Freie Universität Berlin

Bachelorarbeit am Institut für Mathematik der Freien Universität Berlin

Der Zusammenhang zwischen Gödels Unvollständigkeitssätzen, der Kontinuumshypothese und dem Ontologischen Gottesbeweis und seine Auswirkungen auf die metamathematische Grundlegung der Mathematik

Dr. Cordelia Mühlenbeck

Berlin, den 12. Februar 2024

Betreuer:
Prof. Dr. Christoph Benzmüller
Dr. Daniel Kirchner

Zusammenfassung

Kurt Gödels ontologischer Gottesbeweis, in dem er die notwendige Existenz Gottes über die maximale Menge der positiven Eigenschaften beweist, wurde 1970 veröffentlicht. In den Jahrzehnten zuvor wurden seine Unvollständigkeitssätze (1931), seine Beweisskizze über die Vereinbarkeit der ZF-Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom und der allgemeinen Kontinuumshypothese (1939), Arbeiten zur Erweiterung der Mengenlehre, sowie metamathematische Texte und Vorträge zur Grundlegung der Mathematik veröffentlicht. In der vorliegenden Arbeit wird der Zusammenhang dieser unterschiedlichen Arbeiten Gödels beschrieben und seine Auswirkungen auf die Grundlegung der Mathematik diskutiert. Dabei wird insbesondere Gödels Forderung nach neuen Begriffen, seine philosophische Anschauung zur mathematischen Intuition und Konzeptbildung und der Aufbau seines philosophischen, metamathematischen Programms auf der absoluten Unendlichkeit (in Anlehnung an Leibniz' Monadologie und seine Urmonade), herausgestellt. In diesem Zusammenhang wird ein neuer Mengenbegriff etabliert, der als Analogie zur Allklasse und zum Prinzip der Unerreichbarkeit von V als Grund-Axiom die Verbindung zwischen den hier diskutierten verschieden Gebieten und Gödels ontologischem Gottesbeweis darstellt, in dem das Maximum der positiven Eigenschaften über einen offenen, homogenen Mengenbegriff erreicht und so die notwendige Existenz Gottes bewiesen wird.

Abstract

Kurt Gödel's ontological proof of God, in which he proves the necessary existence of God through the maximal set of positive properties, was published in 1970. In the decades before, his incompleteness theorems (1931), his proof sketch on the consistency of the ZF set theory with the axiom of choice and the general continuum hypothesis (1939), works on the extension of set theory, as well as metamathematical texts and lectures on the foundations of mathematics were published. In the present work, the connection between these different works of Gödel is described and its effects on the foundation of mathematics are discussed. In particular, Gödel's call for new concepts, his philosophical view of mathematical intuition and concept formation and the foundation of his philosophical, metamathematical program on absolute infinity (based on Leibniz' monadology and his *Ur-monade*) are highlighted. In this context, a new concept of set is established which, in analogy to the class of all sets and the principle of the unattainability of V as a fundamental axiom, provides the connection between the various areas discussed here and represents a direct link to Gödel's ontological proof of God, in which the maximum of positive properties is achieved through an open, homogeneous concept of set and thus proving the necessary existence of God.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Neben allen anderen Arbeiten, die Kurt Gödel im Laufe seines Lebens schrieb, veröffentlichte er 1931 seine Arbeit über die formal unentscheidbaren Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (die ‚zwei Unvollständigkeitssätze'), 1939 eine Beweisskizze zur Vereinbarkeit der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF) mit dem Auswahlaxiom und der allgemeinen Kontinuumshypothese (die 1940 weiter ausgearbeitet wurde), darauf aufbauend Arbeiten, die die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (1920er bis 1940er Jahre) etablierte, in den 1940er Jahren einige metamathematisch-philosophische Arbeiten zum generellen Aufbau und den Begriffen in der Mathematik, sowie 1970 seinen ontologischen Gottesbeweis in modallogischer Form. Der Zusammenhang all der genannten Arbeiten besteht in der Beziehung zwischen formalen Systemen der Mathematik (und Logik) und ihren Entsprechungen in der metamathematischen Begriffsebene. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es diesen Zusammenhang und seine Bedeutung für die weitere Grundlegung der Mathematik und ihre Verankerung in einer realistischen Ontologie herauszustellen, um so zu zeigen, dass durch die Verwendung der Begriffe Gödels und ihrer Erweiterung durch seinen ontologischen Beweis, wenn auch nicht bewusst, so doch effektiv, Möglichkeiten für die Grundlegung der Mathematik geschaffen wurden. Ursprung seiner Arbeiten zu den Unvollständigkeitssätzen bildet das Hilbertsche Programm, zum ersten Mal im Jahr 1900 formuliert, dessen Ziel es war, „die Integrität der modernen Mathematik zu retten, die mit dem aktual Unendlichen operiert." [3, S. 104] Hilberts Ansicht war, dass die gesicherte Grundlegung der Mathematik „über den Rahmen der Mathematik selbst hinausweist, da ‚die endgültige Aufklärung über das *Wesen des Unendlichen* weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur *Ehre des menschlichen Verstandes* selbst notwendig geworden ist.' [33, S. 163]" [3, S. 104]. Gödel war, wie wir in Kapitel 3 argumentieren werden, platonischer Realist und verteidigte seine Position sowohl gegenüber dem strengen Formalismus, als auch gegenüber dem Intuitionismus. Er stimmte mit Hilberts Auffassung überein,

> „dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, [...]. Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, außer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind [... und] sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren [lassen]" [33, S. 170–171].

Dies wird aus Gödels Arbeiten zur mathematischen Anschauung und Intuition deutlich (Kapitel 3). Der Zusammenhang zwischen den hier herausgestellten Arbeiten besteht darin, dass sie sich immer in der Beziehung zwischen der formalen Ebene der Mathematik und Logik und der durch die formalen Ausdrücke repräsentierten metamathematischen Bedeutungsebene bewegen. In den Unvollständigkeitssätzen ist dies sehr stark deutlich, da das Ziel der Arbeit darin besteht zu zeigen, dass die innere Konsistenz formaler Systeme nicht mit finiten Mitteln (innerhalb dieser formalen Systeme selbst) bewiesen werden kann. Da der Begriff ‚finitistisch' nicht klar definiert ist, gibt es verschiedene Interpretationen. „Oft wird angenommen, dass eine finitistische Argumentation eine solche ist, die primitiv rekursiv im Sinne von Skolem ist und in dem System (der primitiv rekursiven Arithmetik) der Skolemschen Arithmetik formalisiert werden kann. Reale Sätze sind von der Form $\forall x \varphi(x)$, wo φ nur atomare Formeln, logische Junktoren und beschränkte Quantoren enthält." [3, S. 107] Die finitistische Mathematik ist also durch Zeichen, Zeichenreihen und damit konkrete Objekte begründet und auf reale Sätze bezogen. Konkrete Objekte sind dabei als außer-logische Objekte gemeint, „die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind" [33, S. 170–171; 3, S. 105]. Durch diesen Bezug zu realen Objekten ist die finitistische Mathematik *per se* begründet. In der infinitistischen Mathematik geht es dagegen um ideale und unendliche Objekte, welche nach Hilbert, in seinem damaligen Verständnis von Unendlichkeit, welches wiederum auf die Entwicklungen von Cantor aufbaute, nicht unmittelbar in der Anschauung gegeben sind. Deshalb ist für die Begründung dieser idealen, unendlichen Objekte eine Grundlage notwendig. Der sicherste Weg, die Widerspruchsfreiheit eines infinitistischen Systems zu beweisen, hätte darin bestanden, sie mit finitistischen Methoden zu beweisen, da diese ja *per se* begründet sind. Zu Beginn seiner Arbeit der Unvollständigkeitssätze weist Gödel bereits klar auf diese Beziehung zwischen formaler Ebene und metamathematischer Bedeutungsebene hin und beschreibt die Analogie zu Richards Paradox [18, S. 175]. Bei diesem Paradox [55] geht es um die Abbildbarkeit sprachlicher Ausdrücke durch reelle Zahlen, es weist auch eine Analogie zu Cantors Diagonalisierungsargument auf. Zunächst wird unterschieden in die sprachlichen Ausdrücke, die *eindeutig* reelle Zahlen definieren, und diejenigen, die dies nicht tun. Die Ausdrücke, die reelle Zahlen definieren, ergeben eine unendliche Liste, die zuerst nach Länge und dann innerhalb gleicher Länge lexikographisch geordnet werden kann. Damit ergibt sich eine repräsentierte unendliche Liste reeller Zahlen. Nun kann eine neue reelle Zahl mit sprachlicher Entsprechung definiert werden, die an einer Dezimalstelle nicht den Zahlen aus dem vorherigen Teil entspricht, wodurch ein Widerspruch entsteht. Denn einerseits müsste die neue Zahl einer der Zahlen in der Liste entsprechen, tut dies aber nicht, da sie ja genau so konstruiert wurde. Damit ist die neue Zahl undefinierbar, oder zumindest nicht eindeutig definierbar. Es gibt also keine Möglichkeit in einer endlichen Anzahl von Wörtern zu bestimmen, ob ein willkürlicher sprachlicher Ausdruck eine reelle Zahl definiert. Die Entsprechung zu einem formalen System der Mathematik (z.B. der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom, ZFC), das auf seine eigene Syntax verweist, besteht darin, dass die Repräsentation einer reellen Zahl durch eine Formel ebenfalls nicht eindeutig ist, da es nicht möglich ist, die Menge aller reellen Zahlen durch eine Menge von Formeln (welche wiederum durch Gödelnummern identifiziert sind) zu repräsentieren. Denn wäre es möglich diese Menge zu repräsentieren (die wir in ZFC als Menge F beschreiben können), dann könnte über diese Menge so diagonalisiert werden, dass eine neue reelle Zahl erstellt wird, die in Analogie zum beschriebenen Paradox, nicht definiert ist. Die Einschränkung der formalen Systeme besteht nun darin, dass es keine Formel gibt, die die Menge F ohne Bezug auf weitere, außerhalb liegende Mengen definiert. Gödels Unvollständigkeitssätze verdeutlichen also in klarer Weise die Beziehung und Unterscheidung zwischen der Metamathematik (Bedeutungsebene) eines formalen Systems, den Aussagen des formalen Systems selbst und der zusätzlich zur Formalisierung notwendigen Metatheorie. Das beschriebene Paradox weist aber noch auf eine andere Problematik der reellen Zahlen hin, die sich aus der Anschauung und Handhabung dieser Zahlen ergibt. Das Problem ergibt sich aus dem Vollständigkeitsaxiom, welches besagt: sei $([r_n, s_n])$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Zahl x, die in allen Intervallen $[r_i, s_i]$ liegt [3, S. 17]. Das Prinzip der Intervallschachtelung ist so zu verstehen:

> „stellen wir uns die Zahlengeraden und zwei Punkte auf ihr vor, die Intervallgrenzen r_n und s_n. Dann rücken wir von diesen Intervallgrenzen jeweils immer weiter nach innen vor und erzeugen somit immer weitere Intervalle. Dabei ist i in r_i und s_i als Laufindex gemeint. Nun sagt das Vollständigkeitsaxiom, dass es im Inneren von allen Intervallen genau einen einzigen gemeinsamen Punkt gibt. Diese Annahme entspricht einem diskreten Punkt x, der dort liegt. Diesen diskreten Punkt gibt es aber auch in der Mathematik streng genommen nicht. Denn dieser Punkt ist eine irrationale Zahl, wie z.B. $\sqrt{2}$. Jede irrationale Zahl ist aber ein unendlicher Prozess, der nur wie ein existenter Punkt gehandhabt wird [3, S. 17–20]. Diesen Prozess wie einen Punkt zu behandeln, ist eine Konvention.“ [49, S. 357]

Aus dieser Identifikation unendlicher Prozesse mit diskreten Punkten resultiert insgesamt die Identifikation des Kontinuums mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Dass diese diskreten Punkte gar nicht existieren, weil nirgends ein unendlicher Prozess abgebrochen wird, wird in der Handhabung übergangen. Zusätzlich sind im Verlauf der Weiterentwicklung der Mathematik immer größere und mächtigere Zahlenmengen und Klassen entstanden, die über $\mathbb{R}$ hinaus gehen. Die reellen Zahlen lassen sich aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren (oder als Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen), die rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen von Brüchen ganzer Zahlen $\mathbb{Z}$. Als Äquivalenzklasse von reellen Zahlen lassen sich hyperrelle Zahlen $^*\mathbb{R}$ konstruieren (als ihre Generalisierung die superreellen Zahlen), und alle diese Zahlen wiederum sind Unter-Körper von N_0, den surrealen Zahlen. Zur Veranschaulichung der hyperreellen und surrealen Zahlen siehe Abb. 1.1.

Das heißt, sie sind alle über die Körperstruktur mit einander verbunden und lassen sich aus einander konstruieren. Die Zahlentypen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$ wiederum lassen sich alle als Mengen fassen und beschreiben, N_0 hingegen ist keine Menge mehr, sondern eine echte Klasse [56, S. 83]. Die unterschiedlichen Eigenschaften von Mengen und Klassen werden wir in Kapitel 2 und 3 näher behandeln. Schon hier wird aber deutlich, wie sich immer wieder unterschiedliche Relationen zwischen den mathematischen Objekten und unterschiedlichen Bedeutungsebenen ergeben. Einerseits weisen alle Zahlentypen Körpereigenschaften auf und können als Zahlen beschrieben werden, andererseits findet aber eine Einteilung in Mengen und Klassen statt. Zusätzlich besteht innerhalb dieser Zahlentypen auch schon eine Unterscheidung in Bezug zu der möglichen Betrachtung als diskrete Punkte (z.B. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) und reine Prozesse (z.B. $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$). Die Entwicklung

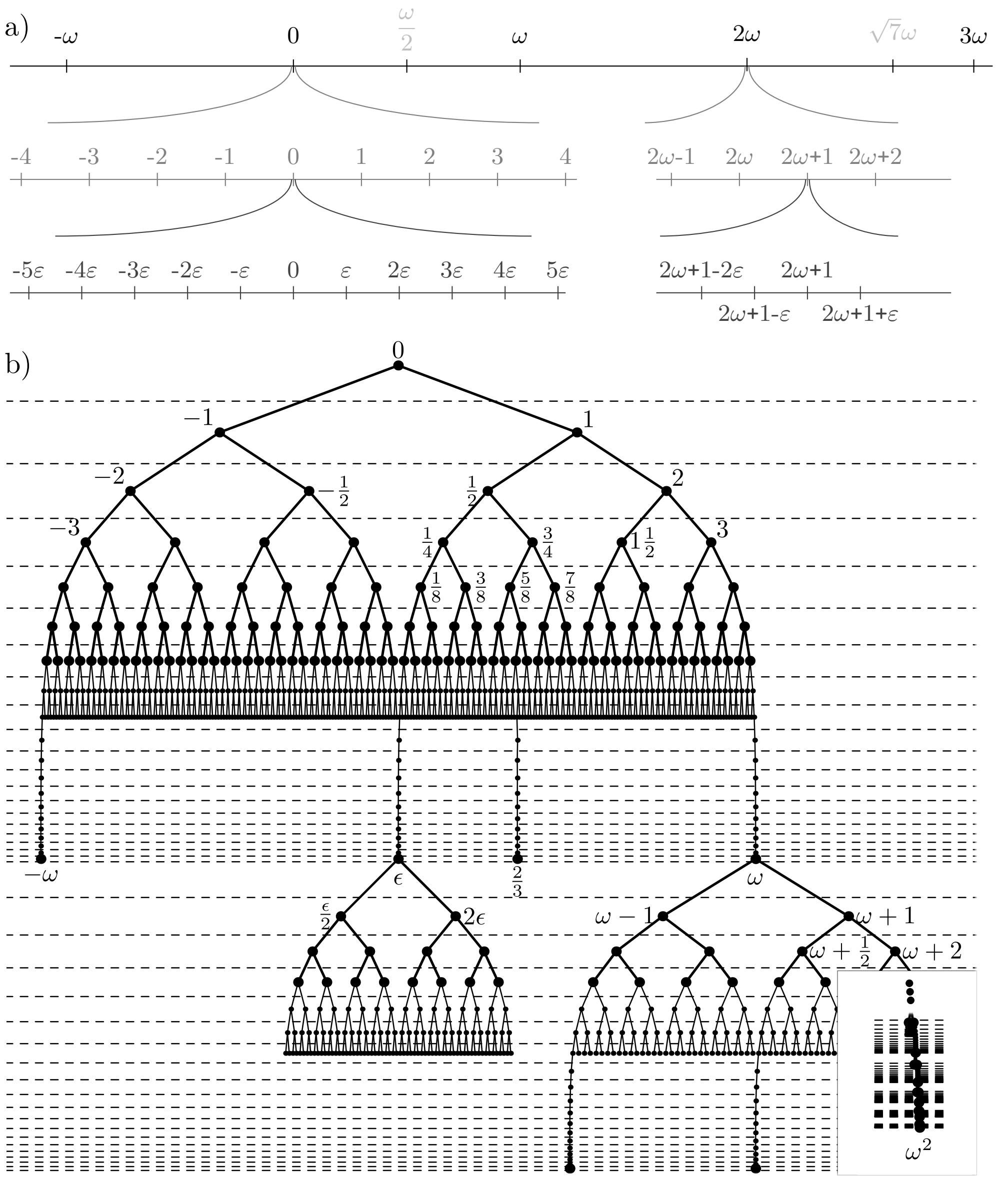

Abbildung 1.1:
a) Darstellung der hyperreellen Zahlen im Infinitesimalen (ε) und Infiniten (ω) auf der hyperreellen Zahlengerade. Sie werden als $^*\mathbb{R}$ dargestellt und sind Untersuchungsgegenstand der Nichtstandardanalysis. Sie erweitern die reellen Zahlen um infinitesimal benachbarte Zahlen sowie um unendlich große (infinite) Zahlen. b) Darstellung einiger surrealer Zahlen, die an allen Stellen beliebig fortgesetzt werden kann. Die surrealen Zahlen umfassen als echte Klasse von Zahlen alle reellen Zahlen, sowie unendlich große und infinitesimale Zahlen. Diese Eigenschaft teilen sie mit den hyperreellen Zahlen, enthalten diese aber als Teilmenge. Reelle Zahlen sind also sowohl von hyperreellen als auch surrealen Zahlen umgeben, die ihnen näher sind als jede andere reelle Zahl. Surreale Zahlen werden konstruiert, indem eine rechte und linke Menge von Zahlen angegeben wird, die die neue Zahl annähern (ähnlich der Bildung Dedekindscher Schnitte). Für eine ausführliche Darstellung der Konstruktion siehe [42]. Bildnachweis: die Darstellungen wurden erstellt in Anlehnung an: a) [57] b) [48]

von Klassen vollzog sich als Weiterentwicklung der klassischen Mengenlehre, aus der die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (NBG-Mengenlehre) entstand. Hier taucht durch die Einführung des neuen Begriffs der Klasse eine weitere Bedeutungsebene auf, die die Eigenschaften des Begriffs der Menge und damit ihre Handhabung verändert. Die Mengenlehre, die man als Grundlage der Mathematik wählt, ist dabei selbst eine Theorie, deren Aufbau den Prinzipien der Logik folgt. Das heißt, Begriffe und Sätze sind, wie bei jeder anderen Theorie, logisch geordnet. „Die Mengenlehre liefert, so kann man bildlich sagen, den Rohstoff für mathematische Begriffe und Sätze. Und die mathematische Logik bildet das Netz der Regeln, das die mathematischen Sätze und Begriffe verbindet. Sie ist formal, d.h. Form – und natürlich selbst eine mathematische Theorie. Logik selbst stellt der Mathematik keine Begriffe zur Verfügung – mit einer Ausnahme, der Logik.“ [3, S. 234] Dennoch müssen alle Begriffe, Sätze und Regeln realistischen Bezug haben, wie wir in Kapitel 3 sehen werden. Diese Beziehung zwischen Mathematik und Realität wird dort detailliert in Bezug zu Gödels Verständnis der mathematischen Intuition und seiner Verbindung zu Husserl behandelt, sowie in diesem Zusammenhang auch das Wesen von Konzeptbildung generell.

Die Beziehung zwischen Metaebene und formaler Ebene ist in Bezug zur Kontinuumshypothese etwas subtiler. Über die Unvollständigkeitssätze erhalten wir eine Verbindung zur Unendlichkeit über die ständige Erweiterung durch neue Axiome für eine innere Widerspruchsfreiheit. Die beiden Beweise zur Kontinuumshypothese [13, 19] zeigen innerhalb der Mengenlehre (jeder heute verfügbaren) eine beliebige innere Ordnung der Stufen der Unendlichkeiten, insbesondere unterschiedliche Kardinalzahlen für die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Gerade diese Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ ist aber, wie wir hier schon oben gesehen haben, auf verschiedene Weisen zu betrachten, je nach dem ob man eine Punktauffassung annimmt oder reelle Zahlen als Prozess ansieht. Wir können allein für $\mathbb{R}$ also unterschiedliche Begriffsebenen verwenden. Unvollständigkeitssätze und Kontinuumshypothese sind aber noch auf die folgende Weise miteinander verbunden: einerseits ist die klassische Mathematik auf der Mengenlehre aufgebaut und die Unvollständigkeitssätze greifen diesen generellen axiomatischen Aufbau an. Andererseits beinhalten die Unvollständigkeitssätze selbst eine Verbindung ins Unendliche, die wir mit Hilfe der Mengenlehre beschreiben können. Daraus resultiert die Notwendigkeit neuer axiomatischer Begriffe oder Theoreme, die alle weiteren Axiome schon enthalten und damit auch eine innere, definierte Ordnung der Kardinalzahlen liefern. Diese Forderung nach neuen Begriffen und ihre mögliche Konzeption sind in Kapitel 2.3 und 3 beschrieben, bei denen auch der Ursprung der begrifflichen Probleme behandelt wird. In diesem Zusammenhang wird der Mengenbegriff der Punktmengen in Abgrenzung zum klassischen Kontinuum der Raum-Zeit, das nicht mit diskreten Punkten erfasst werden kann, diskutiert und ein neuer Begriff des homogenen Kontinuums eingeführt. Diese Diskrepanz zwischen den Mächtigkeiten von Punktmengen (in immer höheren Operationen) und der Unerschöpflichkeit des homogenen Kontinuums (der absoluten Unendlichkeit) ist durch die klassischen Begriffe nicht zu überwinden. Es muss ein anderer Begriff verwendet werden, der dieses Maximum der Mächtigkeit des homogenen Kontinuums erreicht und beschreibt. Dies geschah einerseits schon durch die Einführung echter Klassen und der Allklasse, andererseits aber auch durch Gödels Forderung eines grundlegenden Prinzips der Unerreichbarkeit von V, dem Universum der Mengen, und der Verwendung dieses Prinzips als erstes Axiom (oder Theorem), aus dem alle weiteren folgen - eine Unendlichkeit, die alle weiteren Unendlichkeiten beinhaltet und ihre Definition überhaupt erst ermöglicht. Gödel war überzeugt, dass sich durch diese Grundlegung die Ordnung des Mengensystems und damit die eindeutige Lösung der Kontinuumshypothese herstellen lässt [66, S. 262].

Die Analogie zwischen der Allklasse, dem homogenen Kontinuum, dem Prinzip der Unerreichbarkeit von V als Grund-Axiom liefert den Zusammenhang zwischen den hier diskutierten verschieden Gebieten und eine direkte Verbindung zu seinem ontologischen Gottesbeweis, in dem Gödel, wie wir dann in Kapitel 4 ausführlich sehen werden, einen offenen, homogenen Mengenbegriff für die Menge der positiven Eigenschaften verwendete, um die notwendige Existenz Gottes zu beweisen. Denn in diesem Beweis geht es einerseits darum, Gott als das Maximum der positiven Eigenschaften abzubilden und zu beweisen, dass es ein real Gegebenes (ungleich eines Wesens in begrenzter Gestalt) gibt, das mit diesem Maximum (der absoluten Unendlichkeit) übereinstimmt. Da es ein ontologischer Beweis ist, liegt der Anspruch aber auch zusätzlich darin, die tatsächliche Ontologie der Realität abzubilden und mit mathematischen Mitteln zu beschreiben, also Realität und Mathematik in fundamentaler Weise zu verbinden, wodurch wir wieder die Verbindung zwischen formaler Ebene und Metaebene erhalten.

2 Unvollständigkeitssätze, Kontinuumshypothese, Mengenlehre

2.1 Gödels Unvollständigkeitssätze

Wir werden zunächst eine Beweisskizze der Grundidee Gödels wiedergeben, wie sie in [18, Teil 1] zu finden ist. Danach werden wir die Hauptresultate seiner Arbeit, Sätze VI, VIII und XI [18, S. 187–197] näher betrachten und durch die Darstellung Hoffmanns [34] weiter erläutern. Die Entwicklung höherer mathematischer Exaktheit hat ihre Formalisierung eingebracht, sodass das Beweisen in mechanischen Regeln durchgeführt werden kann. Die beiden umfassendsten formalen Systeme, die zur Zeit der Gödelschen Arbeit aufgestellt worden waren, waren erstens, das System der Principia Mathematica (PM) [68], zu dessen Axiomen auch das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen) gezählt werden, sowie zweitens, das Axiomensystem der Mengenlehre, von Zermelo-Fraenkel aufgestellt und von J. v. Neumann weiter ausgebildet [15, 51, 52, 53], zu denen für eine Vollendung der Formalisierung noch die Axiome und Schlussregeln des Logikkalküls hinzuzufügen sind [18, S. 173, Anm. 3]. Zusätzlich ist anzumerken, dass die Beweisausführungen Gödels bereits die zu diesem Zeitpunkt aufgestellten Systeme Hilberts einschließen [18, S. 173, Anm. 3]. Diese beiden genannten Systeme waren so weit, dass bereits alle in der Mathematik angewandten Beweismethoden in ihnen formalisiert waren. Daraus resultierte die Frage, ob diese Axiome und Schlussregeln ausreichen, um alle mathematischen Fragen, die sich in diesen Systemen formal ausdrücken lassen, auch mit ihren Mitteln zu entscheiden. Der ausführliche Beweis der Gödelschen Arbeit zeigt, dass dies nicht der Fall ist[1] und dass es zusätzlich nicht an der Natur der Systeme liegt, sondern für eine sehr weite Klasse formaler Systeme gilt, die aus Konstruktionen der beiden o.g. Systeme mit Hinzufügung endlich vieler Axiome entstehen, vorausgesetzt, dass keine falschen Sätze in Bezug zur Theorie der gewöhnlichen Zahlen entstehen. Um dies zu zeigen, geben wir zunächst die folgende metamathematische Definition 2.1.1, wobei wir uns auf das System PM beschränken. Metamathematisch ist sie in dem Sinne, dass sie nicht, wie in der Mathematik üblich einer Abkürzung dient, sondern nur den Inhalt der Begrifflichkeit definiert.

Definition 2.1.1 (Formel, Grundzeichen, Beweis, Satz): [18, S. 174] Variablen, Logische Konstanten: $\overline{\quad}$ (nicht), $\vee$ (oder), (x) (für alle), $=$ (identisch mit), Klammern und

[1] Dies ist die in der Einleitung genannte Frage, ob sich die Konsistenz formaler Systeme finitistisch beweisen lässt, was Gödels Arbeit verneint hat. Dabei ist allerdings anzumerken, dass Hilbert und Gödel nach diesen Ergebnissen darin übereinstimmten, dass der Bereich der Mittel und Methoden, die als finitistisch anerkannt werden können, erweiterbar ist [3, S. 111].

Trennungspunkte heißen *Grundzeichen*. Endliche Reihen von Grundzeichen heißen *Formeln*. Endliche Reihen von Formeln heißen *Beweise*. Ein metamathematischer Begriff heißt *Satz*.

Da es beliebig ist, welche Gegenstände als Grundzeichen verwendet werden, können dies auch natürliche Zahlen sein, womit dann eine Beweisfigur eine endliche Folge einer endlichen Folge natürlicher Zahlen ist. Um nun einen unentscheidbaren Satz in PM anzugeben, d.h. einen Satz A, für den weder A noch $non - A$ gilt, werden Klassenzeichen definiert.

Definition 2.1.2 (Klassenzeichen): [18, S. 175] Eine Formel aus PM mit genau einer freien Variable vom Typus der natürlichen Zahlen (Klasse von Klassen) heißt *Klassenzeichen*.

Wie Gödel beschreibt [18, S. 175], seien die Klassenzeichen in eine Folge geordnet, das n-te sei mit $R(n)$ bezeichnet, wobei der Begriff ‚Klassenzeichen' sowie die ordnende Relation R im System PM definierbar ist. Sei α nun ein beliebiges Klassenzeichen, dann bezeichnen wir mit $[\alpha; n]$ diejenige Formel, welche aus dem Klassenzeichen α durch Austausch der freien Variable mit dem Zeichen für die natürliche Zahl n entsteht. Auf diese Weise ist auch die Tripel-Relation $x = [y; z]$ innerhalb von PM definierbar [18, S. 175]. Nun wird eine Klasse K natürlicher Zahlen folgendermaßen definiert [18, S. 175]:

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \tag{2.1}$$

(wobei die Formel $Bewx$ inhaltlich bedeutet: x ist eine beweisbare Formel). Gödel erläutert weiter [18, S. 175], dass auf Grund der Tatsache, dass die Begriffe des Definiens alle in PM definierbar sind, dies auch für K gilt. Somit gibt es ein Klassenzeichen S womit die Formel $[S; n]$ auf der inhaltlichen Ebene bedeutet, dass die natürliche Zahl n zu K gehört. S ist als Klassenzeichen mit einem bestimmten $R(q)$ identisch, d.h. es gilt $S = R(q)$ für eine bestimmte natürliche Zahl q (ebd.). Nun wird die Unentscheidbarkeit gezeigt.

Behauptung: Der Satz $[R(q); q]$ ist in PM unentscheidbar.

