine aufwärtsgerichtete Ausbreitung der Wellen, wie man an den kleinen Pfeilen in der zweidimensionalen Abbildung rechts erkennen kann.

### 2.4.4 Stokes-Parameter-Analyse

Die eben erwähnte Ellipse, die aus den horizontalen Bewegungskomponenten einer Schwerewelle entsteht, enthält noch weitere Informationen über das Wellenfeld. Die horizontale Ausbreitungsrichtung der Wellen ist parallel zur Orientierung der Hauptachse der Ellipse. Über das Achsenverhältnis kann die intrinsische Frequenz der Welle bestimmt werden. Um diese Parameter zu berechnen, wird die folgende Stokes-Parameter-Analyse verwendet.

Bei der Methode, wie sie von Vincent und Fritts [1987] beschrieben wird, nutzt man die Ähnlichkeit von teilweise polarisierten Schwerewellen mit teilweise polarisierten elektro-

magnetischen Wellen aus. Vincent und Fritts legten ihrer Technik die Beschreibung der Parameter der teilweise polarisierten, quasi monochromatischen elektromagnetischen Wellen von Stokes zugrunde.

Es wird angenommen, dass ein vertikales Profil der horizontalen Windfluktuationen ( $u'(z)$ ,  $v'(z)$ ), ein partiell polarisiertes Wellenfeld enthält. Das heißt, es gibt eine kohärente Welle mit der Amplitude  $(u_0, v_0)$  in einem unpolarisierten, isotropen, rauschähnlichen Hintergrund-Geschwindigkeits-Feld mit der Varianz  $\overline{u_{noise}^2} + \overline{v_{noise}^2}$ . Als sogenannte Stokes-Parameter werden dann definiert:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \overline{u_0^2 + v_0^2} + \left( \overline{u_{noise}^2} + \overline{v_{noise}^2} \right) = \overline{u'^2} + \overline{v'^2}, \\ D &= \frac{1}{2} \overline{u_0^2 - v_0^2} = \overline{u'^2} - \overline{v'^2}, \\ P &= \overline{2u_0v_0 \cos \delta} = \overline{2u'v'}, \\ Q &= \overline{2u_0v_0 \sin \delta}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Der erste Parameter  $I$ , ist proportional zu der gesamten Irradianz des Wellenfeldes. Die weiteren Parameter  $D$ ,  $P$ ,  $Q$  geben eine Beschreibung des Polarisationszustands an.  $D$  zeigt die Abweichung entlang der x- und y-Achse,  $P$  ist der lineare Polarisationsparameter.  $Q$  ist der zirkulare Polarisationsparameter, (negativ bedeutet: Drehsinn nach rechts; positiv bedeutet: Drehsinn nach links).  $\delta$  ist die Phasendifferenz zwischen Zonal- und Meridionalwind.  $u_0$  und  $v_0$ :

$$\delta = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right), \tag{2.78}$$

und  $\tau$  ist die Orientierung der Hauptachse:

$$\tau = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{P}{D}\right). \tag{2.79}$$

Aus den Parametern kann auch der Grad der Polarisation  $d$ , das Verhältnis von polarisierter Bewegung zu ungeordneter (gesamter) Bewegung berechnet werden:

$$d = \sqrt{(D^2 + P^2 + Q^2) / I^2}. \tag{2.80}$$

Ist  $d = 1$ , so handelt es sich um eine monochromatische Welle; ist  $d = 0$ , sind die Wellen in alle Richtungen zufällig verteilt.

In der Realität existiert jedoch nicht wie angenommen eine dominante Welle innerhalb des Wellenfeldes. Es ist viel eher so, dass viele sich überlagernde Wellen die Fluktuationen im Windprofil ergeben. Die Stokes-Parameter werden in diesem Fall spektral definiert. Bei der Methode, die Eckermann und Vincent [1989] entwickelten, nimmt man an, dass die Fluktuationen des Meridional- und des Zonalwindes  $u'(z)$  und  $v'(z)$ , die Fouriertransforma-

tionen  $\mathbf{U}(m) = U_R(m) + iU_I(m)$  und  $\mathbf{V}(m) = V_R(m) + iV_I(m)$  haben, wobei  $m$  die vertikale Wellenzahl ist. So erhält man folgende spektrale Energiedichte für die vier Stokes-Parameter:

$$\begin{aligned}\tilde{I}(m) &= C \left\{ \overline{U_R^2(m)} + \overline{U_I^2(m)} + \overline{V_R^2(m)} + \overline{V_I^2(m)} \right\} \\ \tilde{D}(m) &= C \left\{ \overline{U_R^2(m)} + \overline{U_I^2(m)} - \overline{V_R^2(m)} - \overline{V_I^2(m)} \right\} \\ \tilde{P}(m) &= 2C \left\{ \overline{U_R(m)V_R(m)} + \overline{U_I(m)V_I(m)} \right\} \\ \tilde{Q}(m) &= 2C \left\{ \overline{U_R(m)V_I(m)} - \overline{U_I(m)V_R(m)} \right\}\end{aligned}\tag{2.81}$$

