

**Strategien von Studierenden des
Grundschullehramts in arithmetischen
Begründungssituationen.**

**Eine Systematisierung auf Basis einer
erweiterten theoretischen Grundlage und
empirische Betrachtungen.**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften
am Fachbereich Mathematik und Informatik der
FU Berlin

vorgelegt von

Lisa Eggerichs

Berlin, 2023

Erstgutachterin:

Priv.-Doz. Dr. Christine Scharlach, FU Berlin

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen

Tag der Disputation:

23. April 2024

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Diese Dissertation wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch in keinem früheren Promotionsverfahren eingereicht. Mit einer Prüfung meiner Arbeit durch ein Plagiatsprüfungsprogramm erkläre ich mich einverstanden.

Danksagung

Mit der Fertigstellung dieser Arbeit möchte ich mich bei verschiedenen Menschen bedanken, die mir beruflich oder privat nahestehen und mich unterstützt haben.

Ich bedanke mich bei **Priv.-Doz. Dr. Christine Scharlach**. Liebe Christine, ich bedanke mich für die herzliche Aufnahme in den Arbeitsbereich und die administrative Unterstützung im Fachbereich. Außerdem bedanke ich mich für deine inhaltliche Anregung und gedanklichen Input zum Thema des vorliegenden Promotionsprojekts.

Ich bedanke mich bei **Prof. Dr. Andreas Büchter**. Lieber Andreas, ich bedanke mich für die inhaltliche und methodische Unterstützung. Ich habe von dir sehr viel über den qualitativen Forschungsprozess und die Darstellung von Forschungsergebnissen gelernt.

Ich bedanke mich bei dem **Team von MatheProfi** und explizit bei **Dr. Ulrike Bücking**. Liebe Ulrike, ich bedanke mich bei dir für deine Geduld und die langen Gespräche über mathematisches Denken.

Ich bedanke mich bei **Elodie Marie Anne Viennot**. Liebe Elo, ich bedanke mich für die Transkription der Interviews und deinen kritischen Blick auf die Durchführung der Interviews.

Ich bedanke mich bei den **Studierenden des Grundschullehramtes der FU Berlin**. Liebe Studierende, ich bedanke mich für die Einblicke in eure Gedankengänge.

Ich bedanke mich bei dem **Team des BQL Programms** in Dresden. Liebes Team, danke für den Austausch und das Teilen eurer Lebensweisheiten zu verschiedenen beruflichen und privaten Themen und eure Unterstützung bei dem Vorhaben.

Ich bedanke mich bei **allen, die hier nicht namentlich erwähnt werden können**, mir aber in Kolloquien und auf Konferenzen inhaltlichen und methodischen Input gegeben haben.

Ich bedanke mich auch bei **der Bahn** dafür, dass sie mir durch ihre vielen Verspätungen und Zugausfälle bei meinen Fahrten nach Berlin immer die Möglichkeit gegeben hat, noch länger zu arbeiten und auf den gemütlichen Bahnhöfen an meiner Dissertation zu arbeiten.

Schließlich gilt mein großer Dank **meiner Familie** für die Unterstützung während dieser arbeitsintensiven Lebensphase, das Verständnis für meine Abwesenheit zu verschiedenen Anlässen und das offene Ohr für die Höhen und Tiefen.

Ich bedanke mich außerdem bei **meinem Mann Max** dafür, dass du meine Wünsche und Ziele auch zu deinen und meinen Weg immer zu deinem gemacht hast, dass du meine technischen Probleme gelöst und mit mir an vielen Abenden über mathematische Probleme diskutiert hast. Dafür und für vieles mehr liebe ich dich.

Disclaimer

Um Fachbegriffe oder für die Arbeit relevante Begriffe hervorzuheben, werden diese *kursiv* geschrieben. Für die Arbeit zentrale Begriffe werden durchgehend *kursiv* formatiert, alle anderen Begriffe werden zu Beginn ihrer Einführung *kursiv* geschrieben.

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	1
1	Einordnung des Erkenntnisinteresses in den Forschungskontext	3
2	Erkenntnisleitendes Interesse und Forschungsfrage	6
3	Aufbau der Arbeit	8
II	Theoretischer Rahmen	11
4	Überlegungen zu den Grundbegriffen der Arbeit: Begründen und Strategien	13
4.1	Beweisen, Begründen und Argumentieren im Kontext der Mathematik(didaktik) - Klärung der Begriffe und deren Verhältnisse zueinander	13
4.2	Mathematisches Begründen als Problemlöseprozess	21
4.3	Mathematisches Begründen als Modellierungsprozess	24
4.4	Erarbeitung eines Strategiebegriffs für das vorliegende Erkenntnisinteresse	25
4.5	Zusammenfassung	32
5	Chronosequentielle Betrachtung von Prozessen in mathematischen Begründungssituationen	33
5.1	Modellbezogene Betrachtungen	33
5.2	Verstehen	34
5.3	Der Begründungsprozess an sich als das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten	39
5.4	Abschluss des Begründungsprozesses	41
5.5	Zusammenfassung	43

6	Prozesse und Denkrichtungen innerhalb der Phase des Begründungsprozesses	44
6.1	Argumentieren und formal-deduktives Beweisen als Formen des Begründens	45
6.2	Logisches Schließen und andere Schlussweisen	52
6.2.1	Berufung auf Autorität, Analogieschluss und Wahrscheinlichkeitsschluss beim alltagsbezogenen Argumentieren	53
6.2.2	Induktive Denkrichtung im Prozess des (logischen) Argumentierens mit mathematischen Mitteln	54
6.2.3	Deduktives Schließen	62
6.3	Zusammenfassung	63
7	Die Phase des Begründungsprozesses aus begründungstyporientierter Perspektive	65
7.1	Begründen durch Exemplarizität	66
7.2	Generisches Begründen	67
7.3	Formal-deduktives Begründen	72
7.4	Zusammenfassung	75
8	Repräsentationsebenen in mathematischen Begründungen	77
9	Metakognition in Begründungsprozessen	80
10	Zusammenfassung	84
III Ableitung einer theoretischen Kollektion von Strategien aus bereits bekannter Literatur		87
11	Darstellung der Systematisierung	89
12	Strategieeinheit Verstehen	92
13	Strategieeinheit Argumente konstruieren und verknüpfen	101
14	Strategieeinheit Diskurs	112
15	Metakognition	115
16	Zusammenfassung	117

IV Empirische Betrachtungen und Anreicherung der Strategiekollektion	119
17 Forschungsmethode zur Datenerhebung	121
17.1 Verbale Daten	121
17.2 Die Methode des Lauten Denkens als qualitative Erhebungsmethode verbaler Daten	124
17.3 Grenzen der Methode des Lauten Denkens	128
17.4 Methodische Schlussfolgerungen	132
18 Beschreibung der durchgeführten Datenerhebung	135
18.1 Beschreibung der Entstehungssituation des Materials	135
18.1.1 Auswahl der Stichprobe	135
18.1.2 Hygienekonzept	136
18.2 Ablauf der Datenerhebung	136
18.2.1 Erste Etappe - Einführung	136
18.2.2 Zweite Etappe - Bearbeitung der Aufwärm Aufgabe	136
18.2.3 Dritte Etappe - Bearbeitung der Primäraufgabe	137
18.2.4 Spezielle Aspekte der introspektiven Phase	138
18.2.5 Spezielle Aspekte der retrospektiven Phase	139
18.3 Beschreibung, Begründung und stoffdidaktische Einordnung der Primäraufgabe	140
18.4 Dokumentation der Daten mit Hilfe von Videoaufzeichnungen	142
19 Vorbereitung des Materials für die Datenauswertung	144
19.1 Transkription	144
19.2 Einfügen des Videomaterials in die Transkripte	146
20 Auswertung der transkribierten Lautdenkenprotokolle	148
20.1 Die qualitative Inhaltsanalyse als Datenauswertungsmethode	148
20.2 Beschreibung des Ablaufs für die vorliegende Untersuchung	152
20.3 Schritt 2: Auswahl des Materials - Bestimmung der Auswahl- einheit	156
20.4 Schritt 3: Erstellen des Kategoriensystems	157
20.5 Schritt 4: Unterteilung des Materials in Einheiten	160
20.5.1 Festlegen der Analyseeinheit und Trennung in Intro- spektion und Retrospektion	161
20.5.2 Segmentierung der transkribierten Lautdenkenprotokol- le der introspektiven Phase	162
20.6 Schritt 5: Probekodierung	167
20.7 Schritt 6: Evaluation und Modifikation des Kategoriensystems	168

20.8 Schritt 7: Hauptkodierung	168
20.9 Schritt 8: Weitere Auswertung und Ergebnisdarstellung	170
21 Darstellung der Ergebnisse aus der empirischen Untersuchung	171
21.1 Theoretisch abgeleitete Strategien, die empirisch sichtbar geworden sind	171
21.2 Durch die empirische Untersuchung ergänzte Strategien bzw. dem Material ergänzte Strategien	185
21.3 Strategien, die empirisch nicht beobachtet werden konnten	208
V Zusammenfassende Betrachtungen, Diskussion, Grenzen und Ausblick	209
22 Zusammenfassende Betrachtungen und Diskussion der Ergebnisse	211
22.1 Strategieeinheit VERSTEHEN	213
22.2 Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN	221
22.3 Strategieeinheit DISKURS	234
22.4 Fazit	236
23 Grenzen der Studie und Reflexion der Ergebnisse	238
24 Implikationen und Ausblick	243
24.1 Implikation und Ausblick für die Forschung	243
24.2 Implikation und Ausblick für die Hochschulmathematikdidaktik und Praxis	245
25 Schlussbemerkungen	248
VI Literaturverzeichnis	249
VII Anhang	277
A Einladungsbrief für potenzielle Interviewteilnehmende (SoSe21)	278
B Einladungsbrief für potenzielle Interviewteilnehmende (SoSe22)	279

C Leitfaden für die erste Etappe	280
D Einverständniserklärung	281
E Kodierleitfaden	282
F Ergänzungen der Ankerbeispiele des Kodierleitfadens	283
G Alternative Darstellung der Ergebnisse	284
H Zusammenfassung der Ergebnisse nach §7 Abs. 5 Promotionsordnung	288

Tabellenverzeichnis

4.1	Darstellung der drei Phasen nach Rott (2014) und darunter subsumierte Ansätze	23
5.1	Verstehensaktivitäten nach Kirsten (2021)	38
12.1	Tabellarisch zusammengestellte <i>Strategien</i> der Strategieeinheit VERSTEHEN	96
13.1	Tabellarisch zusammengestellte <i>Strategien</i> der Makrostrategie RESSOURCENAUSWAHL	105
13.2	Tabellarisch zusammen gestellte <i>Strategien</i> der Makrostrategie TRANSFORMIEREN	109
14.1	Tabellarisch zusammengestellte <i>Strategien</i> aus der Strategieeinheit DISKURS	113
20.1	Werkzeugkasten zur Beschreibung der Datenauswertung mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse in Anlehnung an Schreier (2014)	154
20.2	Anwendung des Kriteriums der <i>inhaltlichen Abgeschlossenheit</i> auf B07 aus der Stichprobe und nachvollziehbare Darstellung der Segmentierung	164
20.3	Anwendung des Kriteriums der <i>inhaltlichen Abgeschlossenheit</i> auf B21 aus der Stichprobe und nachvollziehbare Darstellung der Segmentierung	166
22.1	Synthese der Ergebnisse der <i>Strategien</i> der Strategieeinheit VERSTEHEN	216
22.2	Synthese der Ergebnisse bezüglich der <i>Strategien</i> der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN . . .	225
22.3	Synthese der Ergebnisse bezüglich der <i>Strategien</i> der Strategieeinheit DISKURS	235

Abbildungsverzeichnis

4.1	Verhältnis von Prozessen, Beweistypen, Darstellungsebenen und Begründungsarten in Anlehnung an Brunner (2013;2014)	19
4.2	Darstellung der kettenartigen Struktur der Gedankenschritte beim <i>Lauten Denken</i> in Anlehnung an Ericsson und Simon (1998)	29
6.1	Schematische Darstellung einer Argumentationskette in Anlehnung an Toulmin (2003)	46
6.2	Schematische Darstellung einer Argumentationskette in Anlehnung an Toulmin (2003)	47
6.3	Rekonstruktion einer deduktiven Argumentationskette mit Hilfe des Toulmin Schemas in Anlehnung an Meyer und Prediger (2009)	51
7.1	Ikonomische Darstellung der Teilbarkeit durch 2 der Zahlen 6 und 8 in Anlehnung an Padberg und Büchter (2015, S.77)	70
7.2	Ikonomische Darstellung der Teilbarkeit durch 2 der Summe der Zahlen 6 und 8 in Anlehnung an Padberg und Büchter (2015, S.77)	71
10.1	Ein nach Brunner (2014) adaptiertes Modell zum Verhältnis von Prozessen, Beweistypen, Repräsentationsebenen und Denkrichtungen	86
11.1	Zweidimensionales Schema als Grundlage zur Betrachtung von <i>Strategien</i> in mathematischen Begründungen, weiterentwickelte Version aus Eggerichs, 2023	90
12.1	Makrostrategien der Strategieeinheit VERSTEHEN eingeordnet in das zweidimensionale Schema	95
13.1	Ableitung der Makrostrategien RESSOURCENAUSWAHL und TRANSFORMIEREN aus der kettenartigen Struktur von Argumentationsprozessen	102

13.2	Makrostrategien der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN eingeordnet in das zweidimensionale Schema	103
14.1	Makrostrategien der Strategieeinheit DISKURS eingeordnet in das zweidimensionale Schema	114
16.1	Darstellung der Makrostrategien im zweidimensionalen Schema	118
17.1	Das Mehrspeichermodell als Grundlage für die Betrachtung von vor der Verbalisierung ablaufenden Prozessen in Anlehnung an Konrad (2010) und van Someren et al. (1994)	123
20.1	Baukasten zur erkenntnisinteressegeleiteten Auswahl der Spezifika der qualitativen Inhaltsanalyse in Anlehnung an Stamann et al. (2016)	150
20.2	Ausschnitt aus der Kategorienhierarchie des vorliegenden Projekts	159
20.3	Darstellung der kettenartigen Struktur als verknüpfende Darstellung der Überlegungen aus Abbildung 4.2, 13.1	163
21.1	Parallel zur <i>Strategie</i> SCHRIFTLICHES EXTRAHIEREN angefertigte Darstellung	172
21.2	Parallel zur <i>Strategie</i> SYMBOLISCHES ÜBERSETZEN angefertigte Darstellung	174
21.3	Parallel zur <i>Strategie</i> AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung (1)	177
21.4	Parallel zur <i>Strategie</i> EXTERN GENERIERTE AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung (2)	178
21.5	Parallel zur <i>Strategie</i> AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	180
21.6	Parallel zur <i>Strategie</i> AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	180
21.7	Parallel zur <i>Strategie</i> BEISPIELVERIFIZIERUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung . . .	181
21.8	Parallel zur <i>Strategie</i> BEISPIELREIHUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	182
21.9	Parallel zur <i>Strategie</i> KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN angefertigte Darstellung	182

21.10	Parallel zur <i>Strategie</i> KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN angefertigte Verschriftlichung unter Berücksichtigung des thematischen Schwerpunktes der Eigenschaft <i>ungerade</i> der Quadratzahl 9183	
21.11	Parallel zur <i>Strategie</i> MARKIERENDES EXTRAHIEREN markierte Textabschnitte	185
21.12	Parallel zur <i>Strategie</i> GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	188
21.13	Parallel zur <i>Strategie</i> TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	189
21.14	Parallel zur <i>Strategie</i> IKONISIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	195
21.15	Parallel zur <i>Strategie</i> EXTERN GENERIERTES KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN angefertigte Darstellung	197
21.16	Parallel zur <i>Strategie</i> ANGEWANDTES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN angefertigte Darstellung	200
21.17	Parallel zur <i>Strategie</i> TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung	203
21.18	Parallel zur <i>Strategie empirische Mustersuche auf bildlicher Repräsentationsebene</i> angefertigte Darstellung	203
21.19	Parallel zur <i>Strategie</i> ZEICHNERISCHES DARSTELLEN DER BEWEISSKIZZE angefertigte Darstellung	207

Teil I
Einleitung

„Die Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft und verfügt damit über ein wesentliches Alleinstellungsmerkmal im Vergleich zu allen anderen Wissenschaften“ (Reiss & Ufer, 2009, S.1).

Durch diese Spezifik kommt dem *Begründen* und *Beweisen* auch in der Schulmathematik eine zentrale Rolle zu, um ein tragfähiges Bild von Mathematik zu vermitteln und mathematikspezifische Arbeits- und Denkweisen in der Schule zu thematisieren. Aus dieser Zielstellung heraus, muss das mathematische *Begründen* und *Beweisen* auch in der universitären Ausbildung von Lehramtsstudierenden berücksichtigt werden.

Im Rahmen dieses Abschnitts soll zunächst der für das Forschungsinteresse relevante aktuelle Forschungsstand zusammengefasst, das Erkenntnisinteresse darin eingeordnet und daraus die Relevanz des hier vorgestellten Forschungsvorhabens entwickelt werden. (Kapitel 1). In Kapitel 2 wird das Erkenntnisinteresse dargestellt und anschließend der Aufbau der Arbeit erläutert (Kapitel 3).

1 Einordnung des Erkenntnisinteresses in den Forschungskontext

In der aktuellen Forschungslage ist ein großes Interesse der Forschung im Bereich des mathematischen *Begründens* und *Beweisens* sowohl für den Schul- als auch für den Hochschulbereich auszumachen. „Student learning and understanding of mathematical proofs has been a major focus of recent mathematics education research“ (Housman & Porter, 2003). *Der Beweis* und die *allgemeingültige Begründung* gelten als gängige Praxis und als zentrale Tätigkeit der Fachmathematik und werden demnach auch als ‚Heartbeat of Mathematics‘ (Davis & Hersh, 1981) bezeichnet. Um ein authentisches und für die universitäre Ausbildung anschlussfähiges Bild dieser Fachwissenschaft zu vermitteln ist das *Begründen*, *Beweisen* aber auch das *Argumentieren* Bestandteil von Curricula und schuldidaktischen Überlegungen. So findet sich das mathematische *Beweisen* und *Begründen* beispielsweise in den deutschen Bildungsstandards der KMK und wird hier als *allgemeine mathematische Kompetenz* unter dem Begriff *Argumentieren* beschrieben. *Beweisen* und *Begründen* wird aber auch in internationalen Standards, wie den Prinzipien des *National Council of Teachers of Mathematics* in Form des *Proofing and Reasoning* zum zentralen Prinzip. Auch ist das mathematische *Begründen* und *Beweisen* in didaktischen Prinzipien, die für den Mathematikunterricht formuliert werden, inhärent.

„Proof can make the greatest contribution in the classroom only when the teacher is able to use proofs that convey understanding“ (Hanna, 2005). Aus dieser Perspektive heraus wird das mathematische *Begründen* und *Beweisen* auch für die Lehrkräftebildung bedeutungsvoll. Lehramtstudierende sollen innerhalb ihrer universitären Ausbildung auf die Tätigkeit in der Schule vorbereitet werden. Dabei muss ein fachlich ‚höherer Standpunkt‘ (Klein, 1908) als hilfreich und notwendig erlebt werden (Kempfen, 2019). Die zukünftigen Lehrkräfte sollen zum einen in die Lage versetzt werden, Inhalte der Elementarmathematik selbst besser zu verstehen und zum anderen sich ein professionelles Wissen im Umgang mit mathematikdidaktischen Materialien und Überlegungen in diesem Zusammenhang, die sie für Ihren zukünftigen Unterricht benötigen, erarbeiten (Wittmann, 2014). Dieser doppelte Zugang ist Ausgangspunkt für die Auswahl der Inhalte des Moduls ‚Mathematisches

KAPITEL 1. EINORDNUNG DES ERKENNTNISINTERESSES IN DEN FORSCHUNGSKONTEXT

Professionswissen I⁴, welches die in der vorliegenden Untersuchung interviewten Studierenden besuchten und damit auch Bezugspunkt für die dargelegten Ergebnisse wird.

Mathematisches *Begründen* und *Beweisen* wird in der mathematikdidaktischen Literatur aus vielerlei Blickwinkeln betrachtet. So wird es im Zusammenhang mit der kognitiven Entwicklung vom Kind bis zum Erwachsenen (u.a. Tall et al., 2012; Harel & Sowder, 2005; Tall, 2014), unter Einbeziehung verschiedener Bezugswissenschaften wie den Neurowissenschaften und der Psychologie, aus historischer Perspektive (u.a. Grabiner, 2012) und im Kontext von Schule, Curricula und didaktischen Modellen (u.a. Jones & Herbst, 2012; Bezold, 2010; Huethorst, 2022; Schwarzkopf, 2000; Gerloff, 2022) betrachtet. In diesen Kontexten beschäftigen sich verschiedene Veröffentlichungen mit Funktionen und Charakteristika von mathematischen Begründungen und Beweisen, aber auch sowohl auf normativer als auch auf deskriptiver Ebene mit Themen wie dem Beweisbedürfnis von Lernenden im Schulalter (u.a. Fritzlar, 2011; Betzold, 2008; Stein 1999; Schwarzkopf, 2000) und im Studienalter (u.a. Healy & Hoyles, 1998), dem Beweisverständnis von Lernenden (u.a. Beitlich & Reiss, 2014; Mejia-Ramos & Inglis, 2009; Bauer et al., 2022), der Beweiskompetenz (u.a. Krieger & Winter, 2015; Moore, 1994; Neuhaus-Eckhardt & Rach, 2018; Neuhaus-Eckhardt, 2022) und mit Beweisprozessen und Herangehensweisen (u.a. Kirsten, 2021; Boero, 1999; Stein, 1986; Kempen, 2013;2019; Meyer & Sommerhoff, 2020). Es wird sowohl in der hochschuldidaktischen Praxis als auch explizit in verschiedenen Untersuchungen deutlich, dass das mathematische *Begründen* in verschiedenen Erscheinungsformen (Quarfoot & Rabin, 2022; Baker, 1996) für Lernende aller Altersstufen eine große Herausforderung bedeutet (Reiss & Ufer, 2009; Ufer et al., 2009; Ottinger et al., 2016). Die Beweiskompetenz wird damit auch Ausgangspunkt für die Gestaltung und die Evaluation von Unterstützungsangeboten für Studierende (Bauer et al., 2021; Moore, 1994; Kempen, 2019; Kempen & Biehler, 2021; Grieser, 2016; Beyer et al., 2023; Bescherer & Hoffkamp, 2022). Dabei scheint die Betrachtung der Beweiskompetenz und die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten immer Ausgangspunkt und Motivation für die Untersuchung von Prozessen zu sein (u.a. Kirsten, 2021). So wird auch bei den Studierenden des Moduls ‚Mathematisches Professionswissen I‘ das *Begründen* als herausfordernd wahrgenommen und bietet den Anknüpfungspunkt für die hier dargestellte Untersuchung. Im Zusammenhang mit den für das Erkenntnisinteresse relevanten Prozessen und Vorgehensweisen von Lernenden lassen sich in der bereits existierenden Literatur zwei Richtungen ausmachen: 1) eine Prozessperspektive und 2) eine typenorientierte Perspektive. *Begründen* und *Beweisen* wird in 1) als Problemlöseprozess betrachtet. Die Aufforderung eine mathematische Aussage zu begründen wird zum *Problem*, also zum Ausgangszustand, der in einen

KAPITEL 1. EINORDNUNG DES ERKENNTNISINTERESSES IN DEN FORSCHUNGSKONTEXT

Zielzustand überführt werden soll. Mögliche Vorgehensweisen ergeben sich hier besonders aus kognitionspsychologischen Ansätzen zur Analyse von Aufgabebearbeitungsprozessen. *Begründen* und *Beweisen* im mathematischen Kontext wird in 2) aus begründungstyporientierter Perspektive anhand der Nutzung von Darstellungen und Denkrichtungen bzw. Arten des logischen Schließens in Typen ausdifferenziert. Aus den vielfältigen theoretischen Grundlagen (u.a. Brunner, 2013;2014; Harel & Sowder, 1998; Wittmann & Müller, 1988; Reid & Knipping, 2010; Padberg & Büchter, 2015) ergeben sich dabei besonders drei Arten, die sich unter folgenden Beschreibungen zusammenfassen lassen: *Begründen durch Beispiele*, *generisches Begründen* und *formal-deduktives Begründen*. In diesem Kontext werden auch Strukturen von Argumenten immer wieder in der Literatur beschrieben (u.a. Toulmin, 2003; Knipping, 2003; Reid & Knipping, 2010) und in das vorliegende Projekt einbezogen.

2 Erkenntnisleitendes Interesse und Forschungsfrage

In vorangegangenen Veröffentlichungen liegt zwar eine vielfältige Betrachtung von Prozessen und Charakteristika von Begründungstypen und -arten und auch zum Verlauf von Problemlöseprozessen vor, jedoch ist eine Verknüpfung zwischen beiden in einem theoretischen Rahmen explizit noch nicht sichtbar.

Die Relevanz des vorliegenden Erkenntnisinteresses ergibt sich damit aus verschiedenen Ansatzpunkten. Zunächst bieten die theoretischen Überlegungen zur Verbindung der zeitlichen bzw. chronosequentiellen Dimension und der typenorientierten Dimension innerhalb eines theoretischen Rahmens das Potenzial verschiedene Veröffentlichungen zum Begründungsprozess zu subsumieren. Dieser Rahmen bietet wiederum die Möglichkeit Vorgehensweisen auf Mikroebene zu betrachten, einzelne Denkschritte zu erfassen und die Literaturgrundlage zu ergänzen. Es können damit Feinheiten und Übergänge innerhalb von Vorgehensweisen sichtbar gemacht und in weiteren Untersuchungen Rückschlüsse auf Gesamtbearbeitungsprozesse und Zusammenhänge zwischen einzelnen Gedankenschritten gezogen werden. Durch die empirischen Betrachtungen im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit können ganz konkrete Aussagen zu den Vorgehensweisen der an der Untersuchung teilnehmenden Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschullehramt der FU Berlin getroffen werden. Aus diesen Ergebnissen wiederum lassen sich weitere didaktische Perspektiven für die zukünftige Gestaltung des Moduls einnehmen.

Um dieses Erkenntnisinteresse zu bearbeiten, wird folgende Forschungsfrage formuliert:

Welche Strategien werden genutzt, um eine allgemeingültige Begründung eines mathematischen Satzes im Bereich der Arithmetik zu erarbeiten?

Um diese Frage zu beantworten, werden folgende zwei Unterfragen formuliert:

- I) *Welche möglichen Strategien lassen sich aus Literatur und vorangegangenen Untersuchungen ableiten?*

KAPITEL 2. ERKENNTNISLEITENDES INTERESSE UND FORSCHUNGSFRAGE

- II) *Welche aus der Theorie abgeleiteten Strategien nutzen die Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik der FU Berlin nach dem Besuch des Moduls ‚Mathematisches Professionswissen I‘, welche nutzen sie nicht und welche Strategien lassen sich durch die empirische Betrachtung ergänzen?*

Das Ergebnis ist eine theoretisch und empirisch fundierte *Kollektion* von *Strategien*. Der Begriff *Kollektion* wird hier im Sinne einer systematischen und strukturierten Zusammenstellung verwendet und steht damit im Gegensatz zu einer *Sammlung*, die eher mit einer losen und zufälligen Zusammenstellung einzelner Elemente assoziiert wird.

3 Aufbau der Arbeit

Um sich mit den formulierten Forschungsfragen auseinander zu setzen, wurde die Arbeit in folgende Abschnitte gegliedert. Zunächst werden in Abschnitt II die relevanten bereits existierenden Grundlagen zusammengestellt. Innerhalb dieses Abschnitts werden zunächst Vorüberlegungen zu den hier verwendeten Grundbegriffen *Begründen*, *Argumentieren*, *Beweisen* (Kapitel 4) und *Strategien* (Kapitel 4.4) angestellt, ein Begriffsverständnis erarbeitet und Überlegungen zu Begründungs- und Beweisprozessen dargestellt (Kapitel 4.2 und 4.3).

Darauf aufbauend wird in der Folge zum einen der Begründungsprozess aus chronosequentieller Perspektive (Kapitel 5) und zum anderen aus Begründungstyperspektive (Kapitel 6 und 7) betrachtet. Diese Kapitel beschäftigen sich mit bereits veröffentlichten Überlegungen und Ergebnissen zum *Argumentieren*, *(logischen) Schließen*, *Denkrichtungen*, *Repräsentationsebenen* und *Begründungstypen*.

In Abschnitt III werden aus den im vorhergehenden Abschnitt darstellten Konzepten und Ergebnissen, potenzielle Strategien regelgeleitet entwickelt. Es entsteht eine Strategiekollektion, die geordnet nach den drei entwickelten Strategieeinheiten VERSTEHEN (Kapitel 12), ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN (Kapitel 13) und DISKURS (Kapitel 14) dargestellt wird.