Beweis: [18, S. 175]: Nehmen wir an, der Satz $[R(q); q]$ wäre beweisbar, dann wäre er auch richtig. Nach dem oben gezeigten würde das aber heißen, dass q zu K gehören würde, d.h. nach (2.1) es würde $\overline{Bew}[R(q); q]$ gelten, im Widerspruch zu der Annahme. Wäre dagegen die Negation von $[R(q); q]$ beweisbar, so würde $\overline{n \in K}$, also $Bew[R(q); q]$ gelten. $[R(q); q]$ wäre also gleichzeitig mit seiner Negation beweisbar, was unmöglich ist. $\square$

Diese kurze Beweismethode lässt sich auf jedes formale System anwenden, das erstens inhaltlich gedeutet über genügend Ausdrucksmittel verfügt, um die in der obigen Überlegung vorkommenden Begriffe (insbesondere den Begriff ‚beweisbare Formel') zu definieren, und in dem zweitens jede beweisbare Formel auch inhaltlich richtig ist. [18, S. 176] Aus der Bemerkung, dass $[R(q); q]$ seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, folgt sofort, dass $[R(q); q]$ richtig ist, denn $[R(q); q]$ ist ja unbeweisbar (weil unentscheidbar).

„Der im System PM unentscheidbare Satz wurde also durch metamathematische Überlegungen doch entschieden“ [18, S. 176]. Dieses Ergebnis wird dann später bezüglich der Widerspruchsfreiheitsbeweise formaler Systeme in Gödels Satz XI, seinem 2. Unvollständigkeitssatz [18, S. 196] (siehe hier Satz 2.1.6), noch näher behandelt.

Nun betrachten wir die Hauptresultate aus Gödels Arbeit zu den Unvollständigkeitssätzen. Gödel erstellt für seinen Beweis ein formales System P, das aus den Peanoschen Axiomen und der Logik der PM besteht und definiert für dieses System Grundzeichen, Formeln (Terme), Klassenzeichen und die Begriffe *Satz* und *Beweis* [18, S. 176–177], wie oben definiert. Des weiteren werden dann die Typenerhöhung durch Substitution und damit zusammenhängend bestimmte Formeln als Axiome erläutert und definiert, die für den weiteren Verlauf notwendig sind [18, S. 176–177]. Danach wird eine Arithmetisierung der Syntax durchgeführt, indem die syntaktischen Beziehungen zwischen den Objekten des formalen Systems auf die arithmetische Ebene durch Ersetzung der Formeln und Beweise mit natürlichen Zahlen (Gödelnummern, Zuordnung nach Gödel durch $\Phi(a)$) übertragen werden [18, S. 178–179]. Zusätzlich werden noch die Begriffe der primitiven Rekursion und der primitiv rekursiven Funktion benötigt [siehe ausführliche Erläuterungen in 34, S. 214–217], sodass mit den Sätzen I-IV Aussagen über die rekursive Relationen und ihre Eigenschaften bewiesen werden können [18, S. 179–181]. Auf dieser Grundlage werden dann 45 primitiv-rekursive Funktionen (Relationen) definiert, die alle aus den mit den Sätzen I-IV genannten Verfahren gewonnen werden [18, S. 181–186]. Außerdem wird ein 46. Begriff definiert, für den als einzigen nicht angenommen wird, dass er primitiv-rekursiv ist, nämlich:

$$Bew(x) \equiv (Ey)yBx$$

d.h. x ist eine *beweisbare Formel*, in moderner Schreibweise: $x \in Bew :\Longleftrightarrow \exists y yBx$, wobei die rechte Seite genau dann wahr ist, wenn x die Gödelnummer einer in P beweisbaren Formel ist [34, S. 270–271]. Diese Relation ist die erste, die mit einem unbeschränkten Quantor definiert wird und damit nicht die Voraussetzung von Gödels Satz IV erfüllt. Hieraus folgt nicht notwendigerweise, dass *Bew* keine primitiv-rekursive Relation ist, denn hierzu müsste ausgeschlossen werden, dass sie sich nicht auf eine andere Weise primitiv-rekursiv formulieren lässt [34, S. 271]. Die Entscheidung dieser Frage wurde aber erst 1936 von Turing gelöst [63]. Mit dem formal Gezeigten hat Gödel zusammengetragen, dass sich viele metamathematische Begriffe über formale Systeme primitiv-rekursiv formulieren lassen. Mit Satz V beweist er dann eine Aussage über die Beziehung zwischen rekursiven Relationen und n-stelligen Relationszeichen [18, S. 186], um dann zu seinem Hauptresultat, Satz VI überzugehen [18, S. 187], für den wir noch die folgende Definition brauchen. Zunächst heißt es „Sei χ eine beliebige Klasse von *Formeln.* Wir bezeichnen mit $Flg(\chi)$ (Folgerungsmenge von χ) die kleinste Menge von *Formeln*, die alle *Formeln* aus χ und alle *Axiome* enthält und gegen die Relation *„unmittelbare Folge“* abgeschlossen ist.“ [18, S. 187] Da Gödel hier die Kursivschreibweise verwendet [was in seiner Arbeit eine semantische Bedeutung hat 34, S. 212], sind sowohl die Menge χ als auch die Menge $Flg(\chi)$ Teilmengen der natürlichen Zahlen. Wir übertragen die Definition Gödels in eine moderne Schreibweise. Die Menge χ enthält die Gödelnummern von

Formeln [34, S. 290]:

$$\chi = \{\ulcorner\varphi_1\urcorner, \ulcorner\varphi_2\urcorner, \dots\}$$

Dem entsprechend ist dann, Hoffmann folgend, $Flg(\chi)$ die Obermenge von χ, die nicht nur die Gödelnummern von Formeln enthält, sondern zusätzlich die Gödelnummern aller Axiome von P und der Theoreme, die sich aus den Axiomen und den in χ eingebetteten Formeln ableiten lassen. Wir geben die folgende Definition in den Formulierungen von Hoffmann an:

Definition 2.1.3: (Menge von Gödelnummern, Folgerungsmenge, ω-Widerspruchsfreiheit [34, Definition 6.1, S. 290 und S. 291]):

- Sei M eine Menge von Formeln. Mit $P \cup M$ wird das formale System bezeichnet, das wir aus der Vereinigung der Axiome aus P mit den Formeln aus M erhalten.
- Für eine Menge χ von Gödelnummern soll gelten:

  $$P \cup \chi := P \cup \{\varphi | \ulcorner\varphi\urcorner \in \chi\}$$

  Dann ergeben sich die Mengen χ und $Flg(\chi)$ wie folgt [34, S. 290]:
  $\chi \subseteq \{n \in \mathbb{N}|\ n \text{ ist die Gödelnummer einer Formel}\}$
  $Flg(\chi) = \{n \in \mathbb{N}|n \text{ ist die Gödelnummer eines Theorems von } P \cup \chi\}$
- $P \cup \chi$ heißt ω-widerspruchsfrei wenn folgendes gilt [34, S. 291]:
  $\vdash \varphi(\overline{n})$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \nvdash \neg\forall x_1 \varphi(x_1)$
- Eine Menge von Gödelnummern χ heißt ω-widerspruchsfrei, wenn $P \cup \chi$ ω-widerspruchsfrei ist [34, S. 291].

Jedes ω-widerspruchsfreie System ist dabei auch widerspruchsfrei, was aus der Tatsache folgt, dass in einem widersprüchlichen formalen System ausnahmslos alle Formeln Theoreme sind. Damit sind dann auch jene Formeln Theoreme, die einen ω-Widerspruch im Sinne der obigen Definition herbeiführen. Dann folgt

Satz 2.1.1: (Allgemeines Resultat über die Existenz unentscheidbarer Sätze [18, Satz VI, S. 187]): In Gödels Schreibweise: Zu jeder ω-widerspruchsfreien rekursiven Klasse χ von *Formeln* gibt es rekursive *Klassenzeichen* r, so dass weder $vGenr$ noch $Neg(vGenr)$ zu $Flg(\chi)$ gehört (wobei v die freie Variable aus r ist). Oder anders ausgedrückt, in moderner Schreibweise [34, S. 292]: $\chi = \{\ulcorner\varphi_1\urcorner, \ulcorner\varphi_2\urcorner, \dots\}$ sei ω-widerspruchsfrei und primitiv-rekursiv. Dann existiert eine (primitiv-rekursive) Formel $\varphi_r(\xi_1)$, für die weder $\forall\xi_1\varphi_r(\xi_1)$ noch $\neg\forall\xi_1\varphi_r(\xi_1)$ innerhalb des Systems $P \cup \chi$ bewiesen werden können.

Beweis: Wir übersetzen den Beweis der Originalarbeit [18, S. 187–189] in moderne Schreibweise [34, S. 293]. Sei χ eine beliebige rekursive ω-widerspruchsfreie Klasse von *Formeln.* Zunächst wird durch direkte Erweiterungen der primitiv-rekursiven Relationen 44, 45 und 46 aus der Originalarbeit [18, S. 186] folgendes definiert:

$$\begin{aligned} x \in Bw_\chi :\Longleftrightarrow l(x) > 0 \wedge \forall(0 < n \leq l(x))(Ax(nGlx) \vee \\ (nGlx) \in \chi \vee \exists(0 < p, q < n) Fl(nGlx, pGlx, qGlx)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wobei $nGlx$ das n-te Glied der der Zahl x zugeordneten Zahlenreihe ist und Fl *unmittelbare Folge* bedeutet. Inhaltlich heißt die Formel [34, S. 293]: $x \in Bw_\chi \Longleftrightarrow x$ kodiert eine formale Beweiskette des Systems $P \cup \chi$. Mit Gödel folgt dann weiter (in moderner Schreibweise):

$$xB_\chi y :\Longleftrightarrow Bw_\chi(x) \wedge l(x)Glx = y \tag{2.3}$$

Und auf der Inhaltsebene erhalten wir für die Formel [34, S. 293]: $xB_\chi\ulcorner\varphi\urcorner :\Longleftrightarrow x$ kodiert einen Beweis für die Formel φ. Gödels Formel (6.1) [18, S. 187] heißt dann in moderner Schreibweise [34, S. 293]:

$$x \in Bew_\chi :\Longleftrightarrow \exists y yB_\chi x. \tag{2.3.1}$$

Inhaltlich heißt die Formel [34, S. 293]: $\ulcorner\varphi\urcorner \in Bew_\chi \Longleftrightarrow \varphi$ ist in $P \cup \chi$ beweisbar. Dann gilt weiter:

$$x \in Bew_\chi :\Longleftrightarrow x \in Flg(\chi) \tag{2.4}$$

$$x \in Bew_\chi :\Longleftrightarrow x \in Bew(\chi). \tag{2.5}$$

Zusammengefasst lautet die Formel dann:

$$Bew \subseteq Bew(\chi) = Flg(\chi).$$

Wir geben die folgenden Erläuterungen, bzw. Zusammenfassungen von Gödels Beweis als Kombination der Originalformulierungen [18, S. 187–189] in Verbindung mit Hoffmanns ausführlichen Beschreibungen in [34, S. 294–298] wieder: Die Inklusionsbeziehung beruht darauf, dass durch die Ergänzung der Axiomenmenge eines formalen Systems um zusätzliche Formeln, die Menge der Theoreme immer nur größer, aber nicht kleiner werden kann. Die Gleichheit $Bew(\chi) = Flg(\chi)$ folgt aus (2.3.1). Nun wird eine primitiv-rekursive Relation definiert, die im Beweis eine zentrale Rolle spielt:

$$Q(x, y) \equiv \overline{xB_\chi[Sb(y_{Z(y)}^{19})]} \tag{2.5.1}$$

und bedeutet: $Q(x, y) \Longleftrightarrow x$ ist kein Beweis für y. Da $xB\chi y$ (mit (2.2) und (2.3)) und $Sb(y_{Z(y)}^{19})$ (mit den Def. 17, 31 der rekursiven Funktionen) rekursiv sind, ist es auch $Q(x, y)$. [18, S. 188] In moderner Schreibweibe lautet die Definition:

$$(x, y) \in Q :\Longleftrightarrow \neg(xB_\chi\ulcorner\varphi_y[y_1 \longleftarrow \overline{y}]\urcorner)$$

mit der Zahl 19 als Kodierung für das Symbol y_1 und der Formel φ_y mit der Gödelnummer y. D.h. $(x, y) \in Q :\Longleftrightarrow x$ kodiert keinen Beweis für die Formel $\varphi_y[y_1 \longleftarrow \overline{y}]$, denn ist y die Gödelnummer einer Formel mit der freien Variablen y_1, dann besteht zwischen x und y genau dann eine Relation, „wenn x *keine* Reihe von Formeln kodiert, die das Diagonalelement $\varphi_y(\overline{y})$ innerhalb des formalen Systems $P \cup \chi$ herleitet." [34, S. 294]. Da die Relation Q primitiv-rekursiv ist und die Voraussetzungen von Gödels Satz V [18, S. 186] erfüllt, muss es eine Formel mit zwei freien Variablen x_1 und y_1 geben, die Q syntaktisch repräsentiert. D.h. es gibt nach diesem Satz V und (2.5) ein *Relationszeichen* q (die Gödelnummer) für besagte Formel, die wir $\psi_q(x_1, y_1)$ nennen, sodass gilt:

$(x,y) \in Q \Longrightarrow \vdash \psi_q(\overline{x},\overline{y})$ und $(x,y) \notin Q \Longrightarrow \vdash \neg\psi_q(\overline{x},\overline{y})$, womit die Formeln (2.6) und (2.7) aus Gödels Originalarbeit [18, S. 188] die folgende Form bekommen [34, S. 295]:

$$x \text{ kodiert keinen Beweis für die Formel } \varphi_y[y_1 \longleftarrow \overline{y}] \Longrightarrow \vdash \psi_q(\overline{x},\overline{y}) \tag{2.6}$$

$$x \text{ kodiert einen Beweis für die Formel } \varphi_y[y_1 \longleftarrow \overline{y}] \Longrightarrow \vdash \neg\psi_q(\overline{x},\overline{y}) \tag{2.7}$$

Wir setzen:

$$p = 17Genq \tag{2.8}$$

wobei p ein *Klassenzeichen* mit der *freien Variablen* 19 ist, und

$$r = Sb(q^{19}_{(Z(p))}) \tag{2.9}$$

wobei r ein rekursives *Klassenzeichen* mit der *freien Variablen* 17 ist, da r aus dem rekursiven *Relationszeichen* q durch Ersetzen einer *Variablen* durch ein bestimmtes Zahlzeichen (p) entsteht. D.h. (2.8) ist, mit der Zahl 17 als Kodierung für das Symbol x_1 und p als Gödelnummer, in moderner Schreibweise: $\varphi_p(y_1) := \forall x_1\psi_q(x_1,y_1)$ und (2.9) ist, mit der Zahl 19 als Kodierung für das Symbol y_1 und r als Gödelnummer: $\varphi_r(x_1) := \psi_q(x_1,\overline{p}) = \psi_q(x_1,\overline{\ulcorner\forall x_1\psi_q(x_1,y_1)\urcorner})$. Dann erhalten wir daraus in Gödels Schreibweise [18, S. 188]:

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17Genq]^{19}_{Z(p)}) = 17GenSb(q^{19}_{Z(p)}) = 17Genr, \tag{2.10}$$

d.h. in moderner Schreibweise [34, S. 296]:

$$\varphi_p[y_1 \longleftarrow \overline{p}] = (\forall x_1\psi_q(x_1,y_1))[y_1 \longleftarrow \overline{p}] = \forall x_1\psi_q(x_1,\overline{p}) = \forall x_1\varphi_r(x_1)$$

und wegen (2.8) und (2.9) dann

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}), \tag{2.11}$$

was bedeutet: $\psi_q(\overline{x},\overline{p}) = \varphi_r(\overline{x})$. Ersetzt man nun in (2.6) und (2.7) y durch p, dann erhalten wir mit (2.10) und (2.11):

$$\overline{xB_\chi(17Genr)} \longrightarrow Bew_\chi[Sb(r^{17}_{Z(x)})] \tag{2.12}$$

$$xB_\chi(17Genr) \longrightarrow Bew_\chi[NegSb(r^{17}_{Z(x)})], \tag{2.13}$$

d.h. wir erhalten [34, S. 297] für (2.12):

$$x \text{ kodiert keinen Beweis für die Formel } \forall x_1\varphi_r(x_1) \Longrightarrow \vdash \varphi_r(\overline{x}) \text{ und für (2.13) :}$$
$$x \text{ kodiert einen Beweis für die Formel } \forall x_1\varphi_r(x_1) \Longrightarrow \vdash \neg\varphi_r(\overline{x})$$

Dann ist 17*Genr* ($\forall x_1\varphi_r(x_1)$) die gesuchte unentscheidbare Formel, bei der weder sie noch ihre Negation in $P \cup \chi$ bewiesen werden können. Das heißt [18, S. 189]:

1. 17*Genr* ist nicht χ-*beweisbar*, was bedeutet: $x \in Flg(\chi)$ und nach (2.4) dasselbe ist wie $Bew_\chi(x)$, denn sonst gäbe es mit (6.1) ein n, sodass $nB_\chi(17Genr)$ gelten würden (also eine Gödelnummer n, die den Beweis der Formel kodiert). Mit (2.13) würde dann

$Bew_\chi[NegSb(r^{17}_{Z(n)})]$ gelten, wobei aber aus der χ-*Beweisbarkeit* von $17Genr$ auch die von $Sb(r^{17}_{Z(n)})$ folgt, wodurch χ widerspruchsvoll und erst recht ω-widerspruchsvoll wäre.

2. $Neg(17Genr)$ ist nicht χ-*beweisbar*, denn wie unter 1. gezeigt, ist $17Genr$ nicht χ-*beweisbar*. D.h. es gilt nach (6.1): $(n)\overline{nB_\chi(17Genr)}$, und daraus folgt dann mit (2.12): $(n)Bew_\chi[Sb(r^{17}_{Z(n)})]$, was zusammen mit $Bew_\chi[Neg(17Genr)]$ gegen die ω-Widerspruchsfreiheit von χ verstoßen würde. Damit ist $17Genr$ χ-unentscheidbar. □

Aus diesem Hauptresultat ergeben sich die folgenden Korollare [18, S. 190–191; 34, S. 298–299]:

Korollar 1.1: [34, S. 298]: Das System P ist unvollständig.

Beweis: Die Behauptung erhalten wir aus Satz 2.1.1 für den Fall $\chi = \emptyset$. □

Korollar 1.2: [34, S. 299]: Jedes widerspruchsfreie formale System, das ausdrucksstark genug ist, um die gewöhnliche Mathematik zu formalisieren, ist unvollständig.

Beweis: [34, S. 299]: Da P in Anlehnung an die gewöhnliche Mathematik systematisiert wurde, folgt aus Korollar 1.1, dass die Begriffe und Schlussweisen von P in jedem formalen System nachgebildet werden können, das ausdrucksstark genug ist, um die gewöhnliche Mathematik zu formalisieren. Damit überträgt sich die inhaltliche Aussage auf dieses System. □

Korollar 1.2 entspricht inhaltlich dem 1. Unvollständigkeitssatz, zu dem wir formal weiter unten kommen werden.

Gödel bearbeitet noch einige Verallgemeinerungen des Hauptresultats, auf die wir hier verzichten wollen, da sie für unsere Zwecke nicht weiter dienlich sind. Es sei aber darauf hingewiesen, dass er explizit auf die Auswirkungen seines Ergebnisses auf eine Erweiterung eines formalen Systems der Mathematik durch das Auswahlaxiom (für alle Typen) und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese zu sprechen kommt. Aus der Tatsache, dass wir χ im Beweis von Satz 2.1.1 nahezu frei wählen können, folgt, dass diese Menge auch durch eine ersetzt werden kann, die weitere Axiome hinzu nimmt. Dies gilt, solange die Axiome eine syntaktisch repräsentierbare Menge bilden (in Gödels Worten „*entscheidungsdefinit*“ [18, S. 189] sind), und diese Voraussetzung ist sehr schwach, denn sie wird von allen Formeln erfüllt, die in den bekannten formalen Systemen als Axiome verwendet werden. So muss also, alle Bereiche der gängigen Mathematik betreffend, jede Erweiterung von P genauso unvollständig sein wie P selbst und es lässt sich nicht vervollständigen. Und weiter gibt er explizit an, dass zu diesen nicht erweiterbaren Systemen das Zermelo-Fraenkelsche und das v. Neumannsche Axiomensystem der Mengenlehre (Vorläufer der NBG-Mengenlehre, um 1940 entstanden) gehören [18, S. 191], womit wir dann in Fußnote 48a [18, S. 191] das wohl für unsere Zwecke wichtigste Ergebnis erhalten:

> „48a) Der wahre Grund für die Unvollständigkeit, welche allen formalen Systemen der Mathematik anhaftet, liegt, wie im II. Teil dieser Abhandlung gezeigt werden wird, darin, daß die Bildung immer höherer Typen sich ins

> Transfinite fortsetzen läßt. (Vgl. D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. 95, S. 184), während in jedem formalen System höchstens abzählbar viele vorhanden sind. Man kann nämlich zeigen, das die hier aufgestellten unentscheidbaren Sätze durch Adjunktion passender höherer Typen (z.B. des Typus ω zum System P) immer entscheidbar werden. Analoges gilt auch für das Axiomensystem der Mengenlehre."

Hier sei schon einmal eine Interpretation vorweg genommen, auf die wir später zurück kommen werden. Man kann sich nun fragen, welche Rolle generell die Unendlichkeit für eine endliche Mathematik spielt, die über endliche Objekte wie endliche Mengen usw. operiert [3, S. 226]. Da die Gödelschen Unentscheidbarkeitssätze über endliche Objekte, nämlich natürliche Zahlen sprechen, damit also endlichen Charakter haben, kann man laut [3, S. 226] die Auffassung in dieser Fußnote „auf die These reduzieren, dass unbeschränkte transfinite Iterationen der Potenzoperation für die Vollständigkeit und die Rechtfertigung der endlichen Mathematik nötig sind." Dazu haben spätere Untersuchungen [41, 54] in der Kombinatorik und Zahlentheorie über unabhängige, d.h. nicht entscheidbare Sätze gezeigt, dass Gödel mit der Aussage in dieser Fußnote recht hatte. Diese neuen unabhängigen Sätze zeigen, dass das Transfinite (wenigstens die erste Stufe der Cantorschen Mengenlehre) für die endliche Mathematik notwendig ist, denn sie werden mit transfiniten Methoden bewiesen, die die Arithmetik weit überschreiten [3, S. 226].

Nun werden mehrere Folgerungen aus dem Hauptresultat gezogen, so z.B. dass auch formale Systeme mit einer geringeren Ausdrucksstarke als das System P unvollständig sind, wie Systeme, die nur über die additiven und multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen verfügen. Dafür wird die arithmetische Relation definiert:

Definition 2.1.4: (Arithmetische Relation [18, S. 191]): Eine Relation (Klasse) heißt arithmetisch, wenn sie sich allein mittels der Begriffe $+$, $\cdot$ [Addition und Multiplikation, bezogen auf natürliche Zahlen] und den logischen Konstanten $\vee$, $\overline{}$, (x), $=$ definieren lässt, wobei (x) und $=$ sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen. Insbesondere sind die Ordnungsrelation $>$ und die Kongruenzrelation $\equiv$ (modulo n) arithmetisch, denn es gilt

$$x > y \Longleftrightarrow \overline{(\exists z)}[y = x + z]$$

$$x \equiv y(modn) \Longleftrightarrow (\exists z)[x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n]$$

Mit dieser Definition beweist Gödel den folgenden Satz, der die Beziehung zwischen arithmetischen und primitiv-rekursiven Relationen herstellt.

Satz 2.1.2: [18, Satz VII, S. 191]: Jede rekursive Relation ist arithmetisch.

Beweis: Gödel beweist den Satz, indem er zeigt, dass alle primitiv-rekursiven Relationen der Form $x_0 = \varphi(x_1 \dots x_n)$, wo φ rekursiv ist, auf seine geschilderte Weise arithmetisch repräsentiert werden können. Dazu wendet er vollständige Induktion nach der Stufe von φ an. Auf die weitere ausführliche Darstellung sei hier verzichtet und stattdessen auf die Originalarbeit verwiesen [18, S. 191–193]. $\square$

Betrachten wir diesen Satz in Bezug zum Hauptresultat (Satz 2.1.1), folgt daraus, dass unentscheidbare Formeln innerhalb der elementaren Zahlentheorie zu finden sind. Denn „gemäß Satz 2.1.2 gibt es zu jedem Problem der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) ein äquivalentes arithmetisches Problem und da der ganze Beweis von Satz 2.1.2 sich (für jedes spezielle F) innerhalb des Systems P formalisieren lässt, ist diese Äquivalenz in P beweisbar“ [18, S. 193]. Damit folgt dann aus den vorherigen Sätzen und Beweisen direkt Satz 2.1.3, der als der 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz bekannt ist und welcher zeigt, dass wir unentscheidbare Aussagen innerhalb der Arithmetik finden können:

Satz 2.1.3: [18, Satz VIII, S. 193]: In jedem der in Satz 2.1.1 (Gödels Satz VI [18, S. 187]) genannten formalen Systeme gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze.

Die genannten formalen Systeme sind diejenigen ω-widerspruchsfreien Systeme, welche aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entstehen [18, S. 193, Fußnote 53]. Und dasselbe gilt, wie oben gezeigt, für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch ω-widerspruchsfreie rekursive Klassen von Axiomen. Zusätzlich ergeben sich die Sätze 2.1.4 und 2.1.5 als Resultate aus den vorherigen Sätzen, wobei Satz 2.1.4 einen Zusammenhang zu seiner Arbeit von 1930 [17] aufweist (Gödelscher Vollständigkeitssatz: In der Prädikatenlogik erster Stufe gilt: φ ist allgemeingültig $\longrightarrow$ φ ist beweisbar [34, S. 325]), da er dort zeigte, dass für jede Formel des engeren Funktionenkalküls nachweisbar ist, dass sie entweder allgemeingültig ist oder ein Gegenbeispiel existiert, welches aber nun nach Satz 2.1.4 nicht immer nachweisbar ist [18, S. 193, Fußnote 55]. Gödels Sätze IX und X [18, S. 193–194] können also als Folgerungen angesehen werden, dass das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe nicht innerhalb von P entschieden werden kann.

Satz 2.1.4: [18, Satz IX, S. 193 und Fußnoten 53–55]: In allen in Satz 2.1.1 genannten formalen Systemen (diejenigen ω-widerspruchsfreien Systeme, welche aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entstehen) gibt es unentscheidbare Probleme des engeren Funktionenkalküls (diejenigen, welche aus den Formeln des engeren Funktionenkalküls der PM durch die Ersetzung der Relationen durch Klassen höheren Typs entstehen, d.h. Formeln des engeren Funktionenkalküls, für die weder Allgemeingültigkeit noch Existenz eines Gegenbeispiels beweisbar ist).

Zunächst wird durch Satz 2.1.5 gezeigt, dass sich die Frage, ob eine primitiv-rekursive Relation $F(x)$ auf alle natürlichen Zahlen x zutrifft, in ein äquivalentes Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe ($PL1$) umwandeln lässt.

Satz 2.1.5: [18, Satz X, S. 194]: Jedes Problem der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) lässt sich zurückführen auf die Frage nach der Erfüllbarkeit einer Formel des engeren Funktionenkalküls (d.h. zu jedem rekursiven F kann man eine Formel des engeren Funktionenkalküls angeben, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von $(x)F(x)$ äquivalent ist), wobei $(x)F(x)$ für die mathematische Aussage $x \in F$ für alle $x \in \mathbb{N}$ steht und $F \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige einstellige primitiv-rekursive Relation über den natürlichen Zahlen ist.

Damit lautet Satz 2.1.5 anders formuliert [34, S. 328]: Für jede primitiv-rekursive Relation $F \subseteq \mathbb{N}$ existiert eine $PL1$-Formel φ mit der Eigenschaft: $x \in F$ für alle $x \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \varphi$ ist erfüllbar.