$C$  ist eine Konstante, die so gewählt wird, dass jeder Stokes-Parameter die Einheiten der spektralen Energiedichte hat. Die waagerechten Striche über den Variablen bedeuten zeitliche Mittel. Das Achsenverhältnis  $AV$  der Windellipse ist:

$$\frac{\hat{\omega}}{f} \approx AV = \cot \zeta ,\tag{2.82}$$

mit  $2\zeta = \arcsin\left(\frac{Q}{d \cdot I}\right)$ .

Im Falle einer monochromatischen Welle ergeben sich hieraus offensichtlich die Definitionen (2.77); entsprechend überträgt sich die physikalische Interpretation dieser Parameter. Dabei werden nun die charakteristischen Eigenschaften des gesamten Wellenfeldes durch die Stokes-Parameter erfasst. Die intrinsische Frequenz  $\hat{\omega}$  einer monochromatischen Welle (mit  $d=1$ ) kann so indirekt über das Achsenverhältnis  $AV$  der Ellipse bestimmt werden.

Aus der Stokes-Parameter-Analyse erhält man weiterhin den Winkel  $\tau$ , die Winkel zwischen der Hauptachse der Windellipse und der  $x$ -Achse (siehe Gleichung (2.79)). Man kennt damit zwar die Orientierung des horizontalen Wellenzahlvektors  $\mathbf{K}_h$ , nicht jedoch dessen genaue Richtung, denn  $\mathbf{K}_h$  liegt für eine ideale, vollständig polarisierte monochromatische Welle parallel zur Hauptachse des Windhodographen. Die genaue Richtung des Vektors erhält man mit Hilfe der Temperaturdaten. Man vergleicht das Vorzeichen der Phase zwischen  $\mathbf{u}'_{//}$  und  $\hat{\mathbf{T}}'$  ( $\mathbf{u}'_{//}$  ist die Geschwindigkeit parallel zur Hauptachse). Für eine monochromatische Welle sind  $\mathbf{u}'_{//}$  und  $\hat{\mathbf{T}}'$  um  $90^\circ$  phasenverschoben. Transformiert man  $\hat{\mathbf{T}}'$  mit einer Hilbert-Transformation um  $90^\circ$ , ergibt das Vorzeichen von  $\overline{\mathbf{u}'_{//} \hat{\mathbf{T}}'_{+90}}$  zusammen mit der Orientierung der Wellen aus der Hodographenanalyse die Ausbreitungsrichtung  $\phi$  der Welle [Eckermann 1996]. Aus den zwei Polarisationsgleichungen (2.31) und (2.32) folgt nach einigen Umformungen:

$$\overline{\mathbf{u}'_{//} \hat{\mathbf{T}}'_{+90}} = \frac{-N^2}{g\omega} \frac{\mathbf{K}_h}{m} \overline{\mathbf{u}'_{//}} ,\tag{2.83}$$

Damit ist deutlich, dass mit  $\overline{\mathbf{u}'_{//} \hat{\mathbf{T}}'_{+90}}$  das Vorzeichen von  $\mathbf{K}_h$  definiert ist.

### 2.5 Zusammenfassung

Das folgende Flussdiagramm in Abbildung 2.12 gibt eine Übersicht über die Reihenfolge und die Zusammenhänge der Analyseprozeduren, die für die im 3. Kapitel vorgestellten Ergebnisse durchgeführt werden. In der obersten Reihe stehen die gemessenen Größen Temperatur und Wind, aus denen die Hintergrund- und Fluktuationsgrößen abgeleitet wurden. Darunter sind die verschiedenen Analyseprozeduren angeordnet, die benötigt werden um die in grau unterlegten Eigenschaften der Schwerewellen, die im folgenden Kapitel beschrieben werden zu berechnen. Anhand der Pfeile ist dargestellt, welche gemessenen Größen für welche Berechnung und Eigenschaft der Schwerewellen benötigt werden. Die durchbrochenen Linien mit Pfeilen zeigen die Verwendung der Temperatur und die durchgezogenen Linien mit Pfeilen die Verwendung der Windkomponenten an. Auch hier wird leicht ersichtlich, dass man erst mit Wind- und Temperaturmessungen ein umfassendes Bild der beobachteten Schwerewellen erhalten kann.