Abschnitt IV nutzt diese Strategiekollektion als Basis für die empirische Betrachtung von Strategien von Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik der FU Berlin. Innerhalb dieses Abschnitts wird zunächst die Methode der Datenerhebung (Kapitel 17) erläutert, bevor die Datenerhebung in der hier vorliegenden Untersuchung (Kapitel 18) beschrieben wird. Anschließend wird in Kapitel 19 beschrieben, wie das Material für die folgende Datenauswertung mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse (Kapitel 20) vorbereitet wird. Als Abschluss dieses Abschnitts werden die Strategien auf Basis dieser Datenauswertungsmethode gegliedert in Strategien, die aus der Theorie abgeleitet und in den empirischen Betrachtungen ebenfalls vorkamen (Kapitel 21.1), in Strategien, die mit Hilfe der empirischen Untersuchung ergänzt werden konnten (Kapitel 21.2) und in Strategien, die zwar theoretisch abgeleitet aber empirisch nicht beobachtet werden konnten (Kapitel 21.3), dargestellt. Im letzten Abschnitt der Arbeit (Abschnitt V) werden die Ergebnisse noch einmal zusammenfassend erläutert und im Zu-

sammenhang diskutiert und anschließend Thesen formuliert (Kapitel 22.4), die die Hauptaussagen der Untersuchung zusammenfassen. Außerdem werden die Ergebnisse bezüglich ihrer Grenzen der Übertragbarkeit und Aussagekraft diskutiert und eingeordnet (Kapitel 23). Anschließend werden Rückschlüsse gezogen und ein Ausblick für die weitere Forschung (Kapitel 24.1) gegeben. Gleiches findet sich zur hochschuldidaktischen Praxis (Kapitel 24.2).

Teil II

Theoretischer Rahmen

Um *Strategien* von Studierenden beim mathematischen *Begründen* zu betrachten, muss zunächst die theoretische Grundlage zu Prozessen betrachtet werden. In diesem Abschnitt der Arbeit sollen für die Fragestellung relevante theoretische Grundlagen zusammengestellt werden. Prozesse, die beim mathematischen *Begründen* ablaufen, werden dabei unter verschiedenen Perspektiven und in unterschiedlichen aber auf das Erkenntnisinteresse der Arbeit bezogenen Zusammenhängen dargestellt. Der Abschnitt beginnt mit Vorüberlegungen zu Begrifflichkeiten und betrachtet das *Begründen* als Problemlöseprozess und Modellierungsprozess. Außerdem wird hier ein Verständnis des Begriffs *Strategie* für das vorliegende Erkenntnisinteresse erarbeitet. (Kapitel 4). Aus dieser Perspektive heraus werden Modelle betrachtet, die die intraindividuelle Phasierung von Begründungsprozessen möglich machen (Kapitel 5). Die Phase des Begründungsprozesses wird unter dem Blickwinkel von Begründungstypen stärker ausdifferenziert (Kapitel 7) und bietet die Möglichkeit einer interindividuellen Betrachtung der Vorgehensweisen. Um diese Perspektive weiter auszuschärfen werden Prozesse und Denkrichtungen während des mathematischen *Begründens* näher betrachtet (Kapitel 6). Aufbauend auf der typenorientierten Betrachtung von Begründungsprozessen wird anschließend der Aspekt der Repräsentationsebene in den Fokus genommen (Kapitel 8). Grundsätzlich wird angenommen, dass auch metakognitive *Strategien* am Begründungsprozess beteiligt sind. Mögliche Prozesse werden in Kapitel 9 beschrieben.

4 Überlegungen zu den Grundbegriffen der Arbeit: Begründen und Strategien

Die für die vorliegende Arbeit relevanten Begriffe und Konzepte finden sich in der Literatur aus verschiedenen Blickwinkeln verschiedener Bezugsdisziplinen. So sind *Begründen*, *Argumentieren* und *Beweisen* keine Begrifflichkeiten, die ausschließlich in der Mathematik oder der Mathematikdidaktik Verwendung finden. Sie sind vielmehr sowohl Alltagsbegriffe als auch Termini, die in einer Vielzahl von verschiedenen Wissenschaften zur Beschreibung bestimmter Prozesse genutzt werden. In diesem Kapitel werden die Begrifflichkeiten *Begründen*, *Beweisen* und *Argumentieren* im Kontext der Mathematikdidaktik näher betrachtet und deren Verhältnis zueinander geklärt. Dazu wird zuerst ein Begriffsverständnis erarbeitet (Kapitel 4). *Begründen* wird in der Mathematikdidaktik auch als Problemlöseprozess unter der Beteiligung von Modellierungsprozessen betrachtet. An diesen Vorgängen beteiligte Prozesse werden in Kapitel 4.2 bzw. Kapitel 4.3 näher betrachtet und in ihrem Zusammenhang dargestellt. Anschließend wird erklärt was in der vorliegenden Arbeit unter dem Begriff der *Strategie* gefasst wird (Kapitel 4.4), um das Erkenntnisinteresse zu fokussieren.

4.1 Beweisen, Begründen und Argumentieren im Kontext der Mathematik(didaktik) - Klärung der Begriffe und deren Verhältnisse zueinander

Im Kontext der Mathematikdidaktik, ausgehend von der Fachwissenschaft der Mathematik, werden die drei Begriffe *Begründen*, *Beweisen* und *Argumentieren* genutzt, um mentale Prozesse des Schlussfolgerns zu beschreiben. Die Verwendung dieser Begriffe erfolgt nicht einheitlich, so dass eine Einordnung in den mathematikdidaktischen Kontext und eine genauere Betrachtung der Beziehungen untereinander erfolgen soll. Es ist der Literatur zu entnehmen,

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

dass die Begriffe *Begründen*, *Beweisen* und *Argumentieren* oft mit verschiedenen Bedeutungen und nicht stringent verwendet werden und eine Bekanntheit oft bei der Leserschaft vorausgesetzt wird. Aus grammatikalischer Perspektive lässt sich aus der Wahl der Wortart sowohl zwischen einer ergebnisorientierten als auch einer prozessorientierten Perspektive unterscheiden. Es wird der *Beweis* vom *Beweisen*, die *Begründung* vom *Begründen* und das *Argument* vom *Argumentieren* abgegrenzt. Differenziert werden kann diese Betrachtung zu den zugehörigen Substantiven, die eher ein Ergebnis, also eine *Begründung*, einen *Beweis* oder ein *Argument* betrachten. Da im vorliegenden Projekt besonders das Individuum und dessen *Strategien* bzw. mentalen Aktivitäten im Fokus stehen, wird in der vorliegenden Arbeit auch das Gerundium genutzt.

Der *Beweis* und die zugehörige Aktivität des *Beweisens* ist eine grundlegende Tätigkeit der Fachmathematik und bietet damit auch die Grundlage für didaktische Entscheidungen an Schule und Hochschule. Der mathematische Beweis erscheint als ein universeller und exemplarischer Beweistyp, als das Herzstück der Mathematik (Healey & Hoyles, 1998) bzw. das konstituierende Element, welches aber auch in anderen Kontexten Anwendung findet, in dem Entscheidungen getroffen werden (Fawcett, 1938), als ein Werkzeug, das in der Mathematik gebraucht wird (Hanna & Janke, 1996), seine Bedeutung nur durch seine Anwendung erlangt (Mariotti, 2006) oder nur in der Mathematik als autonome Wissenschaft verwendet und zu einer der Mathematik innewohnende Komponente wird. Stylianides (2007) versteht unter einem Beweis etwas, was fundamental ist für das Wissen über Mathematik und das Mathematiktreiben und sind damit die Grundlage für mathematisches Verständnis und essentiell für die Entwicklung und Kommunikation des mathematischen Wissens (Zitat im Original, S.289: „Fundamental to doing and knowing mathematics; they are basis of mathematical understanding and essential in developing, establishing communicating mathematical knowledge“). „Proofs are the mathematician’s way to display the mathematical machinery for solving problems and to justify that proposed solution to a problem is indeed a solution“ (Rav, 1999, S.13). Verglichen werden kann das *Beweisen* auch mit Verkehrswegen, die Axiome, Definitionen oder auch Theoreme als ‚spots‘ in the ‚mathescapes‘ (Manin, 1992) oder auch ‚bus stops‘ (Rav, 1999), ‚local attractions‘ (Manin, 1992) oder Abkürzungen (Manin, 1992). Trotz der großen Bedeutung der Beweise für die Mathematik ist bei genauerer Betrachtung keine konkrete allgemeingültige Beschreibung dessen, was einen Beweis als Produkt oder auch das *Beweisen* als Prozess ausmacht und wann er als akzeptiert gilt (Hanna & Jahnke, 1996) zu finden. Um den Begriff *Beweisen* zu charakterisieren kann sowohl eine Produkt- als auch eine Prozessperspektive eingenommen werden. Besonders in der Fachmathematik steht die Produktperspektive im Vordergrund, wo hingegen didaktische oder auch psy-

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

chologische Überlegungen eher den Prozesscharakter und damit verbundene Aktivitäten des Individuums betonen. So lässt sich auf der Seite der deutschen Mathematikervereinigung lesen, dass der Beweis aus Produktperspektive mit einem Haus verglichen wird, dessen Fundament die Axiome sind, die als wahr angenommen werden. Aufbauend auf diesen Grundannahmen werden mathematische Sätze formuliert, die bewiesen werden müssen (Einsiedler & Wiesner, 2022).

Es wird damit das deduktive Moment im Beweisprozess betont. Durch die zentrale Rolle des Beweisens in der Fachmathematik, wird das Verstehen und Erlernen dieser Tätigkeit einschließlich aller beteiligten mentalen Prozesse zum Bestandteil einer *mathematical literacy* (Healey & Hoyles, 1998). Eine Prozessperspektive auf den Beweis wird eher in didaktischer Literatur eingenommen um das *Beweisen* und zugehörige Momente, Entwicklungsstufen und Aktivitäten der Lernenden genauer zu beschreiben, sie zu unterstützen und die Kompetenz des Beweisens zu fördern. Zum Teil werden beide Perspektiven, die des Produktes und des Prozesses nicht trennscharf betrachtet, sondern fließen eher ineinander. Grundsätzlich findet sich in der Literatur eher die Beschreibung von verschiedenen Charakteristika, die einen Beweis ausmachen. Als charakteristisch wird oft die deduktive Herleitung bzw. die deduktive Methode des logischen Schließens beschrieben. Der zentrale Vorgang des Beweisens folgert „eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal-deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen und Definitionen“ (Meyer, 2007) abzuleiten. So wird der Beweis als formal-deduktive Möglichkeit angegeben, im spezifischen Fachkontext der Mathematik Behauptungen bzw. Sätze zu verifizieren und dazu nur bereits bewiesene oder als wahr anerkannte Argumente zu nutzen. Daraus ergibt sich die Sichtweise, dass „unter einem mathematischen Beweis [...] die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln“ (Jahnke & Ufer, 2015) verstanden wird. Der mathematische Beweis wird im Idealfall zu einer endlichen Kette von Deduktionen (Meyer, 2007).

Neben der formal-deduktiven Vorgehensweise wird oft die *formale Strenge* als zweites zentrales Charakteristika in der Literatur benannt (Grundey, 2015). Strenge wird dabei zum Kriterium für die Korrektheit und die Gültigkeit mathematischer Beweise (Kempen, 2019) und beschreibt „das Festhalten am zuvor aufgestellten bzw. konstruierten mathematischen Modell [...], innerhalb dessen nur zugrunde gelegte Axiome und bereits bewiesene Sachverhalte als Argumente und logisch korrekte Schlüsse verwendet werden“ (Kempen, 2019, S.39). Besonders in didaktischen Kontexten wird aber von der formalen Strenge Abstand genommen, um nicht der Formalität des Beweisens zu viel Bedeutung beizumessen. Es wird insgesamt auch bezweifelt, dass diese kalkülorientierten,

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

deduktiven Herleitungen, die einer formalen Strenge unterworfen sind, wirklich der mathematischen Praxis entsprechen und ob nicht das soziale Kriterium innerhalb der mathematischen Gemeinschaft zentraler für die Akzeptanz eines Beweises ist (Lakatos et al., 2012).

Was nun aber als akzeptabel zu bezeichnen ist und aus welchen Gründen Beweise in der Gemeinschaft akzeptiert werden, wird zwar auch in aktueller mathematikphilosophischer Literatur diskutiert (Aberdein & Dove, 2013; Detlefsen, 1992), soll aber hier nicht weiter vertieft werden. Neben der deduktiven Herleitung und dem Charakteristikum der formalen Strenge wird der Beweis bei Stylianides und Ball (2008) als ein mathematisches Argument beschrieben, welches die folgenden Merkmale aufweist: 1) Es werden Argumente genutzt, die von der Community akzeptiert werden, wahr sind und keine weitere Verifikation brauchen, 2) es werden Begründungsformen genutzt, die valide, der Community bekannt oder in ihrer konzeptuellen Reichweite liegen, und 3) die Begründung wird durch Formen von Ausdrücken kommuniziert, die angemessen sind. Charakteristisch erscheinen demnach für einen Beweis die Bestandteile *Axiome* oder *Sätze*, die *Schlussregel* und ein *Symbolsystem*, welches durch soziokulturelle Aushandlungsprozesse innerhalb der Community genutzt wird.

In didaktischen Settings werden demnach die Momente der Konstruktion und Art des Arguments, die Schlussweisen bzw. die Beweistypen aber auch die Darstellungsmittel bedeutsam (Kempen, 2019). Wird das *Beweisen* als Prozess betrachtet, so wird diese Tätigkeit oft mit deduktiven aber auch mit induktiven oder abduktiven Denkrichtungen in Verbindung gebracht (Brunner, 2013;2014). Stylianides und Ball (2008) ergänzen in ihren Ausführungen ein exploratives Moment und betonen neben der Konstruktion von Argumenten den Prozess, der als empirische Exploration inklusive des Anstellens von Vermutungen, des Schlussfolgerns gilt, um u.a. Ideen für die Formulierung von Argumenten zu generieren (Zitat im Original, S.308f: „empirical explorations to generate conjectures, reasoning by analogy to develop possible ideas for the formulation of arguments, etc.“)

Neben den benannten Momenten formuliert Balacheff (1988) die *Rationalität* als Grundlage des Beweisens. Diese Rationalität besteht aus den Tätigkeiten *informieren*, *vermuten*, *diskutieren* und *argumentieren*, die sowohl explizit als auch formalisiert oder sowohl individuell als auch kollektiv ein Kriteriensystem für Entscheidungsfindungen ergeben.

In verschiedenen didaktischen Zusammenhängen, wie beispielsweise methodischen Betrachtungen oder auch in Bildungsstandards und Curricula wird der Begriff *Begründen* in Verbindung mit dem *Argumentieren* dem des *Beweisens* vorgezogen (Kempen, 2019). Generell kann eine Begründung betrachtet werden, als eine Darlegung von Gründen bzw. Argumenten. Eine

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

allgemeingültige Begründung ist demnach eine Begründung, die für jeden Fall einer bestimmten Klasse von Situationen oder Eigenschaften gilt. Um den Begriff des *Begründens* bzw. der Begründung im Kontext der Mathematikdidaktik genauer zu beschreiben, ist es notwendig ihn im Zusammenhang mit den beiden anderen Begriffen *Argumentieren* und *Beweisen* zu bringen. Dabei ist sowohl die Verwendung als auch die Beziehung zwischen den Begriffen je nach Zugang eher divers.

Besonders in neueren mathematikdidaktischen Kontexten wird der Begriff *Begründen* zentral, wenn Prozesse bei mathematischen Beweisaufgaben von Lernenden betrachtet werden sollen, wobei auch das Produkt *Begründung* in didaktischer Literatur genutzt wird, um das Resultat eines Prozesses zu beschreiben. Das *Begründen* thematisiert den Ablauf und fokussiert eher die Aktivitäten des Individuums, wohingegen die Begründung als zugehöriges Substantiv eher das Ergebnis dieses Vorgangs beschreibt. Um für den hier vorliegenden Kontext ein Verständnis zu erarbeiten, soll die Systematisierung des Begriffspaares *Begründen* und *Argumentieren* von Gerloff (2021) als Ausgangspunkt genutzt werden, und die Ausführungen von Brunner (2013;2014) als Möglichkeit das Verhältnis von *Beweisen* und *Argumentieren* zu klären. Genau, wie für die einzelnen Begriffe und ihrer Verwendung kein Konsens besteht, existieren auch für ihr Verhältnis verschiedene Interpretationen.

Gerloff (2021) systematisiert in ihren Ausführungen die in der Literatur befindlichen Diskussionen besonders um das Verhältnis zwischen *Begründen* und *Argumentieren* und gibt damit einen Rahmen, der als Grundlage für die Perspektive im Projekt genutzt werden soll. Sie unterscheidet zwischen zwei verschiedenen Verhältnissen des Begriffspaares *Begründen* und *Argumentieren*: 1) *Teil-Ganzes-Relation* und 2) *Oberbegriff-Unterbegriffsrelation*. Die Beziehung zwischen *Argumentieren* und *Begründen* als eine Teil-Ganzes-Relation betrachtet, unterscheidet Gerloff (2021) zwischen *Argumentieren* als Teil von *Begründen* und damit das *Begründen* als „umfassendes Ganzes“ zum einen und *Begründen* als Teil des *Argumentierens* und damit *Argumentieren* als „umfassendes Ganzes“ zum anderen. Für ersteres benennt sie keine Positionen in der aktuellen Literatur. Für letzteres wird *Begründen* neben anderen Elementen ein Bestandteil des *Argumentierens*. Um Zugänge genauer zu betrachten, differenziert Gerloff (2021) an dieser Stelle zwischen *Begründen* als Lernziel des Argumentierens (u.a. Wittmann, 1981; Krauthausen, 1998; Winter, 1978), als Prozess des Argumentierens (z.B. Knipping, 2003; Reiss & Ufer, 2009) oder als Strukturelement desselben (u.a. Toulmin, 2003 und darauf aufbauende Untersuchungen, wie Knipping (2003) und führt jeweils Positionen aus bereits existierender Literatur an.

Das Verhältnis zwischen *Begründen* und *Argumentieren* als Oberbegriff-Unterbegriffsrelation betrachtet, unterscheidet Gerloff (2021) ebenfalls zwei

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

Positionen. Das *Argumentieren* als Oberbegriff für das *Begründen* (u.a. Büchter & Leuders, 2023; Hefendehl-Hebeker & Hußmann, 2010) und das *Begründen* als Oberbegriff für das *Argumentieren* (u.a. Brunner, 2013;2014; Kratz, 1978). In der ersten Position kann *Begründen* zu einem spezifischen Fall des *Argumentierens* und damit entweder zum *Begründen* als spezifisches *Argumentieren* oder das *Begründen* zu einem spezifischen Fall (mögliches Ergebnis) des *Argumentierens* werden (Gerloff, 2021). In der zweiten Position wird das *Argumentieren* eine mögliche Erscheinungsform des *Begründens* neben anderen Formen. Dieser Prozess wird durch definierte Bedingungen von anderen Prozessen, die ebenfalls dem Begründen zuzuordnen sind, abgegrenzt. Wird die Synthese von Gerloff (2021) erweitert, so müssten sich neben dem *Argumentieren* noch weitere Begründungsformen (Beckmann, 1997) außer der des *Argumentierens* benennen und beschreiben lassen. Genutzt werden können für diese Erweiterung die Darstellungen der Begriffsverhältnisse nach Brunner (2013;2014). Brunner (2013;2014) beschreibt das Verhältnis von *Begründen* und *Argumentieren* und *Beweisen* als ein Kontinuum. Dabei wird *Begründen* zu einem Oberbegriff für die Darlegung von Gründen. Subsumiert werden darunter verschiedene Prozesse, die wiederum zu *Beweistypen*, *Darstellungsebenen*, *Arten von Begriffen*, *Begründungsarten* und der *Offenheit der genutzten Argumente* zugeordnet werden.

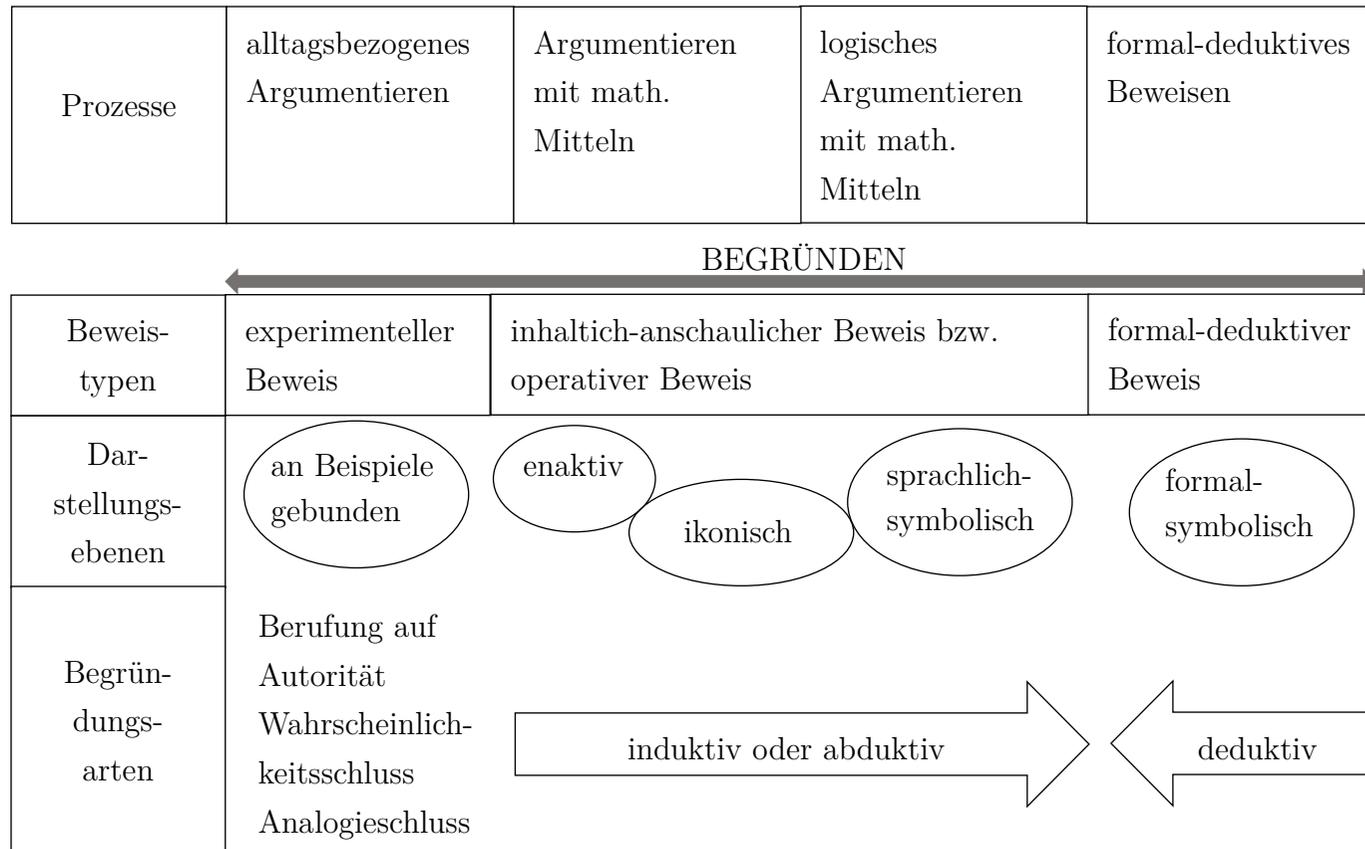


Abbildung 4.1: Verhältnis von Prozessen, Beweistypen, Darstellungsebenen und Begründungsarten in Anlehnung an Brunner (2013;2014)

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

Brunner (2013;2014) betrachtet, wie in Abbildung 4.1 sichtbar wird, den Prozess des *Begründens* aus verschiedenen Perspektiven und entwickelt darauf aufbauend die Ebenen *Prozesse*, *Beweistypen*, *Darstellungsebenen*, *Begriffe*, *Begründungsarten* und *Argumente*. Für die hier dargestellte Untersuchung sind besonders die Ebenen *Prozesse*, *Beweistypen*, *Darstellungsebenen* und *Begründungsarten* relevant, da in der vorliegenden Arbeit Vorgehensweisen mit Prozesscharakter betrachtet werden sollen. In Kapitel 10 in Abbildung 10.1 wird daher eine adaptierte Variante des Modells als Zusammenfassung der hier dargestellten Überlegungen angeboten. Außerdem wird im Folgenden von *Begründungstypen* anstatt *Beweistypen* in Anlehnung an die hier genutzte Begriffssystematisierung von Gerloff (2021) und von *Denkrichtungen* statt *Begründungsarten* in Anlehnung an die Ausführungen von Brunner (2014) gesprochen, um die Begriffe auch auf der sprachlichen Ebene deutlicher voneinander zu trennen.

Auf der Ebene der Prozesse wird, wie in Abbildung 4.1 sichtbar wird zwischen dem *alltagsbezogenen Argumentieren* auf der einen Seite des Kontinuums und zwischen dem *formal-deduktiven Beweisen* auf der anderen Seite des Kontinuums unterschieden. Dazwischen liegen die Prozesse *Argumentieren mit mathematischen Mitteln* und *logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln*. Dabei werden *Beweisen* und *Argumentieren* als spezifische Formen des *Begründens* verstanden (Brunner, 2014; Duval, 1991). Es wird weiterhin auf der Ebene der *Beweistypen* zwischen dem *experimentellen Beweisen*, dem *inhaltlich-anschaulichen bzw. operativen Beweis* und dem *formal-deduktiven Beweis* unterschieden. In späteren Kapiteln der Arbeit werden die Begrifflichkeiten angepasst. So wird von *Begründung* bzw. von *Begründen* statt *Beweis* oder *Beweisen* gesprochen, wenn alle Begründungsformen (also Argumentieren und Beweisen) einbezogen werden. Des Weiteren werden die Darstellungsebenen angepasst und statt von *Begründungstypen* von *Denkrichtungen* (Kapitel 6) gesprochen.

Neben dieser eher erscheinungsformorientierten bzw. typenorientierten Betrachtung von mathematischen Begründungen finden sich in der Literatur auch Perspektiven, die den Prozess des *Begründens* eher chronosequentiell beleuchten und damit Abläufe und Etappen innerhalb des Prozesses eines Individuums sichtbar machen. Grundlage für diese Perspektiven sind meist Erkenntnisse aus der Problemlöseforschung. Diese Betrachtungen ermöglichen es die chronosequentielle Betrachtung der Prozesse (Kapitel 5) abzuleiten.

4.2 Mathematisches Begründen als Problemlöseprozess

Werden in der Mathematikdidaktik Aufgabenbearbeitungsprozesse betrachtet, so werden oft Zugänge aus dem Bereich der Kognitionspsychologie genutzt und für die mathematikdidaktische Forschung und Praxis nutzbar gemacht. In der Kognitionspsychologie und der Mathematikdidaktik wird der Begriff des Problemlösens weitestgehend einheitlich verwendet. Problemlösen bedeutet das Beseitigen eines Hindernisses oder das Schließen einer Lücke in einem Handlungsplan durch bewusste kognitive Aktivitäten, die das Erreichen eines beabsichtigten Ziels möglich machen sollen. „To solve a problem is to find a way where no way is known off-hand, to find a way out of a difficulty, to find a way around an obstacle, to attain a desired end, what is not immediately attainable, by appropriate means“ (Polya, 1949, S.1).

Im Zusammenhang mit dem Problemlösen als Prozess werden besonders drei Elemente benannt: der *Ausgangszustand*, das *Ziel* und die *Hindernisse* (Duncker, 1935; Mayer, 1979; Dörner, 1974;1987; Lack, 2010). Zwischen dem Anfangs- und dem Zielzustand ist eine gewisse (personenspezifische) *Barriere*, welche nicht durch ein Standardverfahren genommen (Heinrich et al., 2015) aber durch ein Zusammenspiel von geistiger Beweglichkeit, Fachwissen und Methodenwissen überwunden werden kann (Martin, 2018). Die Barriere hat das Ziel eine einfache Lösung zu verhindern.

Ein *Problem* bezeichnet dabei eine subjektiv schwierige Aufgabe, bei der der Ausgangszustand in einen Zielzustand überführt werden soll (Martin, 2018). Abgegrenzt wird eine *Problemlöseaufgabe* von einer *Routineaufgabe*, die, wie beispielsweise das Lösen einer Gleichung oder anderer algorithmisch lösbarer Aufgaben, das Nutzen eines bereits bekannten Lösungsweges fordert (Pehkonen, 2001). Dementsprechend ist der Lösungsweg einer Problemlöseaufgabe dem Lernenden weitgehend unbekannt. In der Literatur finden sich verschiedene Arten von Problemen und unterschiedliche Kategorisierungsvorschläge dieser (Lack, 2010). Interessant für die vorliegenden Betrachtungen sind besonders die Kategorisierungen von Polya (1949). Er unterscheidet bezüglich Mathematikaufgaben zwischen *Bestimmungsaufgaben* und *Beweis-aufgaben*. Ersteres sind Aufgaben, bei denen eine Unbekannte ermittelt wird, wie beispielsweise in einer Gleichung. Eine Beweisaufgabe wird bearbeitet, indem ein gegebener Zielzustand begründet oder eben widerlegt werden muss (Polya, 1949). Es muss durch logische Schlüsse gezeigt werden, dass eine Behauptung wahr oder falsch ist. Die Annahme und der logische Schluss des Satzes werden zu den Hauptbestandteilen. Begründungsaufgaben können als spezielle zu lösende Problemstellungen betrachtet werden (Brunner,

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

2013). Diesem Gedanken weiter folgend sind demnach an Beweis- und Begründungsprozessen im mathematischen Kontext auch Problemlöseprozesse beteiligt.

Das Bearbeiten einer Begründungsaufgabe wird dementsprechend als Problemlöseaufgabe kategorisiert, deren Lösung nicht durch bekannte Verfahren oder Algorithmen zu finden ist, sondern mit Hilfe von bestimmten Aktivitäten die zwischen dem Anfangs- und dem Endzustand liegende Barriere überwunden werden soll (Schoenfeld, 1985; Rott, 2014;2018).