Beweis: Die Sätze 2.1.4 und 2.1.5 werden bei Gödel zusammenhängend bewiesen [18, Sätze IX und X]. Wir geben den Beweis in Anlehnung an Gödels [18, S. 194–196] und Hoffmanns [34, S. 328–339] Darstellungen an: Zunächst werden zum engeren Funktionenkalkül ($e.F.$) diejenigen Formeln gerechnet, welche sich aus den Grundzeichen: $\overline{}, \vee, (x), =; x, y \ldots$ (Individuenvariable) $F(x), G(xy), H(x, y, z) \ldots$ (Eigenschafts- und Relationsvariable) aufbauen, wobei (x) und $=$ sich nur auf Individuen beziehen dürfen. Zu diesen Zeichen werden noch eine dritte Art von Variablen $\varphi(x), \psi(xy), \chi(xyz)$ etc. hinzugefügt, die Gegenstandsfunktionen in dem Sinne vertreten, dass $\varphi(x), \psi(xy)$ eindeutige Funktionen bezeichnen, deren Argumente und Werte Individuen sind (wobei der Definitionsbereich immer der ganze Individuenbereich ist). Eine Formel, die außer den zuerst angeführten Zeichen des e.F. noch Variablen dritter Art $(\varphi(x), \psi(xy) \ldots$ usw.) enthält, soll eine Formel im weiteren Sinne (i.w.S.) heißen. Dabei dürfen Variablen dritter Art an allen Leerstellen für Individuenvariablen stehen, also z.B. $y = \varphi(x), F(x, \varphi(y)), G[\psi(x, \varphi(y)), x]$ usw. [18, S. 194, Fußnote 58]. Damit ist der engere Funktionenkalkül eine Variante der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit, in der die Verwendung von Funktionssymbolen untersagt ist, wobei es hier unerheblich ist, ob wir das Gleichheitszeichen zulassen oder verbieten. Dies liegt daran, dass lediglich die Erfüllbarkeit der nachfolgend konstruierten Formeln eine Rolle spielt und dieser Fall mit einem Ergebnis der Prädikatenlogik zusammenhängt, welches besagt, „dass für jede $PL1$-Formel φ, die das Gleichheitszeichen enthält, eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel ψ existiert, die ohne das Gleichheitszeichen auskommt." [34, S. 329] Die Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit wird dann der engere Funktionenkalkül im weiteren Sinne (e.F.i.w.S.). Das heißt, die Begriffe 'erfüllbar' und 'allgemeingültig' übertragen sich direkt auf Formeln i.w.S. und es gilt dass zu jeder Formel i.w.S. A eine gewöhnliche Formel des e.F. B angegeben werden kann, sodass die Erfüllbarkeit von A mit der von B äquivalent ist [18, S. 194]. Gödel beschreibt das weitere Vorgehen weiter: „B erhält man aus A, indem die in A vorkommenden Variablen dritter Art $\varphi(x), \psi(xy) \ldots$ durch Ausdrücke der Form: $(\iota z)F(zx), (\iota z)G(z, xy) \ldots$ ersetzt werden, die 'beschreibenden' Funktionen im Sinne [des §14 des 1. Bands der PM aufgelöst werden] und die so erhaltene Formel mit einem Ausdruck logisch multipliziert [(die Konjunktion gebildet) wird], der besagt, dass sämtliche an Stelle der $\varphi, \psi \ldots$ gesetzte $F, G \ldots$ bez. der ersten Leerstelle eindeutig sind." [18, S. 194]

Nun wird gezeigt, dass es zu jedem Problem der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) ein äquivalentes Problem in Bezug auf die Erfüllbarkeit einer Formel i.w.S. gibt, woraus dann nach den obigen Ausführungen Satz 2.1.5 folgt. Das heißt, es wird gezeigt, dass es zu jeder primitiv-rekursiven Relation F eine $PL1$-Formel φF gibt, mit der Eigenschaft [34, S. 331]:

$$x \in F \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \varphi F \text{ ist erfüllbar.}$$

Da F rekursiv ist, gibt es eine rekursive Funktion $\Phi(x)$, so dass $F(x) \Longleftrightarrow [\Phi(x) = 0]$ gilt. Für Φ gibt es dann eine Reihe von Funktionen $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n$, sodass: $\Phi_n = \Phi, \Phi_1(x) = x + 1$ (Nachfolgerfunktion) und für jedes Φ_k (mit $1 < k\_ \leqq n$) einer der folgenden Fälle gilt:

$$1. \quad (x_2 \ldots x_m)[\Phi_k(0, x_2 \ldots x_m) = \Phi_p(x_2 \ldots x_m)] \tag{2.14}$$

$(x, x_2 \ldots x_m)\{\Phi_k[\Phi_1(x), x_2 \ldots x_m] = \Phi_q[x, \Phi_k(x, x_2 \ldots x_m), x_2 \ldots x_m]\}$ mit $p, q < k$

$$2. \quad (x_1 \ldots x_m)[\Phi_k(x_1 \ldots x_m) = \Phi_r(\Phi_{i_1}(\mathfrak{x}_1) \ldots \Phi_{i_s}(\mathfrak{x}_s))] \tag{2.15}$$

mit $r < k, i_v < k$ (für $v = 1, 2 \ldots s$) und $\mathfrak{x}_i$ (mit $i = 1 \ldots s$) als Komplexe der Variablen $x_1, x_2 \ldots x_m$, also z.B. x_1, x_3, x_2.

$$3. \quad (x_1 \ldots x_m)[\Phi_k(x_1 \ldots x_m) = \Phi_1(\Phi_1 \ldots \Phi_1(0))]. \tag{2.16}$$

Zusätzlich werden die folgenden Sätze gebildet:

$$(x)\overline{\Phi_1(x) = 0} \;\&\; (xy)[\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \longrightarrow x = y] \tag{2.17}$$

d.h.: $\Phi_1(x) \neq 0$ und $\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \longrightarrow x = y$

$$(x)[\Phi_n(x) = 0] \tag{2.18}$$

d.h.: $\Phi_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Nun werden in allen Formeln (2.14), (2.15), (2.16) (für $k = 2, 3 \ldots n$) und in (2.17) (2.18) die Funktionen Φ_i durch Funktionsvariablen φ_i ersetzt, und die Zahl 0 durch eine sonst nicht vorkommende Individuenvariable x_0. Anschließend wird die Konjunktion C sämtlicher so erhaltener Formeln gebildet. Die Formel $(\exists x_0)C$ hat dann die verlangte Eigenschaft, d. h.

1. Wenn $(x)[\Phi(x) = 0]$ gilt, ist $(\exists x_0)C$ erfüllbar, denn die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n$ ergeben dann offenbar in $(\exists x_0)C$ für $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ eingesetzt einen richtigen Satz.

2. Wenn $(\exists x_0)C$ erfüllbar ist, gilt $(x)[\Phi(x) = 0]$.

Beweis: Für den Beweis dieser beiden Behauptungen sei auf die Originalarbeit verwiesen [18, S. 195]. □

Nun gilt für den Schluss des Beweises von Satz 2.1.4, dass man die Überlegungen, die zu Satz 2.1.5 für jedes spezielle F führen, auch auf das System P übertragen und innerhalb dieses Systems durchführen kann. Damit ist die Äquivalenz zwischen einem Satz der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) und der Erfüllbarkeit der entsprechenden Formel des e.F. in P beweisbar, womit aus der Unentscheidbarkeit der einen Saite die der anderen Seite folgt. Damit ist Satz 2.1.4 bewiesen. Dieser Satz gilt natürlich auch für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch rekursiv definierbare ω-widerspruchsfreie Klassen von Axiomen, da auch in diesen Systemen unentscheidbare Sätze der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) auftreten. □

Nun folgt mit Satz 2.1.6, aufbauend auf den vorherigen Ergebnissen, vorwiegend Gödels Sätzen I-VI (siehe hierzu oben 2.1.1), der 2. Unvollständigkeitssatz, wofür aber der Beweis, wie in der Originalarbeit [18, S. 196–198] nur skizziert wird.

Satz 2.1.6: [18, Satz XI]: Sei χ eine beliebige rekursive widerspruchsfreie Klasse von Formeln ('χ ist widerspruchsfrei' (mit Abkürzung $Wid(\chi)$) wird folgendermaßen definiert: $Wid(\chi) \equiv (\exists x)[Form(x) \& \overline{Bew_\chi}(x)]$ oder in moderner Schreibweise: $Wid(\chi) :\Longleftrightarrow$

$\exists x(Form(x) \wedge \neg Bew_\chi(x)))$, dann gilt: Die *Satzformel*, welche besagt, dass χ widerspruchsfrei ist, ist nicht χ-*beweisbar*; insbesondere ist die Widerspruchsfreiheit von P in P unbeweisbar (dies folgt, wenn man für x die leere Klasse von *Formeln* einsetzt, s.o.), vorausgesetzt, dass P widerspruchsfrei ist (im entgegengesetzten Fall ist natürlich jede Aussage beweisbar).

Oder anders formuliert [34, S. 340]: Kein formales System, das mindestens über die Ausdrucksstärke von P verfügt, kann seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen.

Beweis: In der Definition innerhalb des Satzes wird ausgenutzt, dass in einem widersprüchlichen formalen System, das den gewöhnlichen aussagenlogischen Schlussapparat umfasst, ausnahmslos alle Formeln beweisbar sind. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass $P \cup \chi$ widerspruchsfrei ist, wenn [34, S. 341]:

- eine Formel existiert, d.h. $\exists x Form(x)$
- die in $P \cup \chi$ unbeweisbar ist, d.h. $\neg Bew\chi(x)$

Nun folgt die Beweisskizze in Anlehnung an die Originalarbeit [18, S. 196–198] mit eigenen Erläuterungen und solchen in Anlehnung an [34, S. 341]. Es gab das Vorhaben, den vollständigen Beweis in einem weiteren Artikel zu veröffentlichen [18, S. 198], was nie erfolgte. Sei χ eine beliebige rekursive Klasse von Formeln, die für die jetzigen Betrachtungen fest gewählt ist (auch die leere Klasse ist möglich). Für den Beweis, dass $17 Gen r$ nicht χ-beweisbar ist (r und p hängen von χ ab), wurde, wie aus dem Beweis zu Satz 2.1.1 hervorgeht, nur die Widerspruchsfreiheit von χ benutzt, d. h. es gilt:

$$Wid(\chi) \longrightarrow \overline{Bew_\chi}(17 Gen r) \tag{2.19}$$

d.h. nach (6.1): $Wid(\chi) \longrightarrow (x)\overline{x B_\chi (17 Gen r)}$. Wir geben hier wieder die moderne Schreibweise, Hoffmann folgend, an [34, S. 341]: im Beweis des Hauptresultats wurde eine Fallunterscheidung vorgenommen und gezeigt, dass weder die Formel $\forall x_1 \varphi_r(x_1)$ noch die Formel $\neg\forall x_1 \varphi_r(x_1)$ beweisbar ist. Im ersten Fall wurde auf die Widerspruchsfreiheit von P zurückgegriffen. Dann ist (2.19) in moderner Schreibweise:

$$Wid(\chi) \Longrightarrow \ulcorner \forall x_1 \varphi_r(x_1) \urcorner \notin Bew_\chi, \tag{2.20}$$

denn mit (2.10) gilt $17 Gen r = Sb(p^{19}_{Z(p)})$ und $17 Gen r$ ist $\forall x_1 \varphi_r(x_1)$. Die Relation $Bew(\chi)$ wurde oben so definiert: $x \in Bew_\chi :\Longleftrightarrow \exists y y B_\chi x$. Damit erhalten wir: $Wid(\chi) \Longrightarrow \neg\exists y y B_\chi \ulcorner \forall x_1 \varphi_r(x_1)$ und durch Umformung $Wid(\chi) \Longrightarrow \forall x \neg(x B_\chi \ulcorner \forall x_1 \varphi_r(x_1) \urcorner)$ [34, S. 342], was in Gödels Schreibweise $Wid(\chi) \longrightarrow (x)\overline{x B_\chi Sb(p^{19}_{Z(p)})}$ und nach (8.1)

$$Wid(\chi) \longrightarrow (x) Q(x, p) \tag{2.21}$$

entspricht. Diese letzte Beziehung heißt in moderner Schreibweise [34, S. 342], mit $\forall x_1 \varphi_r(x_1) = \varphi_p(\overline{p})$: $Wid(\chi) \Longrightarrow \forall x \neg(x B_\chi \ulcorner \varphi_p(\overline{p}) \urcorner)$. Und hierfür gilt eben: $Wid(\chi) \Longrightarrow (x, p) \in Q$ für alle x. An dieser Stelle kann ausgenutzt werden, dass alle bisher verwendeten Begriffe und Beweise (d.h. insbesondere ab der Definition von 'rekursiv' bis zum

Beweis von Satz 2.1.1 und zusätzlich Satz 2.1.6) in P formalisiert werden können. Es wurden nur die „Definitions- und Beweismethoden der klassischen Mathematik verwendet, wie sie im System P formalisiert sind. Insbesondere ist χ (wie jede rekursive Klasse) in P definierbar.“ [18, S. 197] Daraus folgt, dass eine geschlossene Formel $Wid(\chi)$ (eine *Satzformel*) existiert, durch die die Relation $Wid(\chi)$ in P formalisiert werden kann, welche wir mit der Gödelnummer w bezeichnen wollen. Auch die anderen Aussagen, die bisher auf der Metaebene formalisiert wurden, können innerhalb von P formalisiert werden [18, S. 197]:

- Die Relation $Q(x, y)$ wird mit (2.5.1), (2.6) und (2.7) durch das *Relationszeichen* q ausgedrückt;
- $Q(x, p)$ durch r, weil mit (2.9) gilt $r = Sb(q_{Z(p)}^{19})$
- Satz $(x)Q(x, p)$ durch $17Genr$

Mit der modernen Schreibweise von oben können wir das, Hoffmann folgend [34, S. 343], so darstellen:

Mathematische Aussage	Formalisierung in P
$Wid(\chi)$	$Wid(\chi)$
$(x, y) \in Q$	$\psi_q(\overline{x}, \overline{y})$
$(x, p) \in Q$	$\varphi_r(\overline{x})$
$(x, p) \in Q$ für alle x	$\forall x_1 \varphi_r(x1)$

Dann ist wegen (2.21) $wImp(17Genr)$ ($Imp(x)$ wurde innerhalb der primitiv-rekursiven Funktionen definiert) in P beweisbar und damit auch χ-beweisbar. Aus (2.19) kann auf die Richtigkeit von $wImp(17Genr)$ geschlossen werden, da der unentscheidbare Satz $17Genr$ seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Wäre nun w χ-beweisbar, so wäre auch $17Genr$ χ-beweisbar, woraus mit (2.19) folgen würde, dass χ nicht widerspruchsfrei ist. D.h. in moderner Schreibweise: die Folgerungen, die zu (2.21) geführt haben, formalisiert in P, könnten so als Theorem abgeleitet werden [34, S. 343]:

$$\vdash Wid(\chi) \longrightarrow \forall x_1 \varphi_r(x_1)$$

Wenn wir nun die Widerspruchsfreiheit von P innerhalb von P beweisen könnten, dann würde $\vdash Wid(\chi)$ gelten, und daraus würde sich mit $\vdash Wid(\chi) \longrightarrow \forall x_1 \varphi_r(x_1)$ ein Beweis für $\forall x_1 \varphi_r(x_1)$ ergeben, also $\vdash \forall x_1 \varphi_r(x_1)$. Mit dem ersten Unvollständigkeitssatz gilt aber, dass letzteres unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit nicht innerhalb von P bewiesen werden kann, und damit kann auch $Wid(\chi)$ nicht innerhalb von P beweisbar sein. □

Wir können aus diesem 2. Unvollständigkeitssatz nur die folgende Schlussfolgerung ziehen [34, S. 344]: wenn in einem formalen System, welches die Voraussetzungen dieses 2. Satzes erfüllt, und in dem tatsächlich die eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen gelingt, dann ist dieses System zwangsläufig widersprüchlich. Denn, ist ein formales System mit aussagenlogischem Schlussapparat widersprüchlich, dann lassen sich alle Formeln aus den Axiomen ableiten, was auch die Formel $Wid(\chi)$ beinhaltet. Aus der Beweisbarkeit von $Wid(\chi)$ folgt nicht die Widerspruchsfreiheit des Systems. Der Satz kann also nur dazu verwendet werden die Widersprüchlichkeit eines formalen Systems und nicht seine Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Gödel weist noch einmal explizit darauf hin, dass sich der geführte Beweis auf formale Systeme übertragen lässt, die in ihrer Ausdrucksstärke dem System P entsprechen, und somit auch auf das Axiomensystem der Mengenlehre und die klassische Mathematik (die zu dieser Zeit noch getrennt betrachtet wurden). Bezüglich der Mengenlehre zeigt der zweite Unvollständigkeitssatz, dass ein formaler Beweis für die widerspruchsfreie Errichtung der Mathematik auf ZF oder ZFC nur in formalen Systemen möglich ist, die komplexer sind als ZF oder ZFC, und wir diesen Beweis damit auf ein anderes System verschieben müssen, dessen eigene Widerspruchsfreiheit dann aber ebenfalls nicht beweisbar wäre, wodurch wir wieder bei der Erweiterung ins Unendliche anlangen.

Nun gehen wir zu Gödels Arbeiten bez. der Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms über. Es zeichnete sich ab, dass beide innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden können.

2.2 Beweise zur Kontinuumshypothese: Gödel und Cohen

Das Auswahlaxiom (AC) besagt: „Für jede Familie nichtleerer, disjunkter Mengen existiert eine Auswahlmenge, die genau ein Element aus jeder der Mengen enthält.“ [3, S. 217] Und formal können wir dies innerhalb der Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (NBG-ML) folgendermaßen schreiben [3, S. 213–214]: Zu jeder Klasse X von nicht leeren disjunkten Mengen y gibt es die Klasse W, die aus jeder Menge $v \in X$ genau ein Element enthält:

$$\begin{aligned} \forall X [\forall y \forall z (y \in X \wedge z \in X \longrightarrow y \neq \emptyset \wedge z \neq \emptyset \wedge (y = z \vee y \cap z = \emptyset)) \\ \longrightarrow \exists W \forall v (v \in X \longrightarrow \exists u (W \cap v = \{u\}))]. \end{aligned}$$

Das Problematische am Auswahlaxiom ist das Nicht-Konstruktive, was für das Endliche unerheblich ist. Im Unendlichen bereitet es Probleme, da nicht explizit ist, wie die Auswahl geschehen soll. Denken wir an den unendlichen Mengenbegriff, so ist die Bildung einer Auswahlmenge nicht gesichert, da es kein Gesetz gibt, nach dem Elemente zu einem Ganzen vereinigt werden können, genauso wenig wie die Elemente klar definiert sind, die überhaupt zusammengefasst werden sollen. Im Unendlichen gibt es keine klaren Unterscheidungen, da die zu unterscheidenden Objekte durch das Unendliche beliebig werden. Mit dem Satz von Cantor (siehe Beweis weiter unten) gilt, dass die Mächtigkeit einer Menge A kleiner ist, als die Mächtigkeit ihrer Potenzmenge $P(A)$. Durch diese Potenzmengenoperation erhalten wir die unendliche Reihe der Kardinalzahlen (Mächtigkeiten), die Hierarchie der Beths ($\beth$). Daneben ist die unendliche Hierarchie der Kardinalzahlen der wohlgeordneten Mengen die Hierarchie der Alephs ($\aleph$). [3, S. 220]

> „Aus dem Auswahlaxiom, genauer aus dem äquivalenten Wohlordnungssatz von Zermelo, folgt, dass diese Reihe alle Kardinalzahlen enthält. Nach

> ihrer Definition sind die ersten Elemente dieser zwei Skalen gleich, d.h. es ist $\aleph_0 = \beth_0$. Die Kontinuumshypothese [CH] ist die natürliche Erwartung, dass auch die beiden folgenden Elemente in den Reihen gleich sind, d.h. dass $\aleph_1 = \beth_1$, also $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ist. Die allgemeine Kontinuumshypothese [GCH] ist die Behauptung, dass die Reihe der Alephs und die Reihe der Beths gleich sind. D.h. für alle Ordinalzahlen α gilt $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$, d.h. $\forall\alpha(\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha})$." [3, S. 220–221]

Die Kontinuumshypothese lässt sich auch so formulieren, dass

> „die Menge aller Teilmengen der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, also die Menge $P(\mathbb{N})$ gleichmächtig zur Menge aller reellen Zahlen ist. [D.h.] jede unendliche Menge reeller Zahlen ist gleichmächtig entweder zur Menge der naturlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder zur gesamten Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die allgemeine Kontinuumshypothese sieht dann so aus: Jede Familie von Teilmengen einer unendlichen Menge A ist gleichmächtig entweder zu einer Teilmenge der Menge A oder mit der ganzen Menge $P(A)$." [3, S. 221]

Die letzteren Formulierungen sind mit den vorherigen äquivalent, wenn das Auswahlaxiom vorausgesetzt wird. 1947 wurde bewiesen, dass aus GCH das Auswahlaxiom folgt [3, S. 221; 59], d.h. es gibt eine starke Verbindung zwischen beiden, wie auch die obige Formulierung zeigt. Zusätzlich stellte sich aber die Frage, wie der Zusammenhang der beiden mit den Axiomen von ZF ist, ob sie also als Folgerungen aus diesen restlichen Axiomen betrachtet werden können. Durch die Beweise von Gödel 1939 [19] und Cohen 1963 [13] hat sich gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, dass also die philosophische und methodologische Position der klassischen Mathematik nicht gestärkt werden konnte. Denn, durch die beiden Beweise wurde gezeigt, dass, erstens, GCH (also auch CH) und AC relativ widerspruchsfrei zu den anderen Axiomen von ZF sind (Gödel) – d.h. ZF bleibt konsistent bei Hinzufügung von AC und GCH oder wäre auch schon inkonsistent, wenn ZF es wäre –; zweitens, dass AC und GCH nicht aus den übrigen Axiomen von ZF folgen und auf der Basis von ZF weder AC aus CH noch CH aus AC – und damit auch nicht GCH – folgt (Cohen). Durch diese Ergebnisse ist eine Mengenlehre mit und ohne AC und GCH möglich, wodurch es auf Grundlage der bestehenden Axiome keine generelle Ordnung für die unendlichen Stufen der Unendlichkeiten gibt.

Wir gehen Gödels Arbeit [19] im Detail durch, wobei wir uns aus Platzgründen auf die 1939 veröffentlichte Beweisskizze beschränken, auch wenn diese im Vergleich zur ausführlichen 1940 veröffentlichten Variante [20] etwas unterschiedlich ist [28, S. 1]. Seine Beweisskizze hat das Ziel zu zeigen, dass die Kontinuumshypothese (CH, bzw. sogar die allgemeine Kontinuumshypothese GCH) zur Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC) relativ widerspruchsfrei ist. Wenn also ZFC widerspruchsfrei ist, dann ist auch ‚ZFC + CH' widerspruchsfrei, auch wenn, wie wir oben gesehen haben, ZFC nach den Unvollständigkeitssätzen nicht mit Hilfe von ZFC selbst bewiesen werden kann. Dazu bezeichnen wir mit V die Gesamtheit aller in einem Axiomensystem zu bildenden Mengen, also das gesamte Mengenuniversum, in diesem Fall also das ZF-Mengenuniversum. Gödel verwendet nun L als Gesamtheit aller konstruierbaren Mengen (Definition s.u.)

und zeigt, dass in L einerseits alle Axiome der Mengenlehre (also ZF zusammen mit AC) gelten, L also ein (inneres) Modell von ZFC ist, aber zusätzlich auch die allgemeine Kontinuumshypothese erfüllt ist, wodurch aus der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre die Kontinuumshypothese nicht zu widerlegen ist, da sonst der Widerspruch auch schon in L stattgefunden hätte. Gödel führt seinen Beweis für T als Zermelos Axiomensystem der Mengenlehre mit oder ohne Axiom der Substitution und indem Zermelos Ausdruck ‚Definite Eigenschaft' mit ‚Propositionale Funktion über dem System aller Mengen' identifiziert wird [19, S. 224, Fußnote 1].

Es ist anzumerken, dass Gödel den Beweis in Übertragung der Begriffe von Mengen auf Klassen führt, aber nur in der Weise, in der eine Übertragung möglich ist [28, S. 9]. Zusätzlich sind die Begriffe *absolut* und *transitiv* zu klären: eine Funktion heißt ‚absolut', wenn sie sich von einer transitiven Klasse zu einer transitiven Teil-Klasse in der Form übertragen lassen, dass sowohl die Struktur der Funktion, als auch die Variablen innerhalb der Funktion selbst in der Teilklasse erhalten bleiben. Eine Klasse X heißt dabei ‚transitiv', wenn x als Element von X eine Teilmenge von X ist [28, S. 9].

Zu zeigen, dass AC und GCH im konstruierbaren Universum gelten, geschieht in zwei Schritten. Erstens wird gezeigt, dass diese Sätze aus dem Konstruierbarkeitsaxiom folgen, was besagt, dass jede Menge konstruierbar ist und durch die Gleichheit $V = L$ ausgedrückt wird. Bei der Konstruktion werden zu jeder Ordinalzahl α eine Menge L_α und dann die Klasse $L = \cup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$ als das Universum aller konstruierbaren Mengen definiert. Durch die Gödelschen Unvollständigkeitssätze haben wir gesehen, dass das Konstruierbarkeitsaxiom nicht aus ZFC hergeleitet werden kann, aber es kann gezeigt werden, dass seine zusätzliche Annahme keinen Widerspruch beinhaltet, der nicht auch schon in ZFC vorhanden gewesen wäre. Zweitens wird dann gezeigt, dass der Satz $V = L$ für das konstruierbare Universum gilt. Mit seiner Konstruktion gelten dann in einem Mengenuniversum, welches ZF und das Konstruierbarkeitsaxiom erfüllt, das Auswahlaxiom (AC) und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (GCH). Technisch gesehen, findet diese Beweisführung statt, indem in diesem inneren Modell von ZF (das durch das Konstruktibilitätsaxiom entsteht) die innere Ordnung des Mengensystems, welche die generelle CH widerspiegelt (also die Ordnung in den Mächtigkeiten), durch eine binäre Relation und das Aufdecken von weiteren Abbildungen (d.h. Relationen) erstellt wird. Dafür werden in den einzelnen Theoremen immer wieder neue Mengen und Funktionen (d.h. Abbildungen) konstruiert, innerhalb derer dann diese Beziehungen hergestellt werden können. Wir werden in den Anmerkungen, nach dem Gesamtbeweis, weiter unten noch sehen, dass durch die Annahme des Konstruierbarkeitsaxioms das gesamte Mengenuniversum eingeschränkt wird [3, S. 227–228].

Insgesamt werden wir im folgenden die Theoreme 2.2.1 − 2.2.9 in Gödels Originalformulierung angeben, und auch seinen Beweisen in diesem Sinne (teilweise) folgen [19, S. 221–224], aber zusätzlich jeweils in Erläuterungen [in Klammern] den Weg der Beweisführung nachvollziehen, um zu sehen, wie dieses innere Modell erstellt wird und AC und GCH darin eingeschlossen werden. Das Verständnis dieser Konstruktion, der Beziehungen in den inbegriffenen Abbildungen und der daraus resultierenden Ordnung GCH, ist essentiell, um die Diskrepanzen zwischen den unterschiedlichen Mengenbegriffen zu verstehen, die wir im darauffolgenden Abschnitt 2.3 ausführlich behandeln werden.

Als erstes geben wir, Gödel entsprechend, die folgende Definition:

Definition 2.2.1 (Funktionen in Bezug zum Bereich M):
[19, S. 220–221]: Sei M ein beliebiger Bereich von Dingen (anschaulich verstehbar als Mengensystem), in dem eine binäre Relation ϵ definiert ist, dann heißt

- jeder Ausdruck φ, der die folgenden Symbole enthält:
  1. Variablen $x, y \ldots$ im Bereich M, und dazugehörige Quantoren.
  2. Symbole $a_1 \ldots a_n$, die einzelne Elemente von M bezeichnen, im Folgenden als die *Konstanten von* φ bezeichnet.
  3. ϵ
  4. $\neg$ (nicht)
  5. $\vee$ (oder)
  6. Klammern

  Aussagefunktion über M.

- Wir bezeichnen mit M' die Menge aller Teilmengen von M, die durch die *propositionalen Funktionen (p.F.)* $\varphi(x)$ *über* M definiert sind, wobei *propositionale Funktion* im folgenden immer ‚propositionale Funktion mit einer freien Variablen' bedeutet, wenn nichts anderes erklärt wird.

- Eine Funktion f mit s Variablen heißt eine *Funktion in* M, wenn für beliebige Elemente $x_1 \ldots x_s$ von M $f(x_1 \ldots x_s)$ definiert ist und ein Element von M ist.

- Wenn $\varphi(x)$ eine p.F. über M ist, mit der folgenden Normalform:
  $(x_1 \ldots x_n)(\exists y_1 \ldots y_m)(z_1 \ldots z_k)(\exists u_1 \ldots u_l) \ldots L(xx_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m z_1 \ldots z_k u_1 \ldots u_l \ldots)$
  (wobei L keine weiteren Quantoren enthält) und wenn $a \epsilon M$ gilt, dann nennen wir *Skolem-Funktionen für* φ *und* a alle beliebigen Funktionen $f_1 \ldots f_m g_1 \ldots g_e \ldots$ in M mit jeweiligen $n \ldots n, n+k \ldots n+k \ldots$ Variablen, so dass für beliebige Elemente $x_1 \ldots x_n z_1 \ldots z_k \ldots$ von M das folgende gilt:
  $L(ax_1 \ldots x_n f_1(x_1 \ldots x_n) \ldots f_m(x_1 \ldots x_n) z_1 \ldots z_k g_1(x_1 \ldots x_n z_1 \ldots z_k) \ldots g_e(x_1 \ldots x_n z_1 \ldots z_k) \ldots)$

Damit ist dann die Proposition $\varphi(a)$ äquivalent zu der Existenz der Skolem-Funktion[2] für φ und a [19, S. 221].

Der erste Abschnitt von Definition 2.2.1 beschreibt den Begriff der Absolutheit, der oben erläutert wurde. Dieser Begriff ist notwendig, um zu zeigen, dass die Mengen x, die in L liegen, genau dieselben Eigenschaften haben, wenn sie in V liegen.

Anschließend werden die folgenden Definitionen gegeben, um damit zu Theorem 2.2.1 übergehen zu können [19, S. 221]: $M_0 = \{\Lambda\}, M_{\alpha+1} = M_{\alpha'}, M\beta = \Sigma_{\alpha<\beta} M_\alpha$ für Grenzwerte β und die folgende Definition der konstruierbaren Menge:

[2] Bei der Skolemfunktion wird die Ersetzung freier Vorkommen von Variablen durch einen Term (Skolemterm) vorgenommen. Für nähere Ausführungen siehe [60].

Definition 2.2.2: [19, S. 221]: Eine Menge x heißt *konstruierbar*, wenn es eine Ordnungszahl α so gibt, dass $x \epsilon M_\alpha$ ist und *konstruierbar mit Ordnung* α, wenn $x \epsilon M_{\alpha+1} - M_\alpha$ ist.

Aus dieser Definition folgt, dass $M_\alpha \subset M_\beta$ und $M_\alpha \epsilon M_\beta$ für $\alpha < \beta$ gilt. Durch den Begriff der Absolutheit erhalten wir hier auch die folgende Charakterisierung von L: Es ist das minimale transitive Klassenmodell der Axiome von ZF, das alle Ordinalzahlen enthält. Diese Charakterisierung zeigt die grundlegende Natur des Konzepts der konstruierbaren Menge. Aus dieser Definition folgt auch das erste Theorem 2.2.1.