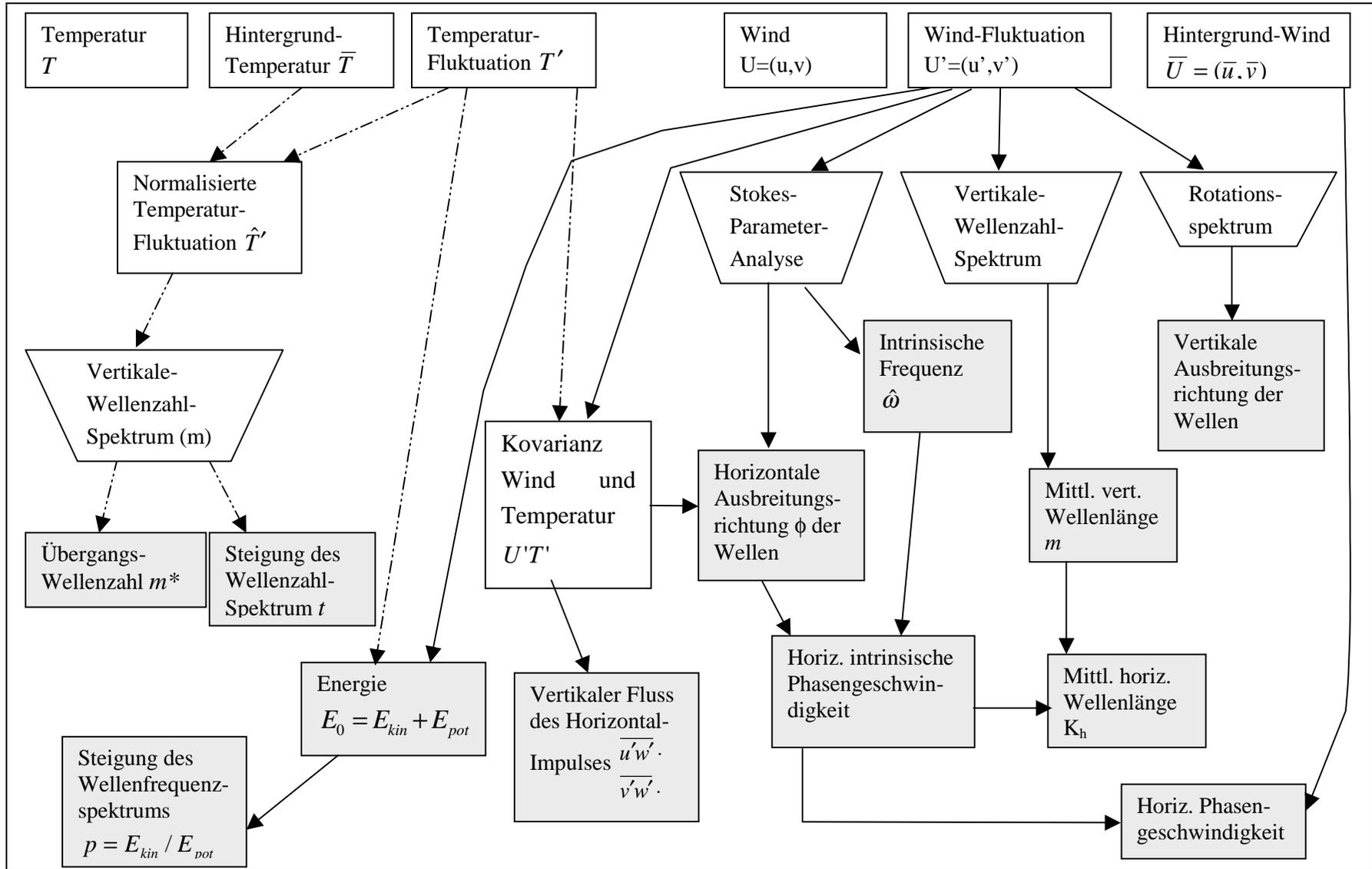


Abbildung 2.12: Flussdiagramm der verwendeten Analyseprozeduren.