Um den Problemlöseprozess genauer zu betrachten, werden bei verschiedenen Publizierenden Modelle angeboten, die Abläufe genauer beschreiben und Phasen charakterisieren. Unterschieden werden kann dabei zwischen Modellen, die die äußere Struktur zum Beispiel den zeitlichen Ablauf solcher Prozesse beschreiben und zwischen Modellen, die die innere Struktur wie beispielsweise kognitive Prozesse, Heuristiken oder Beliefs fokussieren (Rott, 2014; Philipp, 2012). Modelle der äußeren Struktur können unterschieden werden in so genannte deskriptive Modelle, die zur Beschreibung und Analyse von empirisch vorliegenden Daten dienen oder normativen Modellen, die als pädagogisches Hilfsmittel für ‚interessierte‘ Lernende (insbesondere Lernende im Schul- und Studienalter) idealisierte Hinweise und Vorgaben für die Vorgehensweise geben (Rott, 2014; Fernandez et al. 1994; Martin, 2018; Tietze et al., 2000).

In der Literatur lassen sich zwei Grundtypen dieser sich ergebenden Problemlösephasenmodelle unterscheiden (Neuhaus, 2002), in die sich auch moderne Ansätze wiederum einordnen lassen. Das Modell von Dewey (2002) betont dabei das logische Denken während Wallas (1926) eher den intuitiven und kreativen Aspekt des Prozesses fokussiert (Rott, 2014). In der Mathematikdidaktik dient für die Betrachtung von Problemlöseprozessen und damit auch für die Betrachtung von Beweis- bzw. Begründungsverlaufsprozessen oft das eher normative Modell von Polya (1946) als Grundlage, welches auf den von Dewey (2002) formulierten Phasen beruht. In Anlehnung an die Systematisierung von Modellen zur Beschreibung der äußeren Struktur von Problemlöseprozessen von Rott (2014), die die verschiedenen Ansätze vergleicht, ergeben sich drei Phasen. Die Tabelle 4.1 soll einen dazu Überblick geben.

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

Tabelle 4.1: Darstellung der drei Phasen nach Rott (2014) und darunter subsumierte Ansätze

Phase	subsumierte Ansätze
Verstehen	Polya (1949): Verstehen der Aufgabe; Schoenfeld (1985): Analysis; Mason et al. (2011): Entry; Yimer & Ellerton (2010): Engagement; Artz & Armour-Thomas (1992): Understanding and Analyzing
Planung und Ausführung	Polya (1949): Ausdenken des Plans und Ausführen des Plans; Wilson et al. (1993): Making a Plan und Carrying out the Plan; Yimer & Ellerton (2010): Transformation-Formulation und Implementation (Metakognitive Tätigkeiten); Schoenfeld (1985): Exploration and Planning; Mason et al. (2011): Attack-Phase
Ausklang	Polya (1949): Rückschau; Schoenfeld (1985): Verification, Wilson et al. (1993): Looking Back; Mason et al. (2011): Review; Yimer & Ellerton (2010): Evaluation und Internalization

Vor allem das eher normative Modell von Polya (1949) suggeriert eine Linearität, die deskriptiv so nicht beobachtet werden kann (Rott, 2014). Deshalb ergänzen Wilson et al. (1993) aber auch Yimer und Ellerton (2010) in ihren Ausführungen die Möglichkeit von Schleifen, Übergängen und Rückschritten. Auch für die vorliegende Arbeit und die Entwicklung der *Strategien* aus der Literatur (Abschnitt III) soll eine Linearität explizit nicht normativ vorgegeben werden.

Aus der Betrachtung des Begründungsprozesses bezüglich der äußeren Struktur ergeben sich Phasenmodelle, wie sie in Kapitel 5 genauer betrachtet werden.

Neben deskriptiven und normativen Problemlöseprozessmodellen, die die Grundlage für Implikationen in mathematischen Begründungsprozessmodellen (Kapitel 5) bieten, sollen auch Modelle betrachtet werden, die eher die innere Struktur, also die kognitiven Aktivitäten während des Problemlöseprozesses fokussieren. Modelle, die die innere Struktur beschreiben, machen kognitive Prozesse durch beispielsweise die Aufforderung ‚laut zu denken‘ indirekt zugänglich. Heinze (2007) fasst unter den Modellen der inneren Struktur Betrachtungen des Prozesses unter *Problemlöseprozesse aus kognitiver Sicht* zusammen. In diesem Zusammenhang legen vor allem Publizierende, wie Rubinstein (1972) und Leontjew (1978) dem Problemlöseprozess eine Charak-

terisierung des Denkens als geistigen Prozess (geistige Tätigkeit) zugrunde (Heinze, 2007) (Kapitel 6).

4.3 Mathematisches Begründen als Modellierungsprozess

Die Auffassung, dass der gesamte Problemlöseprozess eine Form des Modellierens ist, fasst Problemlösen als eine Form des mathematischen Modellierens, „bei der ein bestimmter Modellbildungsprozess bei der Bearbeitung des Problems durchlaufen wird“ (Brunner, 2013, S.70). So kann der Prozess des mathematischen *Begründens* als Problemlöseprozess auch als Modellierungsprozess betrachtet werden. Niss (2005) unterscheidet dabei zwischen der *Begründung im innermathematischen Kontext (Beweis)* und im *außermathematischen Kontext*, wie beim Transformieren von realweltlichen Sachverhalten in mathematische Sprache und Form. In dem Kontext der vorliegenden Arbeit wird das Modellieren in Anlehnung an Brunner (2013) eher als Modellieren im innermathematischen Kontext begriffen. Das heißt, dass die Modellierung vollständig innerhalb der Mathematik stattfindet.

Innerhalb des Ablaufs einer mathematischen Begründung gibt es zwei Aspekte, in denen innermathematisches Modellieren die Grundlage für die Lösung des Problems bietet.

Zunächst kann das Modellieren als Prozess des Verstehens, also im Aufbau des Situationsmodells verstanden werden. Die Basis für diese Überlegung bildet das *SituationsProblemLöser (SPS)* Modell nach Reusser (1989). Dieses Modell ist keine allgemeine Problemlöseprozessstheorie, sondern ein spezifisch auf das Textverstehen als Problemlöseprozess adaptiertes kognitives Simulationsmodell, welches damit eine „Rahmentheorie der Mathematisierung und ein psychologisch-didaktisches Prozessmodell zum Verstehen und Lösen mathematischer Text- und Situationsaufgaben“ (Reusser, 1989, S.84) bietet. Reusser (1989) beschreibt einen spezifischen Ablauf des Verstehens, Lösens und Mathematisierens von Textaufgaben. Dabei wird die gestellte Aufgabe bzw. das Verstehen dieser zum zu lösenden Problem erklärt. Das Modellieren wird hier zum Verstehen der Aufgaben oder des Aufgabentextes bzw. der Analyse der Situation und im Sinne von Ellis (2007) als eine Art Übersetzungsprozess verstanden. Das innermathematische Modellieren und das damit verbundene Erarbeiten des Situationsmodells wird in Begründungssituationen über das Nutzen von mathematischen Konzepten auf verschiedenen Darstellungsebenen erreicht. Im Modell nach Reusser (1989) ist das Verstehen der gegebenen Situation, die sich innerhalb der Aufgabenstellung bzw. beim mathematischen

Begründen und *Beweisen* innerhalb des zu begründenden Satzes befindet, als zentrales Element für die Mathematisierung des *Problemmodells* zu begreifen. Daraus abgeleitet werden Elemente aus diesem Modell für die Betrachtung des Verstehensprozesses am Beginn einer mathematischen Begründungsaufgabe für die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Betrachtungen relevant.

Das Modellieren kann aber weiterhin auch im Beweisprozess an sich gefunden werden. Das Problemmodell (Reusser, 1989) oder das *Realmodell* (Blum et al., 2004), also das zu lösende Problem der Aufgabe, kann als innermathematischer Sachverhalt betrachtet werden, der innerhalb der zu beweisenden Aussage angelegt ist und dessen Übertragung und Mathematisierung in einem mathematischen Problemmodell - die Beweisidee - mündet (Brunner, 2013). Dabei ist der Beweisprozess aus fachmathematischer Sicht in so fern vergleichbar mit dem Modellieren, als die Begründenden relevante Informationen auswählen, Prämissen wählen, vorläufige Schlussfolgerungen ziehen, mögliche Prämissen überarbeiten und diesen Prozess in verschiedenen Schleifen durchgehen (Hanna, 2005). Das Herausarbeiten der Allgemeingültigkeit beginnt in einer fehlenden Gewissheit über die Gültigkeit der Ausgangslage und führt über einen Modellierungsprozess zwischen Behauptung und Voraussetzung und das Herausarbeiten der zentralen inhaltlichen Elemente der Behauptung zum *Erproben*, *Variieren* und *Optimieren* von verschiedenen Lösungsideen hin zu einer zielführenden Lösungsidee (Duncker, 1935; Brunner, 2013). Diese wird dann in eine Argumentationskette gefasst und führt zu einer gültigen Schlussfolgerung und damit zur Klärung der Gültigkeit des behaupteten Zusammenhangs (Brunner, 2013).

Im hier vorliegenden Kontext wird das Modellieren hauptsächlich für die Ableitung von *Strategien* des Verstehens eines gegebenen Problems und der damit verbundenen Erarbeitung eines Situationsmodells als Grundlage genutzt. Prozesse wie das *Strukturieren*, *Mathematisieren* und *mathematisches Arbeiten*, *Interpretieren* und *Validieren* (Blum et al., 2004) in Prozess des Erstellens der Begründung nur implizit Eingang in die weiteren Betrachtungen finden.

4.4 Erarbeitung eines Strategiebegriffs für das vorliegende Erkenntnisinteresse

Strategie als Begriff wird in verschiedenen Zusammenhängen und fachlichen Kontexten verwendet, jedoch nicht überall definitorisch geklärt und abgegrenzt. Eine begriffliche Annäherung an den Terminus *Strategie* ist von vielfältigen Zugängen und verschiedenen Verständnissen sowohl im Umfeld wissenschaftli-

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

cher als auch alltagssprachlicher Diskussionen geprägt. Der Begriff *Strategie* ist in Ausführungen, empirischen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen zum Thema Lernen und Kognition in vielfältiger Weise genutzt und auf unterschiedliche Themenfelder bezogen. Besonders die Betrachtung von Lernenden rückt dabei sowohl in didaktischer Literatur als auch psychologischer Grundlagen- und Strukturierungsliteratur in den Mittelpunkt (Friedrich & Mandl, 1992). Jedoch ist zu bemerken, dass der Begriff *Strategie* oft auch nicht definiert wird (Schlager, 2020; Mizzi, 2018). Ebenso findet sich der Begriff im Forschungsfeld der Mathematikdidaktik und ist auch hier Bestandteil empirischer Untersuchungen und theoretischer Überlegungen, um die beim lernenden Individuum ablaufenden Prozesse genauer zu beschreiben und für didaktische Settings nutzbar zu machen. Dabei kursieren allerdings verschiedene Sichtweisen, was genau eine *Strategie* ausmacht (Schlager, 2020; Bjorklund, 2015). Oft bedient sich die Didaktik und so auch die Mathematikdidaktik dabei Ansätzen aus der Kognitionspsychologie, welche sich mit mentalen Prozessen eines Menschen, wie *Aufmerksamkeit*, *Wahrnehmung*, *Denken*, *Erinnern*, *Verstehen* und *Problemlösen* beschäftigen (Myers, 2014).

Im Kontext des Bearbeitens oder/und Lösens von mathematischen Aufgaben finden sich in der Literatur verschiedene Perspektiven auf den Begriff der *Strategie*. Unterschieden werden kann hier beispielsweise, ohne den Anspruch auf eine vollständige Systematisierung dieses Forschungsfeldes zu erheben, auf Basis vorangegangener Untersuchungen zwischen *Lernstrategien* (u.a. Göller, 2020), *Problemlösestrategien* (u.a. Göller, 2020; Polya, 1949/1979; Brunner, 2013/2014; Lack, 2010; Martin, 2018; Söhling, 2017; Schoenfeld, 1985) oder auch *Bearbeitungsstrategien* (Schlager, 2020; Krämer et al., 2012; Deffner, 1989; Siegler & Jenkins, 1989). Als Lernstrategien werden dabei *Strategien* betrachtet, die der/die Lernende nutzt, um Mathematik zu lernen bzw. mathematische Sachverhalte zu verstehen (Göller, 2020). Als Lernstrategien werden dabei alle Gedanken und Verhaltensweisen gefasst, die die Lernenden aktivieren, um Motivation und Wissenserwerb zu steuern (Friedrich & Mandl, 1992). Da für die hier vorliegende Untersuchung allerdings nicht Lernprozesse genauer betrachtet werden sollen, rücken eher Ansätze, die die Aufgabenbearbeitung als Prozess in den Mittelpunkt rücken, in den Fokus. *Strategien* umfassen im hier vorliegenden Verständnis grundsätzlich ein Konglomerat aus verschiedenen kognitiven Aktivitäten, die während der Bearbeitung genutzt werden. Bjorklund (1990) bietet in einem Sammelband verschiedene Definitionen an, die nach *traditionellen*, *konservativen* und *liberalen* Näherungen an den Begriff kategorisiert werden (Bjorklund & Harnishfeger, 1990).

Aus der traditionellen Perspektive ist eine *Strategie* eine Komposition aus kognitiven Operationen. Sie sind also potenziell bewusste und kontrollierbare mentale Aktivitäten. Eine typische traditionelle Definition bietet Willatts

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

(1990) an und bezeichnet *Strategien* als strukturiertes Problemlöseverhalten, das auf ein Ziel ausgerichtet ist und betont damit das planvolle Moment und die Absicht das Ziel zu erreichen (Bjorklund & Harnishfeger, 1990).

Im konservativen Begriffsverständnis wird die *Zielorientierung*, die *Zielgerichtetheit* und *Absicht* als zentrale Merkmale einer *Strategie* verstanden (Bjorklund & Harnishfeger, 1990). Ansätze, die im konservativen Begriffsverständnis gefasst werden, betonen die *kognitive Anstrengung* als Merkmal einer *Strategie* (Garner, 1990).

Aus traditioneller und konservativer Perspektive (Bjorklund & Harnishfeger, 1990) sind *Strategien* *planvolle*, *zielorientierte* und *absichtliche* Aktivitäten (Garner, 1990; Bjorklund et al., 1990), die kognitiver Anstrengung bedürfen (Garner, 1990). Sie sind demnach *kontrollierbar*, *bewusst* und *verfolgen einen bestimmten Zweck* (Bjorklund et al., 1990; Flavell, 1985). Ausgeschlossen sind in diesen Ansätzen allerdings ungeplante Aktivitäten oder auch unbewusste und durch Übung automatisierte oder teilautomatisierte Handlungen.

Für die hier vorliegende Zielstellung, durch das *Laute Denken* kognitive Aktivitäten und Prozesse sichtbar zu machen und auch unreflektierte Vorgehensweisen zu erheben, erscheint es notwendig nicht nur zielführende und geplante Aktivitäten, wie in traditionellen und konservativen Ansätzen beschrieben, in den Blick zu nehmen, sondern das Strategieverständnis so zu erweitern, dass unbewusste und nicht absichtsvolle Aktivitäten inkludiert werden. Dazu wird der Begriff der *Strategie* auf ein liberales Verständnis (Bjorklund & Harnishfeger, 1990) erweitert. Damit wird eine *Strategie* im liberalen und damit im weiten Sinne als mental durchgeführte Aktivität definiert (Zitat im Original, Bjorklund & Harnishfeger, 1990, S.320: „how some task is performed mentally“).

Damit ist eine *Strategie* „any mental process or procedure in the stream of information-processing activities that serves a goal-related purpose“ (Ashcraft, 1990, S.203). Dabei wird in Anlehnung an Siegler und Jenkins (1989) als eine Vorgehensweise oder eine *Strategie* nicht die Gesamtstrategie zur Bearbeitung der Aufgabenstellung bezeichnet, sondern die Teilprozesse und damit die verschiedenen kognitiven Aktivitäten, die sichtbar werden. Unterschieden werden soll im vorliegenden Kontext nicht nach zielführenden und nicht zielführenden *Strategien*. Unter dem Begriff *Strategie* werden also sowohl *erfolgreiche* als auch *nicht erfolgreiche* Aktivitäten gefasst (Threlfall, 2009). Schlager (2020) leitet aus dem liberalen Begriffsverständnis und Ausführungen zu *Bearbeitungsmustern* (Siegler & Jenkins, 1989) den Begriff der *Bearbeitungsstrategien* ab und definiert ihn als „jede[n] bewusste[n] oder unbewusste[n] (mentalen) Prozess, der zur Aufgabebearbeitung stattfindet [...] sofern er nicht explizit durch die Aufgabenstellung eingefordert wird“ (Schlager, 2020, S.51). Bearbeitungsstrategien grenzen sich zu obligatorischen Tätigkeiten, die explizit in

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

der Aufgabenstellung gefordert werden, ab (Siegler & Jenkins, 1989).

Aufbauend auf diesen Überlegungen wird für die vorliegende Arbeit die mentale Repräsentation, d.h. das Vorliegen der *Strategie* im Geist des Individuums als erste Charakteristika einer *Strategie* formuliert. Außerdem wird die *Strategie* zu einer kognitiven Aktivität, die neben geplanten, absichtsvollen, zielführenden, bewussten auch ungeplante, nicht absichtsvolle, nicht zielführende und unbewusste Handlungen umfassen kann.

Mentale Aktivitäten sind dabei kognitive Vorgänge wie beispielsweise *Denken*, *Problemlösen* oder auch *Wahrnehmen*. Da für die vorliegende Untersuchung mental repräsentierte Vorgänge und Prozesse bei der Bearbeitung von mathematischen Begründungsaufgaben erfasst werden sollen und anzunehmen ist, dass besonders *Denken* eine zentrale Rolle spielt, soll das Denken in den Fokus genommen werden. Nun ist Denken nicht eindeutig zu fassen.

Die Diskussion über die Beschaffenheit des Denkens und dessen Repräsentation ist ein viel bearbeitetes Thema in der Philosophie und besonders in der Philosophie des Geistes aber auch in der Psychologie und neueren Disziplinen wie der Neurobiologie und Neuropsychologie.

Perspektiven auf das Denken werden dabei so vielgestaltig, dass sich die vorliegende Untersuchung auf Zugänge fokussiert, die das Denken bei der Bearbeitung von Aufgaben thematisieren.

Denken aus dieser Sicht ist eine „höhere kognitive Funktion, die auf Prozesse oder Wahrnehmung des Lernens und des Gedächtnisses zurückgreift und Handeln vorbereitet“ (Wirtz, 2021, S.358). Denken ist dabei die innerliche Verarbeitung, um neue Erkenntnisse zu gewinnen (Wirtz, 2021). Es bildet also Modelle von Bewusstseinsinhalten ab, die zueinander in Beziehung zu setzen sind und wird damit Sprache des Geistes (Sponsel, 2021).

Denken ist dabei als eine Abfolge von Gedanken zu fassen (Ericsson & Simon, 1998), die zu *thoughts* werden. Es entsteht eine kettenartige Abfolge von ‚thoughts‘ oder *mental states* wie Ericsson und Simon (1998) diese Gedankenschritte auch bezeichnen, die dann durch das *Laute Denken* verbalisiert werden (Abbildung 4.2).

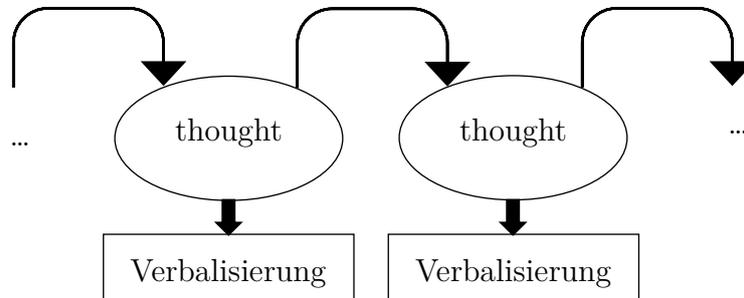


Abbildung 4.2: Darstellung der kettenartigen Struktur der Gedankenschritte beim *Lauten Denken* in Anlehnung an Ericsson und Simon (1998)

Das Kernelement *Aufmerksamkeit* dieser Perspektive entstammt aus dem Bereich des *Lauten Denkens* als sozialwissenschaftliche Methode und wird zentrale Voraussetzung für jede praktische und intellektuelle Tätigkeit (Sturm, 2005). Aufmerksamkeit wird beispielsweise im Modell von Cowan (1995) explizit mit dem Arbeitsgedächtnis in Verbindung gebracht. Das Arbeitsgedächtnis bzw. die *zentrale Exekutive* lenkt hier die Aufmerksamkeit auf relevante Inhalte. ‚Gearbeitet‘ wird in diesem Modell mit der mental repräsentierten Information oder dem Inhalt, auf dem die Aufmerksamkeit liegt (Wentura & Frings, 2012). Aus diesen Überlegungen soll geschlussfolgert werden, dass die jeweilige im Arbeitsgedächtnis bearbeitete Information eine Etappe innerhalb des Lösungsprozesses der Aufgabe ist. In neueren Arbeiten beispielsweise aus der Fremdsprachenforschung werden diese Etappen als Gedankenschritte betrachtet, die inhaltlich abgeschlossen und nachvollziehbar und gedanklich repräsentiert sind (Sandmann, 2014).

Eine *Strategie* als mentale Aktivität wird aus diesen Überlegungen heraus zu einem Gedankenschritt, also zu einer im Arbeitsgedächtnis repräsentierten Information oder in Anlehnung an Ericsson und Simon (1998) zu einem ‚mental state‘, der einem ‚thought‘ in hier einem Gedankenschritt gleichgesetzt wird. Durch die Lenkung der Aufmerksamkeit hin zu einem bestimmten Inhalt wird der jeweilige ‚mental state‘ erreicht und anschließend verbalisiert (Abbildung 4.2).

Schlager (2020) unterscheidet in Anlehnung an Reusser (1989) zwischen *Makro- und Mikrostrategien*, um die Bearbeitungsstrategien weiter auszudifferenzieren. Dabei sind Makrostrategien Prozesse, die sich auf den Bearbeitungsprozess insgesamt beziehen und mit Prozessmodellen beschrieben werden können. Für die hier vorliegende Arbeit wird im Folgenden auf Basis dieser Betrachtungen zwischen *Makrostrategie* und *Strategie* unterschieden. Der Begriff

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

Mikrostrategien soll hier nicht genutzt werden, da Schlager (2020) damit auch Aktivitäten fasst, die durch die Lautdenkenprotokolle nicht erfasst werden bzw. Schlager (2020) auch darunter Aktivitäten fasst, die nicht als Einzelstrategien im vorliegenden Projekt erfasst werden. *Makrostrategien* lassen sich aus aufgabenspezifischen und aufgabentypischen Vorgehensweisen ableiten. Aufgabentypisch für eine Begründungsaufgabe ist besonders das *Argumentieren*, welches in Anlehnung an das Toulmin Schema (Kapitel 6.1) in Einzelprozessen abläuft, die hauptsächlich als ein- oder mehrgliedrige Kette von Informationen und Schlussfolgerungen betrachtet werden kann. Die Information bzw. die Ressource und die Transformation dieser Ausgangsinformation mit Hilfe von (mathematischen) Konzepten werden dabei beispielsweise zu *Makrostrategien* (Abschnitt III).

Eine *Makrostrategie* im hier genutzten Verständnis ist demnach eine übergeordnete Betrachtung einer *Strategie* und lässt sich durch die Betrachtung als *Strategie* bezüglich ihrer Erscheinungsform genauer beschreiben. Neben den aufgabenspezifischen Vorgehensweisen lassen sich auch explizit durch die Aufgabenstellung eingeforderte Vorgehensweisen unterscheiden. Aus dieser Perspektive ist es notwendig neben der Betrachtung von Bearbeitungsstrategien nach Schlager (2020) eine weitere Betrachtung von Aufgabenbearbeitungsprozessen vorzunehmen.

In Anlehnung an das Verständnis von Polya (1949) wird die Begründungsaufgabe als eine Aufgabe betrachtet, deren Bearbeitung als Problemlöseprozess gesehen werden kann. Das Problem ist, eine Begründung zu erstellen. Die Aufgabenstellung gibt dabei grundsätzliche Schritte zur Aufgabenbearbeitung vor. Besonders auf Basis der Kognitionspsychologie im Kontext des Denkens (u.a. bei Myers, 2014) werden Problemlösestrategien in Verbindung mit dem Lösen oder Bearbeiten von mathematischen Aufgaben benannt und genauer beschrieben. Die Kognition umfasst dabei „alle mentalen Aktivitäten, die mit Denken, Wissen, Erinnerung und Kommunikation zu tun haben“ (Myers, 2014, S.369).

Problemlösestrategien können grundsätzlich unterschieden werden in *Heurismen* und *Algorithmen* (Myers, 2014). Ein Heurismus ist nach Polya (1949) eine Denkkoperation, die beim Lösen von Problemen von Nutzen ist. Auch werden sie als „eine systematische, logische Regel oder Vorgehensweise [betrachtet], die garantiert zur Lösung des vorliegenden Problems führt“ (Myers, 2014, S.369). Er ist eine „einfache Denkstrategie für effizientere Urteile und Problemlösungen; schneller, aber auch fehleranfälliger als der Algorithmus“ (Myers, 2014, S.369), von dem er abgegrenzt werden kann. Kategorisiert werden Heurismen je nach Literatur verschieden und fassen dabei entweder kognitive und metakognitive Vorgehensweisen zusammen (Polya, 1949; Tietze et al., 2000), trennen sie voneinander (Schoenfeld, 1985) und grenzen sie in

KAPITEL 4. ÜBERLEGUNGEN ZU DEN GRUNDBEGRIFFEN DER ARBEIT: BEGRÜNDEN UND STRATEGIEN

unterschiedlicher Weise von anderen Vorgehensweisen, Algorithmen (Scheibke, 2021), Hilfsmitteln und Prinzipien (Bruder, 2000) aber auch vom Begriff der *Strategien* ab. *Strategien* in diesem Kontext sind nach Bruder (2000) neben Hilfsmitteln und Prinzipien eine Kategorie der Heuristiken, mit Hilfe derer ein Lösungsplan entwickelt und durchgeführt werden soll. Es wird sich für *Vorwärtsarbeiten* oder *systematisches Probieren* entschieden, ohne dabei algorithmisches Arbeiten erkennbar werden zu lassen (Bruder, 2000).

Neben der Betrachtung von Lösungsprozessen während der Bearbeitung von Aufgaben und der damit verbundene Rückgriff auf Problemlösestrategien, die damit in Verbindung stehen, können zusätzlich zu diesen Prozessen *Wissenselemente* und *Fehler* hinzugezogen werden, um den Bearbeitungsprozess anhand des Konstrukts der *theoretically enhanced student-expert-solution* (TESES) nach Biehler et al. (2015) zu analysieren. TESES wird genutzt, um aus einer theoretischen Perspektive die Lösungsprozesse von Studierenden zu beschreiben. Es entstehen Etappen oder auch *subtasks*, auf deren Basis die Lösungsprozesse inklusive der Wissensselemente und möglichen Fehler aus theoretischer Perspektive zunächst normativ darstellen und damit eine Grundlage für empirische deskriptive Prozesse bieten. Scheibke (2021) leitet aus diesem Konstrukt die so genannten *wesentlich logischen Einheiten* ab. Eine wesentlich logische Einheit beschreibt eine verknüpfte Betrachtung von Lösungsprozessen und zugehörigen Wissensselementen und fasst damit „logisch eng zusammenhängende Bearbeitungsschritte und mathematische-Teilhandlungen“ (Scheibke, 2021, S.169). Das Konstrukt der wesentlich logischen Einheit nutzt Scheibke (2021), um die Bearbeitung einer Aufgabe zum Lösen eines linearen Gleichungssystems zu beschreiben. Die Etappen, also die Einheiten ergeben sich hier aus den Verfahren, die hier typischerweise zur Anwendung kommen.

Im Kontext des mathematischen *Begründens* können ebenfalls logische Einheiten ausgemacht werden, wenn das *Begründen* als Problemlöseprozess betrachtet und aus dieser Perspektive Phasenmodelle abgeleitet werden. Für die vorliegende Untersuchung soll die wesentlich logische Einheit als grobe Einteilung des gesamten Aufgabenbearbeitungsprozesses in seinen Phasen dienen, und hier als *Strategieeinheit* bezeichnet werden. Eine *Strategieeinheit* wird zu einer Etappe innerhalb einer Bearbeitung einer mathematischen Begründungsaufgabe, die durch die Formulierung der Aufgabenstellung gegeben ist. Die in Kapitel 5 aus der Literatur ableitbaren Phasen dienen dazu als Grundlage. Die genaue Ableitung der *Strategieeinheiten* wird in Abschnitt III erläutert. Zusammenfassend ist eine *Strategie* für die vorliegende Arbeit ein mental repräsentierter Gedankenschritt, der inhaltlich abgeschlossen und nachvollziehbar ist und durch die Betrachtung als mentale Aktivität eine Prozesshaftigkeit aufweist. Dabei ist es nicht relevant, ob er geplant, absichtsvoll, bewusst oder erfolgreich oder dies alles nicht ist.