Theorem 2.2.1: [19, Theorem 1, S. 221]: $x \epsilon y$ impliziert, dass die Ordnung von x kleiner ist als die Ordnung von y für beliebige konstruierbare Mengen x, y. [Aussage über die generelle Ordnung der Mengen x und y in der binären Relation ϵ.]

Definition 2.2.2 und Theorem 2.2.1 bedeuten, dass AC und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese aus dem Satz $V = L$ folgen. Denn für AC kann man durch Induktion über α eine Wohlordnung M_α von L_α definieren. Es wird dann $L_{\alpha+1}$ wohlgeordnet, indem man die Elemente, die bereits in L_α existieren, zuerst in der Reihenfolge von M_α anordnet und dann die neuen Elemente in der gleichen Reihenfolge wie ihre Minimaldefinitionen. Gödel schreibt dazu:

> „es ist möglich, die Wohlordnung aller konstruierbaren Mengen [also L] zu definieren und jeder konstruierbaren Menge (beliebiger Ordnung α) eine eindeutig bestimmte p. F. $\varphi_\alpha(x)$ über M_α als ihre ‚*Definition*', und darüber hinaus jedem Paar φ_α, a (bestehend aus einer p.F. φ_α über M_α und einem Element a von M_α, für das $\varphi_\alpha(a)$ wahr ist) eindeutig bestimmte ‚*designierte Skolem-Funktionen für* φ_α, a' zuzuordnen." [19, S. 221]

Das heißt, es wird zunächst eine lineare Zuordnung vorgenommen (im Sinne einer propositional-funktionalen Zuordnung) und dann diese funktionale Zuordnung in die Logik übertragen. Nun folgt mit Theorem 2.2.2 die zentrale Aussage, mit der bewiesen wird, dass $V = L$ auch GCH impliziert. Der Beweis dieses Theorems erstreckt sich über die weiteren Theoreme 2.2.3 – 2.2.5 (bei Gödel Theoreme 3–6 [19, S. 222–223]), wobei 2.2.3 – 2.2.5 als direkte Lemmata des Beweises für 2.2.2 anzusehen sind, und Gödels Theorem 6 wiederum als Lemma für den Beweis von Theorem 5 (siehe hier Theorem 2.2.5) dient.

Theorem 2.2.2: [19, Theorem 2, S. 221]: Jede konstruierbare Teilmenge m von M_{ω_α} hat eine Ordnung $< \omega_{\alpha+1}$ (d.h., eine konstruierbare Menge, deren Elemente alle Ordnung $< \omega_\alpha$ haben, hat eine Ordnung $< \omega_{\alpha+1}$). [Aussage über die generelle Ordnung der konstruierbaren Mengen.]

Beweis: Wir folgen Gödels Formulierungen in [19, S. 221] und definieren eine Menge K von konstruierbaren Mengen, eine Menge O von Ordinalen und eine Menge F von Skolem-Funktionen durch die folgenden Postulate I-VII. Auf die Definition dieser Mengen und Postulate wird in den darauffolgenden Theoremen 2.2.3 – 2.2.5 (Gödels Theoreme 3–6 [19, S. 222–223])) und den dazugehörigen Beweisen zurückgegriffen, sie spielen also eine zentrale Rolle im Gesamtaufbau des Beweises zu Theorem 2.2.2.

I. M_{ω_α} und $m\epsilon K$.

II. Wenn $x\epsilon K$ ist, gehört die Ordnung von x zu O.

III. Wenn $x\epsilon K$ ist, gehören alle Konstanten, die in der Definition von x vorkommen, zu K.

IV. Wenn $\alpha\epsilon O$ und $\varphi_\alpha(x)$ eine p.F. über M_α ist, dessen Konstanten alle zu K gehören, dann gilt:

1. Die durch φ_α definierte Teilmenge von M_α gehört zu K.
2. Für jedes $y\epsilon K \cdot M_\alpha$ gehören die designierten Skolem-Funktionen für φ_α und y oder $\neg\varphi_\alpha$ und y (entsprechend als $\varphi_\alpha(y)$ oder $\neg\varphi_\alpha(y)$) zu F.

V. Wenn gilt: $f\epsilon F$, $x_1 \dots x_n \epsilon K$ und $(x_1 \dots x_n)$ gehören zum Definitionsbereich von f, dann gilt $f(x_1 \dots x_n)\epsilon K$.

VI. Wenn gilt: $x, y\epsilon K$ und $x - y \neq \Lambda$, dann gehört das erste Element (innerhalb der Wohlordnung von der konstruierbaren Mengen) von $x - y$ zu K.

VII. Keine geeigneten Teilmengen von K,O, F erfüllen I-VI.

Aus diesen Postulaten folgt nun zunächst Theorem 2.2.3:

Theorem 2.2.3: [19, Theorem 3, S. 222]: Wenn $x \neq y$ und $x, y\epsilon K \cdot M_{\alpha+1}$, dann gibt es ein $z\epsilon K \cdot M_\alpha$ sodass $z\epsilon x - y$ oder $z\epsilon y - x$ gilt. [Betrifft die innere Struktur der Elemente innerhalb der binären Relation und der Ordnungen.]

Beweis: Dies folgt aus VI der obigen Postulate und Theorem 2.2.1. □

Theorem 2.2.4: [19, Theorem 4, S. 222]: Es gilt: $\overline{\overline{K + O + F}} = \aleph_\alpha$. [$\overline{\overline{m}}$ bedeutet die Mächtigkeit von m - die Aussage betrifft also die Mächtigkeit von $K + O + F$].

Beweis: Dies folgt daraus, dass $\overline{\overline{M_{\omega_\alpha}}} = \aleph_\alpha$ gilt und $K + O + F$ aus $M_{\omega_\alpha} + \{m\}$ durch Bildung der Abgeschlossenheit in Bezug zu den durch II-VI in den obigen Postulaten ausgedrückten Operationen erhalten wird. [19, S. 222] □

Nun erstellt Gödel mit η den Ordnungstyp von O und bezeichnet mit $\overline{\alpha}$ die Ordnungszahl, welche α in ähnlicher Abbildung von O auf die Menge der Ordinalzahlen $< \eta$ entspricht [19, S. 222]. Dann gilt damit:

Theorem 2.2.5: [19, Theorem 5, S. 222]: Es gibt eine Eins-zu-eins-Abbildung x' von K auf M_η, so dass $x\epsilon y \equiv x'\epsilon y'$ für $x, y\epsilon K$ und $x' = x$ für $x\epsilon M_{\omega_\alpha}$. [Aussage über die Existenz einer Eins-zu-eins-Abbildung zwischen den bis hierher gegebenen Mengen und Ordnungen.]

Beweis: Auf Grund der Länge der Beweisskizze sei hier nur auf die Originalarbeit verwiesen [19, S. 222–223]. Gödels Theorem 6 ist als Lemma zu Theorem 5 in den Gesamtbeweis von Th.5 mit eingeschlossen, weshalb hier auch auf dieses Theorem verzichtet wird. Die grundlegende Beweisidee ist die, dass isomorphe Abbildungen zwischen den Ordnungen gebildet und so erweitert werden, dass in diesen Abbildungen, und Erweiterungen, eine Inklusionsbeziehung besteht (was Gödel mit seinem Theorem 6 [19, Theorem 6, S. 222] beweist). Darüber hinaus kann dann gezeigt werden, dass die so verwendete Abbildung aus seinem Theorem 6 Element des neuen, konstruierten, Mengensystems ist, und die Erweiterung der Abbildung eine neue ergibt, für die sechs Eigenschaften gezeigt werden, die dann das behauptete leisten. □

Um nun Theorem 2.2.2 zu Ende zu beweisen, wird wie folgt vorgegangen [19, S. 223]: Gödel betrachtet zunächst die Menge m', die m in der isomorphen Abbildung von K auf M_η entspricht. Ihre Ordnung ist $< \eta < \omega_{\alpha+1}$, weil $m' \epsilon M_\eta$ und $\overline{\overline{\eta}} = \overline{\overline{O}} \leq \aleph_\alpha$ auf Grund von Theorem 2.2.4 ist. Da $x \epsilon m \equiv x' \epsilon m'$ für $x \epsilon K$ ist, haben wir $x \epsilon m \equiv x \epsilon m'$ für $x \epsilon M_{\omega_\alpha}$ auf Grund von Theorem 2.2.5. Da außerdem $m \subseteq M_{\omega_\alpha}$ ist, folgt dass $m = m' \cdot M_{\omega_\alpha}$ gilt, d.h. m ist eine Schnittmenge zweier Mengen der Ordnung $< \omega_{\alpha+1}$, was impliziert, dass es eine Ordnung $< \omega_{\alpha+1}$ hat. □

Wie oben schon erläutert, ist Theorem 2.2.2 das zentrale Lemma, in dem bewiesen wird, dass $V = L$ auch GCH impliziert. Dies wird so ersichtlich: wenn „λ eine unendliche Kardinalzahl ist, mit $\alpha < \lambda$, x eine beliebige Teilmenge von λ, und wenn $V = L$ gilt, dann ist x ein Element von L_{λ^+}, [und] λ^+ ist die kleinste nächsthöhere Kardinalzahl nach λ" [62, S. 11]. Dabei hat L_{λ^+} die gleiche Kardinalität wie λ^+, denn der Beweis nutzt den Satz von Löwenheim-Skolem, mit dem sich die Gültigkeit einer abzählbaren Menge von Aussagen der Prädikatenlogik 1. Stufe, die schon in einem Modell mit einem überabzählbar unendlich großen Universum erfüllt ist, immer auf ein Modell mit einer abzählbar unendlich großen Domäne übertragen lässt. Somit impliziert das Lemma, dass GCH in L gilt. Genauer ausgedrückt: Da $V = L$ angenommen wird, wird x in irgendeinem L_γ erscheinen. Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Wohlordnung von L_α auch auf $L_{\alpha+1}$ übertragen werden kann, d.h. auf jede nächsthöhere Kardinalzahl. Deshalb können wir γ erhöhen, falls notwendig, um zu erreichen, dass $\gamma > \alpha$ gilt und L_γ ein Modell von $V = L$, und damit auch einer (festen, endlichen) Teilmenge T der Axiome von ZF ist. Dafür muss die Teilmenge T als groß genug angenommen werden, um die grundlegenden Eigenschaften von L_α zeigen zu können. Nehmen wir nun, Solovay folgend [62, S. 11–12], an, M und N sind transitive Mengenmodelle von T, wobei $M \subset N$ gilt, dann gilt mit unserem Begriff der Absolutheit von oben, dass die Berechnung der L_α von N nach M absolut ist. Das Löwenheim-Skolem-Theorem lässt sich unterteilen in eine Abwärts- und Aufwärtsrichtung. Dabei wird bei der Abwärtsrichtung gezeigt, dass die Mächtigkeit eines Modells einer beliebigen Menge von Ausdrücken entweder $\leq$ abzählbar unendlich oder $\leq$ der Mächtigkeit der Menge an Ausdrücken ist. Mit diesem abwärts gerichteten Löwenheim-Skolem-Theorem kann dann ein Untermodell M von L_γ gefunden werden, dass die Kardinalität λ besitzt, und zusätzlich x, λ und alle Ordinalzahlen kleiner als λ enthält. Weiter gilt dann:

> „Nun ist N ein transitives Modell des Satzes $V = L$ und des endlichen Fragments T von ZF. Argumente der Absolutheit zeigen, dass für Ordinalzahlen $\delta \in N$, $L_\delta^N = L_\delta$ gilt. Da $V = L$ in N gilt, ist N nur die Vereinigung der L_δ, mit δ als Ordnungszahl von N; d.h. es ist $N = L_\theta$, wobei θ die kleinste Ordnungszahl ist, die nicht in N ist." [62, S. 11–12]

Zusätzlich gilt nun, dass der Isomorphismus zwischen M und N den Ordinalen $\leq \lambda$ entspricht und damit die Menge x zu sich selbst führt, was daraus folgt, dass die Menge M isomorph zu einer transitiven Menge ist [62, S. 12]. Deshalb liegt x in $N = L_\theta$. Außerdem ist die Kardinalität von $\theta \leq$ der Kardinalität von N oder M, die äquivalent wiederum $\leq \lambda$ ist. θ ist damit also $< \lambda^+$, was mit Theorem 2.2.2 zu zeigen war. Nun folgt

Theorem 2.2.6: [19, Theorem 7, S. 223]: M_{ω_ω}, betrachtet als Modell für die Mengenlehre, erfüllt alle Axiome von Zermelo, mit Ausnahme vielleicht des Auswahlaxioms, und M_Ω (wobei Ω die erste unerreichbare Zahl ist, die nicht durch kleinere Kardinalzahlen auf Grund von gängigen Operationen erreicht werden kann) erfüllt zusätzlich das Axiom der Substitution, wenn in beiden Fällen ‚definite Eigenschaft' bzw. ‚definite Relation' mit ‚propositionale Funktion über der Klasse aller Mengen' (mit einer bzw. zwei freien Variablen) identifiziert wird. [Erstes Zwischenergebnis erreicht: das konstruierte Mengensystem erfüllt alle Axiome von Zermelo, mit der genannten Einschränkung. Es kann also als inneres Modell des Mengenuniversums verwendet werden.]

Beweis: Für den Beweis prüft Gödel die einzelnen Axiome von Zermelo in Bezug zu seinem erstellten Modell der Mengenlehre. Die Ausführungen der Beweisskizze sind hier zu finden [19, S. 223]. □

Nun definiert Gödel drei Aussagen, um den Gesamtbeweis abzuschließen. Dazu bezeichnet „A" den Satz „Es gibt keine nicht-konstruierbaren Mengen" (unter ‚Mengen' muss man dafür alle Objekte verstehen die man erhält, wenn man die vereinfachte Hierarchie der Typen auf einer leeren Menge von Individuen aufbaut, einschließlich Typen beliebiger transfiniter Ordnungen), „R" bezeichnet das Auswahlaxiom und „C" bezeichnet den Satz „$2^{\aleph}_{\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ für jedes Ordinal α", das heißt GCH. [19, S. 223] Dann haben wir:

Theorem 2.2.7: [19, Theorem 8, S. 223]: $A \supset R$ und $A \supset C$. [Das heißt, AC und GCH sind Inklusion der Aussage „Es gibt keine nicht-konstruierbaren Mengen".]

Beweis: $A \supset R$ gilt, weil für die konstruierbaren Mengen eine Wohlordnung definiert werden kann und $A \supset C$ gilt auf Grund von Theorem 2.2.2, weil $\overline{\overline{M}}_{\omega_\alpha} = \aleph_\alpha$. [19, S. 223] □

Nun definiert Gödel den Begriff der ‚konstruierbaren Menge' genauer, um seine Theorie in den formalen Systemen der Mengenlehre selbst zu entwickeln [19, S. 223]. Insbesondere können seine Theoreme 2 und daraus folgend auch 8 (siehe Theorem 2.2.2 und Theorem 2.2.7), aus den Axiomen der Mengenlehre bewiesen werden [19, S. 223]. Wird der Begriff ‚konstruierbare Menge' relativiert für ein Modell M der Mengenlehre (d.h.

definiert in Bezug auf die ϵ-Relation des Modells) mit $konstr._M$ bezeichnet, dann haben wir mit seiner Formulierung:

Theorem 2.2.8: [19, Theorem 9, S. 224]: Jedes Element des Modells M_{ω_ω} (bzw. M_Ω) ist $konstr._{M_{\omega_\omega}}$ (bzw. $konstr._{M_\Omega}$); mit anderen Worten: A ist wahr in den Modellen M_{ω_ω} und M_Ω. [Das heißt, aus der einen Richtung: alle Elemente des erstellten Mengensystems sind konstruierbar und aus der anderen Richtung: die Aussage „Es gibt keine nicht-konstruierbaren Mengen“ ist wahr für das gesamte konstruierte Mengensystem.]

Beweis: Gödel zeigt, dass der Beweis auf den folgenden zwei Tatsachen beruht [19, S. 224]: 1. ist die Operation M' (wie ganz am Anfang definiert) absolut in dem Sinne, dass diese Operation dasselbe Ergebnis liefert wie die ursprüngliche Operation, wenn sie relativiert für das Modell M_{ω_ω}, auf ein $x \epsilon M_{\omega_\omega}$ angewandt wird (und ähnlich für M_Ω). 2. Die Menge N_α, die als Elemente alle M_β besitzt (mit $\beta < \alpha$), ist $konstr._{M_{\omega_\omega}}$ für $\alpha < \omega_\omega$ und $konstr._{M_\Omega}$ für $\alpha < \Omega$, wie man durch Induktion über α erhält. □

Aus Gödels Theorem 9 (siehe: Theorem 2.2.8) und der Beweisbarkeit von Theorem 8 (Theorem 2.2.7), die aus den Axiomen der Mengenlehre folgt, erhalten wir dann:

Theorem 2.2.9: [19, Theorem 10, S. 224]: R und C sind wahr für die Modelle M_{ω_ω} und M_Ω. [Das Ziel der Beweisführung ist erreicht: AC und GCH sind wahr im gesamten erstellten Mengensystem.]

Beweis: In der Skizze für diesen letzten Beweis zeigt Gödel, dass das gebildete Mengensystem auf das bestehende System der Mengenlehre übertragen werden kann [19, S. 224]: denn die Konstruktion von M_{ω_ω} und M_Ω und der Beweis für seine Theoreme 7 und 9 (Theorem 2.2.6 und Theorem 2.2.8) (und damit auch für sein Theorem 10 (Theorem 2.2.9)) können in den jeweiligen formalen Systemen der Mengenlehre (ohne das Auswahlaxiom) durchgeführt werden, so dass ein aus C, R, A und den anderen Axiomen abgeleiteter Widerspruch zu einem Widerspruch in der Mengenlehre ohne C, R, A führt. Gödel macht hier noch die Anmerkung, dass die Übertragung auf die formalen Systeme der Mengenlehre unter gewissen Modifikationen stattfinden muss, die darin bestehen, dass für das System ohne das Axiom der Substitution anstelle von M_{ω_ω} ein isomorphes Bild davon (mit einer anderen Relation R anstelle der ϵ-Relation) verwendet werden muss, da M_{ω_ω} Mengen unendlichen Typs enthält, deren Existenz ohne das Axiom der Substitution nicht bewiesen werden kann [19, S. 224, Fußnote 12]. □

Durch Einschränkung der Mengen auf die nur konstruierbaren, d.h. definierbaren, tritt an die Stelle der Potenzmengenbildung die Operation D der Definierbarkeit, welche aus der Menge x nur die konstruierbaren zusammenfasst. Das heißt, in jeder Struktur V der Mengenlehre, die die ZFC-Axiome erfüllt, kann man eine Unterstruktur L erstellen, welche wiederum ZFC erfüllt, aber nur solche auf Grund der ZFC-Axiome notwendigen Mengen enthält. Dieses Universum L wird von der leeren Menge ausgehend generiert [3, S. 227–228]: $D(x) = \{y | y \subseteq x \wedge y \text{ } \mathit{definierbar}\}$. Daraus folgt: $D(x) \subset P(x)$ mit $P(x)$ der Potenzmenge. Durch D und $\cup$ entsteht dann die konstruktible Hierarchie L, aufbauend auf der leeren Menge: $L_0 = \emptyset$; $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$; $L_\gamma = \bigcup\{L_\beta | \beta < \gamma\}$. Dabei entspricht α einer beliebigen Ordinalzahl, γ einer Limesordinalzahl (d.h. einer Ordinalzahl, die keinen Vorgänger besitzt), V dem Universum aller Mengen und L dem Universum der konstruierbaren Mengen [3, S. 227]. Das Konstruktibilitätsaxiom lautet nun: ‚$V = L$', d.h. es verlangt, dass jede Menge definierbar ist und die beiden Universen übereinstimmen. Dieses Axiom ist aber unabhängig von den anderen Axiomen von ZFC, denn auch $ZFC + \neg V = L$ führt nicht zum Widerspruch. Daraus folgt dann: Wenn ZF als widerspruchsfrei angenommen wird, dann ist $ZF + V = L$ widerspruchsfrei und es gelten AC und GCH. [3, S. 228].

Nun betrachten wir zum Vergleich den Beweis von Cohen [13], in dem er zeigt, dass in ZF das Auswahlaxiom zwar gilt, aber die Kontinuumshypothese nicht beweisbar ist. Wir geben hier nur die Grundidee und eine Beweisskizze an, da die Analyse des Beweises im Detail für unsere Zwecke nicht notwendig ist. Paul Cohen entwickelte das *forcing* (Erzwingungsmethode) zuerst 1963 als Technik zur Konstruktion eines Modells, um die Unabhängigkeit sowohl des Auswahlaxioms als auch der Kontinuumshypothese zu beweisen [für detaillierte Erläuterungen siehe: 46, Kap. VII]. Bei der Forcing-Methode besteht die Idee darin, ein Modell M der Mengenlehre, das als Grundmodell dient, durch generische Erweiterung mit einer Menge G so zu verändern, dass $M[G]$ wieder ein Modell der Mengenlehre, genauer ZFC, entsteht. In diesem ist die Ausgangssprache von M definiert, es gelten wieder die Eigenschaften von ZFC, aber durch Approximation von G in M entstehen nun Eigenschaften in $M[G]$ – wie eben die Ungültigkeit der Kontinuumshypothese –, die mit dieser Ursprungssprache in M ausgedrückt werden können. Dabei wird bez. der Eigenschaften vorausgesetzt, dass das Grundmodell M abzählbar und transitiv ist, also aus einer endlichen Teilmenge von Axiomen aus ZFC besteht. Wichtig ist noch, dass M keine echte Klasse sein darf. Denn angenommen, man könnte innerhalb der ZFC eine transitive echte Klasse N definieren und beweisen, dass jedes Axiom von $ZF + V \neq L$ (als Gegenbeweis zu Gödel) oder sogar $ZFC + \neg CH$ in N wahr ist, dann wäre, wegen der Minimalität von L, L eine echte Teilmenge von N. Es würde aber auch $L \neq N$ gelten, denn $V = L$ ist wahr in L und falsch in N. Innerhalb von ZFC können wir beweisen, dass es eine richtige Erweiterung von L gibt, wo $ZFC \vdash V \neq L$ gilt, was unmöglich ist, da – zur Grundvoraussetzung ZFC als konsistent angenommen – mit Gödels Beweis auch $ZFC + V = L$ konsistent ist. Deshalb sieht das Vorgehen so aus [siehe ausführlich: 46], dass man mit dem oben beschriebenen Grundmodell, also einem abzählbaren, transitiven Modell M in ZFC beginnt. Dann werden durch die generische Erweiterung abzählbare transitive Modelle N in ZFC gefunden, die $M \subset N$ und $o(M) = o(N)$[3] erfüllen. Dabei muss nur $M \neq N$ erfüllen, sodass in N auch $V \neq L$ gilt. Denn in Gödels Universum der konstruierbaren Mengen gilt [46, S. 185]: $L^N = L(o(N)) = L(o(M)) = L^M \subset M$. Damit wird N in der Lage sein $\neg CH$ zu erfüllen, und durch weitere Veränderung der Konstruktion sogar $CH + 2^{\omega_1} = \omega_5$. Um Widersprüche mit den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen zu vermeiden, können nur abzählbare transitive Modelle für jede endliche Liste von Axiomen von ZFC und auch von $ZFC + V = L$ erzeugt werden [46, S. 185]. Mit der generischen Erweiterung (dem

[3] Notation, die die Schnelligkeit des Wachstums (hier der Erweiterungen) betrifft.

forcing) werden dann Modelle N für jede endliche Liste von Axiomen von $ZFC + V \neq L$ (oder $ZFC + \neg CH$, usw.) erzeugt, womit der generelle Gegenbeweis erbracht wird. Das heißt für die formale Struktur des Beweises [46, S. 185–211]: anstatt mit einem Modell von ganz ZFC zu beginnen, wird die Argumentation auf die Zerlegung aller endlichen Mengen Φ von Axiomen aus ZFC verlegt, wobei die Axiomenmengen reichhaltig genug sein müssen, die Beweisaussagen zu liefern. Wenn nun φ ein Axiom ist, dessen Konsistenz mit ZFC bewiesen werden soll, also $Con(ZFC \cup \varphi)$ dann wird durch das *forcing* (also die generische Erweiterung) aus M ein Modell N von $\Phi \cup \varphi$ produziert. Wenn sich nun in $ZFC \cup \varphi$ ein Widerspruch produzieren lässt, dann gibt es eine endliche Menge von Axiomen $\Phi \subseteq ZFC$, sodass sich der Widerspruch schon aus $\Phi \cup \varphi$ produzieren lässt. Da man jedoch durch das *forcing* gezeigt hat, dass für $\varphi \cup \{\Phi\}$ ein Modell existiert, wurde ein Widerspruch in ZFC produziert. Die Annahme der Konsistenz von ZFC impliziert also die Konsistenz von $ZFC \cup \varphi$.

2.3 Mengenbegriffe und das Kontinuum

Die Verbindung der ersten beiden Abschnitte dieses zweiten Kapitels besteht darin, dass durch die Unvollständigkeitssätze der Wunsch nach der gesicherten, generellen Widerspruchsfreiheit des mathematischen Systems (auf der Axiomatik der Mengenlehre ZF) zunichte gemacht wurde, und dann durch die Beweise zur Kontinuumshypothese gezeigt wurde, dass auch eine gesicherte Ordnung der Unendlichkeiten nicht hergestellt werden kann. Das heutige System der Mathematik besitzt somit weder eine letzte Begründung, noch eine letzte Ordnung. Und in beiden Bereichen, dem der Widerspruchsfreiheit und dem der Ordnung der Mengen, trifft man auf die nicht zu erschöpfende Hierarchie von Unendlichkeiten.

Gödels Ziel bei seiner Konstruktion des absoluten Universums der Mengen L war es nicht, eine neue Mengenlehre zu etablieren, sondern ein inneres Modell zu konstruieren, um die relative Konsistenz von AC und GHC beweisen zu können [3, S. 228]. Ganz im Gegenteil besaß Gödel vielmehr die Ansicht, dass die Mengenbildung nicht eingeschränkt (durch das Konstruktibilitätsaxiom auf nur definierbare/konstruierbare Mengen), sondern erweitert werden müsse, um auch großen Kardinalzahlen und dem Potenzmengenaxiom gerecht zu werden. Gödel war auch gar nicht überzeugt davon, dass Cantors Kontinuumshypothese richtig sei, da er davon ausging, dass neue Axiome Cantors Hypothese widerlegen würden: „one may on good reason suspect that the role of the continuum problem in set theory will be this, that it will finally lead to the discovery of new axioms which will make it possible to disprove Cantor's conjecture“ [23, S. 524]. Davon abgesehen, ist das Konstruktibilitätsaxiom $V = L$ unabhängig von den übrigen ZF-Axiomen, da auch $ZFC + \neg V = L$ konsistent wäre [3, S. 228]. Die Konstruktion des inneren Modells nachzuvollziehen, inkl. der Ordnung GCH, die durch die verschiedenen Abbildungen unter den Mengen, Ordinal- und Kardinalzahlen in den Theoremen in Gödels o.s. Beweis entsteht, ist wichtig, um die Diskrepanz zu verstehen, die durch die unterschiedlichen Eigenschaften entstehen, die wir Mengen zuschreiben können. Gödels Beweis zeigt die mangelnde Äquivalenz der beiden Mengenbegriffe, weil die Eins-zu-eins-Abbildung, die in Theorem 2.2.5 aufgebaut und dann maßgeblich für den Beweis von Theorem 2.2.2, das Kernelement des Gesamtbeweises, genutzt wird, eine Ordnung aufdeckt, die nur zwischen gesetzten Punkten existiert. Die Ergebnisse von Gödel und Cohen zur Kontinuumshypothese zeigen, dass die Charakterisierung der Mengen, die von AC und GCH eingeschlossen werden, mit den Axiomen der ZF-Mengenlehre zu schwach ist, um deren Eigenschaften hinreichend zu charakterisieren. Denn die Tatsache, dass wir die Kontinuumshypothese auf der Grundlage der heutigen Axiome nicht entscheiden können, zeigt nur, dass diese Axiome nicht ausreichen:

> „Only someone who (like the intuitionist) denies that the concepts and axioms of classical set theory have any meaning (or any well-defined meaning) could be satisfied with such a solution, not someone who believes them to describe some well-determined reality. For in this reality Cantor's conjecture must be either true or false, and its undecidability from the axioms as known today can only mean that these axioms do not contain a complete description of this reality." [23, S. 520]

Deshalb müssen immer wieder neue Axiome aufgestellt werden, die die Systematik der Mengenlehre erweitern und ihre Begriffe ergänzen. Denn einerseits können schon die Begriffe ‚Menge' und auch ‚Eigenschaft der Menge' ständig erweitert werden, wodurch neue Axiome gewonnen werden, die in den vom Mengenbegriff abhängigen Axiomen enthalten sind und Konsequenzen für Sätze beinhalten, die sich wie bei der Kontinuumshypothese auf begrenzte Bereiche von Mengen beziehen [23, S. 520, Fußnote 17]. Andererseits ist auch das bestehende Axiomensystem nicht abgeschlossen, sondern der bestehende Begriff der Menge legt eine Erweiterung nahe, die immer höhere Iterationen der Mengenbildung verursachen und die Existenz großer Kardinalzahlen mit einschließen. Es müssen also neue, starke Unendlichkeitsaxiome gebildet werden, um das bestehende Mengenuniversum nicht zu begrenzen. Das einfachste dieser starken ‚Unendlichkeitsaxiome' behauptet die Existenz von unerreichbaren Zahlen (und Kardinalzahlen) $> \aleph_0$ [3, S. 225]. Inhalt des neuen Axioms ist, dass durch die Anwendung der Mengenbildung, die in den übrigen Axiomen ausgedrückt wird, immer neue Mengen gebildet werden. Weitere Unendlichkeitsaxiome wurden von P. Mahlo formuliert, der 1912 die Mahlo-Kardinalzahlen entdeckte, bei denen stark unerreichbare Kardinalzahlen ρ entstehen, denen ρ unerreichbare, ρ hyper-unerreichbare, ρ super-hyper-unerreichbare, usw. vorausgehen [56, S. 259]. Das heißt, große Kardinalzahlen (und natürlich ihre Erweiterungen) sind nicht durch unsere gängigen Mengenoperationen, wie Potenzmengen- und Vereinigungsmengenbildung, erreichbar. Gödel sieht die Erweiterung der Axiome, auch der von Mahlo vorgeschlagenen Unendlichkeitsaxiome, als eine natürlich Erweiterung der bestehen Axiomatik [23, S. 520]. Dazu passend hatten wir in den obigen Beweisen der Unvollständigkeitssätze in Abschnitt 2.1, und der dort schon beschriebenen Anmerkung Gödels gesehen, dass: „die hier aufgestellten unentscheidbaren Sätze durch Adjunktion passender höherer Typen (z.B. des Typus ω zum System P) immer entscheidbar werden. Analoges gilt auch für das Axiomensystem der Mengenlehre" [18, S. 191, Fußnote 48a], und dass dadurch die Unendlichkeitsaxiome für die endliche Mathematik notwendig werden, was ja auch, wie oben beschrieben, durch die Ergebnisse von J. Paris, L. Harrington und L. Kirby [41, 54] bestätigt wurde.

Bezüglich der Präsenz des Auswahlaxioms ist zu beachten, dass die Mengenlehre die Grundlage für die gesamte Mathematik darstellt und viele Sätze der Algebra und der Analysis von diesem Axiom abhängen. Damit zeigt sich, dass es unterschiedliche Mathematiken geben kann: diejenige ohne Auswahlaxiom und diejenige mit diesem Axiom. Oder anders ausgedrückt: „Wenn man Cantor als Autor der Kontinuumshypothese und ersten transfiniten Anwender des Auswahlaxioms ansieht, dann können wir von Cantorscher und *Nicht-Cantorscher Mengenlehre* und auch von Cantorscher und *Nicht-Cantorscher Mathematik* sprechen.“ [3, S. 222] Allerdings beschrieb Gödel auch, dass starke Unendlichkeitsaxiome, auch solche die Platz geben für nichtkonstruierbare Mengen, und Axiome bez. großer Kardinalzahlen schwächer wären ohne das Auswahlaxiom [66, S. 86]. Gerade weil ja sein Ziel in der Konstruktion von L nicht in dem Aufbau einer neuen Mengenlehre bestand und er, im Gegenteil, für die Erarbeitung neuer Unendlichkeitsaxiome war, betrachten wir nun die Erweiterungen der Mengenlehre, an denen er beteiligt war und die zu der Unterscheidung von Mengen und echten Klassen führte. Denn ein Problem, das innerhalb der frühen naiven Mengenlehre bestand, war die Antinomie der Menge aller Mengen. In der klassischen Mengenlehre mit der strikten Beschränkung auf den Mengenbegriff taucht die Antinomie auf, dass der Bereich V aller Mengen sich selbst nicht als Menge enthalten könnte, wenn V als Menge gefasst würde. Dann könnte sie nicht die Menge aller Mengen sein, wenn sie sich selbst nicht enthält (Russellsche Antinomie). Für von Neumann bestand das Problem nicht in der Existenz sehr großer Mengen [3, S. 208] und die Lösung als Konsequenz in ihrer Einschränkung, sondern in der Handhabung dieser sehr großen Mengen als gewöhnliche Mengen. Hier taucht schon eine Begriffsunterscheidung auf. Auch wenn Cantor bereits durch seinen *Satz von Cantor* zeigte, dass die Allklasse als System aller Klassen keine Menge sein kann (zweite Cantorsche Antinomie), da sonst die Potenzmenge der Allklasse eine ihrer Teilmengen sein müsste und damit keine mächtigere Menge, wie aus dem Satz von Cantor folgt, war es erst diejenige Mengenlehre, die u.a. von Gödel weiterentwickelt wurde, die diesen Begriff vollständig differenzierte und erweiterte. Der Vollständigkeit halber betrachten wir der Satz von Cantor mit zugehörigem Beweis.

Satz 2.3.1 (Satz von Cantor): Jede Menge A ist weniger mächtig als ihre Potenzmenge $P(A)$ (der Menge aller Teilmengen), d.h. es gilt $|A| < |P(A)|$.

Beweis: Zunächst gilt $|A| < |P(A)|$, da $x \longmapsto \{x\}$ eine injektive Abbildung ist. Nun wird noch gezeigt, dass es keine surjektive Abbildung $A \longrightarrow P(A)$ geben kann. Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir das Gegenteil an, dass es also eine surjektive Abbildung $f : A \longrightarrow P(A)$ gäbe. Dazu definieren wir $M := \{x \in A | x \notin f(x)\}$. Auf Grund des Aussonderungsaxioms ist M eine Menge und somit $M \in P(A)$. Wegen der Annahme, dass f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = M$. Dann gilt aber nach Definition von M: $a \in f(a) = M \Longleftrightarrow a \notin f(a)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist und es keine surjektive Abbildung $A \longrightarrow P(A)$ geben kann. Deshalb kann es aber ebenfalls keine bijektive Abbildung geben, wodurch $|A| = |P(A)|$ ausgeschlossen wird, und es gilt $|A| < |P(A)|$. □

Das Aussonderungsaxiom hat die folgende Grundlage: in der frühen Mengenlehre Cantors war der Mengenbegriff charakterisiert durch Zusammenfassung, wodurch alles zu Mengen zusammengefasst werden konnte. Es bezeichne also Φ eine Eigenschaft, die die Zusammenfassung bestimmt. Dann gibt es die Menge x der Elemente y, für die $\Phi(y)$ gilt, also $\exists x \forall y[y \in x \longleftrightarrow \Phi(y)]$. Dann sieht der Mengenterm folgendermaßen aus: $x = \{y|\Phi(y)\}$. [3, S. 200–201] Die durch diese Art der Zusammenfassung entstehenden Antinomien wurden dann von Zermelo durch die Einschränkung der Größe der Mengen gelöst [71], die wiederum bei Gödel (und von Neumann und Bernays in der NBG-Mengenlehre) durch den neuen Begriff der echten Klasse gelöst wurde. Bei Zermelo wurde also das Prinzip der uneingeschränkten Zusammenfassung durch das *Aussonderungsaxiom* ersetzt: $\forall z \exists x \forall y[y \in x \longleftrightarrow y \in z \wedge \Phi(y)]$. [3, S. 201] Wieder bezeichnet Φ eine Eigenschaft. Nun ist eine Menge z vorgegeben, für die die Menge x der Elemente y aus z und für die $\Phi(y)$ gilt. Das heißt, die Einschränkung der Mengenbildung besteht darin, dass nur in der vorgegebenen Menge z Mengen x gebildet werden können, durch Aussonderung von Elementen y aus x. Damit werden Mengen zu Teilmengen.

Im Gegensatz zum *Aussonderungsaxiom* bei ZF, bei dem die Bildung sehr großer Mengen, bzw. die Mengenbildung generell, eingeschränkt wird (auch, um die Russellsche Antinomie zu umgehen), bleibt bei der NBG-Mengenlehre (BG- oder NBG-Mengenlehre ist die auf von Neumann [51, 52], Bernays [9, 10] und Gödel [20] zurückgehende Theorie) die Bildung sehr großer Mengen erhalten und es wird stattdessen der Begriff der Klasse unterschieden, was der *Grundgedanke* der NBG-Mengenlehre ist:

> „Statt von Eigenschaften φ und Ausdrücken $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$ zu sprechen, die in den Bereich der Logik gehören, können wir dafür Klassen K einsetzen, die *Objekte der NBG-Mengenlehre* sind. [...] z.B. die Allklasse V der Mengen und die Russellsche Klasse R [sind] Gegenstände dieser Mengenlehre [...], die die Besonderheit haben, echte Klassen zu sein. In der ZF-Mengenlehre können wir nur indirekt über sie als Bereiche außerhalb der Mengenlehre sprechen. Man erkennt, dass die NBG-Mengenlehre eine Erweiterung der ZF-Mengenlehre sein wird, nämlich des Bereiches der Mengen um die Klassen.“ [3, S. 210]

Definition 2.3.1 (Klasse): [3, S. 209]: Eine Klasse x heißt *Menge*, wenn es eine Klasse K gibt mit $x \in K$. Eine Klasse K heißt *echte Klasse*, wenn K keine Menge ist.

Ursache der Russellschen Antinomie ist die Klasse R (Russelsche Klasse) als Gegenstand in der Mengenbildung aufzufassen [siehe ausführlich hierzu: 3, S. 208–209]. Die Gegenstände der NBG-Mengenlehre heißen *Klassen*, unter welchen es die *Mengen* als genau diejenigen gibt, die in einer Elementbeziehung zu anderen Klassen stehen können. *Echte Klassen* sind dann diejenigen, die selbst nicht Element anderer Klassen, wie z.B. R, sein können (sie werden auch als *Unmengen* bezeichnet) (ebd.). Die Eigenschaften echter Klassen (bzw. der *Allklasse*) und den Aufbau dieser erweiterten Mengenlehre betrachten wir weiter unten noch genauer. Bezüglich der Verbindung zwischen Auswahlaxiom und Klassen kommentiert Gödel, dass der Aufbau der Mengenlehre mit V als Universum aller Mengen und als *echter Klasse* einem Maximumprinzip entspricht aus dem das Auswahlaxiom folgt [66, S. 262]. Das heißt, die Ordnung des Auswahlaxioms muss nicht für eine Beschränktheit sorgen, sondern liegt durch die Unerreichbarkeit der Allklasse immer unterhalb dieser Unbestimmtheit. Anders ausgedrückt: die Allklasse bleibt unerreichbar, aber Ordnungen sind innerhalb ihrer weiterhin möglich.

Des Weiteren gilt, dass nicht nur Axiomensysteme durch Adjunktionen höherer Typen erweiterbar, oder die Mengenerweiterung wie bei den unerreichbaren Kardinalzahlen nur nach außen hin vollziehbar sind, sondern dass man auch in Richtung der Infinitesimalien durch Adjunktionen höherer Typen immer weiter fortschreiten kann, auch wenn die Infinitesimalien durch die Einführung und Etablierung der Mengenlehre im allgemeinen Gebrauch der Mathematik verdrängt wurden [3, S. 187]. Wir führen hier einen Begriff ein, der in der Literatur formal nirgends definiert ist, aber dennoch an vielen Stellen ausführlich als klassisches lineares, anschauliches [3, S. 174–175] oder als homogenes Kontinuum [3, S. 186] beschrieben wird. Zweck dieser Definition ist die Unterscheidung von diskreten und nicht-diskreten Punkteigenschaften des Kontinuums, also von einer Mengenbildung auf Grundlage von Punktmengen und einer Mengenbildung auf Grundlage eines homogenen Kontinuums.

Definition 2.3.2 (Homogenes Kontinuum): Das Kontinuum, das dem klassischen Mengenbegriff der Mengenlehre zu Grunde liegt, nennen wir das Punkt-Kontinuum und bezeichnen es mit Con_p. Das Kontinuum, das durch die Mengenoperationen der Mathematik nicht erreichbar ist, sondern diesen als Medium zu Grunde liegt, bezeichnen wir mit Con_{hom}.

Das homogene Kontinuum Con_{hom} entspricht der absoluten Unendlichkeit, die indefinit ist, d.h. nicht abschließend bestimmt werden kann und Gödels Beschreibung der Allklasse und dem Universum aller Mengen V entspricht, wie wir weiter unten, in Kapitel 3, ausführlich sehen werden (‚Ackermanns-Prinzip‘ und ‚closure‘-Prinzip). Cantor unterschied auch diese beiden Mengenbegriffe [66, S. 261], bezeichnete das Kontinuum, das wir als homogen bezeichnen, aber mit einer inkonsistenten, also uneinheitlichen Vielheit. Da aber gerade diskrete Punkte eine Inkonsistenz schaffen, da sie über klare Begrenzungen von anderen Punkten abgeteilt werden, und somit die eigentliche Inhomogenität schaffen, bezeichnen wir die absolute Unendlichkeit nicht als inkonsistent, sondern homogen, da eben ihre fließende Beschaffenheit für Gleichförmigkeit sorgt. Die Unvollständigkeitssätze haben gezeigt, dass es keine abschließend strukturierte Totalität gibt, was wiederum durch die Einführung der Allklasse auch für die Mengenlehre gezeigt wurde. Durch die Unvollständigkeitssätze, d.h. durch die Unabgeschlossenheit der Axiome mathematischer Systeme, und die momentane Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese werden wir auf eine offene, unbestimmte Unendlichkeit verwiesen, die nicht abschließend strukturiert werden kann (s.u. Kap. 3, Gödel nennt dies eine Verallgemeinerung des ‚closure‘-Prinzips [66, S. 281]). Deshalb betrachten wir die obige Unterscheidung des Kontinuums und den damit zusammenhängenden Mengenbegriff noch genauer. Eine detaillierte Beschreibung des Unterschieds liefern Bedürftig und Murawski [3, S. 186]:

> „Das größte ‚Kunststück‘ hinter dem Kunstwerk der reellen Zahlen ist die-

> ses: $\mathbb{R}$ ist als Menge das ‚Gegenteil' dessen, was anschaulich das Kontinuum ist. Denn $\mathbb{R}$ zerfällt in Elemente, das Kontinuum ist homogen. Aber: $\mathbb{R}$ ist heute das Kontinuum. [...] Wir können Punkte in Kontinua setzen, sie aber mit ihren eigenen Mitteln nicht unterscheiden. Eine Unterscheidung wird erst möglich, wenn wir die gesetzten Punkte mit Zahlen belegen oder wenn wir Koordinaten in den Raum projizieren. Das ist aber wohlgemerkt eine Projektion. Koordinaten bilden nicht das Kontinuum. Das Kontinuum ist das Medium, das für solche Projektionen da ist. Auch wenn $\mathbb{R}$ als Menge ursprünglich nichts Kontinuierliches an sich hat, verhalten sich seine Elemente wie die ins lineare Kontinuum gesetzten Punkte. [...] Das Medium wird durch das ersetzt, für das es Medium war."

Das bedeutet, dass die Identifikation des Kontinuums mit $\mathbb{R}$ der obigen Definition des Con_p und das hier beschriebene lineare Kontinuum unserer Definition von Con_{hom} entspricht. Die absolute Unendlichkeit kann weder durch große Kardinalzahlen, noch durch Infinitesimalien abschließend bestimmt werden, da jede Mengenoperation immer auf dem Mengenbegriff der Punktmengen beruht. Gödel beschreibt dies als die Einheitlichkeit des Universums aller Mengen, das seine Eigenschaften nicht ändert, wenn man von kleineren zu größeren Mengen oder Kardinalzahlen wechselt [66, S. 281]. Bedürftig und Murawski beschreiben diese Unbestimmtheit des Kontinuums folgendermaßen: „Ist durch die Mathematik der Infinitesimalien das anschauliche, klassische Kontinuum mathematisch erfasst? Keineswegs. Darauf weisen höhere Differentiale ddx hin, die bei Leibniz vorkommen und gegenüber den Infinitesimalien dx infinitesimal sein sollen" [3, S. 175] und in der heutigen Mathematik der Infinitesimalien bearbeitet werden. Ihnen liegt ein nicht-archimedischer Körper zugrunde, der aus einer Adjunktion eines transfiniten Elements Ω entsteht und noch weiteren Adjunktionen unterworfen werden kann (ebd.).

> „Das (anschauliche) Kontinuum, so zeigt sich hier auch mathematisch, entspricht [. . .] einem ‚Medium freien Werdens' [67, S. 49] Die Methode der Infinitesimalien, das ist ein weiterer Verdienst der Infinitesimalmathematik, zeigt, dass das anschauliche Kontinuum sich in dem Moment dem vollständigen Zugriff entzieht, in dem wir versuchen, es zu erfassen. Auch die hyperreellen Zahlen bilden eine Menge. Das klassische Kontinuum ist mit mathematischen, zumindest mit mengentheoretischen Mitteln offenbar nicht zu begreifen." [3, S. 175]

Genau diese Unterscheidung und die Diskrepanz zwischen den beiden Mengenbegriffen ist die Ursache für Gödels Forderung nach neuen Begriffen, bei denen dann die bestehenden Axiome, aber auch neue Axiome, die für die Lösung der Kontinuumshypothese notwendig sind (d.h. o.g. neue Unendlichkeitsaxiome [23, S. 520]) bereits in den neuen Begriffen enthalten sind: „also there may exist [. . .] other (hitherto unknown) axioms of set theory which a more profound understanding of the concepts underlying logic and mathematics would enable us to recognize as implied by these concepts" [23, S. 520–521]. Wenn wir mit dieser Unterscheidung der beiden Mengengriffe auf Gödels Beweis zur Kontinuumshypothese und seiner Konstruktion des inneren Modells mit GCH und

AC zurückblicken, wird die Ursache für die Unterschiede in Gödels und Cohens Ergebnissen deutlich. Denn, wenn die absolute Unendlichkeit nicht durch eine abschließende Strukturierung erfasst werden kann, dann können beliebige Modelle erstellt und als konsistent bewiesen werden. Eine Ordnung ergibt sich dann immer nur in Bezug auf *etwas* (eine weitere Struktur), nicht in Bezug auf eine letzte Gesamtstruktur. Oder anders formuliert, hat die letzte Ordnung, die Gödel suchte, nicht die Form der Strukturierung, die sie in den heutigen Axiomen aufweist, sondern eine andere Form, die er in den neuen Begriffen vermutete. Durch die Einführung der Allklasse und die Unterscheidung ihrer Eigenschaften von denen der Mengen, wurde schon ein neuer Begriff erlangt, der unserer Definition von Con_{hom} sehr nahe kommt. Gödel schreibt dazu in seinen Notizen „class (=absolute)“, wozu Hao Wang schreibt: „I believe the word class here means the universal class (of all sets and individuals) and that the identification of this with the absolute harks back to an idea of Cantor's.“ [66, S. 315]

Diese Diskrepanz zwischen den zwei unterschiedlichen Mengenbegriffen und Gödels Forderung nach neuen Begriffen und Theoremen, die die strukturierenden Axiome der Mengenlehre schon beinhalten, bringt uns zur mathematischen Anschauung und Intuition. Dazu betrachten wir im folgenden Abschnitt zunächst das Reflektionsprinzip (*reflection principle*) genauer.

3 Mathematische Anschauung und Intuition

Mit Gödels Forderung nach einem neuen Begriff, der die bestehenden Axiome bereits enthält, müssen wir die Bildung von Begriffen, d.h. Konzepten, genauer verstehen. In der Mengenlehre besagt das Reflektionsprinzip einerseits, dass es möglich ist, Mengen zu finden, die in Bezug auf eine bestimmte Eigenschaft der Klasse aller Mengen entsprechen, also an dieser reflektiert werden, und andererseits, dass es nicht möglich ist, dass Universum aller Mengen (V) mit einem (klassischen) Begriff strukturell vollständig zu erfassen [66, S. 280]. Gödel äußert sich dazu wie folgt:

> „The universe of all sets is structurally indefinable. [. . . It] cannot be uniquely characterized (i.e., distinguished from all its initial segments) by any internal structural property of the membership relation in it which is expressible in any logic of finite or transfinite type, including infinitary logics of any cardinal number. This principle may be considered a generalization of the closure principle. [. . .] The totality of all sets is, in some sense, indescribable. When you have any structural property that is supposed to apply to all sets, you know you have not got all sets. There must be some sets that contain as members all sets that have that property.“ [66, S. 280–281]

Das Prinzip der Abgeschlossenheit (*closure principle*) besagt dabei, dass wenn V in Bezug auf bestimmte Operationen als abgeschlossen betrachtet wird, es eine Menge gibt, die ähnlich abgeschlossen ist. Durch die wiederholte Anwendung primitiver Operationen zur Bildung von Mengen und die Behandlung der entstandenen Menge ebenfalls als Menge, erhalten wir unerreichbare Kardinalzahlen, die Mahlo-Kardinalzahlen und ähnliche [66, S. 280]. Dadurch entsteht die insgesamte Unabgeschlossenheit von V, weil es Mengen geben muss, die als Elemente Mengen mit dieser Struktur-Eigenschaft enthalten, aber dadurch über diese strukturierten Mengen hinaus gehen. Diese Unerreichbarkeit von V drückt Gödel wie folgt durch das *Ackermann-Prinzip* aus und beschreibt, dass dieses Prinzip als Grundlage für alles weitere dienen sollte:

> „Ackermann’s system is based on the idea of the indefinability of V, or the Absolute.“ [66, S. 282] und „All the principles for setting up the axioms of set theory should be reducible to a form of Ackermann’s principle: The Absolute is unknowable. The strength of this principle increases as we get stronger and stronger systems of set theory. The other principles are only heuristic principles. Hence, the central principle is the reflection principle, which presumably will be understood better as our experience increases.

> Meanwhile, it helps to separate out more specific principles which either give some additional information or are not yet seen clearly to be derivable from the reflection principle as we understand it now.“ [66, S. 283]

Wobei er hier die Unerkennbarkeit des Absoluten als grundlegendes Reflektionsprinzip annimmt. Generell nimmt er an, dass jedes Unendlichkeitsaxiom von dem, seiner Ansicht nach, sehr plausiblen Prinzip ableitbar sein sollte, dass V undefinierbar ist, wobei ‚definierbar‘ in einem idealisierten Sinn zu verstehen ist [65, S. 325; 66, S. 285]. In *What is Cantor's Continuum Problem?* beschreibt er zudem als eine Eigenschaft von Punktmengen und Teilmengen einer geraden Linie, dass die Gerade „durch unendlich viele Intervalle beliebiger Länge abgedeckt werden kann“ [23, S. 523], was ja für jede Linie gilt, das heißt auch für die neu entstandenen Linienstücke, wodurch wir wieder zum Reflexionsprinzip gelangen, mit dem die Mächtigkeit von V auf beliebige Teilbereiche abbildbar ist. Die Linie ist nicht durch das Punktkontinuum erfassbar, oder wie Gödel beschreibt: „summing up all the points, we still do not get the line; rather the points form some kind of scaffold on the line“ [56, S. 82; zitiert nach: 64, S. 86]. Das Ackermann-Prinzip, also ‚V ist als absolute Unendlichkeit unerreichbar‘ als Grundlage aller weiteren Axiome, sieht Gödel in einer Art Rück-Verbindung oder Zusammenfassung in nicht-konstruktiver Weise, um unendliche Iterationen zu umgehen. Damit erhält man starke Unendlichkeitsaxiome, bei denen immer die Verbindung zur Mächtigkeit des Universums aller Mengen (V) mit eingeschlossen ist:

> „It is well known that, in whichever way you make [the concept of demonstrability] precise by means of a formalism, the contemplation of this very formalism gives rise to new axioms which are exactly as evident and justified as those with which you started, and that this process of extension can be iterated into the transfinite. So there cannot exist any formalism which would embrace all these steps; but this does not exclude that all these steps [. . .] could be described and collected together in some non-constructive way. In set theory, e.g., the successive extensions can most conveniently be represented by stronger and stronger axioms of infinity. [. . .] there might exist, e.g., a characterization of the following sort: An axiom of infinity is a proposition which has a certain (decidable) formal structure and which in addition is true. Such a concept of demonstrability might have the required closure property, i.e., the following could be true: Any proof for a set-theoretic theorem in the next higher system above set theory [. . .] is replaceable by a proof from such an axiom of infinity. It is not impossible that for such a concept of demonstrability some completeness theorem would hold which would say that every proposition expressible in set theory is decidable from the present axioms plus some true assertion about the largeness of the universe of all sets.“ [22, S. 151]

Für die Kontinuumshypothese bedeutet dies: sie als Problem aufzufassen resultiert aus der Entscheidung das Kontinuum als Punktmenge aufzufassen, denn das heutige mathematische System (mit der ZF-Axiomatik) funktioniert mit und ohne Kontinuumshypothese. „Lehnt man sie ab, so kann man eine, zwei, drei . . . , mehr: ‚beliebig viele‘

transfinite Kardinalzahlen wählen, die zwischen den Kardinalzahlen von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ liegen." [3, S. 278]. V ist beliebig strukturierbar. Die Kontinuumshypothese ist damit nicht einfach unentscheidbar, sondern verschiedene Lösungen sind in unterschiedlichen Ebenen gleichzeitig möglich. Für jedes wohldefinierte System von Axiomen ist die Proposition, die die Konsistenz behauptet, nicht mit diesen Axiomen beweisbar und dies macht die Mathematik unabschließbar [24, S. 308–309]. Vermutlich betraf Gödels Hoffnung auf eine Lösung nur die Erkenntnis des Zusammenhangs der unterschiedlichen Ebenen, auf denen die Lösungen der Kontinuumshypothese existieren. Denn er war sich ja gerade der Unabschließbarkeit des mathematischen Systems bewusst. Er nahm an, dass die Kontinuumshypothese (also CH) wahr ist und die Kardinalzahl von $\mathbb{R}$ nicht größer als $\aleph_2$, aber die allgemeine Kontinuumshypothese GCH definitiv falsch ist [66, S. 252; 29, Veröffentlichungen 1970a und 1970b]. Den Beweis für diese Annahme formulierte er aber nicht detailliert aus. Dennoch stellt er durch diese Überlegungen eine Verbindung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ her, sodass sie sich auf einer Relationsebene befinden. Zur Verdeutlichung dieses Beispiel: so wie die ganzen Zahlen 3 und 5 sich beide auf der Ebene $\mathbb{N}$ befinden und dort nur die Zahl 4 zwischen ihnen gegeben ist, so können wir in einer anderen Ebene, z.B. den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, beliebig viele zwischen ihnen annehmen, die sich auf einer anderen Relationsebene befinden. Die Frage, die die Kontinuumshypothese betrifft, ist nur eine Frage bez. der Ordnung, nicht bez. der Dichte. Durch die unterschiedlichen Ebenen ist die Unabschließbarkeit (der Mengen, also die unabschließbare Dichte auf der Linie) gegeben. Ähnlich stellte Gödel eine Relationsebene her, indem er das Universum der konstruierbaren Mengen bildete und bewies, dass dort GCH gilt. Zur Veranschaulichung der verschiedenen möglichen Relationsebenen siehe Abb. 3.1. Wir können zwischen den Zahlenmengen, je nach Mengenbegriff, unterschiedliche Beziehungen bilden, die entweder auf dem Punktmengenbegriff basieren, wodurch die Frage nach der Mächtigkeit entsteht, oder aber auf dem kontinuierlichen Mengenbegriff, bei dem Punkte nur Projektionen darstellen. Bei ersterem entsteht die Diskrepanz zwischen den Mächtigkeiten in Gödels und Cohens Beweisen durch die Gleichsetzung von unendlichen Prozessen mit tatsächlichen Punkten (und damit zusammenhängend durch das Vollständigkeitsaxiom). Bei letzterem werden die unendlichen Prozesse beibehalten und eine Beziehung zwischen diesen als nur gesetzte Punkte dargestellt. Gödel war in seiner philosophischen Anschauung der Mathematik platonischer Realist [3, S. 114], bzw. nahm innerhalb der Platonisten eine kritische Distanz ein.[1] Er hatte die Ansicht, dass Mathematik, wie Physik, auf Axiome mit realem Inhalt [„with a real content" 21, S. 132] errichtet sind und dass mathematische Sätze auf Grund ihrer Begriffe wahr sind, die auf mathematischer Intuition beruhen und nicht auf reinen Konventionen basieren können [25, S. 357–358]. In diesem Zusammenhang nahm er bez. unserer Konzepte auch eine genaue Unterscheidung zwischen ‚Objekten' und ‚Dingen' ‚Vereinigungen' und ‚Ganzheiten' vor [66, 295]. Er zeigte durch seinen Vollständigkeitssatz von 1929, dem Hauptsatz der mathematischen Logik für ein formales System der

[1] Gödel zur momentanen Situation bez. der Grundlagen der Mathematik: „The result of the preceding discussion is that our axioms, if interpreted as meaningful statements, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the conviction that they are consistent." [29, S. 50]

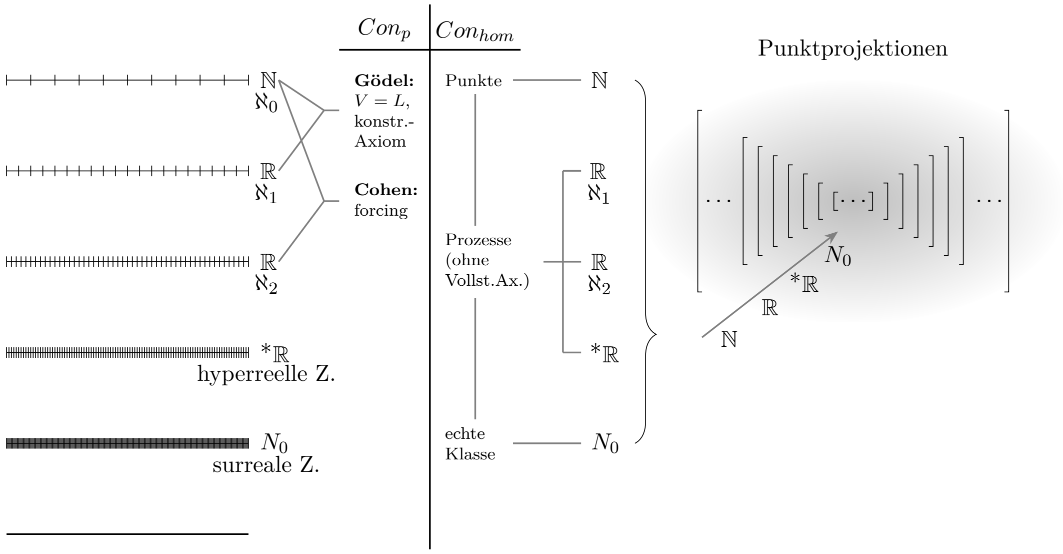

Abbildung 3.1:
Darstellung der unterschiedlichen Mengenbegriffe als Relationsebenen in Bezug zu verschiedenen Zahlenmengen. Auf der linken Seite wird der Mengenbegriff des Punktkontinuums dargestellt, die Betrachtung der Zahlenmengen als diskrete Punkte, ihr Verhalten auf der Zahlengeraden, sowie die Relationen der Zahlenmengen N und R in Bezug zu Gödels Konstruktion V = L und Cohens Methode des forcing (und die daraus resultierenden Mächtigkeiten). Auf der rechten Seite wird der Mengenbegriff des homogenen Kontinuums dargestellt, die Betrachtung der Zahlen als Punktprojektionen, sowie ihr Verhalten als unendliche Prozesse und ihre Relationen untereinander. Bildnachweis: Cordelia Mühlenbeck