Aufgabentypische mental repräsentierte Gedankenschritte werden als *Makrostrategien* bezeichnet. Werden diese *Makrostrategien* inhaltlich und damit bezüglich ihrer Erscheinungsform genauer betrachtet, so lässt sich eine *Makrostrategie* als *Strategie* ausdifferenzieren. Eine *Strategie* kann wiederum in verschiedenen Ausprägungen beobachtet werden und wird dadurch konkretisiert. In der vorliegenden Arbeit werden die Begriffe *Strategie* und *Gedankenschritt* in Anlehnung an die Betrachtung nach Ericsson und Simon (1998) (Abbildung 4.2) aber auch der Begriff *mentale Aktivität* im Singular synonym verwendet. In der vorliegenden Arbeit werden die abgeleiteten *Strategieeinheiten*, *Makrostrategien* und *Strategien* in der KAPITÄLCHENSCHRIFTART notiert, um sie hervorzuheben und von Betrachtungen zu anderen Begriffen, die *kursiv* geschrieben sind, abzugrenzen (siehe Disclaimer). In Tabellen und Aufzählungen, in denen die einzelnen *Strategieeinheiten*, *Makrostrategien* und Ausprägungen in einer Zelle bzw. in einem Aufzählungspunkt enthalten sind, wird aufgrund der besseren Lesbarkeit auf eine Hervorhebung verzichtet.

4.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend werden die Begriffe im Themenkomplex des *Begründens*, *Beweisens* und *Argumentierens* in der Literatur eher divers verwendet. Für den hier vorliegenden Kontext wird das *Begründen* zu einem Oberbegriff für die Begründungsform *Argumentieren* zum einen und *formal-deduktiven Beweisen* zum anderen. Der Prozessbetrachtung von mathematischen Begründungen liegt die Annahme zugrunde, dass sowohl Problemlöseprozesse als Modellierungsprozesse beteiligt sind. Beschrieben werden kann der gesamte Prozess auf intraindividuellem Ebene durch Beweisprozessmodelle. Die daraus entstehenden Phasen werden hier als *Strategieeinheiten* bezeichnet. Eine *Strategieeinheit* umfasst mehrere mögliche *Makrostrategien*, die wiederum bei genauerer Betrachtung bezüglich ihrer Erscheinungsform als *Strategie* bezeichnet werden können. *Makrostrategien* können aus aufgabentypischen Vorgehensweisen geschlussfolgert werden. *Strategien* entstehen dabei, wenn eine *Makrostrategie* inhaltlich konkreter betrachtet wird. Beides sind mental repräsentierte Gedankenschritte in verschieden konkretisierbarer Form. Im Umkehrschluss subsumiert eine *Strategieeinheit* mehrere *Makrostrategien*, wobei eine *Strategie* lediglich eine konkretere Betrachtung einer allgemeineren *Makrostrategie* ist.

5 Chronosequentielle Betrachtung von Prozessen in mathematischen Begründungssituationen

In der Literatur finden sich verschiedene Phasenmodelle, die Begründungsprozesse aus einer zeitlichen Perspektive in Etappen gliedern. Als Grundlage dafür werden zumeist Problemlöseprozessbetrachtungen genutzt und in Bezug auf mathematische Begründungs- und Beweisprozesse konkretisiert.

Werden also Phasen des mathematischen *Begründens* betrachtet, so resultieren die Ausführungen aus Modellen, die die äußere Struktur dieses Prozesses entweder normativ oder deskriptiv beschreiben (Kapitel 4.3). Die in der Literatur beschriebenen Begründungsprozessmodelle sind demnach als fach- bzw. problemspezifische Weiterentwicklung der Problemlöseprozessmodelle zu betrachten, in denen ein Ausgangszustand über eine Barriere in den Zielzustand überführt wird. In diesem Kapitel der Arbeit sollen Phasenmodelle dargestellt werden, die die Grundlage für das Erarbeiten von möglichen *Strategien* in Abschnitt III anbieten. Als Begründungsprozess soll also die „Summe aller psychischen Vorgänge im Individuum und aller Handlungen des Individuums, die sich von der Formulierung des Satzes bis zur Fertigstellung des Beweises abspielen“ (Stein, 1986, S.268), verstanden werden. Dazu werden zuerst modellbezogene Betrachtungen angestellt (Kapitel 5.1), bevor die Modelle an sich aufgelöst und in drei sich ergebende Phasen überführt werden (Kapitel 5.2, Kapitel 5.3, Kapitel 5.4).

5.1 Modellbezogene Betrachtungen

Als Basis für die Erarbeitung der Phasen werden hauptsächlich die Modelle von Boero (1999) inklusive der Erweiterung von Reiss und Ufer (2009), von Stein (1986) und die empirisch erarbeitete Betrachtung von Kirsten (2021) genutzt. Boero (1999) und Reiss und Ufer (2009) unterscheiden zwischen insgesamt 7 Phasen: 1) Finden einer Vermutung aus einem mathematischen Problemfeld heraus, 2) Formulierung der Vermutung nach üblichen Standards, 3) Exploration der Vermutung mit den Grenzen ihrer Wahrheit; Herstellen von Bezügen zur mathematischen Rahmentheorie, Identifizieren geeigneter

Argumente zur Stützung der Vermutung, 4) Auswahl von Argumenten, die sich in einer deduktiven Kette zur Stützung der Vermutung zusammen stellen lassen, 5) Fixierung der Argumentationskette nach aktuellen Standards, 6) formaler Beweis, 7) Akzeptanz durch die mathematische Community. (Übersetzung ins Deutsche nach Brunner, 2014, S.61) Boero (1999) beschreibt damit einen idealtypischen Ablauf des Beweisens bei Fachkundigen und damit ein kompetentes Vorgehen.

Stein (1986) unterscheidet zwischen einem *Satzfindungs-* und *Beweisprozess*. Für die hier vorliegende Fragestellung ist die Satzfindungsphase als das *Anstellen von Vermutungen* nicht relevant, da die Studierenden in der vorliegenden Untersuchung bereits mit einem mathematischen Satz konfrontiert werden, den sie nicht selbst entdeckt haben. Interessant ist demnach besonders die Phase der Beweiskonstruktion. Diese Phase unterscheidet Stein (1986) in das *Erfassen der Aufgabe*, die *Suche nach Zusammenhängen/ Gründen*, der *deduktiven Durcharbeitung* und dem *Beweis*. Letzteres wird ausdifferenziert in die *gedankliche Repräsentation* und die *schriftliche Lösung*.

Kirsten (2021) nutzt Modelle der Beschreibung der äußeren Struktur von Problemlöseprozessen und entwickelt anhand ihrer Daten ein rekursiv ablaufendes Modell mit den Phasen *Verstehen*, *Argumente identifizieren*, *Argumente strukturieren* und *Formulieren*. Das Modell von Kirsten (2021) beruht in seiner Grundstruktur auf einer Synthese von verschiedenen Beweisabläufen (u.a. Boero, 1999; Boero et al., 2010; Hsieh et al., 2012; Schwarz et al., 2010; Stein, 1986; Stylianides, 2007) und Verlaufsmodellen aus der Problemlöseforschung (Carlson & Bloom, 2005; Pólya, 1949; Schoenfeld, 1985).

Auf Basis der Betrachtungen von Rott (2014) (Kapitel 4.2) aber auch der benannten und kurz in ihren Kernaussagen dargestellten Modelle lassen sich drei verschiedene Phasen in einem mathematischen Begründungsprozess unterscheiden: 1) *Verstehen*, 2) *der Begründungsprozess* als solches (Planung und Durchführung) und 3) *Abschluss des Begründungsprozesses (Ausklang)*.

5.2 Verstehen

Der Begriff *Verstehen* bezieht sich auf eine Vielzahl von Gegenständen und Tätigkeiten, wie beispielsweise sprachliche und nichtsprachliche, mentale und materiale, prozesshafte und statische, natürliche und kulturelle, gegenständliche und abstrakte, qualitative und quantitative, wird aber am häufigsten in Verbindung mit dem Auffassen oder dem Auslegen mündlicher oder schriftlicher Sprache oder mit konkreten Gegenständen und Sachverhalten, anschaulichen Naturprozessen sowie Ausdrucksformen und Objektivationen der menschlichen Kultur - wie Musik, Bilder, Mimik, Tanz und Gebärden genutzt (Reusser

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

& Reusser-Weyeneth, 1997). Verstehen kann damit aus einer Perspektive der Bezugsgegenstände betrachtet werden, die zwischen sprachlichen und gegenständlichen Bezügen unterscheidet (Reusser & Reusser-Weyeneth, 1997). Beim Verstehen im sprachlichen Kontext werden besonders Textverstehensmodelle bedeutsam (Drollinger-Vetter, 2011). Um über Sachverhalte nachdenken oder über sie sprechen zu können, ist es notwendig diese zu repräsentieren, also zu vergegenwärtigen (Drollinger-Vetter, 2011). Demnach kann unter dem Verstehen

- das Bilden einer mentalen Repräsentation der sprachlichen Oberflächenstruktur,
- das Generieren einer propositionalen Repräsentation des semantischen Gehalts des Textes auf dieser Grundlage und
- das anschließende Konstruieren eines mentalen Modells des Sachverhaltes verstanden werden (Schnotz, 2001).

Überlegungen zum Prozess des Verstehens im Kontext der Mathematikdidaktik basieren vor allem auf den Überlegungen von Piaget (1964) und Aebli (1994) und werden von Wertheimer (1964) und neueren Publikationen, wie Brunner (2013), Kirsten (2021) aber auch Drollinger-Vetter (2011) aufgegriffen und weiter entwickelt.

Eine zentrale Komponente beim Vergegenwärtigen der Sachverhalte ist das Bilden einer mentalen Repräsentation aus dem Aufgabentext (Kirsten, 2021). Dabei entwickelt sich die mentale Repräsentation von der propositionalen Textbasis über eine Umstrukturierung der Inhalte und eine Loslösung von der Textbasis hin zu einem Situationsmodell (Kirsten, 2021). Das Situationsmodell stellt im Kontext von Textverstehensmodellen die entscheidende mentale Repräsentation dar und ist eine „psychologisch realisierte Bedeutungsvorstellung (Repräsentation) dessen, worüber der Text eine Aussage macht“ (Kintsch, 1997, S.41). Verstehen ist vor diesem Hintergrund eine aktive und kognitive Konstruktionsleistung (Drollinger-Vetter, 2011; Brunner, 2013).

Das Verstehen als kognitive Konstruktion im mathematischen Kontext in der Tradition nach Piaget und Aebli bedeutet „sich vertieft mit dem Inhaltsbereich auseinandersetzen und diesen im Sinne von Einsicht in die Struktur und in seiner Konzeptualisierung zu ordnen“ (Brunner, 2013, S.63). Dabei kann das Individuum über das ‚Sehen‘ von inneren Beziehungen (Wertheimer, 1964) oder durch „die aktive Konstruktion und Herstellung von Sinn mittels spezifischer Begriffsbildung“ (Brunner, 2013, S.63) zu einer Einsicht gelangen. Verstehen als kognitive Konstruktion ist also auch das Erkennen von Beziehungen und Zusammenhängen.

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

In didaktischen Überlegungen wird dieser Prozess zentraler Bestandteil sowohl fachspezifischen (hier mathematischen) als auch überfachlichen Arbeitens von Lernenden. Das Verstehen sowohl von mathematischen Begründungen als auch das Verstehen der mathematischen Ausgangs- und Problemlage wird in verschiedenen Beweisprozessmodellen als eine zentrale Komponente beim mathematischen *Begründen* ausgewiesen (Kirsten, 2021; Brunner, 2013). Bei letzterem wird dieser Prozess ganz explizit als erste Phase in einem mathematischen Begründungsprozess angeführt, wird damit als Ziel und Ausgangslage (Brunner, 2013) verstanden und basiert oft auf Problemlöseprozessen (Kapitel 4.2). Verstehen als Problemlösen umfasst die „Suche nach einer geeigneten Repräsentationsform für eine als unbefriedigend erachtete Struktur“ (Brunner, 2013, S. 66).

Es wird vom Individuum zuerst eine Handlungs- oder Wissensstruktur wahrgenommen, die anhand der Zielvorstellung als unbefriedigend „(fragmentarisch, lückenhaft, widersprüchlich oder auch kompliziert) wahrgenommen wird und dessen Veränderung in Richtung der Zielvorstellung durch selbstverständliche gedankliche Operationen nicht unmittelbar gelingt“ (Reusser, 1997; zitiert nach Drollinger-Vetter, 2011, Klammersetzung im Original). Genauere Betrachtungen der Aktivitäten innerhalb des Verstehensprozesses beziehen sich vor allem auf die in Kapitel 4.2 überblicksartig dargestellten verschiedenen Modelle nach unter anderem Polya (1949), Schoenfeld (1985) oder Mason et al. (2011).

Besonders Kirsten (2021) aber auch Stein (1986) beziehen sich auf das Problemlöseprozessmodell nach Polya (1949) und erarbeiten so eine Anfangsphase, die die Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung beschreibt. Stein (1986) benennt die Phase als *Erfassen der Aufgabe* und stellt diese Phase an den Anfang der Bearbeitung, wenn keine *Satzfindungsphase* erfolgte. Boero (1999) erfasst diese Aktivitäten nicht explizit in einer Phase, sondern begreift sie als implizit in der vorangegangenen Phase des *Finden der Vermutung* bzw. *Formulierung der Vermutung nach üblichen Standards* vorhanden. In der hier vorliegenden Untersuchung fand keine Satzfindungsphase statt, da der mathematische Satz als arithmetisches Muster bereits verbal vorlag. Die Betrachtungen folgen also den Ausführungen von Kirsten (2021) und bezeichnen die erste Phase als Verstehen.

In den Ausführungen nach Kirsten (2021) wird die Verstehensphase durch die Cognitive Unity Theorie und der damit verbundenen Forschung zum mathematischen Textverstehen auf der einen Seite und auf der anderen Seite durch die Forschung im Bereich des Beweisverständnisses und den damit verbundenen Überlegungen zum Problemverständnis charakterisiert. Die Cognitive Unity Theorie und die Gestalttheorie sind demnach die Grundlage für die Betrachtung der Aktivitäten in der Verstehensphase. Auf Basis dieser

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

Überlegungen wird das Situationsmodell der Begründungsaufgabe durch die Rekonstruktion der Satzfindungsphase unterstützt, indem hier über eine propositionale Textbasis hinaus die Bedingungen der Problemsituation erforscht und relevante Strukturen herausgearbeitet werden (Boero et al., 2007; Garuti et al., 1998; Martinez, 2010). Aufbauend auf der Cognitive Unity Theorie und ihrer eigenen Forschung identifiziert Kirsten (2021) zwölf verschiedene Aktivitäten, die dem Verstehen im Sinne einer Rekonstruktion der Satzfindungsphase und des Aufbaus einer mentalen Repräsentation ist. In Tabelle 5.1 sollen die von ihr entwickelten Aktivitäten tabellarisch dargestellt werden.

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

Tabelle 5.1: Verstehensaktivitäten nach Kirsten (2021)

Aktivität	Beschreibung
Extrahieren	Schließt das Lesen der Aufgabenstellung und das aktive Entnehmen von Informationen aus der Aufgabenstellung durch beispielsweise Markierungen oder Herausschreiben ein.
Ergänzen	Beschreibt eine Aktivität, die die Informationsbasis aus der Aufgabenstellung mit zusätzlichen Informationen aus dem Bereich des Vorwissens anreichert.
Folgern	Beschreibt eine Aktivität, bei der die Aufgabenstellung mit Wissenselementen angereichert wird, die auf der Grundlage der im Aufgabentext gegebenen Informationen geschlussfolgert werden. Das Folgern erfolgt ergebnisoffen und assoziativ ohne eine spezifische Suchrichtung zu zeigen.
Visualisieren	Beschreibt eine Aktivität, bei der die gegebenen Informationen aus der Aufgabenstellung in eine Skizze übertragen werden.
Beispielbetrachtung	Beschreibt eine Aktivität, die einen Zugang zur Aufgabe durch eine Beispielbetrachtung ermöglicht.
Hinterfragen	Bei der Aktivität des Hinterfragens steht eine kritische Überprüfung der verfügbaren Informationen im Vordergrund. Dabei können sowohl die zu beweisende Aussage als Ganzes als auch einzelne Details der Aufgabenstellung oder bereits erarbeitete Folgerungen Gegenstand der Überprüfung sein. Außerdem stellt diese Aktivität eine Plausibilitätsprüfung der herzuleitenden Konklusion dar.
Fokussieren	Beim Fokussieren konzentrieren sich die Studierenden auf einen spezifischen Aspekt der Aufgabenstellung oder schränken ihre Betrachtungen auf einen festgelegten Bereich ein.
Spezifizieren	Aktivität des Spezifizierens wird eine Auseinandersetzung mit Extrem- oder Spezialfällen verstanden, im Rahmen derer die Studierenden den Geltungsbereich der zu beweisenden Aussage ergründen.

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

Wiederholen	Beim Wiederholen werden bereits im Beweisprozess benannte Informationen und Erkenntnisse aufgegriffen und erneut verbalisiert.
Paraphrasieren	Der Inhalt der gegebenen Aussage wird durch eine Decodierung wieder gegeben
Transformieren	Das Transformieren beschreibt eine Aktivität, bei der Informationen, die in der natürlichen Sprache formuliert sind, in eine symbolische Schreibweise übersetzt werden.
Klassifizieren	Diese Aktivität beschreibt eine Auseinandersetzung mit der logischen Struktur der gegebenen Aussage.

Zusammenfassend ist die Phase des Verstehens typischerweise eher zu Beginn der Aufgabenbearbeitung oder in Anlehnung an nicht-lineare Problemlösemodelle zyklisch wiederholend unter Rückbezug zur Aufgabenstellung oder Ausgangslage zu verorten. Das Verstehen ist ein Prozess, bei dem durch die Vergegenwärtigung des Sachverhaltes ein mental repräsentiertes Situationsmodell entsteht. Die Untersuchung nach Kirsten (2021) gibt konkret auf mathematische Begründungen bezogene Teilaktivitäten der Phase des Verstehens an, die hier im Sinne des definierten Strategiebegriffs als Makrostrategien bzw. *Strategien* genutzt werden.

5.3 Der Begründungsprozess an sich als das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten

Nachdem ein mental repräsentiertes Situationsmodell erarbeitet wurde, wird das Vorgehen geplant und ausgeführt. Es kommt zum eigentlichen Begründungsprozess, der in Anlehnung an die zusammenfassenden Ausführungen von Rott (2014), aber auch mit Hilfe der Modelle nach Stein (1986), Boero (1999) und Kirsten (2021) charakterisiert werden soll. Die Phase des *Begründens* ist unter anderem gekennzeichnet durch explorative Tätigkeiten. Diese explorativen Aktivitäten als eine Tätigkeit, die nach Regelmäßigkeiten sucht, finden hier in Anlehnung an Stein (1986) innerhalb der Beweisprozessphase und sind damit eher Bestandteil des Suchens und Konstruierens von Argumenten.

Abgeleitet wird dieses explorative Moment besonders durch das Modell von Schoenfeld (1985), der durch die konkrete Abgrenzung der *Exploration* fünf weitere Episoden beschreibt. Es basiert aber auch auf den Ausführungen

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

von Stein (1986), der innerhalb der Beweisprozessphase die Phase *Suche nach Zusammenhängen/Gründen* abgrenzt und die Phase 3 *Exploration der Vermutung mit den Grenzen ihrer Gültigkeit* nach Boero (1999) beschreibt. Kirsten (2021) grenzt die Phase *Argumente identifizieren* von drei weiteren ab und charakterisiert diese ebenfalls als explorierend und betont diesen Prozess noch einmal durch die Verwendung des Plurals beim *Generieren von Beweisideen*.

Basis für diese Betrachtungen werden damit Ansätze aus der Cognitive Unity Theorie (Boero, 1999; Boero et al., 1996), die das Beweisen und das Argumentieren als Einheit und damit das Aufstellen von Vermutungen, das Erkennen aber auch das Aufstellen von Zwischenvermutungen als zentrale Tätigkeiten des Begründungsprozesses und gleichzeitig als Prozesse mit explorativen Momenten betrachten.

Den Gedanken von Kirsten (2021) folgend, kann in dieser explorativen Phase die Unterscheidung von *syntactic proof production* und der *semantic proof production* (Weber & Alcock, 2004) als Grundlage für die Annäherung an mögliche Tätigkeiten genutzt werden. Die Begründenden nutzen dabei eher den syntaktischen Weg, wenn Argumente in Form von bereits bekannten Definitionen und Sätzen streng anhand der Aufgabenstellung ausgewählt und manipuliert werden (Weber & Alcock, 2004). Sie nutzen beispielsweise nur die Eigenschaften, die in einer Definition aufgeführt werden und wenden dieses rein mechanisch auf ein Problem an (Alcock & Weber, 2010). Eine *semantic proof production* unterscheidet sich dahin gehend, dass das Individuum die Zusammenhänge und Strukturen der vorgefundenen mathematischen Objekte nutzt, um der Aussage Sinn zu verleihen (Weber & Alcock, 2004).

Weiterhin lässt sich die Aktivität der Planung des Vorgehens ebenfalls in dieser Phase des eigentlichen Anfertigens der Begründung verorten. Besonders unterstützen das Modell von Polya (1949) (Ausdenken eines Plans), aber auch Ausführungen von Wilson et al. (1993) (making a plan), Schoenfeld (1985) (Planning) die Planung als zentrale Tätigkeit.

Als weiteres charakteristisches Element kann außerdem die Ausführung des Plans aus Polya (1949), Wilson et al. (1993) (Carrying out the Plan) und Mason et al. (2011) (Attack-Phase) abgeleitet werden. Konkret benannt wird für diese Phase das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten im Modell nach Boero (1999) in Phase 4) *Auswahl von Argumenten für deduktive Kette* und 5) *Fixierung der Argumentationskette*. Hier, aber auch bei Stein (1986) beschränkt sich diese Tätigkeit auf das *deduktive Durcharbeiten* (Stein, 1986). In Anlehnung an die Phase *Argumente auswählen und strukturieren* nach Kirsten (2021) wird ebenfalls das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten als Aktivität betont, die jedoch nicht zwangsweise deduktiv stattfinden muss. Ziel dieser ist das Entwickeln einer Beweisidee.

Relevant wird bei der Auswahl bzw. der Wahl des „nächsten Schrittes im Begründungsprozess [...] nicht der Zufall, sondern [das] Überblickswissen oder mathematisch-strategische Wissen“ (Reiss & Ufer, 2009, S.167). Potenziell hilfreiche Schritte sind von wahrscheinlich nicht zielführenden nicht zu unterscheiden (Reiss & Ufer, 2009).

Neben dem Entwickeln von Beispielen wird das Anfertigen von Skizzen als wirkungsvolle *Strategie* betrachtet, um verschiedene Beweisideen zu generieren und auf ihre Anwendbarkeit zu überprüfen (Alcock & Weber, 2010; Lockwood et al., 2016; Samkoff et al., 2012; Stylianou & Silver, 2004).

Der Abschluss des explorativen Begründungsprozesses wird unter anderem bei Kirsten (2021) in der Erstellung einer Beweisskizze gesehen, die abschließend für die Kommunikation in der Community oder Lerngruppe überarbeitet wird.

Aus den Betrachtungen der Phase des Begründungsprozesses wird vor allem der Begriff des Arguments und die zugehörige Tätigkeit des Argumentierens neben der des formal-deduktiven Beweisens zentral. Dieser Prozess und damit verbundene Aktivitäten werden in Kapitel 6 genauer betrachtet.

5.4 Abschluss des Begründungsprozesses

Nachdem eine Beweisskizze angefertigt wurde, werden innerhalb der Abschlussphase des Begründungsprozesses Tätigkeiten wie *Formulieren* (Kirsten, 2021; Brunner, 2014), *Kommunizieren* (Brunner, 2014) und *Validieren* (Kirsten, 2021) zentral. Für die hier vorliegende Untersuchung, die insgesamt in einen hochschuldidaktischen Kontext einzuordnen ist, ist die Kommunikation mit der Fachcommunity nicht relevant. Stattdessen wird sich auf eine didaktische Perspektive (Brunner, 2013;2014; Wittmann, 2014) bezogen, in der die Lerngemeinschaft als Diskursgemeinschaft fungiert. Da im Anschluss an die durchgeführte Interviewsituation kein Diskurs mit einer Lerngemeinschaft stattfindet, soll die Versuchsleitung als Diskursgemeinschaft betrachtet werden können.

Das *Formulieren* ist die Voraussetzung für das *Kommunizieren* und beschreibt einen Prozess, der etwas in angemessener Form darbietet (Duden, 2001; zit. nach Brunner, 2014). Brunner (2014) sieht dabei die Angemessenheit der Formulierung in der „Adäquatheit auf den Gegenstand und damit den mathematischen Sachverhalt, den sozialen Kontext der Lerngemeinschaft und ihre Voraussetzungen und/oder auf die kognitiven und sprachlichen Möglichkeiten der betreffenden Person“ (Brunner, 2014, S.62). „Formulieren markiert [also] den Übergang von einem privaten Erkenntnisinteresse in einen öffentlichen Diskurs, in dem der entwickelte Beweis kommuniziert und von anderen

KAPITEL 5. CHRONOSEQUENTIELLE BETRACHTUNG VON PROZESSEN IN MATHEMATISCHEN BEGRÜNDUNGSSITUATIONEN

Mitgliedern der Diskursgemeinschaft bewertet “ (Kirsten, 2021, S.109) und damit zu einer Aktivität des Präsentierens wird (Kirsten, 2021).

Relevant im Formulierungsprozess wird die Nutzung des mathematischen Sprachregisters (Kirsten, 2021). In der Mathematikdidaktik wird dabei unter anderem zwischen Alltagssprache, Bildungssprache und Fachsprache (Meyer & Prediger, 2012; Krosanke, 2021) unterschieden. Die Wahl des jeweiligen Sprachregisters ist abhängig von der Situation und vom Themenfeld der Kommunikation, der medialen Form der Äußerung und der sozialen Beziehung zwischen den Kommunizierenden (Halliday, 1994).

Das alltagssprachliche Sprachregister ist stärker als die Bildungssprache und die Umgangssprache an die Situation, also an die, die in der Situation teilnehmenden, gebunden (Krosanke, 2021). Typisch dafür sind unvollständige Sätze, eine Verwendung der ich-Perspektive, einfache Satzkonstruktionen, deiktische Mittel und Begriffe mit weitem Bedeutungsfeld (Abshagen, 2015).

Kennzeichnend für die Bildungssprache ist im lexikalisch-semantischen Merkmalsbereich eine hohe lexikalische Dichte durch Nominalisierungen und zusammengesetzte Wörter (Gogolin & Duarte, 2016). Außerdem ist eine differenzierende und spezifizierende Nutzung von Ausdrücken typisch (Gogolin & Duarte, 2016). Im syntaktischen Merkmalsbereich zeichnet sich die Bildungssprache durch Konjunktionen, Adverbien oder attributive Formen aus. Des Weiteren ist die Nutzung von unpersönlichen Konstruktionen, wie dem Passiv, eine generelle Dekontextualisierung und Abstraktion zu beobachten (Gogolin & Duarte, 2016).

Die Fachsprache wird als die fachliche Variante der Bildungssprache betrachtet und teilt die vorangegangenen Merkmale, nutzt aber zusätzlich auch Fachausdrücke und fachliche Kollokationen (Gogolin & Duarte, 2016), nutzt die symbolisch-algebraische Darstellungsebene hat eine eigne typische Grammatik, Syntax und Semantik (Hußmann, 2010).

Um also eine zuvor erarbeitete Beweisskizze für die mathematische Community aufzubereiten müssen sich die Studierenden des mathematischen Sprachregisters bedienen. Das mathematische Sprachregister ist ein Sprachregister, welches Fachvokabular und Symbole, aber auch spezifische syntaktische Strukturen enthält (Halliday, 1978).

Neben der Formulierung, also der schriftlichen Fixierung der gedanklichen Repräsentation der Begründung (Stein, 1986) ist das *Validieren* als weitere zentrale Tätigkeit in dieser Phase zu betrachten (Kirsten, 2021). Dabei kann das Validieren in Rückgriff auf die Problemlöseforschung und konkret auf die *Rückschau* bei Polya (1949) und Schoenfeld (1985) genauer betrachtet werden. Charakteristisch ist das finale Durchsehen und die Kontrolle der Begründung. Typischerweise sind die Prozesse des Abschlusses eher am Ende der Begründung zu sehen, können aber auch, wird eine eher zyklische Va-

riante von Problemlöseprozessen zugrunde gelegt, vorangegangene Phasen unterbrechen (Selden & Selden, 2003).

5.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend lassen sich aus normativen und deskriptiven Modellen der Beweisprozessbeschreibung drei Phasen extrahieren: *Verstehen*, *Begründungsprozess* und *Abschluss des Begründungsprozesses*. Das *Verstehen* wird als das Bilden einer mentalen Repräsentation verstanden und umfasst Aktivitäten, die das Individuum anwendet, um ein Situationsmodell zu konstruieren. Relevant sind dabei besonders die bei Kirsten (2021) herausgearbeiteten Aktivitäten. Der Begründungsprozess an sich ist vor allem durch explorative Aktivitäten, planerische Tätigkeiten und die Ausführung bzw. das Anfertigen einer Argumentationskette geprägt und mündet im Anfertigen einer *Beweisskizze*. Diese Beweisskizze wird zum Ausgangspunkt für den Abschluss des Begründungsprozesses. Dieser umfasst das Formulieren unter Nutzung eines adäquaten Sprachregisters und das Validieren als kontrollierende und korrigierende Aktivität.

Die hier vorgestellte Perspektive auf Begründungsprozesse als Problemlösungsprozesse lässt sich unter dem Begriff der *chronosequentiellen Betrachtung* zusammenfassen. Die Silbe *chrono* ist dabei vom griechischen Wort *Chronos* für *Zeit* abgeleitet und bezeichnet gemeinsam mit *sequentiell* eine bestimmte Abfolge von Sequenzen bzw. Prozessen. Damit wird die Prozesshaftigkeit betont, gleichzeitig aber auch eine bestimmte Abfolge.

6 Prozesse und Denkrichtungen innerhalb der Phase des Begründungsprozesses

In diesem Kapitel der Arbeit sollen Aktivitäten innerhalb der Phase des Begründungsprozesses genauer betrachtet werden. Wie in Kapitel 4.1 dargestellt, ist das *Begründen* ein Oberbegriff für die beiden Formen *Argumentieren* und *formal-deduktives Beweisen*. Das Verständnis orientiert sich damit an der von Gerloff (2021) erarbeiteten Begriffssystematisierung und Zuordnung der einzelnen Ansätze und Modelle aus der Literatur in diese, verfolgt diesen Zugang aber im folgenden Aspekt nicht streng. Es werden für die hier vorliegende Untersuchung auch Ansätze und Modelle zur Rekonstruktion von Prozessen während der Phase des *Begründens* genutzt, die das Verhältnis zwischen *Begründen* und *Argumentieren* anders betrachten.

Die Literaturlauswahl im Folgenden beschränkt sich demnach nicht auf Veröffentlichungen, die eine Oberbegriffs-Unterbegriffsrelation zwischen beidem als Grundverständnis annehmen, sondern inkludiert ebenfalls Ansätze, die die Beziehung umgekehrt oder als Teil-Ganzes-Relation betrachten. Diese Erweiterung begründet sich darin, dass die Aspekte, die bereits besonders zum Begründungsprozess an sich existieren außer Acht gelassen worden wären. So konnte mit Hilfe des Toulmin Schemas und darauf basierenden mathematikdidaktischen Konkretisierungen die Phase des *Begründens* besser rekonstruiert werden. Argumentationsrekonstruktionsansätze werden damit auf der Basis von Brunner (2013;2014) als ein möglicher Prozess des *Begründens* eingeordnet. Die Auffassung von Brunner (2013;2014) wurde hier zum leitenden Konstrukt, um die anderen Ansätze einzuordnen. Dieses Vorgehen wurde trotz der Integration, die die Veröffentlichungen selbst so nicht vornehmen, als sinnvoll für diesen Kontext betrachtet, da, wie in Abschnitt III sichtbar wird, die Ansätze in Einzelaspekte zerlegt und zur Ableitung von *Strategien* neu integriert werden.

Aus den Betrachtungen zu den beiden Begründungsformen *Argumentieren* und *Begründen* lassen sich Prozesse ableiten. Dabei wird zunächst das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten näher betrachtet und verschiedene Art und Weisen, wie diese Tätigkeiten umgesetzt werden können, herausgearbeitet

(Kapitel 6.1). Anschließend werden die Richtungen näher betrachtet, die das Denken innerhalb der verschiedenen Formen des *Begründens* (*Argumentieren* und formal-deduktives *Beweisen*) annehmen kann (Kapitel 6.2).

6.1 Argumentieren und formal-deduktives Beweisen als Formen des Begründens

Wie in Kapitel 4.1 genauer dargestellt, wird anhand der Klärung der Begriffsbeziehung nach Gerloff (2021) das *Argumentieren* zu einer Begründungsform neben anderen. Dem Argumentieren als Tätigkeit oder Prozess liegt das *Argument* als Produkt des Prozesses zugrunde. Argumente können als eine Menge von Sätzen beschrieben werden, die einzeln oder miteinander verknüpft innerhalb einer sprachlichen Handlung dazu verwendet werden, Behauptungen zu rechtfertigen (Bayer, 2007).

Um Argumente hinsichtlich der Struktur unabhängig von Kontext und Inhalt zu betrachten, wird in der Literatur über verschiedene Fachrichtungen hinweg das Toulmin Schema genutzt. Toulmin (2003) entwickelte eine Art Skelett, um das Argument in seiner inneren Struktur aber unabhängig vom Inhalt genauer zu erfassen. Dieses Skelett besteht aus verschiedenen Teilen, die anhand ihrer Funktion unterschieden werden. Ausgangspunkt eines Arguments ist das so genannte Datum, welches unbezweifelbare Aussagen enthält und von denen aus geschlussfolgert und eine Konklusion entwickelt werden kann. Die *Konklusion* wird durch eine *Regel* gestützt, damit aus einem wahren *Datum* auch eine wahre *Konklusion* geschlossen werden kann. Während Toulmin (2003) von *warrant* spricht, nutzt Knipping (2003) *garrant* als alternativen Terminus für die *Regel*. Da die Regel grundsätzlich auch bezweifelt werden kann, bedarf sie einer Stützung, um als wahr betrachtet zu werden. Ein Argument muss also mindestens aus einem Datum, einer Konklusion und einer Regel und einer Stützung bestehen. Wie in Abbildung 6.1 zu sehen ist, kann es allerdings auch als mehrgliedrige Kette rekonstruiert werden. Hierbei wird die Konklusion 1 zum Datum 2, also zum Ausgangspunkt für die Konklusion 2. Sie wird damit zum Ausgangspunkt für weitere Begründungsschritte.

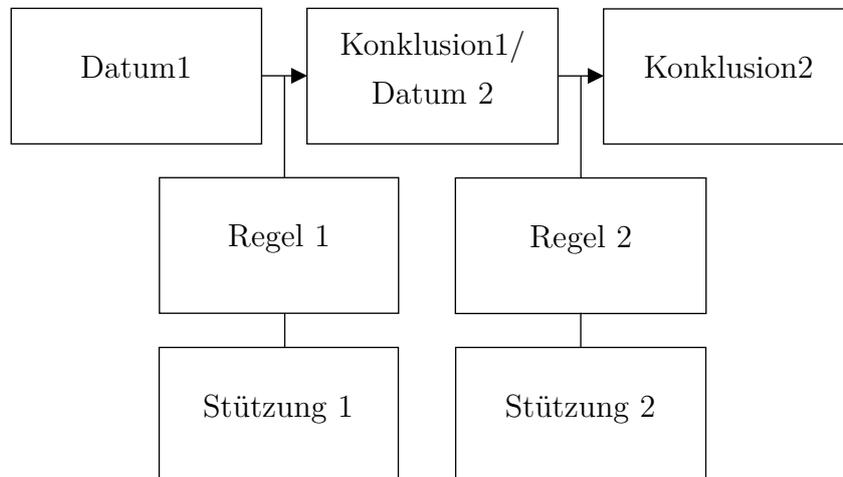


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung einer Argumentationskette in Anlehnung an Toulmin (2003)

Ist beispielsweise die Stützung der Regel für den Adressaten nicht einsichtig, so weitet sich der Begründungsbedarf aus (Meyer, 2007) und die Regel wird selbst zur Konklusion (Konklusion 2), die eines Datums (Datum 2) und wiederum einer Regel (Regel 2) bzw. einer Stützung (Stützung 2) bedarf (Abbildung 6.2).

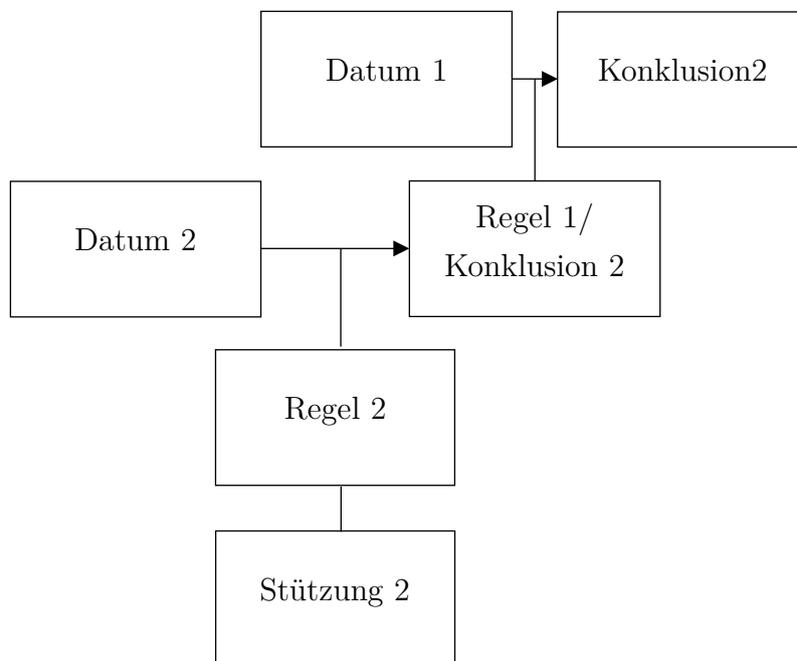


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung einer Argumentationskette in Anlehnung an Toulmin (2003)

„Argumente [im Kontext von mathematischen Begründungsaufgaben] können [...] aus beobachteten Mustern und Eigenschaften sowie aus Sätzen und symbolischen Manipulationen hervorgehen“ (Kirsten, 2021). Insgesamt entsteht eine kettenartige Struktur, in der ausgewählte Informationen, Mittel oder Ressourcen mit Hilfe von Regeln und Stützungen umgewandelt, weiter entwickelt (manipuliert) bzw. transformiert werden.

Während Toulmin (2003) eine Grundlage für fachunspezifische Argumentationsstrukturen bietet, übertragen neben Knipping (2003) auch andere Publizierende das Modell auf mathematische Begründungskontexte und widmen sich eher dem *Argumentieren* als Prozess innerhalb von mathematischen Begründungssituationen (u.a. Knipping, 2001;2003;2004;2008; Krummheuer, 1995; Brunner, 2013;2014; Pedemonte, 2007).

Knipping (2003) unterscheidet zwischen der *pragmatischen*, der *semantischen* und der *deduktiven/abduktiven* Argumentationsstruktur und differenziert die pragmatische Struktur in *konstruktiv* und *metrisch*, die semantische Struktur in *anschaulich*, *rechnerisch*, *metaphorisch* und *analogisch* und die deduktive/abduktive Struktur in *begrifflich* weiter aus.

Pragmatische Argumentationen beruhen auf Handlungen, die entweder

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

auf einer Konstruktion (konstruktiv), oder auf der Basis von Messungen (metrisch) basieren. In beiden Arten der pragmatischen Argumentation erfolgt die Schlussfolgerung handelnd, also entweder durch das Konstruieren oder durch das Ausmessen. Gemeinsam ist beiden die Nutzung von Beispielen, die als Schlussregel verwendet werden.

Die semantisch-anschaulichen Argumentationen sind vom Wechsel zwischen geometrischer und algebraischer Sichtweise geprägt (Knipping, 2003). Charakteristisch sind hier visuelle Repräsentationen, visuelle Garantien und die Bezugnahme auf diese Zeichnungen oder Veranschaulichungen innerhalb des Arguments. Die Schlussfolgerungen erfolgen nicht in einer logischen Kette, sondern werden anhand der visuellen Repräsentation gleichzeitig dargestellt. Die Konklusion ist dabei nicht ein Ergebnis von verschiedenen Schritten, sondern wird durch das Anfertigen der Zeichnung gleichzeitig sichtbar (Knipping, 2003).

Semantisch-rechnerisch ist ein Argument dann, wenn die Schlussfolgerung durch Rechenschritte bzw. Ausrechnen erfolgt.

Das semantisch-analogische Argument kann sich sowohl auf die Art der Schlussfolgerung als auch auf den Garantien beziehen. Es werden gleiche Garantien oder Schlussfolgerungen aus einer vorhergehenden Argumentation genutzt.

In einem deduktiv-begrifflichen Argument wird die Konklusion deduktiv geschlussfolgert und die Aussagen werden schrittweise begrifflich gefolgert. „Die [...] Garantien sind mathematische Begriffe bzw. durch Begriffe konstituierte mathematische Beziehungen“ (Knipping, 2003, S.124). Die Konklusion bekommt dabei den Status des neuen Arguments und wird als Datum recycelt. Die Garantien können sowohl implizit als auch explizit und bewusst als solche hervorgehoben werden.

Als weitere Form beschreibt Knipping (2003) die abduktiv-begriffliche Argumentation. Abduktiv wird das Argument, wenn vom Ziel aus rückwärts argumentiert wird. „Auf Basis eines Begriffs oder einer begrifflichen Beziehung wird auf ein Datum geschlossen“ (Knipping, 2003, S.133). Knipping (2003) verweist allerdings explizit darauf, dass diese Argumentationen insgesamt nicht formal-logisch verlaufen.

Zusammenfassend lassen sich aus den Betrachtungen also verschiedene Charakteristika für Argumentationsprozesse ableiten. Um ein Argument zu konstruieren und mehrere zu verknüpfen, können verschiedene Mittel genutzt werden: mathematische Begriffe, nicht-mathematische Bilder (Metaphern) und Beispiele. Diese wiederum werden in unterschiedlichen Repräsentationsformen dargestellt: Geometrische Figuren, Konstruktionen oder verbale Darstellungen. Je nach Repräsentationsebene und Art des genutzten Mittels erfolgt das Schließen mit Hilfe von Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten (deduk-

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

tiv), mit Hilfe des Abmessens (metrisch) oder auch konstruktiv (handelnd). Gleichzeitig kann das Schließen auch analog (analogisch) zu bereits gelösten Aufgabenstellungen stattfinden.

Neben der Betrachtung der Charakteristika des einzelnen Arguments können weiterhin sowohl das Zusammenspiel von Argumenten als auch Argumentationsprozesse an sich betrachtet werden. Knipping (2003) bietet in ihren Ausführungen eine Möglichkeit an, die Argumentationsprozesse global zu betrachten und damit das Zusammenspiel von Argumenten und die Verknüpfung dieser stärker in den Fokus zu nehmen. Sie unterscheidet dazu zwischen der *Quell-Struktur* und der *Bassin-Struktur*. In einer *Quell-Struktur* werden eine Vielzahl von verschiedenen Argumenten entwickelt. In einer *Bassin-Struktur* hingegen werden die Argumentationsstränge „einerseits linear vorwärts entwickelt und andererseits wird durch abduktive Schlüsse [...] rückwärts auf Aussagen geschlossen“ (Knipping, 2003, S.157). Reid und Knipping (2010) fügen später die *Reservoir-Structure* hinzu und beschreiben damit das Vorhandensein von Zwischenzielen innerhalb der Verknüpfung von Argumenten und eine Argumentation mit logischen Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen.

Wie bereits erläutert, betrachtet Brunner (2013;2014) den Prozess des Verknüpfens von Argumenten anhand verschiedener Merkmale, fasst damit verschiedenartige Argumentationsprozesse zusammen und subsumiert diese unter dem Begriff *Begründen* (Kapitel 4.1). Begründungen können sich besonders in Settings, in denen Lernende mathematische Beweise anfertigen, mit Hilfe von Argumenten in unterschiedlicher mathematischer und formaler Ausprägung entwickeln. Maßstab wird die *hinreichende Begründung*, die keine formale Strenge, sondern eine dem Lernstand adäquate Begründung anbietet (Brunner, 2013; Freudenthal, 1979). Brunner (2014) bietet ausgehend von dieser Überlegung ein Modell an, in dem sie nicht niveaustufenartig, sondern nebeneinander verschiedene Arten des Argumentierens näher betrachtet (Abbildung 4.1). Sie unterscheidet, wie bereits in Kapitel 4.1 dargestellt, zwischen dem *alltagsbezogenen Argumentieren*, dem *Argumentieren mit mathematischen Mitteln* und dem *logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln*.

Das *alltagsbezogene Argumentieren* „folgt den Regeln des jeweiligen Kontextes und zielt darauf ab, die Annahme oder Ablehnung eines bestimmten Standpunktes zu erreichen“ (Brunner, 2014, S.30). Genutzt werden dafür auch Begründungsarten, die den mathematischen Konventionen nicht entsprechen, wie beispielsweise der *Wahrscheinlichkeitsschluss*, die *Berufung auf eine Autorität* oder *Analogieschluss* (Brunner, 2014) (Abbildung 4.1). Charakteristisch für das *mathematische Argumentieren* sind einerseits die Exploration und andererseits Tätigkeiten, die zur Absicherung einer als plausibel angenommenen Behauptung dienen (Reiss & Ufer, 2009). Bestandteil dieser Prozesse ist nicht zwingend das logische Schließen aber die Verwendung von mathematischen

Mitteln.

Mathematisches Argumentieren wird als domänenspezifische Form des Argumentierens betrachtet, die gekennzeichnet ist von der Verwendung verschiedener für die Mathematik typischen Techniken, Methoden und Konzepten wie beispielsweise die Verwendung von Definitionen und Eigenschaften von mathematischen Objekten, Axiomen oder mathematikspezifischen Verfahren und damit symbolischer Sprache, innerer Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten. Mathematische Mittel müssen dabei aber nicht zwingend formale Mittel umfassen, sondern können auch in anderer Form, wie beispielsweise in verbaler Form vorliegen (Brunner, 2014). Beim *logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln* wird streng logisches Vorgehen verlangt, formale Mittel sind aber ebenfalls nicht zwingend.

Argumentieren insgesamt ist eine Begründungsform, die vorläufige Beweisformen umfasst, wie sie sich bei Lernenden unterschiedlichsten Niveaus und Altersklassen beobachten lassen. Charakteristisch ist das Fehlen von formaler Strenge. Unterschieden werden kann dabei zwischen einschrittigen und mehrschrittigen Argumentationen. In diesem Zusammenhang wird das formal-deduktive Beweisen als weitere Begründungsform neben dem *Argumentieren* betrachtet (Abbildung 4.1). Diese Überlegung ergibt sich aus den Betrachtungen von Brunner (2014) und ihrer Annäherung an den Begriff *Begründen*, aber auch aus den Ausführungen bei Meyer und Prediger (2009). In Abbildung 6.3 wird anhand eines Beispiels sichtbar, dass das Toulmin Schema auch genutzt wird, um eine formal-deduktive Argumentation zu rekonstruieren. Die Systematisierung nach Gerloff (2021) (Kapitel 4.1) wird damit um die Begründungsform *formal-deduktives Beweisen* neben dem von ihr beschriebenen *Argumentieren* als eine Begründungsform ergänzt.

In der Abbildung 6.3 wird der Term $2x + 1 + 2x + 1$ umgeformt zu $4x + 2$. Genutzt werden dafür Schlussregeln, die sich auf das Assoziativgesetz, die Definition der Addition und das Distributivgesetz stützen.

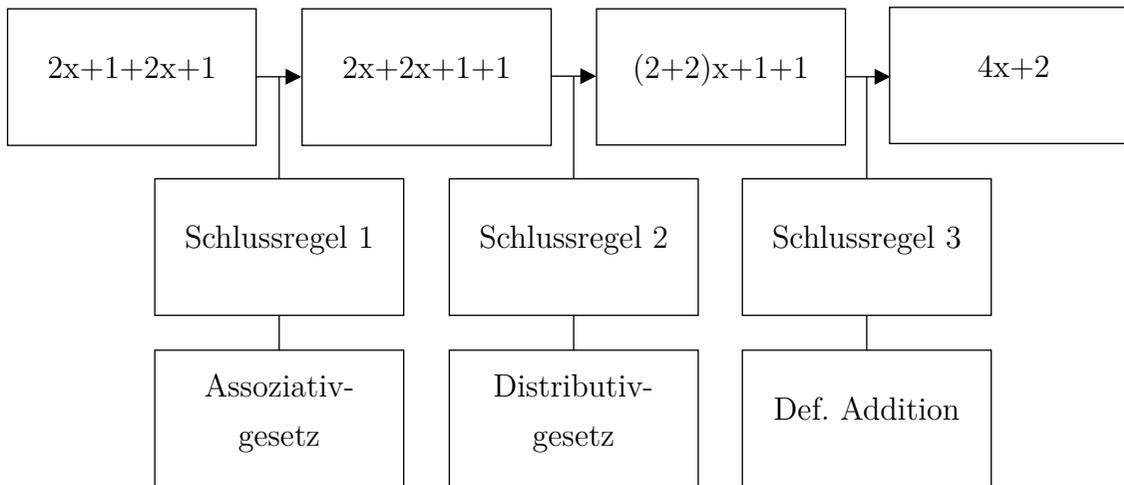


Abbildung 6.3: Rekonstruktion einer deduktiven Argumentationskette mit Hilfe des Toulmin Schemas in Anlehnung an Meyer und Prediger (2009)

6.2 Logisches Schließen und andere Schlussweisen

Um eine Behauptung im mathematischen Kontext begründen zu können, wurde bisher konstatiert, dass der Prozess auf Basis des Modells nach Brunner (2014) grundlegend zwischen vier verschiedenen Formen unterschieden werden kann. Durch das *Argumentieren* in den verschiedenen Formen nach Brunner (2014) alltagsbezogenes Argumentieren, Argumentieren mit mathematischen Mitteln und logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln oder dem formal-deduktiven Beweisen soll eine Argumentationskette entwickelt werden, die die Allgemeingültigkeit einer Behauptung ausweist (Brunner, 2013) und damit begründet. Diese Validierung der Aussage erfolgt über Aktivitäten des *logischen Schließens*.

Mit Hilfe des Modells nach Brunner (2014) können den Formen, die das Denken beim logischen Schließen annimmt, so genannten Denkrichtungen zugeordnet werden. Das Denken auf der Suche nach der Allgemeingültigkeit, [also das Argumentieren und das formal-deduktive Beweisen] kann verschiedene Richtungen einschlagen“ (Brunner, 2013, S.108). Das logische Schließen ist dabei im Sinne des Denkens als innerliche Verarbeitung mit dem Ziel des Erkenntnisgewinns zu sehen (Kapitel 4.4). Es ist aber kein kognitiver Prozess in dem Sinne, sondern beschreibt eher die Anwendung von Regeln unabhängig vom Inhalt der Aussage (Oerter & Dreher, 2006).

Es ist aber anzunehmen, dass hinter diesem Schließen konkrete Denkschritte stecken, die vom Individuum durchgeführt werden. Das logische Schließen als Prozess verbindet die Ausgangslage und Zielsetzung unter der Anwendung von Schlussregeln untereinander. Die Ausgangslage ist dabei fehlende Gewissheit darüber, ob die Behauptung zutrifft oder nicht (Brunner, 2014). In Begründungsaufgaben ist der kognitive Konflikt das Problem (Kapitel 4.2), welches überwunden werden muss und durch die Aufgabenstellung erzeugt wird. Der Zielzustand beschreibt die Gewissheit darüber, dass die Behauptung gilt.

In der Literatur finden sich verschiedene Unterscheidungen, die Arten des logischen Schließens bzw. Denkrichtungen nach ihrer Art ausdifferenzieren. So unterscheiden Pierce (1985) zwischen *deduktiv* und *synthetisch* und fassen unter letzterem die *Induktion* und die *Hypothese*. Polya (1949) unterscheidet zwischen *plausibel*, *analog*, *induktiv*, *deduktiv*, *transitiv* und *demonstrativ*. Plausibles und analoges Schließen werden in Anlehnung an Brunner (2014) zu dem Prozess des alltagsbezogenen Argumentierens und der Begründungsart der Berufung auf Autorität, Wahrscheinlichkeitsschluss und Analogieschluss zugeordnet (Abbildung 4.1). Aktivitäten und Denkrichtungen werden in

Kapitel 6.2.1 näher betrachtet. Ebenso wird das demonstrative Schließen zu diesen Begründungsarten zugeordnet.

Aktivitäten des induktiven Schließens werden im folgenden in Kapitel 6.2.2 genauer dargestellt. Nach Brunner (2014) werden sie den Prozessen Argumentieren mit mathematischen Mitteln und dem logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln zugeordnet. Für das hier dargestellte Projekt soll in Anlehnung an Brunner (2014) und Polya (1949) das transitive Schließen als eine spezifische Art des deduktiven Schließens betrachtet werden. Schließlich erfolgt in Kapitel 6.2.2 eine nähere Auseinandersetzung mit dem deduktiven Schließen und dem formal-deduktiven Beweisen.

6.2.1 Berufung auf Autorität, Analogieschluss und Wahrscheinlichkeitsschluss beim alltagsbezogenen Argumentieren

Brunner (2014) unterscheidet im Rückgriff auf Malle (2002) und Bürger (1979) zwischen der *Berufung auf Autorität*, dem *Wahrscheinlichkeitsschluss* und dem *Analogieschluss* als Möglichkeiten des Schließens und ordnet diese Denkrichtungen dem Prozess des alltagsbezogenen Argumentierens zu.

Erfolgt das Schließen mit Berufung auf eine Autorität, so wird die Korrektheit der Aussage lediglich damit begründet, dass eine Person oder ein vertrauenswürdigen Medium die Wahrheit der Behauptung zeigt. Harel und Sowder (1998) differenzieren zwischen verschiedenen *proof schemes* und identifizieren dabei den *external conviction proof scheme*, untergliedert in *ritual*, *authoritarian* und *symbolic*. Das Individuum nutzt in den Lehrveranstaltungen erlernte oder in Büchern gelesene Strukturen, Argumente oder Darstellungen, um die Allgemeingültigkeit rituell und/oder auch mit Hilfe der Nutzung einer als wichtig betrachteten äußeren Form, um die Begründung zu erstellen (Harel & Sowder, 1998).

Wird für die *Verifikation* bzw. die *Falsifikation* einer Aussage ein ‚ritual proof scheme‘ genutzt, so wird die Nützlichkeit und Richtigkeit von Argumenten anhand der äußeren Form bzw. äußeren Erscheinung begründet. Es wird damit die Form der Begründung betont und dem Inhalt der Argumente wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Nutzt das Individuum einen ‚authoritarian proof scheme‘ so wird die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Behauptung mit Hilfe von in Lehrbüchern zu findenden Begründungen oder durch die Aussage von Lehrenden begründet. Im hier vorliegenden Projekt kann die Rechtfertigungsgrundlage auf Inhalte aus Lehrveranstaltungen ergänzt werden. Ein ‚symbolic proof scheme‘ nach Harel und Sowder (1998) beschreibt die Nutzung von symbolischen Argumenten, die mathematisch leer oder oberflächlich sind.

Die Darstellungen werden losgelöst von ihrer Funktion und Quantität genutzt. Diese Kategorie entsteht aus der Überzeugung von Studierenden, dass eine bloße Form einen Beweis als allgemeingültig ausweist. „In a symbolic proof scheme, the convincing is by symbolic manipulation, behind which there may or may not be meaning“ (Housman & Porter, 2003).

Der Wahrscheinlichkeitsschluss spielt ebenfalls im Alltag eine Rolle und erinnert eher an das von Polya (1954) beschriebene plausible Schließen. Hier werden plausible Vermutungen gegeneinander abgewogen und Argumente für oder gegen die Gültigkeit zusammen gestellt. Bei Polya (1954) wird das plausible Schließen zu einer Art Voraussetzung für weitere Prüfprozesse, die dann dem demonstrativen Schließen zuzuordnen sind.

Laut Brunner (2014) soll das plausible Schließen in Verbindung mit Abwägungsprozessen aber auch allein stehen können und als mögliche Denkrichtung in mathematischen Begründungsprozessen aufgefasst werden. Die Stützung der Behauptung wird hierbei über die Plausibilität und der Wahrscheinlichkeit der Wahrheit der Behauptung entwickelt. Auch der Analogieschluss hat einen Alltagsbezug. Es besteht hier die Voraussetzung, dass die Strukturgleichheit von verschiedenen Problemen erkannt und die Begründung auf das neue Problem transferiert wird. Der Analogieschluss wird genutzt, wenn eine Strukturgleichheit zwischen der gestellten Aufgabe und einem vorhergehenden Beispiel erkannt und für eine weitere Begründung genutzt wird. Die Analogie ist dabei als eine Art von Ähnlichkeit zu betrachten. Zwei Objekte oder Systeme sind ähnlich, wenn sie miteinander bezüglich klar definierter Eigenschaften in Beziehung stehen (Polya, 1954).

6.2.2 Induktive Denkrichtung im Prozess des (logischen) Argumentierens mit mathematischen Mitteln

Die *induktive Denkrichtung* ordnet Brunner (2014) in ihrem Modell (Abbildung 4.1) dem Argumentieren mit mathematischen Mitteln und dem logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln zu. Das zentrale Moment beim induktiven Schließen ist die Beobachtung (Polya, 1954) eines Phänomens und der „anschließende Versuch, nachfolgende Ereignisse kausal zu interpretieren“ (Brunner, 2013, S.81). Der induktive Schluss geht vom singulären Fall zum Allgemeinen, nutzt das vorhandene Wissen, um Unbekanntes zu begründen (Reid & Knipping, 2010; Dewey, 2002) und beschreibt das Generieren einer Regel aus dem singulären Fall (Peirce, 1985). Dabei wird demnach von einem Fall und einem Ergebnis auf eine Regel geschlossen, welches nachfolgend anhand des Beispiels von Peirce (1985) illustriert wird.

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

Fall	Diese Bohnen sind aus diesem Sack.
Ergebnis	Diese Bohnen sind weiß.
Regel	Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß.

Aus der Beobachtung, dass die Bohnen, die aus dem Sack genommen wurden (Fall), weiß sind (Ergebnis), wird geschlossen, dass alle Bohnen im Sack weiß sind.