Prädikatenlogik erster Stufe, dass die klassische Logik ausreicht um „jede im engeren Funktionenkalkül ausdrückbare allgemein gültige Formel“ [16, S. 60] sich durch die bestehenden Axiome ableiten lässt und setzte sich in dieser Veröffentlichung zudem mit der Kritik der intuitionistischen Sichtweise auseinander, auch in Bezug zur Verwendung seiner eigenen Beweismittel [16, S. 62–64]. Mathematische Intuition hat wiederum einerseits immer eine Verbindung zur Realität auf Grund der Geltung der Naturgesetze, die mathematisch formuliert sind [25, S. 360] aber auch andererseits schon durch ihre Zulässigkeit, da abstrakte Konzepte notwendig sind, um syntaktische Gesetzmäßigkeiten überhaupt zu rechtfertigen [25, S. 357]. Die mathematischen Gegenstände werden damit transzendent, im Vergleich zu ihren Repräsentanten in mathematischen Theorien, da Axiome die Eigenschaften der mathematischen Objekte nur unvollständig beschreiben, was wiederum der Erkenntnistheorie Kants ähnelt, von dieser aber dadurch verschieden ist, dass Gödel keinerlei Abhängigkeit der realen Strukturen vom erkennenden Subjekt sah, d.h. das erkennende Subjekt, durch die mathematische Intuition, der Realität nicht erst ihre Form gibt [3, S. 115]. Wir können diese Verbindung zwischen mathematischen Objekten und der Realität auch als *unentbehrlich* beschreiben: da physikalische Theorien zwangsläufig realistisch sind und in ihnen mathematische Theorien unentbehrlich sind, müssen auch mathematische Objekte in einer Form realistisch sein. Dadurch muss es solche Objekte wie Mengen oder Funktionen tatsächlich geben. [3, S. 114] Von diesem Prinzip können wir auch einen allgemeinen Existenzbegriff ableiten, bei dem nicht in physikalische, mathematische, ideale oder materielle Existenz unterschieden wird [3, S. 114], sondern es nur eine Form der Existenz gibt, die aus dem jeweiligen Kontext entsteht. Gödel hat diese Art des Existenzbegriffs und den dazu gehörigen bestimmenden Kontext als *Kausalität* bestimmt [66, S. 315], wie wir später noch genauer sehen werden. Für Gödel ergibt sich aus dieser realistisch-platonistischen Weltsicht auch eine nicht-Relativität von Wahrheit [66, S. 167] und ein damit einhergehender Determinismus [56, S. 168], wobei dieser Determinismus auf Grund des notwendigen Zusammenhangs zwischen Mathematik und Realität und der Unerreichbarkeit und Undefinierbarkeit, also der absoluten Unendlichkeit von V, unbegrenzt ist. Diese Offenheit des Determinismus ist auch grundlegend für den Modalen Kollaps in Gödels Ontologischem Gottesbeweis, wie wir in Kapitel 4 ausführlich sehen werden. Aus der absoluten Unendlichkeit von V ergeben sich einige Konsequenzen. Durch die notwendige Verbindung zwischen Mathematik und Realität, wird die absolute Unendlichkeit von V auf ein absolut unendliches Raum-Zeit-Kontinuum übertragen [wofür es auch weitere, existenzielle Gründe gibt, siehe: 49; 56, S. x-xiii]. Diese Analogie bedeutet, dass so wie V in beliebig kleine Intervalle abbildbar ist, auch jedes Raum-Zeit-Intervall die gleiche absolute Unendlichkeit enthält. Durch die Analogie zwischen Logik und Mathematik einerseits, Logik/Mathematik und den empirischen Wissenschaften andererseits [21, S. 120–121] und Gödels Anerkennung der absoluten Unendlichkeit von V als Grundlage jeder Axiomatik (s.o.), erhält sein Weltbild einen starken Holismus. Er erstellte kosmologische Modelle rotierender Universen für die Relativität der Raum-Zeit und nahm die Nicht-Existenz einer absoluten Zeit, bzw. allgemein eines absoluten Bezugssystems [39, S. 29–30] an (was beliebigen Zeiten, bzw. Zeitformen und Raumformen entspricht). Stephen Hawking schreibt zu Gödels Veröffentlichungen: „The second paper (*1952*) describes more reasonable rotating cosmological models that are expanding and that do not have the possibility of travel into the past. These models could well be a reasonable description of the universe that we observe, although observations of the isotropy of the microwave background indicate that the rate of rotation must be very low.“ [31, S. 189–190] Er vertrat die Ansicht, dass es keinen objektiven Zeitablauf und damit auch keine objektive Veränderlichkeit gibt, woraus folgt, dass auch alle zukünftigen Möglichkeiten in irgendeiner Form schon in der kosmologischen Raumzeit aktual realisiert sein müssen [43, S. 331; 69, 70]. Mathematik und Raumzeit sind nicht abschließend zu strukturieren (wobei er damit nur ein System aller wahren mathematisch Propositionen meint und nicht ein System aller beweisbaren mathematischen Propositionen [24, S. 309]). Mit dieser Anschauung enthält die Raumzeit bereits alle möglichen Raumformen und Zeitformen und wir erhalten wieder als Konsequenz das oben beschriebene absolut unendliche Raumzeit-Kontinuum.

Nun betrachten wir noch Gödels Ansichten zur mathematischen Intuition genauer. Er meinte, dass mathematische Intuition ausreicht, um Begriffe zu erkennen, zu beschreiben und zu begründen [3, S. 116]. In [25] spricht er detailliert über die Charakteristika, die diese Form der Anschauung ausmachen und von der empirischen Anschauung unterscheiden. So beschreibt er den Verstand, und damit die mathematische Anschauung, als einen zusätzlichen Sinn, der uns eine abstrakte übergeordnete Realität eröffnet, die von der übrigen raumzeitlichen Realität losgelöst ist, insofern letztere als die Gesamtheit der spezifischen Objekte angesehen werden kann und erstere als die allgemeinsten formalen Konzepte und Relationen angesehen werden können, ohne Bezug zu einander [25, Version III, S. 353–354]. Diese Unabhängigkeit soll aber nicht bedeuten, dass die mathematische Intuition keine Notwendigkeit für die Erkenntnis der raumzeitlichen Realität darstellt. Sie ist vielmehr die Begründung der mathematischen syntaktischen Überlegungen und liefert auch den Zugang zur Anwendbarkeit der Mathematik [25, Version III, S. 354]. Gödel setzte sich eingehend mit der Phänomenologie Husserls auseinander und war der Ansicht, dass seine Methode den Weg zu neuen Begriffen, vor allem in Bezug zu Mengen, liefern würde [3, S. 116; 66, S. 156–157]. Bezüglich der Bildung und Erkenntnis neuer mathematischer Begriffe, d.h. Konzepte, sind zwei Aspekte für unsere Betrachtungen wichtig. Husserls phänomenologische Methode basiert auf der eidetischen Reduktion, also einer Zurückführung auf das Wesen der Dinge, wobei es dabei um einen reinen Bewusstseinsakt geht, der subjektive Einstellungen, theoretische Vorannahmen, Traditionswissen, aber auch Zufälligkeiten und individuelle Besonderheiten ausschließt [37, S. 222; 38, S. 281]. Einerseits folgt nun aus der eidetischen Reduktion, dass wir, wie Gödel schreibt, alle zu den gleichen Konzepten (die bei Husserl dem *Eidos*, also dem Wesen entsprechen) gelangen (wie in [21] und dem dazugehörigen Kommentar ausgeführt). Andererseits gibt es aber nicht nur eine Form von Konzepten. Bei Husserl erkennen wir schon die Unterscheidung in Begriffe, erlangt durch Sinneserfahrungen und durch Logik. Genauso können wir uns unterschiedliche Mengenbegriffe machen, wie wir oben gesehen haben. Wir sind nicht darauf beschränkt das Kontinuum als Punktmengen aufzufassen. Auch wenn jede Form von Konzepten durch Figur-Grund-Trennung entsteht [50], gibt es unterschiedliche Abstraktionsstufen von Konzepten. Deshalb gibt es eine Unterscheidung zwischen Konzepten mit konkretem Inhalt oder solchen, die das Wesen von Dingen oder deren Voraussetzungen erfassen. Genauso können Konzepte offen oder geschlossen sein. Konzepte bilden nicht nur diskrete Inhalte hab. Die Schlussfolgerung, dass V nicht erreichbar ist, ist nur in sofern richtig, wie wir versuchen es durch Punktmengen zu erfassen. V als absolute Unendlichkeit ist in dem Moment erkannt, in dem wir es als offen beschrieben haben. Husserl kritisierte den psychologischen Standpunkt mit einem Schwerpunkt auf die Subjektivität des Erkennens in Logik und Mathematik [35, S. VII]. Da hierdurch die Objektivität des Erkenntnisinhalts außer Acht gelassen wird, greift dies auch die Objektivität der logisch-mathematischen Inhalte an. Die theoretisch fundamentale Seite der Logik, d.h, die reine Logik, ist aber zu trennen von der angewandten, und befasst sich nicht mit geistigen Inhalten, sondern mit Gesetzen und Bedingungen jeglicher Theorie als Fundamente *a priori* [35, Kap. 2]. Damit gelten Logik und Mathematik, zumindest die theoretische und nicht die normative Seite, unabhängig vom menschlichen empirischen Bewusstsein, was Gödels platonischem Realismus gleichkommt. Die Verbindung beider Seiten entspricht der Möglichkeit durch mathematische Intuition Kenntnis von den fundamentalen Bedingungen zu erlangen, die dann Auswirkung auf die normativer Seite und die Realität haben. Bei Husserl wird diese Verbindung zwischen mathematischer Intuition und Realität, also den *a priori*–Bedingungen und ihren normativen Auswirkungen, durch den Begriff der Intentionalität beschrieben [35, S. 101; ausführlich in: 36], der das Gerichtet-sein des Bewusstseins, und damit die Verbindung zwischen geistigem Konzept und weltlichem Inhalt, bedeutet. Wenn wir die unterschiedlichen Abstraktionsstufen der Konzepte betrachten, haben wir mit dieser Intentionalität eben die Möglichkeit nicht nur die konkrete Ebene der Objekte (empirisches Bewusstsein), danach die Ebene ihrer normativen Strukturen, sondern zusätzlich auch die Bedingung dieser Strukturen zu erfassen. Wir schreiten mit Husserls Methode immer weiter vor, zum allgemeinsten Wesen und zur allgemeinsten Existenzbedingung.

Kommen wir nun zu Gödels ontologischem Gottesbeweis und dem darin verwendeten Begriff des Maximums der positiven Eigenschaften, der einen anderen Begriff der unendlichen Menge widerspiegelt, als den Begriff der Punktmenge.

4 Gödels Ontologischer Gottesbeweis

4.1 Voraussetzungen und geschichtliche Einbettung

Gödels ontologischer Gottesbeweis baut auf seiner Auseinandersetzung mit Leibniz auf, von dessen Arbeiten, speziell seiner Monadologie, er stark beeinflusst war [66, S. 2]. Er hatte den Anspruch ein Gesamtsystem der Wissenschaften, aufbauend auf einer fundamentalen Metatheorie, die an der Schnittstelle der Philosophie, Mathematik, Logik und Theologie lag, zu erstellen:

> „Gödel's program in philosophy is to find an exact theory of metaphysics, presumably in the form of a monadology. [...] Gödel characterized his philosophical outlook in this way:
> ‚0.2.1 My theory is a monadology with a central monad (namely, God) [Hinzufügung durch Hao Wang]. It is like the monadology by Leibniz in its general structure.
> 0.2.2 My theory is rationalistic, idealistic, optimistic, and theological.‘
> To carry out his program, Gödel had to take into account Kant's criticisms of Leibniz. He saw Husserl's method as promising a way to meet Kant's objections. [...] The idealistic component of Gödel's theory is, I believe, to be construed as affirming the primacy of mind and its powers. It is in this sense that he rejected materialism. This is implicit in the very conception of monadology, for the monads are seen as spiritual beings and they constitute the fundamental substances.“ [66, S. 8]

Die optimistische und idealistische Komponente können wir auch mit Gödels Einteilung in die rechte und linke Seite der Weltanschauungen verstehen [26, S. 374]. Dabei charakterisiert er die zwei Seiten dieser Einteilung in eine Abkehr von der Metaphysik und Religion auf der einen Seite, bzw. Zuwendung zu dieser auf der anderen Seite. Die Zuwendung zur Religion, Metaphysik, zum Idealismus und Optimismus nennt er die rechte Seite und eine Abkehr von der Metaphysik/Religion und damit Zuwendung zum Skeptizismus, Positivismus bzw. Empirismus, Materialismus und Pessimismus nennt er die linke Seite [26, S. 374]. Leibniz' Monadologie erscheint auf den ersten Blick sehr atomistisch, da alles aus einzelnen Grundbausteinen, den Monaden bestehen soll [47, S. 11]. Das ist aber bei näherer Betrachtung Leibniz' Monadologie nicht mehr der Fall, wenn man sich die Beschaffenheit der Urmonade – Gott – ansieht, die Ursache und Grundbaustein jeder Monade ist. Das heißt, alle Monaden gehen aus der Urmonade hervor [47, S. 37]. Diese ist bei Leibniz ausdrücklich absolut unendlich [47, S. 33] und Gödel übernimmt diese Urmonade, und damit die absolute Unendlichkeit, als Grundbaustein, wie im obigen Zitat deutlich wird. Das bedeutet, dass egal welche weiteren Strukturen im Aufbau der Welt (oder in den hinzu kommenden Monaden) angenommen werden, die Grundsubstanz immer die absolute Unendlichkeit bleibt. Dies spiegelt unsere Darstellung von oben wider, die eine Relation zwischen dem absolut unendlichen homogenen Kontinuum, nämlich V, und dem diskreten Punktkontinuum der Mengen herstellt.[1] Die Notwendigkeit dieser Relation zwischen dem diskreten und dem homogen-kontinuierlichen, oder den Objekten und ihrem Hintergrund, ist aber nicht nur willkürlich gesetzt, sondern es gibt dafür existenzielle Gründe. Die Existenz von Gegenständen ergibt sich gerade durch die Relation zu ihrem konstituierenden Hintergrund. Nur durch diese Unterscheidung, das Hervortreten vor dem Hintergrund (Figur-Grund-Trennung), formt sich Existenz heraus [siehe ausführlich: 49]. Ohne diese Figur-Grund-Trennung hätte der Gegenstand keine Eigenheit, es wäre nicht möglich ihn zu bestimmen oder zu erkennen, d.h. er würde nicht existieren. Oder in Bezug zur Mathematik formuliert:

> „Das anschauliche Kontinuum ist gerade dadurch charakterisiert, dass es Teile hat und die Teile bei jeder Teilung wieder Kontinua sind. Punkte, die keine Teile haben, sind die Repräsentanten des Diskontinuierlichen, das dem Kontinuierlichen gegenübersteht. Sie können nur Diskontinierliches [sic] bilden. Punkte erscheinen in der Teilung nur als Grenzen von Kontinua und haben in dieser Auffassung gar keine eigenständige Existenz. Und es ist in dieser Auffassung undenkbar, dass gerade diese Punkte, deren Existenz von den Kontinua abhängt, eben diese konstituieren sollen. Das Teilende wurde das Geteilte.“ [3, S. 157]

Bei Gödel ist diese Beziehung zwischen Vordergrund und Hintergrund, oder Gegenstand und Hintergrund, wiedergegeben durch die fundamentale Beziehung der Kausalität [66, S. 315; für eine ausführliche Darstellung dieser Kausalitätsbeziehung siehe: 44, 45]. Durch diese notwendige Beziehung muss die absolute Unendlichkeit auch nach innen bestehen, damit Punkte vor diesem Hintergrund überhaupt existieren können. Durch die absolute Unendlichkeit der Urmonade wird, wie oben durch Reflektionsprinzip und Ackermann-Prinzip beschrieben, die absolute Unendlichkeit von V an jedem Punkt nach innen gespiegelt.

4.2 Grundvoraussetzungen des ontologischen Beweises: Gödels Definition von Gott, Fundamentalontologie der Kausalität, Axiome des ontologischen Beweises, Ultrafilter

Nun betrachten wir den ontologischen Gottesbeweis und seine Grundvoraussetzungen im Detail. Gödels Version ist in [27] zu finden, wobei wir hier Scotts Version der Grundan-

[1] Hier sei noch angemerkt, dass das Punktkontinuum, sowie jegliche Strukturen in der Realität nicht wirklich diskret sein können, sondern diese Diskretheit immer nur in unserer Betrachtung, der Auswahl bestimmter Eigenschaften vorhanden ist. Denn, als ‚atomistisch‘ oder ‚diskret‘ angenommene Strukturen sind ja aus den absolut unendlichen Urmonaden aufgebaut, und in der Mathematik wird die angenommene Diskretheit der Punkte durch die Unerschöpflichkeit der Mengen (und die Unendlichkeit der Prozesse in $\mathbb{R}$, $^*\mathbb{R}$ usw.) widerlegt, siehe Kap. 2.3, 3 und auch die Ausführungen dazu im weiteren Verlauf des Texts.

nahmen angeben [58; zitiert nach: 6], da sich Gödels als inkonsistent herausgestellt haben, diese Inkonsistenz in Scotts Version aber vermieden wird [6, S. 97; 7]. Die Änderung ist klein und betrifft die Beweisführung nur marginal [32, S. 368]. Scotts Veränderungen sind im Detail hier beschrieben [32, S. 368–369].

> **Axiom 1** Either a property or its negation is positive, but not both:
> $\forall\varphi[P(\neg\varphi) \equiv \neg P(\varphi)]$
>
> **Axiom 2** A property necessarily implied by a positive property is positive:
> $\forall\varphi\forall\psi[(P(\varphi) \wedge \Box\forall x[\varphi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$
>
> **Theorem 1** Positive properties are possibly exemplified:
> $\forall\varphi[P(\varphi) \supset \Diamond\exists x\varphi(x)]$
>
> **Definition 1** A *God-like* being possesses all positive properties:
> $G(x) \equiv \forall\varphi[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$
>
> **Axiom 3** The property of being God-like is positive: $P(G)$
>
> **C** Possibly, God exists: $\Diamond\exists xG(x)$
>
> **Axiom 4** Positive properties are necessarily positive: $\forall\varphi[P(\varphi) \supset \Box P(\varphi)]$
>
> **Definition 2** An *essence* of an individual is a property possessed by it and necessarily implying any of its properties: $\varphi ess.x \equiv \varphi(x) \wedge$[2] $\forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\varphi(y) \supset \psi(y)))$
>
> **Theorem 2** Being God-like is an essence of any God-like being: $\forall x[G(x) \supset Gess.x]$
>
> **Definition 3** *Necessary existence* of an individual is the necessary exemplification of all its essences: $NE(x) \equiv \forall\varphi[\varphi ess.x \supset \Box\exists y\varphi(y)]$
>
> **Axiom 5** Necessary existence is a positive property: $P(NE)$
>
> **Theorem 3** Necessarily, God exists: $\Box\exists xG(x)$

[[58]; zitiert nach: 6]

Gödel definiert Gott als das Wesen, das alle positiven Eigenschaften besitzt. Dabei liegt dieser Gottesbeweis in der Tradition der ontologischen Gottesbeweise, wie die von Anselm v. Canterbury, Descartes oder Leibniz, bei dem von der logisch begrifflichen Ebene auf die Ebene des Seins geschlossen wird. Gott wird dabei als das Maximum begriffen, als das nichts größeres gedacht werden kann. Bei Gödel wird dieses Maximum nur durch das „Wesen, das alle positiven Eigenschaften besitzt“ [66, S. 114–115] wiedergegeben. Damit können durch *alle positiven Eigenschaften* auch die üblichen Attribute wie „allwissend“ und „allmächtig“ wiedergegeben werden [66, S. 118]. Was aber genau positive Eigenschaften sind, muss an anderer Stelle herausgelesen werden:

[2] $\varphi(x)\wedge$ ist die von Scott korrigierte Inkonsistenz, weil sonst die leere Menge $\emptyset$ für φ eingesetzt werden kann. Siehe hierzu [7, 8].

> „Gödel uses the notion of a positive property as primitive. He says that positive means positive in the moral aesthetic sense, independent of the accidental structure of the world, and that it may also mean pure attribution — that is, the disjunctive normal form in terms of elementary propositions (or properties) contains a member without negation — as opposed to privation (or containing privation)." [29, S. 404; zitiert nach: 66, S. 113–114]

Betrachten wir aber Gödels Grundvoraussetzungen des Beweises der Reihe nach. Gödel bestimmt die Kausalität als fundamentalontologisches Konzept, d.h. die Verbindung jedes Gegenstands zum kausalen Hintergrund, was auch für Raum, Zeit und Möglichkeiten gilt und wichtig ist, da der Gottesbeweis ein ontologischer ist, also von der begrifflichen Ebene auf die Ebene des Seins schließt [66, S. 315]. Dabei ist es gleich, ob Gegenstände aktualer oder nur möglicher Natur sind und in welcher Zeit sie existieren, denn Gödel nimmt ja an, dass es keinen einheitlichen unabhängigen Zeit- oder Raum-Hintergrund gibt, sondern ‚alle Zeiten' und ‚alle Raumformen' sowie ‚alle Möglichkeiten' gleichzeitig parallel, oder besser gesagt ‚in einander' aktual vorhanden sind [43, 69, 70]. Dadurch muss, um das ‚Maximum' der positiven Eigenschaften für den Gottesbeweis zu erhalten, das Maximum des Seins herausgestellt werden. In Gödels Aufzeichnungen ist bez. der positiven Eigenschaften noch folgendes zu finden, was zu seiner fundamentalontologischen Grundlegung der Kausalität passt. Abgesehen von der Beschreibung als „moral/aesthetic" wird „*positive property*" wie folgt beschrieben:

> „1. The interpretation of ‚positive property' as ‚good' (that is, as one with positive value) is impossible, because the greatest advantage + the smallest disadvantage is negative.
> 2. It is possible to interpret the positive as perfective; that is, ‚purely good', that is, such as implies no negation of ‚purely good.'^{x} The chief axiom runs then (essentially): A property is a perfective if and only if it implies no negation of a perfective. All that is needed besides this is the axioms:$^+$ The necessity of a perfective is a perfective,$^\Phi$ and being is a perfective.* [. . .]
> – – – – – – – – – – – – – –
> ^{x} Cannot be replaced by ‚good'.
> $^+$ It need *not* be assumed that always either φ or $\neg\varphi$ is positive.
> $^\Phi$ Or if $M\varphi$ is a perfective, then φ is too.
> * Or: there is a perfective. From this it follows that being is a perfective, since it implies the possibility of this perfective." [29, S. 435]

Wang schreibt dazu:

> „His general line of thought is familiar from the history of philosophy. Descartes, for example, spoke of perfections instead of positive properties, but the crucial steps of his argument in the Fifth Meditation are similar to Gödel's: (a) God is the subject of all perfections, by definition and in accordance with our clear and distinct idea; and (b) existence is perfection." [66, S. 116]

Das heißt, *Existenz* ist eine *perfective* und auf Grund Gödels Fundamentalontologie der Kausalität, ist sie die grundlegendste positive Eigenschaft, die jedem Gegenstand *a priori* zukommt und nach der dann danach noch weitere mögliche positive Eigenschaften hinzu kommen können. Um die verwendeten Begriffe zu verdeutlichen, können wir *Sein* als Verbindung von Existenz und Essenz/Wesen fassen und Gödels fundamentalontologische Kausalitäts-Beziehung eines Gegenstands zu seinem Hintergrund (die dann den Gegenstand in seinem ganzen Sein ausmacht) auch als Existenz-Beziehung zum definierenden Hintergrund beschreiben. Allein durch diese Existenz-Beziehung jedes möglichen Gegenstandes können wir die Realität in ihrer gesamten Mächtigkeit abdecken, weil diese Grund-Menge der Welt nicht diskret gefasst oder irgendwie formalisiert und eingeschränkt, sondern maximal offen gehalten wird – als nicht-diskretes Kontinuum. Gödels allgemeine grundlegende (= notwendige) positive Eigenschaft der Existenz (und ‚NE' notwendige Existenz als Zusammenspiel von Existenz und Essenz) ist hier allerdings abzugrenzen von der Existenz Gottes und des Modalen Kollaps, also der ‚einen' Welt. Gottes Existenz soll auf Grund der ontologischen Axiome bewiesen werden und daraus danach der Modale Kollaps [43, S. 327–328]. Indem die Existenzbeziehung als Grundlage genutzt wird, wird über die Grundmenge allen Seins ein Ultrafilter (s.u.) gelegt, der jedes Seiende einschließt. Die Grundmenge bleibt dabei aber homogen kontinuierlich, da es keine Form von Restriktionen gibt und alle Möglichkeiten, Zeit- und Raumformen mit inbegriffen bleiben. Es erfolgt keine Beschränkung in Hinsicht auf eine diskrete Menge, sondern der Ultrafilter für die positiven Eigenschaften verbleibt in der offenen Grundmenge (V), die jedes beliebige Punktkontinuum enthält. Dadurch erhalten wir für die positiven Eigenschaften das absolute Maximum, die absolute Unendlichkeit. Filter und Ultrafilter sind auf die folgende Weise definiert:

Definition 4.2.1: (Filter [11, S. 2]): Sei $(P, \leq)$ eine schwache partielle Ordnung[3] auf einer Menge P und F eine nichtleere Teilmenge von P. Dann ist F ein *Filter*, falls gilt:

- F ist nach oben abgeschlossen, d.h. es gilt: $\forall p, q \in P((p \in F \wedge p \leq q) \implies q \in F)$
- Zu je zwei Elementen des Filters gibt es ein Filterelement, das unterhalb von beiden liegt, d.h. es gilt: $\forall p, q \in F(\exists r \in F(r \leq p \wedge r \leq q))$

Dabei ist ein Filter ein *eigentlicher Filter*, falls $F \neq P$ gilt.

Die Inklusion $\subseteq$ bildet eine schwache partielle Ordnung auf der Potenzmenge $P(S)$ einer Menge S. Dann erhalten wir damit die folgenden Definitionen für Mengenfilter und Ultrafilter:

Definition 4.2.2: (Mengenfilter, Ultrafilter [11, S. 3]): Sei S eine nichtleere Menge. Eine Teilmenge F der Potenzmenge von S ist ein *Filter auf der Menge S*, falls F ein eigentlicher Filter auf $(P(S), \subseteq)$ ist. Dann ist die Aussage ‚F ist ein Filter auf S' äquivalent mit den folgenden Aussagen:

[3] Eine schwache partielle Ordnung ist eine reflexive und transitive Relation. Eine Relation R ist eine Teilmenge eines Kreuzprodukts aus zwei Mengen. Wenn also A und B zwei Mengen sind, dann ist eine Relation von A zu B eine Teilmenge von $A \times B$. Eine Relation ist reflexiv, wenn $(a, a) \in R$ für jedes $a \in A$ gilt. Eine Relation ist transitiv, wenn aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ auch $(a, c) \in R$ folgt.

- $\emptyset \notin F$ (d.h. F ist ein eigentlicher Filter).
- F ist bezüglich Obermengen abgeschlossen, d.h. es gilt: $\forall X, Y \subseteq S((X \in F \wedge X \subseteq Y) \implies Y \in F)$ und damit gilt $S \in F$
- F ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d.h. es gilt: $\forall X, Y \in F(X \cap Y \in F)$.

Ein Filter, der zu jeder Teilmenge X von S entweder diese selbst, oder ihr Komplement $S \setminus X$ enthält, d.h. für den gilt: $\forall X \subseteq S(X \in F \vee S \setminus X \in F)$ heißt *Ultrafilter* auf S.

Auf Grund dieser Definition ergibt sich, dass Ultrafilter diejenigen (Mengen-)Filter sind, die nicht weiter verfeinert werden können. [Für eine ausführliche Beschreibung von Filtern, Mengenfiltern und Ultrafiltern siehe auch: 12] Der Ultrafilter, den Gödel nun auf der Grundmenge des homogenen Kontinuums (V) verwendet, um alle positiven Eigenschaften herauszufiltern, kann die Mächtigkeit der Ursprungsmenge abbilden, weil er keine Restriktionen macht (es keine Verfeinerung gibt) und die Filtermenge somit genauso maximal offen bleibt wie die Grund-Menge. Dieser Ultrafilter muss sich ja nur über die grundlegendste *perfective* des Seins bewegen. Es stellt sich bez. der Menge aller positiven Eigenschaften aber noch eine zweite Herausforderung (neben der Erlangung des Maximums), nämlich die, ob alle positiven Eigenschaften miteinander kompatibel sind. Dazu verwendet Gödel, nach Wang, die Unterscheidung in einfache Eigenschaften (*simple properties*):

> „Unlike Leibniz, he does not explicitly appeal to the concept of simple properties. However, at least in terms of expressing properties, his conception also points to certain positive properties which are simple in the sense that they are not combinations of other properties. Whatever these simple positive properties might be, we can envisage at least all Boolean combinations of them by conjunction, disjunction, and negation.“ [66, S. 117]

Gott besitzt also nicht nur alle einfachen positiven Eigenschaften, sondern auch alle ihre booleschen Kombinationen, die im genannten Sinne positiv sind. Durch die Konjunktion aller positiven Eigenschaften gilt, dass alle einfachen positiven Eigenschaften dann und nur dann kompatibel sind, wenn das auch für alle positiven Eigenschaften gilt, da diese Konjunktion auch diejenige der einfachen positiven Eigenschaften mit einschließt. Und sie ist äquivalent zu einer Disjunktion, welche die Konjunktion aller einfachen positiven Eigenschaften als ein Glied einschließt[4]. (ebd.) Gödels Reduktion zu den einfachen positiven Eigenschaften löst, in Verbindung mit der Restriktion auf die *notwendig* positiven Eigenschaften, die Aufgabe die Kompatibilität der Eigenschaften nachzuweisen. Einfach zu sein, sorgt dafür gegenseitig unabhängig zu sein. Notwendig einfach zu sein, sorgt dafür sich nicht gegenseitig auszuschließen, auch wenn die Auswahl der möglichen Eigenschaften damit eingeschränkt wird [66, S. 118]. Mit der *Existenz* als grundlegendster positiver Eigenschaft haben wir einen Kandidaten, der alle Bedingungen erfüllt, weil jede

[4] Das macht die disjunktive Normalform aus, bei der es sich um einen logischen Ausdruck handelt, der aus *oder*-Verknüpfungen besteht.

Existenz, durch den jeweiligen Bezug zum Hintergrund[5] verschieden und nicht weiter reduzierbar ist. Existenz können wir daher auch als uneigentliche Eigenschaft bezeichnen, weil sie *vor* jeder weiteren Eigenschaft steht. Gödel fasst diese Grundlage so zusammen:

> „Der philosophische Grundbegriff ist die Ursache. Diese involviert: Wille^x, Kraft, Genuß^x, Gott, Zeit, Raum*. Das Bejahen des Seins ist die Ursache der Welt. Das erste Geschöpf: es kommt zum Sein das Bejahen des Seins dazu. Daraus folgt weiter, dass möglichst viele Sein entstehen werden — und dies ist der letzte Grund der Verschiedenheit (variatio delectat).
> Die Harmonie bedeutet mehr Sein als Disharmonie, denn der Gegensatz der Teile hebt ihr Sein auf. [. . .] (Eigenschaft = Ursache der Verschiedenheit von Dingen.) [. . .]
> − − − − − − − − − − − − −
> * Nahe sein = Möglichkeit der Einwirkung.
> ^{x} Daher das Leben und die Bejahung und Verneinung." [29, S. 432–434]

Damit ist Gott unter Punkt 1 verbunden mit der Identifikation des Urgrunds der Welt und der Bejahung (Bestätigung) des Seins (und damit der Existenz). Gödel verbindet explizit den Urgrund der Welt mit dem Beweis der Existenz eines apriorischen Gottesbeweises: „nach dem Satz vom zureichenden Grund muß die Welt eine Ursache haben. Dies muß an sich notwendig sein (sonst würde sie wieder eine Ursache verlangen). Beweis der Existenz eines apriorischen Gottesbeweises (der darin enthaltene ist es nicht)" [29, S. 430] Und von den genannten Aussagen bez. der Bejahung des Seins und der Harmonie kann geschlossen werden: „Implicit in [the] assertions [. . .] is the idea that the affirmation of being is a positive value, or perhaps the only ultimate (positive) value." [66, S. 120]

Gödel beweist zusätzlich, genau wie Leibniz (nur der Beweis ist anders) aber im Unterschied z.B. zu Anselm von Canterbury, dass Gottes Existenz möglich ist, und setzt dies nicht einfach voraus [6]. Dabei ist die mögliche Existenz identifiziert mit der Konsistenz des Systems aller positiven Eigenschaften: „In this argument, God's possible existence is identified with the compatibility of the system of all positive properties, which is identified with the consistency of the system of their corresponding propositions." [66, S. 115] Mit Axiom 2 des Ursprungsbeweises [27, S. 403] (in Scotts Version Axiom 1, s.o.) unterscheidet er die möglichen Eigenschaften in positive und negative, wobei letztere Negationen der ersteren sind [29, S. 432]. Damit soll eine Eigenschaft dann und nur dann positiv sein, wenn ihre disjunktive Normalform ein Glied ohne Negation enthält, also entweder eine einfache positive Eigenschaft oder eine Konjunktion von einfachen positiven Eigenschaften ist [29, S. 436; zitiert nach: 66, S. 117]. Ansonsten lehnt er seinen Beweis und die Unterscheidung in positive und negative Eigenschaften stark an Leibniz an [66, S. 87].

Der für unsere Zwecke letzte wichtige Punkt ist, dass Gödels Axiome so stark sind, dass sie einen Modalen Kollaps verursachen, bei dem am Ende nur eine mögliche Welt bestehen bleibt [6, 43]. Es ist anzunehmen, dass dieses Merkmal von Gödel bewusst

[5] Hintergrund und Vordergrund, denn: die Existenz-Beziehung ist auch dadurch gegeben, dass eine Sache für eine andere Hintergrund ist.

intendiert und Teil seiner gesamten philosophischen Anschauung war [43, S. 327]. In [30, S. 434] schreibt er zudem:

> „daß die Notwendigkeit einer positiven Eigenschaft positiv ist, ist die wesentliche Voraussetzung für den ontologischen Beweis. Wenn man annimmt $\varphi(x) \supset N\varphi(x)$ (weil aus dem Wesen von x folgend), dann ist es leicht beweisbar, dass es für jedes kompatible System von Eigenschaften ein Ding gibt, aber das ist *der schlechte Weg*. Vielmehr will $\varphi(x) \supset N\varphi(x)$ erst aus der Existenz Gottes folgen."

Damit soll zunächst die Existenz Gottes aus den logischen Axiomen und erst danach der Modale Kollaps bewiesen werden [43, S. 328]. Letzterer soll also selbst keine Voranname der Existenz Gottes sein.

4.3 Vergleich des ursprünglichen Beweises mit modifizierten Beweisen: Modaler Kollaps und das Maximum der positiven Eigenschaften

Nun betrachten wir die Modifizierungen von Gödels ontologischem Beweis. Die Tatsache, dass aus Gödels Beweis ein Modaler Kollaps folgte, der so auch von ihm intendiert gewesen zu sein scheint [43], wurde von vielen als negativer Nebeneffekt kritisiert, da er als Einschränkung des freien Willens interpretiert werden kann [für eine Übersicht siehe: 61]. Deshalb wurden einige Versuche unternommen den Beweis so abzuwandeln, dass die Konsistenz und die notwendige Existenz eines göttlichen Wesens erhalten bleibt, aber der Modale Kollaps vermieden wird. Diese Versuche sind z.B. die Varianten von Anderson [1, 2], Fitting [14] und Benzmüller [4]. Die Veränderungen und ihre Konsequenzen werden wir nun mit dem Beweis von Gödel/Scott vergleichen. Zunächst müssen einige Begriffe geklärt werden, um die Filter zu verstehen, die in den modifizierten Beweisen verwendet werden. Die *Extension* eines Begriffs betrifft den Begriffsumfang in dem dieser greifen soll, also die Menge der Dinge auf die man mit einem sprachlichen Ausdruck Bezug nehmen kann. Die *Intension* eines Begriffs betrifft dessen Begriffsinhalt, für den dieser gelten soll, also die deskriptive Bedeutung, die nicht direkt an die Dinge in der Welt gebunden sind. Benzmüller und Fuenmayor haben die verschiedenen Modifikationen des Beweises miteinander verglichen und auf Konsistenz geprüft [5]. Deshalb halten wir uns hier an die dortige Beschreibung der verwendeten Filter. Zusätzlich vergleichen wir noch eine weitere Modifikation aus [4].

Zum weiteren Verständnis benötigen wir noch die folgenden Begriffe: ‚rigide' bedeutet, dass welt-unabhängige Aussagen identische Auswertungen in allen möglichen Welten haben, d.h. sie sind unabhängig von den Bedingungen in der jeweiligen Welt, werden somit als fest betrachtet. Zusätzlich verwenden wir die Unterscheidung der beiden folgenden Filter: Ein δ-Ultrafilter ist auf der Potenzmenge der Individuen definiert, d.h. auf der Menge der rigiden (extensionalen) Eigenschaften, und ein γ-Ultrafilter ist auf der Potenzmenge der Konzepte definiert, d.h. auf der Menge der nicht-rigiden, weltabhängigen (intensionalen) Eigenschaften [5, S. 131–133, 143–144]. Scott und Anderson benutzen die

Intensionen positiver Eigenschaften, Fitting verwendet in seiner Modifikation die Extensionen positiver Eigenschaften. [5, S. 135] Zusätzlich wird in der Analyse von Benzmüller und Fuenmayor der Menge P der (intensionalen) positiven Eigenschaften, die Menge P' der positiven Eigenschaften gegenübergestellt, die alle Eigenschaften φ enthält, deren rigide intensionalisierte Extensionen $\downarrow \varphi$ in P liegen [5, S. 138]. Fassen wir die Merkmale zusammen:

Merkmale in **Scotts** (und **Gödels**) Beweis:

- Die Definition der Eigenschaft G, Gott zu sein, ist vom Typ γ und definiert dieses Wesen dadurch, alle intensionalen positiven Eigenschaften P zu besitzen. [5, S. 136]
- Modaler Kollaps folgt aus den Voraussetzungen von Scotts/Gödels Argument [5, S. 137]
- Axiom 1 wird unterteilt in A1a und A1b, die eine Äquivalenz darstellen:

  (A1a) $\forall X.P(\rightharpoondown X) \longrightarrow \neg(PX)$, wobei $\rightharpoondown$ eine Mengen-/Prädikatnegation ist

  (A1b) $\forall X.\neg(PX) \longrightarrow (P \rightharpoondown X)$ [5, S. 137]
- Die Menge P der positiven Eigenschaften entspricht in Scotts Variante einem γ-Ultrafilter.
- Existenz als grundlegendste positive Eigenschaft entspricht einer rigiden intensionalen Eigenschaft (auch rigide intensionalen Extension), da es nur einen Existenzbegriff gibt (Kausalität/Verbindung zwischen Gegenstand und Hintergrund), diese aber in allen Welten, Möglichkeiten, Zeiten abgedeckt wird.
- Alle weiteren intensionalen positiven Eigenschaften kommen zusätzlich hinzu.
- Die Mengen P und P' sind gleich.

Merkmale in **Andersons** Variante:

- Scotts Voraussetzungen A1a und A1b werden abgeschwächt. A1b wird fallen gelassen und nur noch A1a bleibt bestehen: „If a property is positive, then its negation is not positive“ [5, S. 139]. Dadurch geht die Äquivalenz verloren.
- Diese Modifikation hat den weiteren Effekt, dass die notwendige Existenz Gottes nicht mehr folgen würde. Deshalb müssen weitere Modifikationen vorgenommen werden. Die Begriffe der Gottähnlichkeit G^A und Essenz $\mathcal{E}^A$ müssen weiter verändert/verstärkt werden (ebd.):
  - G^A: ein Individuum x ist gottgleich G^A wenn, und nur wenn, alle und nur die notwendigen/essentiellen Eigenschaften von x positiv sind, d.h. $G^Ax \equiv \forall Y(PY \leftrightarrow \Box(Yx))$.
  - $\mathcal{E}^A$: eine Eigenschaft Y ist eine Essenz (ein Wesenskern) $\mathcal{E}^A$ eines Individuums x wenn, und nur wenn, alle von x notwendigen/essentiellen Eigenschaften durch Y bedingt sind und umgekehrt alle Eigenschaften, bedingt durch Y, notwendige/essentielle Eigenschaften von x sind.

- Der Modale Kollaps wird in Andersons Variante vermieden; das einfachste Modell besteht aus zwei Welten und einer göttlichen Entität.

- Die Menge der positiven Eigenschaften P in Andersons Variante stellt keinen γ-Ultrafilter dar, wobei aber die Menge P' aller Eigenschaften φ, deren rigide intensionalisierten Extensionen in P liegen, immer noch einen γ-Ultrafilter darstellt. Damit sind die Mengen P und P' nicht mehr gleich. [5, S. 141]

Merkmale in **Fittings** Variante (ebd.):

- Die positiven Eigenschaften P in der Definition der Göttlichkeit (Gottähnlichkeit) G fungieren über den Extensionen der Eigenschaften, d.h. sie sind vom Typ δ und nicht vom Typ γ der intensionalen Eigenschaften, wie in Scotts und Andersons Beweis.

- Nach diesem Verständnis sind positive Eigenschaften fixiert von Welt zu Welt, wobei sie Welt-abhängig in Scotts und Andersons Varianten sind. Scott (und Gödel) definieren Gx als $\forall Y_\gamma . PY \longrightarrow Yx$, wobei Fitting dies zu $\forall Y_\delta . PY \longrightarrow (|Yx|)$ verändert. (Der Begriff der Essenz wird in ähnlicher Weise verändert.)

- Fittings Menge P der positiven Eigenschaften stellt einen δ-Ultrafilter dar.

- Der Modale Kollaps wird vermieden.

Insgesamt bleibt in Andersons und Fittings Veränderungen die notwendige Existenz eines göttlichen Wesens erhalten und der Modale Kollaps wird vermieden. Mit der obigen Unterscheidung zwischen der Menge der (intensionalen) positiven Eigenschaften P und der Menge P' der positiven Eigenschaften, deren rigide intensionalisierte Extensionen $\downarrow \varphi$ in P liegen, gilt dann für die drei Varianten: bei Scott stimmen P und P' überein und sind γ-Ultrafilter; bei Anderson stimmen P und P' nicht überein und nur P' aber nicht P ist ein γ-Ultrafilter; bei Fitting macht die Menge P der positiven Eigenschaften die Extensionen dieser aus und entspricht, vom Begriff her, der Menge P' bei Scott und Anderson, macht aber als Menge bei Fitting selbst einem δ-Ultrafilter aus. Der Begriff der positiven Eigenschaften in Gödels ontologischem Argument entspricht dem mathematischen Begriff eines (prinzipiellen) modalen Ultrafilters auf intensionalen Eigenschaften [5, S. 144]. „Filter, besonders Ultrafilter, messen die Größe von Teilmengen einer Menge, eine Menge ist in diesem Sinne groß, wenn sie im Filter liegt“ [11, S. 3]. Da nun hier P und P' gleich sind, werden alle rigide intensionalen Extensionen herausgefiltert, also der Gesamtumfang des rigiden Begriffsinhalts, den wir mit der Existenz als grundlegendster positiver Eigenschaft identifiziert hatten. Deshalb bleibt die Mächtigkeit der Grundmenge erhalten und so wird das Maximum der positiven Eigenschaften abgedeckt.

Damit haben also die Modifikationen in den Beweisen von Anderson und Fitting nicht nur zur Folge, dass der Modale Kollaps vermieden wird, sondern sie verursachen auch eine Veränderung in der herausgefilterten Menge der positiven Eigenschaften. In Andersons Modell ist die Grundmenge der (intensionalen) positiven Eigenschaften nicht länger ein γ-Ultrafilter. Durch die Aufhebung der Äquivalenz in Axiom A1, durch die ein Modaler Kollaps verhindert wird, wird die Menge im Filter verringert, da nur noch die eine Hälfte der Bedingungen herausgefiltert wird. Damit kann im Filter nicht mehr das ‚Maximum' der Ursprungsmenge abgebildet werden, wie es Gödel beabsichtigt haben sollte. Diese Veränderung sorgte ja auch schon dafür, dass die notwendige Existenz Gottes nicht mehr folgte, weshalb noch weitere Modifikationen vorgenommen wurden (s.o.). Anderson nimmt die Veränderungen in Axiom 1 vor, weil er Probleme in der Interpretation sieht, da er meint, dass die Möglichkeit bestehen könnte, dass eine Eigenschaft oder ihre Negation weder positiv noch negativ, sondern indifferent sein könnte. Es werden positive Eigenschaften rein als moral-aesthetisch definiert. [61, S. 139] Damit wird aber Sein/Existenz als *perfective* nicht mit einbezogen. Wenn wir das Fallenlassen von A1b in Bezug zur positiven Eigenschaft der Existenz sehen, wird der Satz ‚die Negation einer nicht-positiven Eigenschaft ist positiv' zu ‚die Negation einer nicht-existenten Eigenschaft ist existent'. Vor dem Hintergrund, dass wir nur einen Existenzbegriff annehmen, könnten mit Andersons Anmerkung als indifferent vielleicht alle möglichen oder vergangenen/zukünftigen Gegenstände interpretiert werden. Dies ist aber bei Gödel explizit nicht der Fall, da er ja Möglichkeiten und Zeitformen als jetzt aktual gegeben ansieht (da ja kein absoluter Zeitrahmen angenommen wird, s.o.). Deshalb gibt es keine indifferente Existenz.

Bei Fitting wird intensional durch rigide-extensional ersetzt. Durch diese Rigidität wird ebenfalls die Menge der positiven Eigenschaften verringert, weil sie durch die Fixierung in allen Welten gelten müssen. Das würde, übertragen auf unseren Begriff der Existenz als grundlegendste positive Eigenschaft, auch für diese gelten, da sie dann nur gezählt würde, wenn etwas in allen Welten existiert und nicht mehr variabel in einzelnen, oder auch den nur möglichen. Dadurch kann auch hier nicht mehr das Maximum der Grundmenge abgebildet werden. Während die modifizierten ontologischen Beweise mit diesen Änderungen zwar immer noch konsistent sind und die notwendige Existenz eines göttlichen Wesens beweisen, verändert sich die Beschaffenheit dieses göttlichen Wesens (in den hier beschriebenen Modellen). Die Reduzierung der Menge, die aus der Grundmenge heraus gefiltert wird, führt dazu, dass sie einen ‚kleineren' Gott beweisen, der nicht mehr das Maximum darstellt, ‚als das nichts größeres gedacht werden kann'.

In Benzmüllers Modifikation [4] wird die Anzahl der Axiome reduziert. Gödels Axiome bestehen aus [4, S. 780]:

Axiom 1 One of a property or its complement is positive: $\forall X.(\neg(PX) \leftrightarrow P(\rightharpoondown X))$

Axiom 2 A property necessarily entailed by a positive property is positive: $\forall XY.((PX \wedge (X \Rrightarrow Y)) \longrightarrow PY)$

Axiom 3 The conjunction of any collection of positive properties is positive (or, alternatively, being Godlike is a positive property): $\forall Z.(PosZ \longrightarrow \forall X.(X \sqcap Z \longrightarrow PX))$

Axiom 4 Any positive property is necessarily positive: $\forall X.(PX \longrightarrow \Box(PX))$

Axiom 5 Necessary existence ($\mathcal{NE}$) is a positive property: $P\mathcal{NE}$

Die Reduktion und Modifikation sieht wie folgt aus [4, S. 779]:

> **Axiom 1'** Self-difference is not a positive property: $\neg P(\lambda x.x \neq x)$
>
> **Axiom 2'** A property entailed or necessarily entailed by a positive property is positive: $\forall XY.((PX \wedge (X \sqsubseteq Y \vee X \Rrightarrow Y)) \longrightarrow PY)$
>
> **Axiom 3** The conjunction of any collection of positive properties is positive: $\forall Z.(Pos Z \longrightarrow \forall X.(X \sqcap Z \longrightarrow PX))$

Dabei werden also Axiome A4 und A5 fallen gelassen, welche sich auf die Notwendigkeit der Eigenschaften beziehen. Auf der Ebene des Modells findet durch die Reduktion der Axiome eine Verallgemeinerung statt, die die eingeschränkteren Modelle mit mehr Axiomen umfasst. Das bedeutet, dass die Konsistenz des allgemeineren Modells verschiedene Möglichkeiten bietet, modelltheoretisch enger zu werden. Auf der Begriffsebene kann es aber sein, dass durch die Verallgemeinerung die Begriffe nicht mehr mit den Modellen übereinstimmen, dass also für einen bestimmten begrifflichen Inhalt (einen Gottesbegriff) eine engere Axiomatik notwendig ist. Gödel hatte die Einschränkung auf die notwendig positiven Eigenschaften vorgenommen, damit sich verschiedene positive Eigenschaften nicht gegenseitig ausschließen und miteinander kompatibel sind [66, S. 118]. Zusätzlich verursacht die Veränderung in A2, dass nicht nur die Eigenschaften, die notwendig durch positive Eigenschaften bedingt werden, positiv sind, sondern auch diejenigen, die ohne Notwendigkeit bedingt werden, positiv werden. Wenn man aber Existenz als die grundlegende positive Eigenschaft annimmt, wie oben erläutert, dann würde daraus folgen, dass aus der positiven Eigenschaft der Existenz jede weitere Eigenschaft ebenfalls positiv ist, es also keine schlechten mehr geben kann, da ja jede Eigenschaft Existenz zur Bedingung hat. In Gödels A2 sind nur diejenigen Eigenschaften positiv, die notwendigerweise eine positive zur Bedingung haben, wobei man hier unterscheiden muss, ob etwas generelle Bedingung ist oder direkte Ursache (direkte Kausalität). Gödels Unterscheidung in notwendig und möglich macht keine weitere Unterscheidung in notwendig und hinreichend. Wir lesen hier also notwendig als direkte Ursache und damit als hinreichend. In dem Fall der Existenz kann dann eine Eigenschaft immer noch schlecht sein, weil ihr schlecht-sein nicht notwendigerweise aus der Existenz folgt, sondern evt. aus etwas anderem. Das schlecht Sein braucht zwar auch Existenz, aber nur indirekt. Die direkte Kausalität des schlecht Seins kann aus etwas anderem folgen.

Nun ist noch die Problematik des Modalen Kollaps näher auszuführen, da dieser ja gerade die Motivation für die Modifikationen war. Die Ursache für die Kritik bez. des Modalen Kollaps ist die, dass aus ihm geschlossen wird, er verursache einen Determinismus, der den freien Willen ausschließt. Ein Determinismus schließt den freien Willen aber nur dann aus, wenn er selbst beschränkt ist, d.h. wenn er eine beschränkte und damit vorbestimmte Grundmenge annimmt. Wenn aber die absolute Unendlichkeit angenommen wird, dann bleibt der Determinismus durch die Offenheit der Grundmenge ebenfalls offen. D.h., da durch das aktuale Vorhandensein von allen Zeiten und Möglichkeiten das Maximum durch die absolute Unendlichkeit begriffen ist, schließen sich Determinismus und freier Wille nicht aus (da sie als Möglichkeiten angelegt sind). Diese Ansicht Gödels wird auch deutlich aus einem Gespräch zwischen Gödel und Rudy Rucker [56, S. 168]:

> „Gödel seemed to believe that not only is the future already there, but worse, that it is, in principle, possible to predict completely the actions of some given person. I objected that if there were a completely accurate theory predicting my actions, then I could prove the theory false — by learning the theory and then doing the opposite of what it predicted. According to my notes, Gödel's response went as follows: ‚It should be possible to form a complete theory of human behavior, i.e., to predict from the hereditary and environmental givens what a person will do. However, if a mischievous person learns of this theory, he can act in a way so as to negate it. Hence I conclude that such a theory exists, but that no mischievous person will learn of it. In the same way, time-travel is possible, but no person will ever manage to kill his past self. The *a priori* is greatly neglected. Logic is very powerful.‘ Apropos of the free will question, on another occasion he said: ‚There is no contradiction between free will and knowing in advance precisely what one will do. If one knows oneself completely then this is the situation. One does not deliberately do the opposite of what one wants.‘ “

Wenn wir die obige Analyse von Gödels Weltbild betrachten, so wird die Welt nicht als beschränkt angesehen, woraus ein beschränkter Determinismus folgen würde. Welt und Mathematik gehören zusammen und das oberste Prinzip ist Ackermanns Prinzip – V ist unerreichbar – oder in der anderen Formulierung: die Grundlage ist die Urmonade der absoluten Unendlichkeit, woraus ein unbeschränkter Determinismus folgt, der auch den freien Willen enthält.

Darüber hinaus sehen wir insgesamt, dass Gödels Ultrafilter, im Gegensatz zu den verwendeten Filtern der modifizierten Beweise, den offenen Begriff verwendet, den wir in Kapitel 2 und 3 ausführlich betrachtet hatten. Seine Menge der positiven Eigenschaften wird offen gelassen, sie wird nicht gefasst als ein Punktkontinuum, da der Existenzbegriff im homogenen Kontinuum beliebig für alle möglichen Gegenstände funktioniert. Die Abgrenzung von Objekten und Eigenschaften werden nur als Kontur innerhalb unserer Anschauungen im homogenen Kontinuum betrachtet, nicht als tatsächlich gesetzte Grenzen im Kontinuum. D.h. klare Begrenzungen von Objekten und Eigenschaften bleiben eine Projektion im Kontinuum (siehe Abb. 4.1) und das Kontinuum als Medium für diese Projektion im Filter vorhanden. In den modifizierten Modellen ist dies nicht der Fall, weil durch die Restriktionen im Filter das Medium durch die Projektionen ersetzt wird, wodurch feststehende Objekte und Eigenschaften entstehen und damit ein Punktkontinuum. Auch wenn wir nicht unterstellen können, dass es bei Gödels Handhabung dieser homogenen Menge explizit um die Einführung eines neuen Mengenbegriffs ging, so hat er diesen Begriff dennoch effektiv genutzt. Dazu ist auch noch anzumerken, dass es Anregungen gibt, Gödels Beweis nicht nur innerhalb der klassischen Logik zu führen, sondern ihn auf die intuitionistische Logik zu übertragen [40]. Die Verwendung des offenen Mengenbegriffs wird allerdings durch die verwendete Logik nicht beeinflusst, da der Mengenbegriff als zu verwendende Grundmenge jeder Logik vorgeschaltet ist[6].

[6] Aus der intuitionistischen bzw. beweistheoretischen Perspektive könnte hier eingewendet werden, dass es eine Vorschaltung von Begriffen, und damit auch eines Mengenbegriffs, nicht gibt, da aus dieser

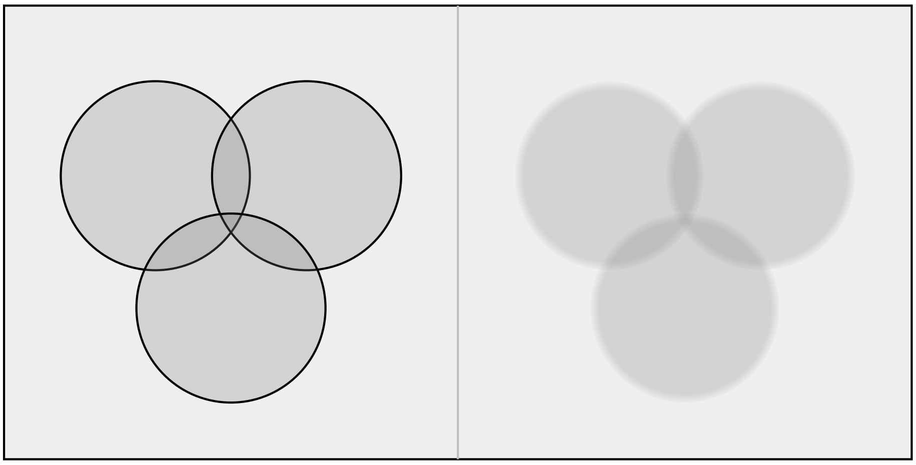

Abbildung 4.1:
Darstellung der unterschiedlichen Mengenbegriffe in der Wahrnehmung (bzw. Konzeptbildung). Auf der linken Seite ist eine Figur mit klarer Trennung vom Hintergrund abgebildet, die der Bildung von Zahlen als diskreten Punkten entspricht. Für den Punkt wird dabei angenommen, dass er ohne Hintergrund existieren kann bzw. keinen Bezug zu diesem aufweist. Auf der rechten Seite ist die Figur-Grund-Trennung als Prinzip der Wahrnehmung dargestellt. Die Figur entsteht durch Hervortreten aus dem Hintergrund und kann nur auf Grund dieser Beziehung existieren. Diese Darstellung entspricht der Betrachtung der Zahlen als Punktprojektionen innerhalb des homogenen Kontinuums. Punkte sind dabei keine in den Raum gesetzten diskreten Punkte, sondern verbleiben in der Wahrnehmung. Bildnachweis: Cordelia Mühlenbeck

Die Beweismodifikationen hatten, neben der Vermeidung des Modalen Kollaps, z.T. auch noch die Motivation, zu zeigen, dass ‚Gott' mit geringeren Mitteln bewiesen werden kann. Wenn man weniger einschränkende Bedingungen betrachtet, erweitert sich der Raum der möglichen Modelle auf die Menge der generalisierten Modelle, wie oben schon kurz erwähnt. Die unterschiedlichen logischen Modelle stellen eine Schachtelung (Inklusion) dar, bei der, ähnlich einem Induktionsbeweis, von kleineren Modellen auf größere geschlossen werden kann. Deshalb bleibt die Konsistenz weiterhin gegeben. Um den Modalen Kollaps zu verhindern, wurden aber Veränderungen an den Axiomen und damit an den Filtern auf der Menge der positiven Eigenschaften vorgenommen. D.h., die Grundmenge, die als Voraussetzung genutzt wird, ist nicht mehr dieselbe. Wenn die Grundmenge modifiziert wird, kann durch die Veränderung oder Reduktion der Axiome und den daraus resultierenden Theoremen nicht mehr auf ein real Gegebenes mit dem Maximum der positiven Eigenschaften geschlossen werden. Eine mögliche Synthese aus der Motivation der modifizierten Beweise und Gödels Intention des Modalen Kollaps ist vielleicht diejenige, die weiter oben schon angemerkt wurde: den Modalen Kollaps für

Perspektive alle Begriffe erst im Nachhinein aus der formalen Konstruktion erscheinen sollen. In dieser Perspektive ist zu Beginn nur der Formalismus existent. Dem kann aber entgegen gestellt werden, dass der Sinn des formal-logischen ontologischen Gottesbeweises ja gerade in der Verbindung zwischen Ontologie und formaler Logik besteht, die einen vorher definierten Gottesbegriff, und damit eingeschlossen auch Welt- oder Realitätsbegriff, zum Gegenstand haben.

eine begrenzte Welt anzunehmen, liefert einen begrenzenden Determinismus, für den die modifizierten Beweise gezeigt haben, dass er umgangen werden kann und Gott auch in zwei Welten vorhanden ist. Das heißt, einerseits liefern die modifizierten Beweise ein Gegenargument für eine begrenzte Welt, andererseits ist aber diese Annahme einer begrenzten Welt sowieso nicht mit Gott als Maximum kompatibel, da jede Begrenzung auch einen Mangel im Maximum, bzw. in Gott darstellt. Vielleicht liegt der Fehler nur in der Annahme, die Welt sei begrenzt. Diejenigen, die den Modalen Kollaps verhindern wollen, weil sie annehmen, dass die eine von Gödel intendierte Welt ‚determinierend zu klein' ist, erschaffen durch die Modifikation der Filter auf der Grundmenge der positiven Eigenschaften Modelle, die mehrere Welten produzieren. Genau dadurch – entgegengesetzt – entsteht aber eine kleinere determinierte Welt, weil die neuen Filter nicht die volle kontinuierliche Mächtigkeit der Grundmenge abbilden können. Deshalb müssen, wenn wir Gott als das Maximum beweisen wollen, alle Begrenzungen eliminiert und somit die absolute Unendlichkeit angenommen werden. Dadurch erhalten wir wiederum *eine* – absolut unendliche – Welt, d.h. mit Modalem Kollaps, dafür aber ohne begrenzten Determinismus, weil sie offen und unbegrenzt ist. Anders formuliert, können wir dies auch in zwei Fälle aufgliedern:

1. Möglichkeit: Eine Welt wird als begrenzt angenommen (entspricht aber nicht dem Maximum) $\longrightarrow$ das Modell mit zwei Welten ist größer.