Peirce (1985) definiert als *Induktion* zum einen das Schließen oder *Verallgemeinern* von einer Anzahl Fällen, an denen etwas wahr ist, dass dieselbe Wahrheit auch für die ganze Klasse gilt und zum anderen, dass „etwas in einer bestimmten Proportion der Fälle wahr ist und folgern, da[ß] es im selben Verhältnis für die ganze Klasse wahr ist“ (Peirce, 1985).

Grundsätzlich wird im Kontext der Mathematik konstatiert, dass es nur möglich ist, mit Hilfe beispielsweise des Verfahrens der vollständigen Induktion Allgemeingültigkeit zu erlangen, ein rein induktiver Schluss jedoch nur als wahrscheinlich aber nicht als sicher bewertet werden kann (Reid & Knipping, 2010). Die von Peirce (1985) beschriebene ‚bestimmte Proportion der Fälle‘, erscheint eng verbunden mit mathematikdidaktischen Ideen der Extraktion von Mustern und Strukturen als Grundlage für die Begründung, die als Verallgemeinern betrachtet wird. Die Struktur der Induktion, aus einem oder mehreren singulären Fällen auf eine Klasse zu schließen, ist ähnlich der des Verallgemeinerns (Dumitrascu, 2017) und findet sich in verschiedenen Betrachtungen zu mathematischen und mathematikdidaktischen Zusammenhängen wieder. Oft und so auch bei Dumitrascu (2017) wird das Verallgemeinern wie folgt verstanden: „a duality between going from particular to general and seeing the particular through the general“ (S.49).

Grundsätzlich wird der Begriff der Verallgemeinerung und der damit verbundenen Tätigkeit des Verallgemeinerns nicht nur in wissenschaftlichen Disziplinen, sondern auch alltagssprachlich verwendet und kann mit dem Ausdruck ‚etwas-allgemein(er)-machen‘ umschrieben werden (Akinwunmi, 2012). Verallgemeinern im nicht-fachspezifischen Kontext bezeichnet das Aufstellen von allgemeingültigen Modellen, Konzepten oder dergleichen aus einzelnen oder mehreren vorher betrachteten Fällen heraus.

Verallgemeinerung wird im Kontext der Mathematik oft verwendet und bezeichnet dort eine allgemeine Formulierung einer wahren mathematischen Aussage bezogen auf die Klasse von Elementen, für die diese Aussage gilt. Es beschreibt demnach das Verschieben von Beobachtungen an Einzelfällen hin zur Betrachtung von Mustern, Beziehungen und Strukturen, die diese verbinden (Kaput, 1999; Ellis, 2011; Jurow, 2004). Das erkannte Muster in der singulären Situation wird allgemeingültig ausgeweitet (Jurow, 2004). Verallgemeinern, in englischsprachiger Literatur ‚generalization‘ oder ‚generalizing‘,

wird nicht nur als zentrales Element der Fachwissenschaft, sondern auch als zentrales Element des Mathematikunterrichts (Mason, 1996) bezeichnet und ist das, was der Mathematik automatisch innewohnt und beschreibt, was das Denken zu einem mathematischen Denken macht (Kaput, 1999). Es wird damit auch zur Voraussetzung, um Mathematik zu erlernen (Krutetskii et al., 1976) und durch die Gestaltung von Lernsituationen und Lernaufgaben in didaktischen Situationen im schul- aber auch im hochschuldidaktischen Kontext entwickelt und thematisiert (Juwow, 2004; Rossi Becker & Rivera, 2005; Dumitrascu, 2017).

In mathematikdidaktischen Kontexten wird der Prozess des Verallgemeinerns genauer betrachtet und wird bezüglich seiner Merkmale und Erscheinungsform in Bezug zu anderen mathematischen Tätigkeiten gesetzt. Verallgemeinern gilt als Zugang zur Algebra (Kieran, 1989; Radford, 2006; Mason, 1996; Mason et al., 2005; Fischer et al., 2010; Akinwunmi, 2011;2012; Sfard, 1995) bzw. als das Herleiten eines allgemeinen Musters oder Zusammenhangs aus Einzelfällen und als das Erfassen von Gemeinsamkeiten aller Fälle (Fischer et al., 2010). Abgegrenzt wird das Verallgemeinern hier vom Abstrahieren, Strukturieren, Darstellen oder Konstruieren und wird mit all diesen Denkhandlungen als *algebraisches Denken* zusammengefasst (Fischer et al., 2010). Es wird zu einer Tätigkeit, die „aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herleitend – das allen Gemeinsame erfass[t]“ (Fischer et al., 2010, S.2).

Weiterhin wird das Verallgemeinern als *thinking mathematically* in einen Kanon aus mathematischen Denkweisen (*mode of thought*) eingeordnet (Niss, 2005). Im Kontext des mathematischen *Begründens* wird die induktive Denkrichtung und damit auch das Verallgemeinern konkret oder implizit als Beschreibung von Prozessen genutzt (Brunner, 2014) und wird Thema besonders im Bereich der generischen Begründungstypen (Brunner, 2013;2014; Wittmann & Müller, 1988; Padberg & Büchter, 2015) (Kapitel 7.2). Padberg und Büchter (2015) nutzen sogar den Begriff der Verallgemeinerung explizit und beschreiben damit die Ausweitung der vorher für ein singuläres Beispiel exemplarisch angefertigten Begründung.

Lesseig (2016) sieht das Verallgemeinern als eine von drei grundlegenden Prozessen, die dem Beweisen zugrunde liegen und es den Lernenden ermöglichen flexibel und weiterführend über mathematische Ideen nachzudenken und damit Probleme zu lösen. *Generalization* sind neben *conjecturing* und *justifying* in der Beweisprozessphase Teilprozesse, die es Lernenden ermöglichen, mathematische Schlussfolgerungen zu ziehen. Dieses Schlussfolgern inkludiert das *Identifizieren von Mustern*, *Vermutungen anstellen*, diese *an Beispielen testen*, *Argumente anbieten* und *Beweise konstruieren* (Stylianides, 2007;2009).

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

Verallgemeinern ist insgesamt zu betrachten als das Identifizieren von Gemeinsamkeiten über Einzelfälle hinweg und die Erweiterung mathematischen Schlussfolgerns, um eine größere Klasse von Objekten zu betrachten (Ellis, 2011). Genutzt werden diese Aktivitäten sowohl in der Satzfindungsphase als auch in der Beweisprozessphase (Stein, 1986; Kirsten, 2021). In ersterer werden mathematische Muster erkannt und Vermutungen über Zusammenhänge angestellt während anschließend durch den Begründungsprozess Gewissheit über ihre Gültigkeit erlangt wird. Es ist auf Basis der Cognitive Unity Theorie anzunehmen, dass auch in der Beweisprozessphase Aktivitäten aus der Satzfindungsphase erneut stattfinden, da in dieser Phase die Entdeckung des Musters und der Zusammenhänge rekonstruiert wird (Bussi et al., 2007; Kirsten, 2021).

Insgesamt geht es beim Verallgemeinern demnach um das

„Erfassen der wesentlichen (vom mathematischen Standpunkt oder Gesichtspunkt aus) Strukturen und Beziehungen einer vorgelegten problemhaltigen Situation in einer von dieser Situation abgelösten Form, die ein denkendes Operieren mit diesen Strukturen und Beziehungen in [...] verschiedenen Situationen ermöglicht“ (Dörfler, 1984; Klammersetzung im Original)

und beinhaltet folgende Kernprozesse. Es setzt das Erkennen von *Gleichheit* und *Unterschiedlichkeit* von konkreten Fällen voraus (Dreyfus, 1991; Setiawan et al., 2019). Mit Hilfe der Analyse von Beispielen (Davydov, 1990; Rubinstein, 1972) trennen die Lernenden unwesentliche von wesentlichen Merkmalen und Eigenschaften (Jurov, 2004). Diese Reflexionsprozesse über die Beziehungen und Strukturen der Einzelfälle machen es möglich Konzepte zu entwickeln und Muster zu sehen (Davydov, 1990; Kaput, 1999; Ellis, 2011; Setiawan et al., 2019). Werden die Merkmale des induktiven Schließens mit denen des Verallgemeinerns verglichen, so können beide Prozesse als ähnlich bezeichnet werden.

„[Generalizing] deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situation themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relationship across and among them “ (Kaput, 1999, S.136).

Um die Kernprozesse des Verallgemeinerns genauer zu betrachten und um später *Strategien* im hier beschriebenen Verständnis (Kapitel 4.4) zu extrahieren, sollen im Folgenden besonders kognitionspsychologische Perspektiven

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

konsultiert und die Tätigkeit des Verallgemeinerns als ein System von Aktivitäten betrachtet werden. Der Begriff des Aktivitätensystems wurzelt in der Activity Theory, einem auf Rubinstein (1972) basierenden und durch verschiedene Publizierende wie Leontjew (1978) und Vygotski (1969) erweiterten sozialwissenschaftlichen Theoriekorpus. Die Activity Theory beschreibt aus psychologischer Sicht menschliche Aktivitäten als ein *Aktivitätensystem*, bestehend aus *Synthese-* und *Analyseaktivitäten*. Der Denkprozess des Verallgemeinerns wird als ein wechselseitig verbundenes Zusammenspiel von Analyse der Situation im weitesten Sinne und Synthese der gewonnenen Daten im Sinne eines Zusammenfassens der Wirklichkeit verstanden (Rubinstein, 1972).

Der Analyseprozess beschreibt zunächst das Filtern von Gemeinsamkeiten und das Identifizieren dieser als Bestandteil der Klasse (Davydov, 1990). Der Prozess des Identifizierens setzt wiederum das nahezu vollständige Erkennen der Eigenschaften voraus und erfordert das Trennen von wesentlichen und unwesentlichen Merkmalen (Jurow, 2004). Es setzt also die Fähigkeit voraus in der Situation aber auch situationsübergreifend unwichtiges zu ignorieren und relevante Informationen zu nutzen (Jurow, 2004). Um wichtiges von unwichtigem zu trennen, müssen bestimmten Informationen eine Bedeutung verliehen werden. Das Erkennen von Mustern und Regelmäßigkeiten macht es für das Individuum möglich der Vielzahl von Eindrücken eine Bedeutung zu verleihen (Burton, 1984). Die Analyse steht aber nicht für sich allein, sondern erfolgt größtenteils über einen synthetischen Akt, der die Bedingungen der Situation oder Aufgabe zu den Forderungen in Beziehung setzt (Rubinstein, 1972).

Die Analyse ist stets nicht nur Zergliederung von Teilen, Elementen und Eigenschaften und bewirkt damit einen Zerfall des Ganzen, sondern ist auch eine Analyse der Zusammenhänge der Teile und Elemente (Rubinstein, 1972). Die Analyse wird damit zu einer Umstrukturierung und damit wiederum auch zu einer Syntheseaktivität (Rubinstein, 1972). Im Syntheseprozess werden die zuvor durch die Analyse extrahierten und zergliederten Gesetzmäßigkeiten und Eigenschaften der Erscheinung zueinander in Beziehung gesetzt (Peschek, 1989). Analyse und Synthese sind aber nicht zwei getrennt voneinander ablaufende Prozesse, sondern eher zwei Aspekte (Rubinstein, 1972) bzw. zwei Phasen (Peschek, 1989) eines Denkprozesses, die durch den Prozess der Abstraktion begleitet werden (Rubinstein, 1972). Innerhalb der Phase der Synthese werden die bereits erkannten Eigenschaften genutzt, um ein neues System zu kreieren (Davydov, 1990). Die Analyse erfolgt über die Synthese und die Synthese über die Analyse (Rubinstein, 1972). Anderson et al. (2011) fassen in ihren Ausführungen den Prozess als ein Zerlegen von Material in seine Bestandteile und das Erkennen des Verhältnisses der Teile zueinander

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

und zum Zweck zu einer Gesamtstruktur oder einem Zweck. Die Abstraktion ist in diesem Aktivitätensystem der

„kognitive Prozess, in dem einzelne Bestimmungen (Merkmale, Elemente, Eigenschaften, Zustände, Abhängigkeiten) von objektiv existierenden oder auch nur gedachten Objekten, Situationen, Handlungen zum Aufbau eines kognitiven Konstrukts herangezogen werden“ (Peschek, 1989, S.236).

Der Abstraktionsprozess zeigt sich zum einen darin, dass wesentliche Eigenschaften der Situation oder des Gegenstandes in ihrem wechselseitigen Zusammenhang geklärt werden (Peschek, 1989) und zum anderen im Bewusstmachen von Gemeinsamkeiten (Skemp, 1986). Der Abstraktionsprozess wird zu einem zentralen Element, wenn die Ausprägung der Analyse, der Synthese und des Verallgemeinerungsprozesses sichtbar gemacht werden soll. Aus den vorangegangenen Ausführungen lassen sich folgende Aktivitäten für Verallgemeinerungsprozesse ableiten:

- Analyse von Gemeinsamkeiten und Unterschieden, indem wesentliche von unwesentlichen Merkmalen getrennt werden
- Analyse der Zusammenhänge der Objekte oder der Situation
- Syntheseaktivitäten zum Aufbau eines neuen Systems
- Aufbau eines kognitiven Konstrukts über Abstraktionsprozesse

Aus den vorherigen Ausführungen sollen zwei Aspekte für die nachfolgenden Überlegungen besonders heraus gestellt werden. Grundsätzlich wurde bei Peirce (1985) dargestellt, dass durch das induktive Schließen oder das Verallgemeinern die Wahrheit, die für singuläre Fälle konstatiert wurde, auch für eine ganze Klasse an Fällen geschlossen werden kann. Außerdem ergänzt Peirce (1985), dass auch ein bestimmtes Verhältnis oder eine ‚bestimmte Proportion zwischen den Fällen‘ für das Verhältnis aller Fälle in einer Klasse an Fällen als wahr angenommen werden kann. Es können demnach auch durch das Erkennen von Zusammenhängen oder Strukturen zwischen den einzelnen Objekten in der Situation auf die ganze Klasse der Fälle geschlossen werden. Außerdem kann ausgehend von Rubinstein (1972) zwischen einer *empirischen* (oder auch *elementaren* oder *sinnlichen*) Abstraktion und einer *theoretischen* (oder auch *wissenschaftlichen*) Abstraktion unterschieden werden. Je nach Ausprägung der Teilprozesse kann schlussfolgernd daraus zwischen dem *empirischen* und dem *theoretischen Verallgemeinern* unterschieden

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

werden (Krutetskii et al., 1976; Rubinstein, 1972; Dumitrascu, 2017; Dörfler, 1984;1991; Davydov, 1977; Peschek, 1989). Das empirische Verallgemeinern setzt bei wahrnehmbaren Merkmalen an und beginnt mit einer Aufmerksamkeitsfokussierung auf bestimmte Merkmale oder Merkmalsausprägungen eines Objektes oder einer mathematischen (Begründungs-) Situation (Peschek, 1989) und beschreibt damit einen Prozess des Vergleichens von mehreren Gegenständen oder Erscheinungen (Peschek, 1989; Dörfler, 1991). „Empirical generalization [...] is the result of comparing and identifying the external characteristics that are similar or identical to things“ (Dumitrascu, 2017, S.48). Peschek (1989) sieht hier die direkte sinnliche Wahrnehmbarkeit der Merkmale wie beispielsweise Farbe und Größe als Voraussetzung für das Erkennen des Musters. Krutetskii et al. (1976) und Dumitrascu (2017) schließen dabei aber auch so genannte *leicht sinnlich wahrnehmbare Eigenschaften* mit ein und fassen den Begriff weiter. Dadurch werden auch Ergebnisse, die durch mathematische Grundkenntnisse wie Rechnen im Bereich der natürlichen Zahlen bei Erwachsenen in einem Studienkontext eingesehen werden können, zu leicht sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften neben Größe oder Farbe. Aufbauend auf den bisherigen Ausführungen kann daraus das folgende Vorgehen geschlossen werden. Übertragen auf mathematische Begründungssituationen, bei deren Bearbeitung induktive Denkrichtungen genutzt werden, bedeutet dies, dass versucht wird die Essenz des Musters, welche für die Begründung herausgearbeitet wird, mit Hilfe des Aufstellens von verschiedenen Beispielen zu erarbeiten. Es werden, wie im nachfolgenden Beispiel illustriert, Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen der Rechnungen in Zeile 1-3, die als leicht sinnlich wahrnehmbare Eigenschaften betrachtet werden können, als Basis für die Erarbeitung des relevanten Musters genutzt. Das Muster wiederum soll anschließend als Basis für die Ausweitung der Begründung auf alle Fälle, also als Verallgemeinerung dienen.

Es wurde folgende Behauptung formuliert.

Die Summe von zwei aufeinander folgenden ungeraden natürlichen Zahlen, beginnend bei 3, ist gerade.

Aufgestellt werden dazu von der Person, welche empirisch verallgemeinert, folgende Beispiele.

$$\begin{array}{ll} \text{Zeile 1} & 3 + 5 = 8 \\ \text{Zeile 2} & 5 + 7 = 12 \\ \text{Zeile 3} & 7 + 9 = 16 \end{array}$$

Versuchen die Begründenden nun empirisch zu verallgemeinern und nutzen dafür leicht sinnlich wahrnehmbare Eigenschaften, so wird konstatiert, dass

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

sich das Ergebnis von Zeile zu Zeile erhöht. Die Differenz der Ergebnisse bleibt einer Zeile zur nächsten bei 4. Das Ergebnis in Zeile 1 ist 8 und in Zeile 2 ist das Ergebnis 12. Die Differenz zwischen beiden Ergebnissen ist 4. Von Zeile 2 zu Zeile 3 ist die Differenz der Ergebnisse ebenfalls 4. Die Begründenden, die empirisch verallgemeinern und leicht sinnlich wahrnehmbare Eigenschaften mit Hilfe der Betrachtung von mehreren Beispielen herausarbeiten, extrahieren dieses Muster und nutzen es zur Ausweitung der Begründung für den in der Behauptung dargestellten Zusammenhang. Als Begründung genutzt werden könnte beispielsweise das Argument, dass 4 eine gerade Zahl ist und, wenn die Summe von zwei geraden Zahlen gebildet wird, sich ebenfalls auch wieder eine gerade Zahl ergibt. Bei diesem Argument wird jedoch außer Acht gelassen, dass sich nicht ohne Begründung schlussfolgern lässt, dass der erste Summand, dem 4 hinzugefügt wird, schon eine gerade Zahl ist. Das Vorgehen ist demnach für diese Aufgabe nicht tragfähig bzw. unvollständig.

Das empirische Verallgemeinern umfasst aber neben der beschriebenen Vorgehensweise noch eine weitere Möglichkeit der Ausprägung. Es ist auch möglich, dass die Begründenden die für die Begründung relevante Struktur innerhalb mehrerer Beispiele suchen. Aufgestellt werden dazu wieder folgende Beispiele.

$$\begin{array}{l} \text{Zeile 1} \quad 3 + 5 = 8 \\ \text{Zeile 2} \quad 5 + 7 = 12 \\ \text{Zeile 3} \quad 7 + 9 = 16 \end{array}$$

Genutzt wird das Wissen über die Struktur von ungeraden und geraden Zahlen. Es erfolgt also im nächsten Schritt die folgende Aufschlüsselung der Beispiele, indem die Summanden als Vielfaches von zwei minus 1 bzw. als Vielfaches von zwei plus 1 dargestellt werden, um zum einen die Struktur einer ungeraden Zahl als auch die Eigenschaft des Aufeinanderfolgens darzustellen.

$$\begin{array}{l} \text{Zeile 1} \quad 3 + 5 = 8 \text{ wird zu} \quad 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 + 1 \\ \text{Zeile 2} \quad 5 + 7 = 12 \text{ wird zu} \quad 2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 3 + 1 \\ \text{Zeile 3} \quad 7 + 9 = 16 \text{ wird zu} \quad 2 \cdot 4 - 1 + 2 \cdot 4 + 1 \end{array}$$

Wird empirisch verallgemeinert, so wird im Beispiel in Zeile 1 erkannt, dass sich durch die Nutzung von Rechengesetzen im Bereich der natürlichen Zahlen, ein Vielfaches von 2 ergibt, da sich +1 und -1 gegenseitig aufheben. Die gleiche Erkenntnis wird in Zeile 2 und Zeile 3 gewonnen. Die relevante Struktur wird mit Hilfe der Struktur, die in mehreren Beispielen gefunden und verglichen wird, erkannt. Die Eigenschaft, dass sich immer ein Vielfaches von 2 ergibt

und sich +1 und -1 gegenseitig aufheben, wird leicht sinnlich wahrnehmbar und wird in mehreren Beispielen gefunden und als das wesentliche neben anderen unwesentlichen Merkmalen konstatiert.

Auch wenn das empirische Verallgemeinern sowohl in den Beispielen als auch in den Ausführungen von Krutetskii et al. (1976) zum Teil als nicht tragfähig oder nicht vollständig bewertet wird, soll es für das vorliegende Projekt als mögliches Vorgehen eingeschlossen werden.

Das theoretische Verallgemeinern überschreitet den Rahmen des sinnlich Willkürlichen und gelangt so zu den gesetzmäßig notwendigen Zusammenhängen in der jeweiligen Erscheinung (Peschek, 1989). Im Gegensatz zu Ergebnissen eines empirischen Verallgemeinerungsprozesses wird hier das Wesentliche dieser Erscheinungen entdeckt (Rubinstein, 1972). Das mathematische Muster als ‚das Wesentliche‘ wird hier durch das Entdecken von internen Zusammenhängen, Verbindungen und Beziehungen innerhalb eines Beispiels herausgearbeitet (Dumitrascu, 2017). Für die Begründenden würde hier also ein Beispiel genügen, um die Struktur zu erkennen.

Das theoretische Verallgemeinern beschreibt das allgemeingültige *Begründen* unter Nutzung der inneren Struktur der relevanten mathematischen Gegenstände und ihren zur Aufgabe zugehörigen Beziehungen. Am oben beschriebenen Beispiel würde das Individuum demnach nicht das Muster zwischen den Beispielen suchen, sondern würde die Struktur aus einem Beispiel generieren. Im Folgenden wird in Zeile 1 ein Beispiel notiert und mit Hilfe der Kenntnis der Eigenschaften von geraden und ungeraden Zahlen aufgeschlüsselt.

$$\text{Zeile 1} \quad 3 + 5 = 8 \quad \text{ist darstellbar als } 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 + 1$$

Theoretisch verallgemeinert wird dann, wenn die Eigenschaft der ungeraden Zahl durch die Darstellung $(2n - 1)$ und $(2n + 1)$ gezielt genutzt wird, um die Beispiele zu manipulieren und die Struktur sichtbar zu machen. Der Unterschied zwischen der zweiten Vorgehensweise beim empirischen Verallgemeinern und dem theoretischen Verallgemeinern ist das zufällige und willkürliche Nutzen von sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften versus der gezielten Anwendung der Struktur der ungeraden Zahlen.

6.2.3 Deduktives Schließen

Das *deduktive Schließen* wird in der Mathematik als zentrale Schlussweise angenommen und im Modell nach Brunner (2013;2014) vor allem dem Prozess formal-deduktives Beweisen zugeordnet. Das Denken nimmt innerhalb dieses Prozesses eine deduktive Denkrichtung an (Brunner, 2014). Die Deduktion

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

ist die Anwendung einer allgemeinen Regel auf einen besonderen Fall (Peirce, 1985), wie im folgenden Beispiel illustriert werden soll.

Regel	Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß.
Fall	Diese Bohnen sind aus diesem Sack.
Ergebnis	Diese Bohnen sind weiß.

Es wird zunächst die Regel formuliert, dass alle Bohnen aus diesem Sack weiß sind. Anschließend wird der Fall der Bohnen aus einem spezifischen Sack betrachtet. Die Schlussfolgerung, die daraus gezogen werden kann, ist, dass diese Bohnen im Sack weiß sein müssen. Die deduktive Denkrichtung ist die Richtung, die das Denken annimmt, wenn der Prozess des formal-deduktiven Beweisens abläuft (Kapitel 6.1). Durch das deduktive Schließen wird in einem formalen System formuliertes Axiom mit Hilfe von definierten Umformungsregeln zu einem Satz transformiert. Dieses Beispiel wird in Kapitel 7.3 wieder aufgegriffen und näher erläutert.

6.3 Zusammenfassung

Die Phase des Begründungsprozesses ist charakterisiert durch die Konstruktion und die Verknüpfung von Argumenten. Das *Argumentieren* wird neben dem *formal-deduktiven Beweisen* als zweite Form angenommen. Unterschieden werden kann das Argumentieren in *alltagsbezogenes Argumentieren*, *Argumentieren mit mathematischen Mitteln* und *logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln*. Rekonstruiert werden können beide Begründungsformen mit Hilfe des Toulmin Schemas, welches eine kettenartige Struktur aus *Datum* und *Konklusion* beschreibt. Bekannte oder bereits bewiesene *Regeln* und *Stützungen* begleiten diese Konstruktion von Argumenten. Die Validierung der Behauptung erfolgt über das *logische Schließen*.

Das logische Schließen kann verschiedene Richtungen annehmen. So kann unter anderem durch die *Berufung auf eine Autorität*, durch den *Wahrscheinlichkeits-* oder den *Analogieschluss* (Kapitel 6.2.1) die Validierung der Aussage vorgenommen werden. Die Stützung der Behauptung wird hierbei über die Plausibilität und der Wahrscheinlichkeit der Wahrheit der Behauptung entwickelt. Daneben wird zwischen der *induktiven* (Kapitel 6.2.2) und der *deduktiven Denkrichtung* (Kapitel 6.2.3) unterschieden. Das induktive Schließen beschreibt einen Prozess des *Verallgemeinerns* von in Einzelfällen erkannten Mustern und Strukturen. Unterschieden wird hier zwischen dem *empirischen* und dem *theoretischen Verallgemeinern* und beschreibt damit ein Extrahieren des Musters mit Hilfe mehrerer Beispiele bzw. das Erkennen

KAPITEL 6. PROZESSE UND DENKRICHTUNGEN INNERHALB DER PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES

des Musters anhand eines Beispiels. Das deduktive Schließen beschreibt eine Anwendung einer allgemeinen Regel auf einen besonderen Fall.

7 Die Phase des Begründungsprozesses aus begründungstyporientierter Perspektive

In der Literatur werden verschiedene Begründungstypen beschrieben. Verbreitet ist im mathematikdidaktischen Kontext die Dreiteilung nach Wittmann und Müller (1988), die auch beispielsweise von Brunner (2013;2014) konkret und in Padberg und Büchter (2015) übertragen genutzt wird. Im Gegensatz zu einer intraindividuellen Betrachtung der mathematischen Begründungssituation und der Konstatierung von Phasen im Prozess (Kapitel 5), soll nun eine interindividuelle Betrachtung ausgehend von den beschriebenen Denkrichtungen und Prozessen während einer Begründungsphase (Kapitel 6) erfolgen. Um *Begründen* von mathematischen Aussagen didaktisch fassbar zu machen und aus Perspektive der Lernenden zu betrachten, werden in der Literatur Kategorisierungen angeboten, die Begründungen anhand der ablaufenden Prozesse und Denkrichtungen (im Modell nach Brunner, 2014: auch Begründungsarten) (Kapitel 4.1) typisieren. Dabei werden Merkmale wie Art und Weise der Repräsentationsebene, die Denkrichtung oder Prozesse als Grundlage für die Ausdifferenzierung genutzt.

Je nach Zugang unterscheiden sich im Detail die in der Literatur angebotenen Begründungstypen, lassen sich jedoch über die verschiedenen Ansätze hinweg in drei Kategorien einordnen. Ausgehend von den verbreiteten Typisierungen nach Wittmann und Müller (1988) werden für die vorliegende Arbeit aus den Begrifflichkeiten des *experimentellen Beweis*, *inhaltlich-anschaulicher bzw. operativer Beweis* und *formal-deduktiver Beweis* ebenfalls drei Begründungstypen abgeleitet. Genutzt werden im Folgenden die Begriffe *exemplarische Begründung*, *generische Begründung* und *formal-deduktive Begründung*.

Es wird aufbauend auf der Begriffsbetrachtung nach Brunner (2013;2014) in der späteren Verwendung von Begründungstypen gesprochen anstatt von Beweistypen. Wo immer aber in der Literatur innerhalb der einzelnen Konzepte und Ansätze konkret von Beweistypen gesprochen wird, wird dieser Terminus übernommen und nicht verändert. Außerdem wird hier von exemplarischen Begründungen oder von *Begründen durch Exemplarizität* gesprochen, um andere Ansätze unter dem Begriff von Wittmann und Müller (1988) zu

subsumieren und gleichzeitig abzugrenzen. Das Begriffsverständnis ist für die vorliegenden Arbeit ähnlich, fasst aber mehr Inhalte von anderen Publizierenden. Um das generische Beispiel aber nicht die Repräsentationsform, die in Wittmann und Müllers (1988) Bezeichnung mit dem *inhaltlich-anschaulich bzw. operativen Beweis* suggeriert wird, zu betonen, wird als zweite Form stattdessen angelehnt an unter anderem Rowland (2002) der Begriff der *generischen Begründung* genutzt. Das *formal-deduktive Beweisen* wird zum *formal-deduktiven Begründen*, um es von dem Prozess des *formal-deduktiven Beweisens* als eine Form von Begründungen neben dem *Argumentieren* seinen verschiedenen Ausprägungen abzugrenzen. Im Folgenden werden die drei Begründungstypen näher erläutert.

7.1 Begründen durch Exemplarizität

Unter dem *Begründen durch Exemplarizität* werden verschiedene Begründungstypen unterschiedlicher Publizierender subsumiert, deren gemeinsames Charakteristikum das Nutzen von einem oder mehreren Beispielen oder auch empirischen Argumenten (Stylianides, 2015) ist, um Gewissheit über die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu erlangen. Auf Basis der Literatur können verschiedene Subformen abgeleitet werden, die den unterschiedlichen Umgang mit Beispielen zeigen. Grundlegend gemein ist den verschiedenen Ansätzen jedoch, dass die gewählten Beispiele nicht absichtlich repräsentativ sind. Es wird weder logisch argumentiert noch formal formuliert (Brunner, 2016). Reid und Knipping (2010) unterscheiden zwischen drei verschiedenen Umgängen mit Beispielen, die hier als Grundlage für die weiteren Betrachtungen genutzt werden soll.

Es kann für die Begründung nur ein Beispiel genutzt werden, welches für die Aussage weder repräsentativ ist noch für eine Klasse von Beispielen oder mathematischen Objekten, sondern nur für sich allein steht. „They stand only for themselves, not for anything else“ (Reid & Knipping, 2010, S. 130). Subsumiert werden darunter die folgenden Ansätze: Smith und Henderson (1959): *extending patterns* Wittmann und Müller (1988): *experimenteller Beweis* und Balacheff (1988): *naive empiricism*.

Weiterhin ist es möglich, dass das Beispiel absichtlich unspezifischer gewählt wurde, damit ausgehend von der Verifizierung an diesem Beispiel auf eine ganze Klasse von Objekten und damit auf die Allgemeingültigkeit geschlossen werden kann (Balacheff, 1988: crucial experiment). Balacheff (1988) fasst das unter folgendem Zitat zusammen: „If it works here, it will always work“ (S.219). Dieses Vorgehen basiert auf der Idee einer primitiven Rekursion. Die Aussage wird an einem konkreten Beispiel getestet, um auf

die Gültigkeit von anderen Beispielen rekursiv zu schlussfolgern.

Als weitere Möglichkeit mit Beispielen umzugehen wird die Aufteilung von verschiedenen Beispielen in *subsets* betrachtet. Die an diesen ‚subsets‘ erarbeiteten Eigenschaften werden dann auf alle Fälle übertragen (Chazan, 1993: *kinds or types*) und so die Gewissheit über die Allgemeingültigkeit gewonnen.

Weiterhin kann durch Überprüfung aller relevanten Beispiele Gewissheit über die Allgemeingültigkeit erlangt werden (Maher & Martino, 1996: *proof by exhaustion*). Angewendet wird dies in Situationen, in denen die Klasse von relevanten Objekten endlich ist oder als endlich betrachtet wird (Reid & Knipping, 2010).

7.2 Generisches Begründen

Die Nutzung eines Beispiels ist ebenfalls zentral beim *generischen Begründen*, doch kommt hier noch das Entdecken von Mustern und Zusammenhängen als weitere zentrale Aktivität hinzu (Brunner, 2013). Um Muster zu erkennen werden die Erkenntnisse, die an Einzelfällen und Einzelbeispielen gewonnen werden, ausgeweitet und die extrahierten Muster, Strukturen und Beziehungen, die diese verbinden, betrachtet. Das Zusammenspiel beider Aspekte soll im Folgenden als *generische Vorgehensweise* bezeichnet werden. Die Begriffe *generisch* und *genetisch* werden hierbei in der Literatur und so auch im vorliegenden Projekt synonym verwendet. *Begründen* wird hier ebenfalls als vorrangige Begrifflichkeit genutzt, es sei denn es werden Termini von Publizierenden direkt übernommen. Das genetische Beispiel oder *generic example* als erste zentrale Komponente beim *generischen Begründen* ist ein Beispiel, welches das Muster und die Struktur, die betrachtet werden soll, in besonderer Art sichtbar macht.

„The generic example involves making explicit the reasons for the truth of an assertion by means of operations or transformations on an object that is not there in its own right, but as a characteristic representative of the class“ (Balacheff, 1988, S.219).

Genetische Beispiele werden genutzt, um das abstrakte dahinter stehende Konzept zu zeigen und Prozesse zu generalisieren (Rowland, 2002). Die Suche nach diesem Beispiel ist jedoch nicht trivial und wird zum bewussten Akt (Rowland, 2002). Manche Beispiele tragen die Struktur oder die Vorüberlegung für die Allgemeingültigkeit besser als andere und machen das Generalisierte besser oder weniger gut sichtbar als andere Beispiele. Das genetische Beispiel steht hier explizit nicht für ein beliebiges Beispiel, sondern für eines, welches für

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

die ganze Klasse stehen kann. Oder, wie Rowland (2002) es präzise formuliert: „[A generic example] can speak for some general truth, and for some general argument above and beyond the particularities of the example itself“ (Rowland, 2002, S.159). Generische Beispiele sind repräsentationsebenenunspezifisch.

Genetisches oder auch generisches *Begründen*, in der englischsprachigen Literatur als *generic proof* bezeichnet, gründet sich auf Ausführungen von Brandford (1908;1913). Bei Brandford (1908;1913) wird durch das intuitive Ableiten von Begriffen und Eigenschaften aber auch Zusammenhängen anhand von Beispielen Gewissheit über Wahrheiten erlangt. Er „beruft sich [beim Aufstellen von allgemeingültigen Wahrheiten] auf Postulate der sinnlichen Erfahrung“ (Brandford, 1913). Die Begründung ist damit aber nicht weniger gültig, sondern unterscheidet sich nur in der Strenge vom fachmathematischen Beweis bzw. Begründung. Der *intuitive Beweis* zeigt die allgemeine und akkurate Wahrheit, aber appelliert implizit an Postulate der Sinneserfahrung (übersetzt nach Brandford, 1908; Original: „general and accurate truth, but appeals implicitly to postulates of sense-experience“ S.94). Neben den Ausführungen nach Brandford (1908;1913) basiert das genetische Vorgehen bei Begründungen auch auf typischen Vorgehensweisen in der Zahlentheorie, die das Allgemeine durch den Einzelfall zu sehen versucht, indem sie sich eines exemplarischen oder auch eben genetischen Beispiels bedient (Rowland, 2002).

Auf Basis der Ideen von Brandford (1908;1913) und dem Konstrukt der *Invarianz* von Piaget (1964) entwickelte Wittmann (1981;1985;2014) das operative Programm der Erkenntnisgewinnung. Übernommen wurde diese Art von Begründung vor allem in mathematikdidaktischen Kontexten. So prägte beispielsweise Wittmann (1981;1985;2014) den Begriff des *inhaltlich-anschaulichen bzw. operativen Beweises* und Padberg und Büchter (2015) das *beispielgebundene Begründen auf ikonischer Ebene* oder *Zahlenebene*. Aber auch in anderen Untersuchungen zu Beweis- und Begründungstypen lassen sich Formen finden, die eine genetische Vorgehensweise zeigen, die sich durch das Aufstellen von Beispielen und das Schlussfolgern anhand der Erkenntnis des allgemeinen Musters und die Überführung in eine allgemeingültige Begründung charakterisieren lässt.

Darauf aufbauend entwickelte sich das *operative Beweisen* nach Wittmann (1981;1985), das die Idee der generischen Begründung didaktisch fruchtbar gemacht hat. Bezeichnet wird damit ein Begründungstyp, bei dem „die in den Objekten durch Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften und Beziehungen sowie deren Verhalten bei Operationen explizit ausgenutzt werden“ (Wittmann, 1985, S. 11). Das inhaltlich-anschauliche bzw. operative Beweisen nach Wittmann (1981;1985) ist von „Konstruktionen und Operationen [geprägt], von denen intuitiv erkennbar ist, da[ß] sie sich auf eine ganze

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

Klasse von Beispielen anwenden lassen“ (Wittmann & Müller, 1988, S.249). Die Allgemeingültigkeit der Begründung ergibt sich dadurch, dass allgemein ausführbare Operationen und Wirkungen betrachtet werden (Wittmann & Ziegenbalg, 2007).

Inhaltlich-anschauliche bzw. operative Beweise, wie sie u.a in Wittmann (1988;2014) basierend auf Brandford (1913) bezeichnet werden, lassen sich durch folgende Eigenschaften charakterisieren:

- Sie ergeben sich aus der Erforschung eines mathematischen Problems, insbesondere im Rahmen eines Übungskontextes, und klären einen Sachverhalt,
- gründen auf Operationen mit ‚quasi-realen‘ mathematischen Objekten,
- nutzen dazu die Darstellungsmittel, mit denen Lernende im Schulalter auf der entsprechenden Stufe vertraut sind und
- lassen sich in einer schlichten, symbolarmen Sprache führen.
- Sie „stützen sich [...] auf Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“ (Wittmann & Müller, 1988, S.249)

Der Begriff *operativ* bezieht sich dabei eher auf das Unterrichtssetting, mit dem diese Art von Beweisen verbunden wird. Die Begründung bzw. der Beweis an sich ist nicht operativ. Entwickelt hat sich der operative Beweis bzw. die operative Begründung aus den präformalen Beweisen bzw. Begründungen oder den „Erklärungen mit Hilfe von Handlungen an manipulierbaren Dingen“ (Wittmann, 2014) und bezieht sich so eher auf das *inhaltlich-anschauliche* in der Bezeichnung.

Die inhaltlich-anschaulichen bzw. operative Beweise werden als Beweistyp auch im Modell nach Brunner (2014) (Abbildung 4.1) als Möglichkeit benannt, durch das Einschlagen induktiver oder abduktiver Denkrichtungen bzw. durch (logisches) Argumentieren mit mathematischen Mitteln Gewissheit über die Gültigkeit einer Behauptung zu erlangen (Kapitel 6).

Neben den inhaltlich-anschaulichen bzw. operativen Beweisen nach Wittmann (1981;1985) aber auch Wittmann und Müller (1988) griffen auch verschiedene andere mathematikdidaktische orientierte Modelle das generische Vorgehen auf um entweder normativ oder deskriptiv Begründungsprozesse von Studierenden zu beschreiben bzw. ihnen durch didaktische Überlegungen Einsichten in Beweisprozesse zu geben (u.a. Rowland, 2002; Mason, 1996; Pimm, 1988).

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

Für das hier beschriebene Vorhaben sollen besonders die Begründungsniveaus nach Padberg und Büchter (2015) genauer betrachtet werden, da diese zum einen die Idee des generischen Beweisens explizit und als hochschuldidaktischen Zugang darstellen und zum anderen weil die Studierenden, die für die vorliegende empirische Untersuchung ausgewählt wurden, diese Begründungsniveaus in den Lehrveranstaltungen genau so kennen gelernt haben und anwenden mussten. Begründungsniveau I und II sind beispielgebunden. Das heißt, dass ausgehend von einem generischen Beispiel essentielle Eigenschaften, Bezüge und Zusammenhänge dazu genutzt werden, um eine allgemeingültige Begründung zu erstellen. Anhand des Beispiels werden Muster erkannt, die dann verallgemeinert werden. Die Verallgemeinerung erfolgt dann je nach vorher gewählter Repräsentationsebene entweder ikonisch oder verbal-beschreibend. Padberg und Büchter (2015) (S.77) illustrieren in ihren Ausführungen das folgende Beispiel für das Begründungsniveau I. Ikonisch begründet wird die Summenregel als mathematischer Satz.

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Aus $a \mid b$ und $a \mid c$ folgt $a \mid (b + c)$.

Als generisches Beispiel werden folgende natürlichen Zahlen genutzt: $a=2$, $b=6$, $c=8$. Es entsteht folgende ikonische Darstellung zum Beispiel.

Aus $2 \mid 6$ und $2 \mid 8$ folgt $2 \mid (6 + 8)$.

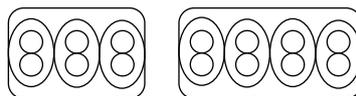


Abbildung 7.1: Ikonische Darstellung der Teilbarkeit durch 2 der Zahlen 6 und 8 in Anlehnung an Padberg und Büchter (2015, S.77)

Aus der ikonischen Darstellung (Abbildung 7.1) kann entnommen werden, dass sich die 6 (ikonisch dargestellt links) und die 8 (ikonisch dargestellt rechts) durch 2 teilen lässt. Die Abbildung zeigt, dass sich beide Mengen restlos durch 2 teilen lassen. Dargestellt wird dies mit Hilfe der umkreisten Zweiergrüppchen. In Abbildung 7.2 wird sichtbar, dass sich auch die Summe aus 6 und 8 restlos durch 2 teilen lässt. Sichtbar wird dies durch die Umkreisung.

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

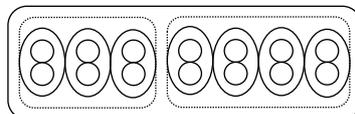


Abbildung 7.2: Ikonische Darstellung der Teilbarkeit durch 2 der Summe der Zahlen 6 und 8 in Anlehnung an Padberg und Büchter (2015, S.77)

Dass diese Vorgehensweise für alle natürlichen Zahlen durchführbar ist, ergibt sich aus der Essenz des Musters, welches in Abbildung 7.2 herausgearbeitet werden kann. Durch die Vereinigung beider Mengen wird die Eigenschaft, dass jede Menge einzeln restlos durch 2 teilbar ist, nicht verändert und ist damit für alle natürlichen Zahlen, die jede für sich restlos durch 2 teilbar ist, gültig.

Im Begründungsniveau II wird diese Begründung auf Zahlenebene durchgeführt.

Begründungsschritt	Kommentar
$2 \mid 6$	$3 \cdot 2 = 6$
$2 \mid 8$	$4 \cdot 2 = 8$
$6 + 8 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2$	Einsetzen Voraussetzungen
$3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = (3 + 4) \cdot 2 = 6 + 8$	Distributivgesetz
aus $(3 + 4) \cdot 2 = 6 + 8$ folgt, dass $2 \mid (6 + 8)$	

Die Zahlen 6 und 8 sind restlos durch 2 teilbar. Sichtbar wird das darin, dass sie ein Vielfaches von 2 sind. Wird nun die Summe gebildet und die beiden Summanden als ein Vielfaches von 2 dargestellt, so ergibt sich nach der Nutzung des Distributivgesetzes ein Vielfaches von 2. Daraus wird geschlossen, dass die Summe der beiden Summanden ebenfalls restlos durch 2 teilbar ist.

Bezogen auf das generische Begründen zeigen diese beiden Begründungsniveaus, wie anhand eines generisch ausgewählten Beispiels für die Summenregel (in dem Fall $6 + 8$), auf ikonischer Ebene bzw. auf Zahlenebene das relevante Muster entdeckt, ausgeweitet und so für die Begründung genutzt werden kann. Die Ausweitung findet in verbaler Form statt und wird von Padberg und Büchter (2015) als Verallgemeinerung bezeichnet. Durch die Verallgemeinerung bzw. die damit verbundene Einsicht, dass das Muster auf alle Fälle übertragbar ist, wird die Gewissheit über die Allgemeingültigkeit der Aussage erlangt. Während Padberg und Büchter (2015) das Durchführen

der Begründung an einem Beispiel vorschlägt, postuliert Samadani (1984) mehrere genetische Beispiele zu nutzen, um das Muster zu erkennen und für die Verallgemeinerung zu nutzen.

Grundsätzlich bietet dieses hochschuldidaktische Modell von Padberg und Büchter (2015) nur zu speziellen Arten von mathematischen Sätzen Begründungen, nämlich zu denen, die eine allgemeingültige Begründung fordern. Die Reihenfolge, die durch die Benennung der Stufen nahe gelegt wird, soll nicht als eine Art zwingende Stufung, die nacheinander durchlaufen werden muss, verstanden werden. Es bietet vielmehr eine didaktische Auswahl, die zur Verfügung steht um Begründungsstrategien explizit während des Grundschullehrerstudiums zu thematisieren. Dabei sind die Stufungen eher als eine Abstufung in der Abstraktheit des *Begründens* zu sehen. Innerhalb des jeweiligen Niveaus konstatieren Padberg und Büchter (2015) eine feste Abfolge an Schritten, die zu einer lückenlosen Begründung führt. Im Kontext des generischen Begründens spielen auch die ‚proof schemes‘ von Harel & Sowder (1998) eine Rolle. Unter der Kategorie *empirical proof* (Harel & Sowder, 1998) werden die ‚proof schemes‘ *inductive* und *perceptual proof scheme* unterschieden (Harel & Sowder, 1998), bei dem die Begründenden entweder Einzelbeispiele nutzen, um auf alle relevanten Fälle einer Klasse zu schließen (inductive) oder rudimentär und nicht vollständig deduktiv unterstützte mentale Repräsentationen nutzen, um die Auswahl der Argumente zu rechtfertigen (Housman & Porter, 2003). Harel & Sowder (1998) beschreiben also ebenfalls ein generisches Vorgehen.

7.3 Formal-deduktives Begründen

Unter dem Begriff formal-deduktives Begründen, der sich an der Begrifflichkeit von Wittmann und Müller (1988) orientiert, wird ein Begründungstyp gefasst, der sowohl als streng formal als auch in (hochschul-) didaktischen Kontexten als formal-deduktive Begründung gelten kann. Abgegrenzt wird dieser Begründungstyp vom Prozess, der als formal-deduktives Beweisen bezeichnet wird (Kapitel 6.1). In der Literatur wird in diesem Kontext immer der Beweis als Terminus genutzt, um das Produkt einer formal-deduktiven Begründung bzw. eines Vorgehens mit hoher formaler Strenge genauer zu beschreiben. Für den hier vorliegenden Kontext wurde die Bezeichnung verändert und der Beweis hin zu dem Begriff Begründung geändert, um die Begriffe stringent zu nutzen und zu unterscheiden. Für die hier vorliegende Perspektive sollen so genannte *symbolische* und *formale Begründungen* als ein Komplex zusammengefasst und nicht, wie in anderer Literatur, getrennt werden. Grund dafür ist zum einen, dass sich die Literatur, die sich mit mentalen Prozessen oder didaktischen

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

Perspektiven auf das *Beweisen* und *Begründen* als Prozess bezieht, diese Prozesse entweder auch zusammen betrachtet oder die formalen Beweise als etwas für Lernende unerreichbares darstellt.

Das Idealbild einer mathematischen Begründung ist das, was in der Literatur oft unter einem formalen Beweis verstanden wird. Charakteristisch ist hier vor allem die deduktive Denkrichtung und Arbeitsweise innerhalb des formalen Symbolsystems (Kempen, 2019). Die mathematische Begründung besteht aus „Symbole[n], die keine semantische Bedeutung tragen“ (Kempen, 2019, S.30) und lässt nur spezielle logische Beziehungen, die sich auf Axiome gründen, als Schlussweisen zu (Kempen, 2019; Reid & Knipping, 2010). Kempen (2019) konstituiert charakteristische Momente für eine formale mathematische Begründung: *formales System*, *Axiom*, *Schlussweise* und *Satz* und konkretisiert ihre Zusammenhänge in einem von Hofstaedter (2008) dargestellten Beispiel. Dieses Beispiel (beschrieben nach Kempen, 2019) zeigt abstrakt die Funktionsweise des deduktiven Schließens (6.2.3) in einem formalen System. Das formale System besteht hier nur aus den drei Buchstaben ‚M‘, ‚I‘ und ‚U‘ die zu Zeichenketten, wie beispielsweise MI oder MUII zusammengesetzt werden können. Nun kann die Zeichenkette MI als Axiom angenommen und mit Hilfe von vorher definierten Umformungsregeln zum Satz UIIM transformiert werden. Das Beispiel illustriert die Struktur einer formalen Begründung, die mit Hilfe vorgegebener Schlussweisen in einem formalen System ein Axiom zum Satz transformiert.

Das „entsprechende [Produkt, das] innerhalb eines formalen Systems [formuliert wird und] in denen die verwendeten Symbole rein syntaktisch [...] verwendet und alle Begründungsschritte bzw. Schlussweisen expliziert [werden] [...], wird in der Mathematik als formaler Beweis und [im hier vorliegenden Kontext als formale Begründung bzw. formal-deduktive Begründung] bezeichnet“ (Kempen, 2019, S.31).

Es wird allerdings konstatiert, dass dieser Grad der Formalisierung in der Praxis nicht möglich, nicht gewollt aber auch nicht praktikabel erscheint (Kempen, 2019). So beschreiben Lakatos et al. (2012) die Begründungsprodukte von Fachmathematikern hinsichtlich der Formalisierung als *prä-formal*, *formal* und *post-formal* und unterscheiden dabei zwischen mathematischen Begründungen aus Gesprächen und Notizen (prä-formal), aus Publikationen (formal) und meta-mathematischen Begründungen bzw. Beweisen über die Natur des Beweises oder der Begründung (post-formal).

Reid (2001) unterscheidet auf Basis dessen in den *semi-formalen Beweis*, der unkommentierte Argumentationslücken aufweist und den *formalen Beweis*

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

und konstatiert, dass die meisten publizierten mathematischen Begründungen semi-formal sind, weil deren Länge und Komplexität nicht praktikabel erscheint. „Filling in the gaps is part of the skill of reading proofs“ (Reid, 2001, S.363).

Im vorangegangenen Kontext wurde der Begriff Beweis beibehalten, um die von Reid (2001) genutzten Begrifflichkeiten exakt wiederzugeben. Für den hier vorliegenden hochschuldidaktischen Kontext sollen auch die Momente der formal-deduktiven Begründung in die Betrachtung einbezogen werden. Besonders Wittmann und Müller (1988) und Brunner (2014) unterscheiden formal-deduktive Begründungen nicht von formalen Begründungen und differenzieren im Gegensatz zu anderer Literatur auch keine Subtypen aus, sondern konstatieren folgende Merkmale als relevant für eine formal-deduktive Begründung: *deduktive Denkrichtung bzw. deduktives Schließen* und die *Nutzung von Symbolsprache und mathematischer Fachsprache*.

Das Begründungsniveau III im hochschuldidaktischen Modell nach Padberg und Büchter (2015) und die *conceptual proofs* nach Balacheff (1988) betonen ebenfalls die deduktive Denkrichtung unter der Nutzung von mathematischen Sätzen, bekannten Definitionen und Gesetzmäßigkeiten in symbolischer Sprache. Reid und Knipping (2010) lassen (in Anlehnung an Healy & Hoyles, 2000) eine Verbindung von Fachsprache auf verbaler Repräsentationsebene in Kombination mit Symbolsprache als Merkmal für den *symbolic proof* zu und unterscheiden je nach Menge der verwendeten Worte zwischen eher *narrativ* oder eher *symbolisch*.

Auch unter die formal-deduktive Begründung fallen die so genannten *manipulative proof* (Tall, 1995), die zwar eine Nutzung von Symbolsprache enthalten, aber eher Manipulation durch bekannte algebraische Gesetzmäßigkeiten zeigen, anstatt eines deduktiven Durcharbeitens im Sinne Hofstaedters (2008) (auch Kapitel 6.2.3).

Harel und Sowder (1998) betonen dabei eher die Notwendigkeit der deduktiven Denkrichtung und beschreiben zugehörige mentale Aktivitäten genauer, indem sie unter dem *analytic proof* auch den Subtyp *transformational proof* ausdifferenzieren. Dieser muss zwar eine deduktive Denkrichtung aufweisen, kann aber auch mit Hilfe von verbalen Aussagen oder Bildern anstatt in Symbolsprache geführt werden.

Als weiteren Subtyp beschreiben Harel und Sowder (1998) den *axiomatic proof*, um das Verständnis der Begründenden für deduktive Denkrichtungen in einem Begründungstyp genauer zu charakterisieren. Die Begründenden haben verstanden, dass mathematische Rechtfertigung bei Axiomen und Aussagen beginnt, die keiner Begründung bedürfen, unterscheiden zwischen Aussagen, die ohne Begründungen gültig sind und Aussagen, die einer Begründung bedürfen.

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

Innerhalb des *axiomatic proof scheme* wird zwischen einem *intuitive, structural* und *axiomatizing* Untertyp je nach Verständnis und Verfügbarkeit der Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten unterschieden. Intuitiv werden dabei Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten genutzt, wenn sie intuitiv verfügbar und damit in der Vorstellungskraft des Individuums vorhanden sind. Strukturell werden Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten genutzt, wenn das begründende Individuum versteht, dass diese als Repräsentation verschiedener Situationen zu betrachten sind. Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten sind hier permanent. Der Hauptunterschied zwischen der intuitiven Verwendung von Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten und der strukturellen Nutzung liegt darin, sich von den realen Entsprechungen der jeweiligen Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten zu lösen. Wird die Vorgehensweise der Begründenden als *axiomatizing* betrachtet, so sind sie in der Lage, die Folgerungen der Variationen von Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten zu betrachten (Harel & Sowder, 1998).

Tall (1995) grenzt algebraische Manipulation vom deduktiven Durcharbeiten in so fern ab, dass er unter dem Begriff *manipulative proofs* Begründungstypen fasst, die Umformungsregeln nutzen, um die Allgemeingültigkeit darzustellen, anstatt wirklich deduktiv vorzugehen. Unter reinem deduktiven Vorgehen fassen Tall (1995) und Reid und Knipping (2010) das oben unter dem Beispiel von Hofstaedter (2008) dargestellte Vorgehen.

7.4 Zusammenfassung

Insgesamt können aus der Literatur in Anlehnung an die Systematisierung nach Wittmann und Müller (1988) drei verschiedene Begründungstypen abgeleitet werden. Die einzelnen Typen erschließen sich mit Hilfe der genaueren Betrachtung ablaufender Prozesse und differenzieren sich in das *Begründen durch Exemplarizität*, *generisches Begründen* und *formal-deduktives Begründen* aus. Zentral beim *Begründen durch Exemplarizität* ist die Nutzung von Beispielen in verschiedener Art und Weise, um Gewissheit über die Allgemeingültigkeit der Aussage zu erlangen. Charakteristisch für *generisches Begründen* ist zum einen die Komponente des generischen Beispiels und zum anderen das Entdecken des essentiellen und zur Allgemeingültigkeit führenden Musters und der Verallgemeinerung, also Ausweitung dieses Musters auf eine gesamte Klasse von mathematischen Objekten. Das deduktive Vorgehen und die Nutzung von mathematischen Symbolen, algebraischen Zusammenhängen, Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten sind die zentralen Komponenten beim *formal-deduktiven Begründen*. Das deduktive Vorgehen kann dabei in verschiedener Weise und je nach Fähigkeit der begründenden Person auf

KAPITEL 7. DIE PHASE DES BEGRÜNDUNGSPROZESSES AUS BEGRÜNDUNGSTYPORIENTIERTER PERSPEKTIVE

unterschiedlichem Niveau von rein manipulativen Tätigkeiten bis hin zum axiomatischen Verständnis für die Mathematik ablaufen.

8 Repräsentationsebenen in mathematischen Begründungen

Sowohl aus den Betrachtungen zum Argumentieren und deduktiven Beweisen als auch aus Betrachtungen zu den Begründungstypen lassen sich verschiedene Repräsentationsebenen ableiten, auf denen begründet werden kann. Ansätze zur Beschreibung von Begründungstypen sehen die Repräsentationsebenen eher verschieden explizit. So werden beispielsweise bei Brunner (2014) die Ebenen als notwendiges, dem jeweiligen Prozess oder Begründungstyp zukommendes Merkmal gesehen. Bei Brunner (2014) ist dies allerdings nicht konsequent, so dass dem alltagsbezogenen Begründen bzw. dem experimentellen Beweis die Darstellungsebene *an Beispiele gebunden* zugewiesen wird und erst dem *Argumentieren mit mathematischen Mitteln*, dem *logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln* und dem *formal-deduktiven Beweisen* Repräsentationsebenen im Sinne des in der Mathematikdidaktik geläufigen Begriffsverständnisses zuordnet.

Im Verständnis für das hier dargestellte Projekt können aber auch die Beispiele, die dem *alltagsbezogenen Argumentieren* und dem *Begründen durch Exemplarizität* dienen (Kapitel 7.1) auf verschiedenen Repräsentationsebenen dargestellt werden. Weiterhin ist in verschiedenen Begründungsklassifikationsansätzen zu bemerken, dass die Repräsentationsebene nicht losgelöst vom jeweiligen Begründungsprozess (Prozesse, Schlussweisen o.ä.) gesehen, sondern mit ihr vermischt wird.

Das Ergebnis sind Begründungstypen, die eine bestimmte Repräsentationsebene zwingend mit einer Schlussweise kombinieren. Um allerdings hier mögliche Repräsentationsebenen aufzuzeigen, werden etwaige mit dem jeweiligen Begründungstyp zwingend in Verbindung stehende Schlussweisen oder Denkrichtungen nicht berücksichtigt, sondern ausschließlich die mögliche Darstellungsebene extrahiert und als Option für alle Beispiele oder andere mathematische Objekte angenommen. Die Repräsentationsebene wird von der Schlussweise getrennt.

Die anschließende Darstellung der einzelnen Begründungstypen ist nicht erschöpfend und steht nur exemplarisch für die fünf erarbeiteten Repräsentationsebenen. Es erscheint grundsätzlich möglich eine mathematische Begründung auf enaktiver Ebene (Brunner, 2014; Samadani, 1984: action

proof) zu führen. Die enaktive Darstellungsebene zeigt die mathematische Situation auf einer realen Ebene. Es kann gehandelt und aktionale Aktivitäten können durchgeführt werden (Bruner et al., 1971).