2. Möglichkeit: Eine Welt ist die absolute Unendlichkeit $\longrightarrow$ das Modell mit zwei Welten ist kleiner und zeigt, dass die Restriktionen in der Grundmenge der positiven Eigenschaften Gott für eine Untermenge beweisen. Diese Untermenge ist aber nicht das Maximum und ‚Gott' damit auch nicht der wahre Gott (in Gödels Sinn).

Daraus können wir insgesamt folgern, dass durch das Maximum der positiven Eigenschaften zwangsläufig, wie von Gödel gefordert, ein Modaler Kollaps entsteht – für eine absolut unendliche Welt.

5 Schlussfolgerungen: Auswirkungen auf die metamathematische Grundlegung der Mathematik

Um die Ergebnisse der vorherigen Kapitel zusammenzufassen, benennen wir kurz die wichtigsten Hauptresultate der einzelnen Kapitel. Bezüglich der Unvollständigkeitssätze erhalten wir zunächst als Grundlage Gödels Satz VI (hier Satz 2.1.1) als allgemeines Resultat über die Existenz unentscheidbarer Sätze, und die damit zusammenhängenden Korollare. Auch Gödels Anmerkung in Fußnote 48a ist als eigene Interpretation seiner Ergebnisse wichtig, denn: „der wahre Grund für die Unvollständigkeit [aller formaler Systeme ...] liegt [...] darin, daß die Bildung immer höherer Typen sich ins Transfinite fortsetzen lässt, [...] während in jedem formalen System höchstens abzählbar viele vorhanden sind." [18, S. 191] Die aufgestellten unentscheidbaren Sätze werden durch Adjunktion passender höherer Typen (z.B. des Typus ω zum System P) immer entscheidbar (ebd.). Dies gilt ja ebenfalls, wie wir gesehen haben, für das Axiomensystem der Mengenlehre. Dann ergeben sich aufbauend auf Satz VI und den damit zusammenhängenden Herleitungen zunächst der 1. Unvollständigkeitssatz (Gödels Satz VIII, siehe Satz 2.1.3): ‚In jedem der in Satz VI genannten formalen Systeme gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze' und aus den damit zusammenhängenden Resultaten der 2. Unvollständigkeitssatz (Gödels XI, siehe Satz 2.1.6): ‚Kein formales System, das mindestens über die Ausdrucksstärke von P verfügt, kann seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen.' Daraus folgt, dass es keine Letztbegründung der heutigen Mathematik in der axiomatischen Weise gibt, wie sie momentan aufgestellt ist. In Bezug zur Kontinuumshypothese erhalten wir erstens mit Gödels Beweisskizze von 1939, dass GCH (also auch CH) und AC relativ widerspruchsfrei zu den anderen Axiomen von ZF sind, womit ZF bei Hinzufügung von AC und GCH konsistent bleibt, oder bereits inkonsistent wäre, wenn ZF es wäre. Gödel nutzte für diesen Beweis ein inneres Modell der Mengenlehre und das Konstruktibilitätsaxiom $V = L$. Zweitens wurde von Cohen (1960) mit der *forcing*-Methode gezeigt, dass AC und GCH nicht aus den übrigen Axiomen von ZF folgen und auf der Basis von ZF weder AC aus CH noch CH aus AC folgt (und damit auch nicht GCH). Das heißt, AC kann zwar in ZF gelten, aber CH ist daraus nicht beweisbar. Mit der *forcing*-Methode wird ausgehend vom Universum V ein größeres Universum $V[G]$ (oder wie oben in der Beweisskizze $M[G]$ als Modell von ZFC) konstruiert, in dem es mehr reelle Zahlen gibt als in dem ursprünglichen Universum vorhanden waren, wodurch CH nicht gelten kann. Durch diese Ergebnisse ist eine Mengenlehre mit und ohne AC und GCH möglich, d.h. es gibt auf Grundlage der bestehenden Axiome keine generelle Ordnung für die unendlichen Stufen der Unendlichkeiten. Lehnt man CH ab, kann man beliebig viele transfinite Kardinalzahlen wählen, die zwischen denen von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ liegen [3, S. 278]. In Bezug zu Mengen, Klassen und den unterschiedlichen Mengenbegriffen erhalten wir die folgenden Ergebnisse: Klassen wurden als neuer Begriff und die Unterscheidung zwischen Mengen und echten Klassen als Grundelement der NBG-Mengenlehre eingeführt. Dabei wurde die Allklasse als Universum aller Mengen V und mit der absoluten Unendlichkeit identifiziert. Damit direkt zusammenhängend erhalten wir bezüglich einer metatheoretischen Grundlegung das Ackermann-Prinzip als erstes, d.h. für alle weiteren grundlegendes, Axiom: ‚V, die Allklasse, ist unerreichbar'. Daraus folgt auch die Notwendigkeit eines neuen metatheoretischen Mengenbegriffs, der die wesentlichen Eigenschaften von echten Klassen beinhaltet, aber nicht nur innerhalb dieses Begriffs operiert, sondern auch auf den Begriff der Mengen übertragbar ist, wodurch z.B. abgeschlossene Intervalle als begrenzte Mengen oder aber als absolute Unendlichkeit aufgefasst werden können. Dazu hatten wir die Unterscheidung in das Kontinuum der Punktmengen (Con_p) und das homogene Kontinuum (Con_{hom}) vorgenommen. Diskrete Punkte in Con_p werden im Con_{hom} jeweils absolut unendlich. Die absolute Unendlichkeit von V wird in jeden Punkt gespiegelt. Punkte werden dann nur noch zu ‚Anschauungspunkten', d.h. Projektionen im Con_{hom}. Das Kontinuum C wird heute mit $\mathbb{R}$, also Con_p gleichgesetzt, kann aber in gleicher Weise mit Con_{hom} beschrieben werden, wodurch sich dann andere Konsequenzen ergeben. Gödels Identifikation der Allklasse mit V entspricht in Verbindung mit dem Ackermann-Prinzip unserer Definition des homogenen Kontinuums. Denn Gödel beschreibt einerseits das Ackermann Prinzip als erstes Grund-Axiom aus dem alle weiteren folgen sollen [66, S. 282–283] und fasst an anderer Stelle den Zusammenhang zu neuen Unendlichkeitsaxiomen wie folgt zusammen:

> „[...] this process of extension of axioms can be iterated into the transfinite. So there cannot exist any formalism which would embrace all these steps; but this does not exclude that all these steps [...] could be described and collected together in some non-constructive way. In set theory, e.g., the successive extensions can most conveniently be represented by stronger and stronger axioms of infinity. [...] there might exist, e.g., a characterization of the following sort: An axiom of infinity is a proposition which has a certain (decidable) formal structure and which in addition is true. Such a concept of demonstrability might have the required closure property, i.e., the following could be true: Any proof for a set-theoretic theorem in the next higher system above set theory [...] is replaceable by a proof from such an axiom of infinity. It is not impossible that for such a concept of demonstrability some completeness theorem would hold which would say that every proposition expressible in set theory is decidable from the present axioms plus some true assertion about the largeness of the universe of all sets." [22, S. 151]

Daraus folgt die Forderung, das Ackermann-Prinzip mit den strukturierenden Axiomen, welche die innerhalb liegenden Mengen betreffen, zu verbinden. Dieses Prinzip, also die Unerschöpfbarkeit der Allklasse als Grund-Axiom zu verwenden, beschreibt er an anderer Stelle auch als Maximum-Prinzip in Form dieses Axioms: „A proper class is a set if and only if it is not equivalent to V." [66, S. 262] Dazu schreibt er in einem Brief an Stanislaw Ulam:

> „The great interest which this axiom has lies in the fact that it is a maximum principle, [...]. For, roughly speaking, it says that any set which does not, in a certain well defined way, imply an inconsistency exists. Its being a maximum principle also explains the fact that this axiom implies the axiom of choice. I believe that the basic problems of set theory, such as Cantor's continuum problem, will be solved satisfactorily only with the help of stronger axioms of *this* kind, which in a sense are opposite or complementary to the constructivistic interpretation of mathematics" (ebd.)

Dann erhalten wir noch abschließend aus dem ontologischen Gottesbeweis die folgenden Ergebnisse: um das Maximum der positiven Eigenschaften zu erreichen und dadurch die notwendige Existenz Gottes zu beweisen wird in den Grundvoraussetzungen des Beweises ein offener, d.h. unbegrenzter Ultrafilter auf der Menge der positiven Eigenschaften verwendet. Positive Eigenschaften werden dabei als *perfective* gefasst, und das Sein ist eine *perfective*. Dadurch kann für die simplen, nicht reduzierbaren (und daher kompatiblen) positiven Eigenschaften Existenz als die grundlegendste positive Eigenschaft gefasst werden, die vor allen weiteren Eigenschaften kommt. Wir können hier die Parallele erkennen zu der Grundmenge der positiven Eigenschaften als Allklasse (und Metaebene) und allen beliebigen weiteren Eigenschaften als Mengenoperationen innerhalb der Allklasse (mathematische/formale Ebene). Durch den offenen Ultrafilter auf der Menge dieser positiven Eigenschaften wird die absolute Unendlichkeit der Grundmenge aller möglicher Existenz abgedeckt und ergibt *eine*, allerdings absolut unendliche, Welt – den Modalen Kollaps. In Abgrenzung dazu haben die Versuche durch die Veränderung der Filter den Modalen Kollaps zu umgehen, dazu geführt kleinere Welten mit einer (in irgendeiner Form) begrenzten oder strukturierten, d.h. kleineren, Menge an positiven Eigenschaften zu erschaffen und in Zusammenhang damit zu einem kleineren Gott geführt, der nicht mehr dem absoluten Maximum entspricht. Wir können also sagen, dass Gödel anstatt des Punktmengenkontinuums den offenen, homogenen Mengenbegriff effektiv genutzt hat, auch wenn er sich nicht in expliziter Form auf diesen veränderten Mengenbegriff bezog.

Bereits am Anfang, in der Einleitung, hatten wir den Zusammenhang zwischen den hier behandelten Gebieten als die Verbindung zwischen begrifflicher Metaebene und formalisierter Ebene benannt, und damit auch insbesondere die Analogie zwischen der Allklasse, dem homogenen Kontinuum, dem Prinzip der Unerreichbarkeit von V als Grund-Axiom und dem homogenen Mengenbegriff für das Maximum der positiven Eigenschaften im ontologischen Gottesbeweis als das Kernelement, das die unterschiedlichen Bereiche verbindet. Dieses Element der absoluten Unendlichkeit taucht in allen Bereichen als notwendige Grundlegung auf. Gödels Anspruch war, ein generelles allgemeingültiges Programm zu erstellen, das nicht nur die Mathematik axiomatisch sicherstellt, sondern auf ihr aufbauend auch eine Grundlegung aller Wissenschaften liefert. „Gödel's program in philosophy is to find an exact theory of metaphysics, presumably in the form of a monadology." [66,

S. 8] Wenn wir die verschiedenen Bereiche auf die genannte Weise verbinden, kann man sagen, dass Gödel den Ansatz für diese Grundlegung tatsächlich gegeben hat.

Für die Kontinuumshypothese im speziellen und die Grundlegung der Mathematik im allgemeinen ergeben sich aus dieser Ausarbeitung als Konsequenz die folgenden Aspekte bzw. Fragen, die zu weiterer experimenteller und formaler Untersuchung anregen:

- Aus der absoluten Unendlichkeit als Grund-Axiom (Ackermann-Prinzip) ergibt sich, dass die Axiomatisierung der Mathematik diese nicht in begrenzte Strukturen abbilden kann (wie bspw. durch die Identifikation des Kontinuums mit dem Punktmengenbegriff geschehen). Dies würde eine Begrenzung an Relationen (und durch die Verbindung zwischen Mathematik und Realität übertragen auf die Metaebene der Ontologie auch eine Begrenzung an raum-zeitlichen Entitäten) bedeuten, die eine absolute Unendlichkeit unmöglich macht, da diese ja schon durch die Definition des Begriffs[1] überall gegeben sein muss. Die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums betrifft nicht ihre Dichte auf der Zahlengeraden, sondern nur die Ordnung der Mächtigkeiten der unterschiedlichen Arten von gesetzten Punkten ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, usw.). Das heißt, die Kontinuumshypothese ist eine Metatheorie der Ordnung und selbst keine Ontologie.

- Wenn die Möglichkeiten zur Strukturierung der Mengen unbegrenzt sind, können wir beliebige Relationen innerhalb der Mengen gleichzeitig herstellen. Allerdings folgt aus diesem Pluralismus keine Relativität von Wahrheit, sondern vielmehr, dass alle möglichen Relation gleichzeitig vorhanden aber in unterschiedlichen Bezügen wahr sind. Dadurch, dass in Gödels Weltbild alle Möglichkeiten und alle Raum-Zeit-Formen gleichzeitig aktual vorhanden sind, bestehen auch die Beziehungen zwischen den Mengen immer aktual ineinander. D.h., eine Menge weist gleichzeitig eine bestimmte Relation bezüglich ihrer Kardinalität zu einer anderen Menge auf (wie $\aleph_0$ zu $\aleph_1$) und in anderen Formen zu allen weiteren. Die Konsistenzen und Inkonsistenzen sind dann innerhalb all dieser Beziehungen gegeben, aber im Allgemeinen nicht abschließend definiert, weil nur die offene Unendlichkeit übrig bleibt. Jede spezifische Relation ist aber dennoch in ihrer Beschaffenheit immer nur in dieser Weise wahr. Damit können wir die vorhandenen metatheoretischen Relationen als ‚Relationsebenen' oder ‚Begriffsebenen' einführen, ähnlich wie in der NBG-Mengenlehre der Begriff der echten Klassen in Unterscheidung zu Mengen eingeführt wurde. Wenn wir die Relationsebenen als auf das Ackermann-Prinzip aufbauendes Axiom ansehen, folgt daraus, dass es Relationen gibt, sodass CH tatsächlich wahr (oder nicht größer als $\aleph_2$) ist und GCH definitiv falsch ist, so wie von Gödel beschrieben. Denn die spezielle CH ist in den möglichen Relationen gegeben, die generelle würde eine Einschränkung an Strukturierung liefern und widerspricht dem Grund-Axiom des Ackermann-Prinzips.

- In Anlehnung an Gödels Beschreibung der Entwicklung neuer Begriffe mit Husserls Phänomenologie können wir mathematische Konzepte in Richtung höherer

[1] Denn gäbe es in der absoluten Unendlichkeit an irgendeiner Stelle eine Begrenzung, könnte die absolute Unendlichkeit nicht mehr *absolut* unendlich sein.

Abstraktionsstufen[2] weiterentwickeln, d.h. in Richtung weiterer metamathematischer Begriffsebenen. Konzepte sind, wie wir gesehen hatten, nicht zwangsläufig abgeschlossen und diskret. Sie fassen konkrete Gegenstände, aber auch die Gemeinsamkeiten unter Gegenständen in Kategorien, bis hin zu Wesen und Voraussetzungen von Objekten und Begriffsbildung in der allgemeinsten Ontologie. Diese Unterscheidung der Begriffsebenen (und der Konzeptformen) liefert mögliche Weiterentwicklungen der Unendlichkeitsaxiome, wie Gödel angedeutet hat.

- Für die Kontinuumshypothese im speziellen ergibt sich durch die Veränderung der Begriffsebenen eine weitere Möglichkeit der Untersuchung. Auf Grund der Tatsache, dass das *forcing* nur innerhalb des Mengenbegriffs der Punktmengen operiert (da innerhalb der klassischen Mathematik mit $\mathbb{R}$ als diskreten Punkten gearbeitet wird), sollte untersucht werden, welche Auswirkungen die Veränderung der Begriffsebene hat. Im speziellen wird das Punktkontinuum durch das Vollständigkeitsaxiom gewährleistet. Was geschieht, wenn dieses Axiom fallengelassen wird? Zunächst werden reelle Zahlen nicht mehr als Punkte gefasst, sondern als Prozesse. Dadurch können sich dann aber in den Intervallen der Intervallschachtelung nicht mehr einzelne Punkte befinden, sondern jede reelle Zahl wird von beliebigen infintesimalen Zahlen begleitet (ähnlich wie das in der Generierung der surrealen Zahlen N_0 geschieht). Das heißt, durch die Veränderung des Mengenbegriffs (hin zum homogenen Kontinuum) verändern sich die Ergebnisse des *forcing* (bez. der Untersuchung der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$) und auch des inneren Modells, das Gödel mit dem Konstruktibilitätsaxiom $V = L$ erstellte. Wenn ‚V ist als absolute Unendlichkeit unerreichbar' als Grund-Axiom angenommen wird, sind im *forcing* die Generierung neuer Modelle (Mengen-Universen) $V[G]$ von ZF und auch Gödels inneres Modell $V = L$ jeweils nur Mengen innerhalb der Allklasse. Zusätzlich kann behauptet werden, dass wenn wir die widersprüchlichen Ergebnisse von Gödel und Cohen auf die Punktauffassung des Kontinuums zurückführen, es nicht nur außerhalb dieser Auffassung eine zusätzliche Begriffsebene geben kann (das homogene Kontinuum), sondern auch schon innerhalb der Punktauffassung unterschiedliche Relationsebenen existieren können. Dadurch, dass das Vollständigkeitsaxiom Prozesse mit diskreten Punkten identifiziert, ist es möglich, dass schon bei Gödels und Cohens Modellen, die beide in den Punktmengen operieren, unterschiedliche Ebenen innerhalb des unendlichen Prozesses einer reellen Zahl als diskreten Punkt gefasst werden, was dann verursacht, dass die Mächtigkeit der Punktmengen in den beiden Modellen unterschiedlich ist. Das heißt, wie können hier zwei unterschiedliche Arten von Relationsebenen betrachten: 1. einen unterschiedlichen Mengenbegriff, 2. innerhalb des Punktmengenbegriffs unterschiedliche Ebenen zur Bildung der Diskretheit der Punkte.

[2] Hier ist anzumerken, dass unterschiedliche Formen von Konzeptbildungen mit eingeschlossen sein müssen.

Literaturverzeichnis

[1] Anderson, C. A. (1990). Some emendations of Gödel's ontological proof. *Faith and philosophy*, 7(3):291–303.

[2] Anderson, C. A. und Gettings, M. (1996). *Gödel's ontological proof revisited*, Band 6, Seiten 167–173. Association for Symbolic Logic.

[3] Bedürftig, T. und Murawski, R. (2010). *Philosophie der Mathematik*. Walter de Gruyter, Berlin/New York.

[4] Benzmüller, C. (2020). A (Simplified) Supreme Being Necessarily Exists, says the Computer: Computationally Explored Variants of Gödel's Ontological Argument. In *Proceedings of the 17th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, KR 2020*, Nummer 9, Seite 779–789. IJCAI organization.

[5] Benzmüller, C. und Fuenmayor, D. (2020). Computer-supported Analysis of Positive Properties, Ultrafilters and Modal Collapse in Variants of Gödel's Ontological Argument. *Bulletin of the Section of Logic*, 49(2).

[6] Benzmüller, C. und Paleo, B. W. (2014). Automating Gödel's Ontological Proof of God's Existence with Higher-order Automated Theorem Provers. In *ECAI*, Band 263, Seiten 93–98.

[7] Benzmüller, C. und Paleo, B. W. (2016a). The inconsistency in Gödel's ontological argument: a success story for AI in metaphysics. In Kambhampati, S., Herausgeber, *Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Seiten 936–942.

[8] Benzmüller, C. und Paleo, B. W. (2016b). An object-logic explanation for the inconsistency in Gödel's ontological theory. In Gerhard Friedrich, Malte Helmert, F. W., Herausgeber, *KI 2016: Advances in Artificial Intelligence. 39th Annual German Conference on AI*, Seiten 244–250.

[9] Bernays, P. (1937). A system of axiomatic set theory—Part I. *The Journal of Symbolic Logic*, 2(1):65–77.

[10] Bernays, P. (1976). A system of axiomatic set theory. In Müller, G., Herausgeber, *Sets and Classes: On the Work by Paul Bernays*, Seiten 1–119. New York: North-Holland, Amsterdam.

[11] Bold, S. (2002). *AD und Superkompaktheit*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

[12] Burris, S. und Sankappanavar, H. P. (2012). *A Course in Universal Algebra.* New York: Springer.

[13] Cohen, P. J. (1963). The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(6):1143–1148.

[14] Fitting, M. (2002). *Types, Tableaus, and Gödel's God*, Band 12. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[15] Fraenkel, A. (1925). *Zehn Vorlesungen Über die Grundlegung der Mengenlehre*, Band XXXI in *Wissenschaft und Hypothese.* Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

[16] Gödel, K. (1929). Über die Vollständigkeit des Logikkalküls. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel: Collected Works Vol. I*, Seiten 60–101. New York, Oxford: Oxford University Press, New York, Oxford.

[17] Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37:349–360.

[18] Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198.

[19] Gödel, K. (1939). Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 25(4):220–224.

[20] Gödel, K. (1940). *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.* Princeton University Press.

[21] Gödel, K. (1944). Russell's mathematical logic. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel. Collected Works Vol. II.* Oxford University Press, New York Oxford.

[22] Gödel, K. (1946). Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel. Collected Works Vol. II.* Oxford University Press, New York, Oxford.

[23] Gödel, K. (1947). What is Cantor's continuum problem? *The American Mathematical Monthly*, 54(9):515–525.

[24] Gödel, K. (1951). Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel: Collected Works Vol. III*, Seiten 304–323. Oxford University Press, New York, Oxford.

[25] Gödel, K. (1953). Is mathematics syntax of language? In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel. Collected Works Vol. III.* Oxford University Press, New York, Oxford.

[26] Gödel, K. (1961). The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel: Collected Works Vol. III.* Oxford University Press, New York, Oxford.

[27] Gödel, K. (1970). Ontological Proof. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel. Collected Works Volume III: Unpublished Essays and Lectures.* Oxford University Press, New York, Oxford.

[28] Gödel, K. (1990). *Collected Works. Volume II: Publications 1938-1974*, Band 2. Oxford University Press, Inc., New York, Oxford.

[29] Gödel, K. (1995a). *Collected Works: Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, Band 3. Oxford University Press, USA.

[30] Gödel, K. (1995b). Texts relating to the ontological proof. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel: Collected Works Vol. III: Unpublished Essays and Lectures.* Oxford University Press, USA, New York, Oxford.

[31] Hawking, S. (1990). Introductory note to 1949 and 1952. In Feferman, S., Herausgeber, *Kurt Gödel: Collected Works. Vol. II: Publications 1938-1974.* Oxford University Press, New York, Oxford.

[32] Hazen, A. P. (1998). On Gödel's ontological proof. *Australasian Journal of Philosophy*, 76(3):361–377.

[33] Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95(1):161–190.

[34] Hoffmann, D. W. (2017). *Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze: Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen Beweis.* Berlin, Heidelberg: Springer-Spektrum.

[35] Husserl, E. (1900). *Logische Untersuchungen, Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik.* M. Niemeyer, Halle a. d. Saale.

[36] Husserl, E. (1988). *Fünfte Logische Untersuchung.* Meiner, Hamburg.

[37] Husserl, E. (2006). *Phantasie und Bildbewußtsein, Text nach Husserliana, Band XXIII.* Felix Meiner, Hamburg.

[38] Husserl, E. (2013). *Zur phänomenologischen Reduktion: Texte aus dem Nachlass (1926–1935).* Springer, Dordrecht.

[39] Kahle, R. (2023). Die philosophische Bedeutung des Gödel-Universums. In Passon, O., Benzmüller, C., und Falkenburg, B., Herausgeber, *On Gödel and the Nonexistence of Time – Gödel und die Nichtexistenz der Zeit: Kurt Gödel essay competition 2021 – Kurt-Gödel-Preis 2021*, Seiten 27–34. Springer.

[40] Kanckos, A. (2022). Intuitionistic Derivability in Anderson's Variant of the Ontological Argument. In *CEUR Workshop Proceedings: Proceedings of Automated Reasoning in Quantified Non-Classical Logics 2022.*

[41] Kirby, L. und Paris, J. (1982). Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14(4):285–293.

[42] Knuth, D. E. (1974). *Surreal numbers: how two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness: a mathematical novelette.* Boston: Addison-Wesley.

[43] Kovač, S. (2012). Modal Collapse in Gödel's Ontological Proof. *Ontological Proofs Today*, 50:323–343.

[44] Kovač, S. (2015). Causal interpretation of Gödel's ontological proof. In Świętorzecka, K., Herausgeber, *Gödel's Ontological Argument: History, Modifications, and Controversies.* Warszawa: Semper.

[45] Kovač, S. (2020). On causality as the fundamental concept of Gödel's philosophy. *Synthese: An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, 197(4):1803–1838.

[46] Kunen, K. (1980). *Set Theory. An introduction to independence proofs.* New York: North-Holland.

[47] Leibniz, G. W. (1998). *Monadologie.* Reclam, Stuttgart.

[48] Lánský, L. (2012). Visualization of the surreal number tree. This file is licensed under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.

[49] Mühlenbeck, C. (2021). Die absolute Unendlichkeit des Raumzeit-Kontinuums als grundlegende Fundamentalontologie. *META: Research in Hermeneutics, Phenomenology, and Practical Philosophy.*, XIII(2):343–366.

[50] Mühlenbeck, C. und Jacobsen, T. (2020). On the origin of visual symbols. *Journal of Comparative Psychology*, 134(4):435.

[51] Neumann, J. v. (1925). Die Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für reine u. angewandthe Mathematik.*

[52] Neumann, J. v. (1928). Die Axiomatisierung der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift*, 27:669–752.

[53] Neumann, J. v. (1929). Die Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für reine u. angewandthe Mathematik.*

[54] Paris, J. und Harrington, L. A. (1977). A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In Barwise, J., Herausgeber, *Handbook of Mathematical Logic.* Amsterdam, Netherlands: North-Holland.

[55] Richard, J. (1905). Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées.*

[56] Rucker, R. (2019). *Infinity and the mind: The science and philosophy of the infinite.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[57] Schmidtke, M. (2005). Infinitesimale (ε) und Infinite (ω) auf der hyperreellen Zahlengerade. This file is licensed under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.

[58] Scott, D. (1972). Appx. B: notes in Dana Scott's Hand. In *Logic and Theism: Arguments for and against Beliefs in God*, Seiten 145–146. Cambridge University Press.

[59] Sierpiński, W. (1947). L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix. *Fundamenta Mathematicae*, 34(1):1–5.

[60] Skolem, T. (1920). Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Bewiesbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen. In Fenstad, J. E., Herausgeber, *Selected works in logic*. Oslo: Universitetsforlaget.

[61] Sobel, J. H. (2003). *Logic and Theism: Arguments for and against Beliefs in God*. Cambridge University Press.

[62] Solovay, R. M. (1990). Introductory note to 1938, 1939, 1939a and 1940. In Feferman, S., Herausgeber, *Gödel, Kurt. Collected Works. Volume II: Publications 1938-1974*. New York, Oxford: Oxford University Press.

[63] Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *J. of Math*, 58(345-363):5.

[64] Wang, H. (1974). *From Mathematics to Philosophy*. Humanities Press, New York.

[65] Wang, H. (1977). Large sets. In *Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory: Part One of the Proceedings of the Fifth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, London, Ontario, Canada-1975*, Seiten 309–333. Springer.

[66] Wang, H. (1997). *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*. Cambridge: MIT press.

[67] Weyl, H. (1921). Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik: Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich. *Mathematische Zeitschrift*, 10(1-2):39–79.

[68] Whitehead, A. und Russell, B. (1925). *Principia Mathematica*, Band 2. Cambridge: University Press, Cambridge.

[69] Yourgrau, P. (1999). *Gödel Meets Einstein: Time Travel in the Gödel Universe*. Chicago: Open Court.

[70] Yourgrau, P. (2005). *A world without time: The forgotten legacy of Gödel and Einstein*. New York: Basic Books.

[71] Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, 65(2):261–281.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.
Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.
Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Universität als Prüfungsleistung eingereicht.

Berlin, 12. Februar 2024

(Ort, Datum)

(Unterschrift)