Basierend auf Wittmann und Müller (1988) und Brandford (1908;1913) nutzen Blum und Kirsch (1991) den Terminus *preformal proof* und beschreiben damit einen Begründungstyp, in dem konkret gegebene reale Objekte als Basis für Argumentationsprozesse genutzt werden. Neben konkreten Darstellungen kann die Validierung der Behauptung ganz allgemein also mit Hilfe sensorisch wahrnehmbarer Erfahrungen oder physisch beobachtbarer Fakten geschehen (Harel & Sowder, 1998: perceptual proof).

Neben der bereits erwähnten konkreten Darstellung, werden in den meisten Ansätzen diese sinnlichen Erfahrungen als Bilder oder Zeichnungen mit oder ohne Beschriftung gefasst und orientieren sich dabei an der in der Mathematikdidaktik gängigen Auffassung der ikonischen Repräsentationsebene nach Bruner et al. (1971). Die ikonische Repräsentationsebene stellt die mathematische Situation mit Hilfe von Bildern dar (Krummheuer, 2003). So können die generischen Beispiele (Kapitel 7.2) sowohl im hochschuldidaktischen Konzept von Padberg und Büchter (2015) aber auch im Modell nach Brunner (2014) auf ikonischer Ebene dargestellt werden. Gleiches gilt im hier genutzten Verständnis auch für nicht-generische Beispiele (Kapitel 7.1). Padberg und Büchter (2015) konzentrieren sich innerhalb ihrer Ausführungen auf Begründungen aus dem Bereich der Arithmetik. Deshalb zeigen ihre Vorschläge ikonische Darstellungen in Form von Punkten, die für Quantitäten stehen. Reid und Knipping (2010) beschreiben in diesen Zusammenhang den *visual proof* nach Samadeni (1984) und fassen damit einen Begründungstyp, der die Begründung rein visuell ohne Worte ausführt und entweder diskrete Objekte oder sich kontinuierlich verändernde Quantitäten bedient (Reid & Knipping, 2010; Knipping, 2003).

Brunner (2013;2014) beschreibt weiterhin die sprachlich-symbolische Darstellungsebene als mögliche Repräsentationsebene einer Begründung und beschreibt damit eine rein semantische Darstellung der mathematischen Objekte bzw. der Elemente der Behauptung. Es „wird in einem inhaltlichen Sinne [eine Darstellung] für die Situation bzw. [für] Teile dieser erarbeitet“ (Brunner, 2013, S.110). Die sprachlich-symbolische Repräsentationsebene nutzt die Bildungssprache. Es erfolgt demnach eine *verbale* oder *narrative* (Healy & Hoyles, 2000) Repräsentation der Situation. Es können mathematische Objekte, Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten *verbal* repräsentiert sein. Reid und Knipping (2010) unterscheiden (in Anlehnung an Healy & Hoyles, 2000) den *symbolic proof* je nach Menge der verwendeten Worte zwischen eher *narrativ* oder eher *symbolisch*.

In Brunner (2013;2014) (Abbildung 4.1) wird als weitere Repräsentationse-

bene die formal-symbolische Ebene angegeben, die ausschließlich dem Prozess des *formal-deduktiven Beweisens* zugeordnet wird. Gefasst wird damit eine Mathematisierung der Elemente durch die Anwendung von algebraischen Ausdrücken (Brunner, 2013). Für das Verständnis im hier dargestellten Projekt werden in Anlehnung an Reid und Knipping (2010) unter der symbolische Repräsentationsebene ausschließlich algebraische Darstellungen von mathematischen Objekten, Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten verstanden. Im Zusammenhang mit symbolischen bzw. formalen Begründungen beschreiben Harel und Sowder (1998) den *analytical proof scheme* und definieren diesen Begründungstyp als einen, in dem deduktiv geschlussfolgert wird. Weiterhin unterscheiden sie hier zwischen dem *transformational proof scheme* und dem *axiomatic proof scheme*. *Transformational proof schemes* umfassen Transformationen von Bildern, begleitet durch verbale Aussagen. (Harel & Sowder, 1998).

Zusätzlich zu diesen Repräsentationsebenen beschreiben Padberg und Büchter (2015) auch die *Zahlenebene* (Begründungsniveau II) als Darstellungsmöglichkeit von generischen Beispielen. Im Verständnis der Grundschulmathematikdidaktik wird das Nutzen von nicht algebraischen Symbolen, also Zahlen, ebenfalls unter die symbolische Repräsentationsebene geordnet. Auf Basis der Ausführungen von Padberg und Büchter (2015) soll dies aber für das hier dargestellte Projekt unterschieden werden und eine *numerische Ebene* hinzugefügt werden. Auch in den Ausführungen von Reid und Knipping (2010) werden *numeric generic example* als Begründungstyp ausdifferenziert, die durch eine Darstellung auf Zahlenebene und anschließende Überführung in algebraische Symbole Gewissheit über die Allgemeingültigkeit erlangen. Grundsätzlich wird mit der Repräsentationsebene nur die Art der Vergegenwärtigung der jeweiligen mathematischen Struktur oder des Objektes genauer bezeichnet, jedoch nicht die konkrete Vergegenwärtigung an sich (Bruner et al., 1974). Insgesamt können hier folgende fünf mögliche Repräsentationsebenen herausgearbeitet werden: enaktiv, ikonisch bzw. bildlich oder visuell, narrativ bzw. verbal, die Zahlenebene bzw. numerisch und symbolisch bzw. algebraisch.

9 Metakognition in Begründungsprozessen

Um zu *Begründen* erscheint es notwendig, dass die Lernenden auf die Mathematik bezogenes metakognitives Wissen erwerben bzw. schon erworben haben (Kunzle, 2015). Es existiert also eine beweisspezifische Methodenkompetenz (Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003), die das „Wissen über zulässige Formen des Argumentierens, zur Beweisstruktur [und] zur logischen Kette“ (Kunzle, 2015) umfassen. Mathematische Begründungen und Beweise zeigen die Anwendung von metakognitivem Wissen aus dem Bereich der Mathematik (Kempfen, 2019).

Aus verschiedenen vorangegangenen Überlegungen lässt sich schlussfolgern, dass in einem Begründungsprozess auch *metakognitive Strategien* bzw. metakognitive mentale Aktivitäten eine Rolle spielen. So unterscheiden zum Beispiel Heine (2005) und Stark (2010) zwischen fremdadressierten Verbalprotokollen und Verbalprotokollen, die bei der Erhebung mit *Lautem Denken* entstehen können. Es ist also anzunehmen, dass fremdadressierte Äußerungen beim *Lauten Denken* auftreten können, auch wenn diese durch die Gestaltung der Interviewsituation vermieden werden sollen (Kapitel 17.4). Außerdem ist das mathematische *Begründen* ein Problemlöseprozess, welcher wiederum generell von metakognitiver Regulation (Planning, Monitoring, Evaluation) geprägt ist. Ergebnisse dieser Problemlöseprozesse profitieren von metakognitiven Prozessen (Ericsson & Lehmann, 1996).

In der Literatur findet sich kein einheitliches Bild darüber, was Metakognition ist und welche Komponenten und Prozesse sie beinhaltet. Eine oft als grundlegend zitierte Ansicht ist von Flavell (1979) formuliert: „Metacognition refers, among other things, to the active monitoring and consequent regulation and orchestration of [...] processes in relation to the cognitive objects or data on which they bear, usually in the service of some concrete goal or objective“ (Flavell 1979, S. 232). Flavell (1979) beschreibt metakognitive Aktivitäten demnach als überwachende, regulierende und orchestrierende Prozesse, die in Beziehung zur Zielstellung und kognitiven Objekten stehen.

Oft wird zwischen *metakognitivem Wissen* (Stephanou & Mpiontin, 2017; Herold-Blasius, 2021; Flavell, 1979) *metacognitive regulation* (Flavell, 1979; Rott, 2013; Herold-Blasius, 2021) und *metacognitive strategies* unterschiede-

den. Das metakognitive Wissen umfasst dabei Wissen über die eigene oder fremde Personen (person variables), Wissen über die gestellte Aufgabe bzw. Informationen, die durch sie zugänglich gemacht werden (task variables) und Wissen über erfolgreiche *Strategien*, um diese Aufgabe zu lösen (strategy variables) (Flavell, 1979). *Metacognitive strategies* umfassen *Planungsaktivitäten*, *Monitoringaktivitäten* und *Evaluationsaktivitäten* (Raihan, 2011; Stephanou & Mpiontini, 2017; Herold-Blasius, 2021). *Planning* sind dabei Aktivitäten, die „vor dem Bearbeiten einer Aufgabe, [wie die] Vorhersage von Resultaten, Entwerfen von *Strategien* und Durchspielen unterschiedlicher Möglichkeiten von Versuch und Irrtum usw.“ (Herold-Blasius, 2021, S.110) zu beobachten sind. Zum *Monitoring* gehören Aktivitäten, die zur Steuerung, Prüfung, Abänderung und Neuplanung des Prozesses genutzt werden (Brown, 1984; Herold-Blasius, 2021). Evaluationsaktivitäten beschreiben die Beurteilung des Ergebnisses der jeweiligen *Strategie* nach Effizienz- und Effektivitätskriterien (Brown, 1984; Herold-Blasius, 2021).

Genutzt wird der Begriff der Metakognition im Kontext des Denkens über das Denken bzw. die eigenen kognitiven Prozesse, wie es im Modell nach Wilson und Clarke (2004) betrachtet wird. Wilson und Clarke (2004) entwickelten ein Modell, welches die Strukturen der Metakognition und deren Beziehungen zu kognitiven Handlungen veranschaulichen und auftretende Muster heraus arbeiten kann (Kunzle, 2015). Durch die Ausarbeitung von drei Funktionen der Metakognition wird eine Technik entwickelt, die das metakognitive Verhalten von Lernenden beobachtbar und damit metakognitive Prozesse rekonstruierbar macht. Eine Operationalisierung und Anwendung fand dieses Modell in Ausführungen von Kunzle (2015), in denen metakognitive Prozesse beim mathematischen Problemlösen von Grundschulkindern erfasst wurden.

Metacognitive awareness als erste Funktion bezieht sich auf die individuelle Kenntnis des Lernstandes bzw. des Problemlöseprozesses und welches Wissen bzw. welche Problemlösestrategien zur Lösung des Problems zur Verfügung stehen (Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015). Es umfasst weiterhin das Wissen darüber, was zu tun ist, was getan wurde und was in einer spezifischen Lern- oder Problemlösesituation getan werden könnte. *Metacognitive awareness* ist also zusammenfassend „individual’s cumulative knowledge of acquired competencies and on-going knowledge of mental processes in progress“ (Wilson & Clarke, 2004, S. 27). *Metacognitive Evaluation* als zweite Funktion umfasst die Einschätzung über den eigenen Denkprozess, über die Beurteilung von Persönlichkeitsmerkmalen, wie der Leistungsfähigkeit und der eigenen Grenzen, die in bestimmten Situationen den Lernprozess beeinflussen (Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015).

Metacognitive regulation als dritte Funktion tritt auf, wenn die problem-

lösende Person metakognitive Fähigkeiten benutzt, um das Wissen und das Denken zu lenken (Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015). Die Person stützt sich also auf das Wissen über sich selbst, über *Strategien* und deren Einsatz, nutzt *Strategien* der Planung, Selbstkorrektur und Zielsetzung, um den Gebrauch der kognitiven Ressourcen zu optimieren (Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015). Dazu gehört auch das *self-questioning* (Wilson & Clarke, 2004; Raihan, 2011).

Wilson und Clarke (2004) bieten in ihren Ausführungen konkrete Operationalisierungen an, die auch für die hier vorliegende Untersuchung als Ausgangspunkt für das Ableiten von *Strategien* in Abschnitt III dienen sollen. Dazu sollen im Folgenden die von Wilson und Clarke (2004) und von Kunzle (2015) ins Deutsche übersetzte Formulierungen der drei konstatierten Funktionen Awareness, Regulation und Evaluation dargestellt werden. Ergänzt werden diese durch eine Beschreibung der jeweiligen Funktion aus den Ausführungen nach Raihan (2011), Stephanou und Mpiontini (2017), Herold-Blasius, (2021) und Flavell (1979).

Awareness

Das Individuum richtet die Aufmerksamkeit auf den Problemlöseprozess und nutzt dafür Wissen zur Aufgabe bzw. zu Aufgabentypen.

- Ich habe darüber nachgedacht, was ich schon alles weiß.
- Ich habe versucht mich daran zu erinnern, ob ich so eine Aufgabe vorher schon einmal gelöst habe.
- Ich habe über etwas nachgedacht, was mir bereits schon einmal geholfen hat.
- Ich dachte: „Ich weiß, was zu tun ist.“
- Ich dachte: „So eine Aufgabe kenne ich bereits.“

Regulation

Das Individuum steuert seine Aktivitäten mit Hilfe von Wissen über die eigene Person oder (erfolgreiche) *Strategien*. Inkludiert werden hier Prozesse des Monitoring aber auch des ‚self-questioning‘. Es werden Pläne gemacht.

- Ich habe mir einen Plan (im Kopf) gemacht, um das Problem zu lösen.
- Ich habe über andere Möglichkeiten zur Lösung nachgedacht.

- Ich habe über meinen nächsten Schritt nachgedacht.
- Ich habe mein Vorgehen geändert.

Evaluation

Es wird das eigene Vorgehen inklusive eigener Denkprozesse bewertet. Genutzt wird dazu das Wissen über eigene Persönlichkeitsmerkmale aber auch die Leistungsfähigkeit.

- Ich habe darüber nachgedacht, ob das, was ich tue, funktioniert.
- Ich habe kontrolliert, was ich gemacht habe.
- Ich habe darüber nachgedacht, wie ich vorgegangen bin.
- Ich dachte: „Das schaffe ich nicht.“

„[M]etacognition is used to refer to the awareness individuals have their own thinking; their own evaluation of that thinking; and their regulation of that thinking“ (Wilson, 2001; zit. nach Wilson & Clarke, 2004, S.26).

10 Zusammenfassung

Für das hier zugrunde liegende Verständnis soll grundsätzlich das *Begründen* als Oberbegriff betrachtet werden. Es wird dabei die Zielstellung verfolgt alle Formen und vorläufigen Formen (Kratz, 1978) des mathematischen *Begründens* und nicht nur formal strenge und deduktive Beweis- bzw. Begründungsformen einzubeziehen. *Begründen* wird hier aus dem Kontext der Mathematik bzw. Mathematikdidaktik heraus eine Darlegung von Gründen, die zur Gewissheit über die Allgemeingültigkeit der Behauptung führt.

In der Literatur wird nicht überall so trennscharf gearbeitet, wie beispielsweise Brunner (2014) dies tut, indem sie das *Begründen* als ein Oberbegriff des *Beweisens* betrachtet, um nicht-formal-deduktive Formen des Beweisens explizit einzuschließen. Um sich aber dem Begriff des *Begründens* zu nähern und sich mit schul- und hochschuldidaktischen Konzepten auseinanderzusetzen, wird für die vorliegende Arbeit auch Literatur genutzt, die das *Beweisen* in seinen Teilprozessen explizit im Kontext von Lernenden thematisiert und eben nicht das *Begründen*, sondern das *Beweisen* als Begriff nutzt.

Der Ablauf des mathematischen *Begründens* kann anhand vorangegangener Untersuchungen in drei Phasen gegliedert werden, die linear oder auch zirkulär ablaufen können. In Anlehnung an verschiedene Beweisprozessmodelle werden hier die Phasen *Verstehen*, *Begründungsprozess* und *Abschluss der Begründung* ausdifferenziert (Kapitel 5). Eine besondere Betrachtung kommt Prozessen zu, die innerhalb der zweiten Phase, also innerhalb des eigentlichen Begründungsprozesses ablaufen (Kapitel 6).

In dieser Phase werden Argumente konstruiert und verknüpft, um die Behauptung zu begründen. Die Konstruktion eines einzelnen Arguments kann unabhängig vom Inhalt durch das Toulmin Schema rekonstruiert werden. Es entsteht eine kettenartige Struktur von Ressourcen, also von Inhalten, die genutzt werden um Schlussfolgerungen zu ziehen (Abbildung 6.3). Je nach Ausprägung und eingeschlagener Denkrichtung ist das *Argumentieren* eher alltagsbezogen (geschlussfolgert durch Berufung auf Autoritäten, nach Wahrscheinlichkeit oder in Analogie), wird mit Hilfe mathematischer Mittel und eher induktiv bzw. vom generischen Beispiel aus verallgemeinernd durchgeführt oder ist eher als formal bzw. deduktiv zu betrachten. Es lassen sich die beiden Begründungsformen (in Anlehnung an das Begriffsverständnis nach Gerloff, 2021) *Argumentieren* und *formal-deduktives Beweisen* konstatieren.

Das Argumentieren kann dabei eher alltagsbezogen oder mehr oder weniger logisch mit mathematischen Mitteln ausgeprägt sein. Das formal-deduktive Beweisen ist eine weitere Form der Begründung und nutzt deduktive Vorgehensweisen. Aus der Systematisierung der Ansätze wird in Anlehnung an die Kategorisierung nach Wittmann und Müller (1988) und Brunner (2014) erkennbar, dass es verschiedene Begründungstypen gibt. Ausdifferenziert werden drei Typen, die anhand ihrer Denkrichtung bzw. der ablaufenden Prozesse genauer charakterisiert werden. So ist das *Begründen durch Exemplarizität* von dem *generischen Begründen* und dem *formal-deduktiven Begründen* zu unterscheiden (Kapitel 7).

Genutzt werden innerhalb des Prozesses unterschiedliche Inhalte oder auch Ressourcen, um das Argument zu konstruieren. Insgesamt können die genutzten Mittel und Ressourcen auf fünf verschiedenen Repräsentationsebenen dargestellt werden. Auf Basis verschiedener Betrachtungen zu Begründungstypen und Argumentationsstrukturen konnte hier die enaktive, ikonische bzw. bildliche oder visuelle, die narrative bzw. verbale, die Zahlenebene bzw. numerische und die symbolische bzw. algebraische herausgearbeitet werden (Kapitel 8).

Als Ausgangspunkt für die in Abschnitt III abgeleiteten *Strategien* und zusammenfassend für Aspekte des theoretischen Teils der vorliegenden Arbeit wird das Modell nach Brunner (2014), welches für die hier relevanten Elemente in Kapitel 4.1 in Abbildung 4.1 dargestellt wurde in Abbildung 10.1 adaptiert. Begrifflich wird vor allem konsequent nur noch mit *Begründen* als Oberbegriff für die Formen *Argumentieren* und *Beweisen* gearbeitet und dementsprechend die Originaldarstellung abgeändert. Außerdem wird die Perspektive auf die Repräsentationsebene anhand der Ausführungen in Kapitel 8 verändert, so dass die Darstellung des genutzten Mittels nicht begründungstypspezifisch angegeben wird, sondern unabhängig von anderen ablaufenden Prozessen betrachtet werden kann.

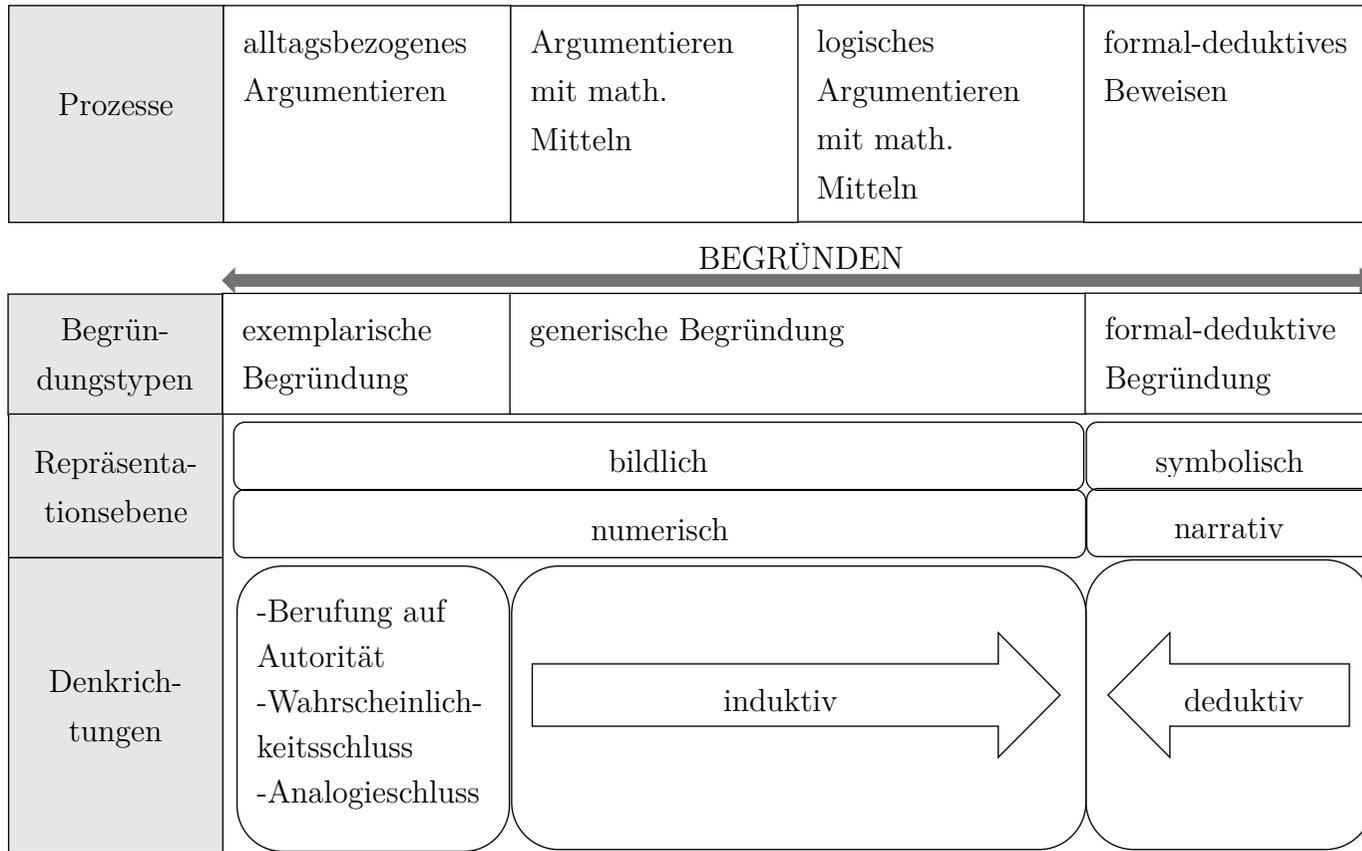


Abbildung 10.1: Ein nach Brunner (2014) adaptiertes Modell zum Verhältnis von Prozessen, Beweistypen, Repräsentationsebenen und Denkrichtungen

Teil III

**Ableitung einer theoretischen
Kollektion von Strategien aus
bereits bekannter Literatur**

Um das Forschungsanliegen der Arbeit zu bearbeiten, soll im folgenden Abschnitt die Forschungsfrage I *Welche möglichen Strategien lassen sich aus Literatur und vorangegangenen Untersuchungen ableiten?* adressiert werden. Dazu verfolgt dieser Abschnitt der Arbeit das Ziel, mit Hilfe der im Abschnitt II der Arbeit dargestellten theoretischen Grundlagen, *Strategien* im in Kapitel 4.4 dargestellten Verständnis theoretisch abzuleiten. Dazu wird auf Basis der Idee von einer *Strategie* als mentale Aktivität bzw. als Gedankenschritt zunächst eine Systematisierung der Ansätze vorgenommen und ein zweidimensionales Schema entwickelt, in dem zwei Perspektiven auf mathematische Begründungsprozesse zusammen geführt werden. Genutzt werden dafür zum einen die für das vorliegende Projekt adaptierten Darstellungen nach Brunner (2014), die in Abbildung 10.1 zusammengefasst werden und zum anderen die in Kapitel 5 erläuterten Phasen eines mathematischen Begründungsprozesses.

Es wird diese eigene Herangehensweise erarbeitet, da die in der Literatur vorkommenden Modelle von Begründungsprozessabläufen für das Vorhaben, einzelne *Strategien* im Sinne von Gedankenschritten sichtbar zu machen, nicht genügen. Ein Grund dafür ist, dass in den meisten Modellen der Begründungsprozess eher global betrachtet und anhand von Begründungstypen wie beispielsweise bei Brunner (2013;2014) oder Wittmann und Müller (1988) klassifiziert und interindividuell betrachtet und verglichen wird. Teilprozesse bzw. lokale Betrachtungen und einzelne Schritte lassen sich zwar mit Hilfe der Rekonstruktion beispielsweise von Argumenten (Toulmin, 2003; Knipping, 2003; Reid & Knipping, 2010) (Kapitel 6) oder anhand von Beweiskompetenzbetrachtungen beispielweise bei Kempen (2019) ableiten, jedoch sind diese oft auf einen Begründungstyp orientiert und betrachten das Vorgehen eher holistisch anstatt jeden Gedankenschritt einzeln. Ein weiterer Grund ist die fehlende Synthese des chronosequentiellen Ablaufs und typenspezifischer Vorgehensweisen in bereits bekannter Literatur, die mit der hier vorliegenden Herangehensweise adressiert werden soll.

Vor der konkreten Ableitung der *Strategien* erfolgt zunächst eine genauere Darstellung der Vorgehensweise der Systematisierung (Kapitel 11). Anschließend werden in drei Kapiteln die *Strategien der Strategieeinheit Verstehen* (Kapitel 12), *Argumente konstruieren und verknüpfen* (Kapitel 13) und *Diskurs* (Kapitel 14) entwickelt. Danach werden *Strategien* der Metakognition (Kapitel 15) auf Basis der in Kapitel 9 erläuterten Betrachtungen abgeleitet.

11 Darstellung der Systematisierung

Realisiert wird die Synthese der typenorientierten und chronosequentiellen Betrachtung von mathematischen Begründungsprozessen über das Erstellen eines zweidimensionalen Schemas mit einer vertikalen (zeitlichen) Dimension und einer horizontalen (typenorientierten) Dimension. Ausgangspunkt für die zeitliche bzw. chronosequentielle Dimension werden die Beweisprozessmodelle, die, wie in Kapitel 5 erläutert, zu den drei Phasen *Verstehen*, *Begründungsprozess* und *Abschluss des Begründungsprozesses* zusammengefasst werden können. Die Grundlage für die Erarbeitung der *Strategien* der horizontalen Dimension bzw. typenorientierten Dimension bieten die in Kapitel 7 dargestellten Betrachtungen der Begründungsphase an sich. Hier wird das Toulmin Schema das zentrale Modell für die Rekonstruktion von Argumentationsstrukturen.

In einer Aufgabenstellung, die zum *Begründen* auffordert, ist auf Basis der Betrachtungen in Kapitel 4.4 anzunehmen, dass wesentlich logische Einheiten im Sinne von Etappen während des Bearbeitungsprozesses sichtbar und durch den Operator *Begründen* zwingend initiiert werden. In Anlehnung an die chronosequentiellen Prozesse in Kapitel 5 wird durch die Aufgabenstellung zunächst ein *Verstehen* der Aufgabenstellung initiiert, bevor eine Argumentation und im Anschluss eine Überarbeitung der Argumentation eingeleitet wird. In Anlehnung an die *wesentlich logischen Einheiten* von Scheibke (2022) (Kapitel 4.4) werden drei Strategieeinheiten abgeleitet: VERSTEHEN, ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN und DISKURS. Diese drei Strategieeinheiten bieten die chronosequentielle und damit vertikale Dimension des Schemas. (Abbildung 11.1).

Es ist anzunehmen, dass die Begründung in *Strategieeinheiten* abläuft, es aber innerhalb der Strategieeinheiten bzw. der Etappen verschiedene Vorgehensweisen gibt, die je nach Begründungstyp und damit verbundenen Prozessen unterschiedliche *Strategien* im Sinne von Gedankenschritten (Kapitel 4.4) zeigen. Die daraus resultierende typenorientierte und horizontale Dimension des Schemas ergibt sich aus der typenorientierten Betrachtung des Begründungsprozesses (Kapitel 7). In Anlehnung an diese Ausführungen lassen sich *Strategien* aus den Charakteristika von exemplarischen Begründungen (Kapitel 7.1), generischen Begründungen (Kapitel 7.2) und formal-deduktiven Begründungen (Kapitel 7.3) ableiten. Ergänzt werden diese *Strategien* mit Hilfe von Betrachtungen von Prozessen und Denkrichtungen, die das Konstru-

ieren und Verknüpfen von Argumentationen genauer beschreiben (Kapitel 6).

		typenorientiert		
		exem- plarisch	generisch	formal- deduktiv
chronosequentiell	Verstehen			
	Argumente konstruieren und verknüpfen			
	Diskurs			

Abbildung 11.1: Zweidimensionales Schema als Grundlage zur Betrachtung von *Strategien* in mathematischen Begründungen, weiterentwickelte Version aus Eggerichs, 2023

Das Schema (Abbildung 11.1) bietet die Grundlage zur Betrachtung eines individuellen Begründungsprozesses, der entweder linear oder auch zirkulär auf chronosequentieller Ebene von oben nach unten verläuft und sich dabei *Strategien* im Sinne von Gedankenschritten und mentalen Aktivitäten aus einem oder verschiedenen Begründungstypen bedient. Die unterbrochenen vertikalen Linien verdeutlichen diese Durchlässigkeit zwischen den Begründungstypen.

Die Ableitung einer *Strategie* in der hier verwendeten Bedeutung erfolgt anhand von zwei Momenten: 1) formal 2) inhaltlich. Das formale Moment wird durch folgende in der Definition in Kapitel 4.4 konstatierte Merkmale charakterisiert:

- mentale Repräsentation
- gewisse Prozesshaftigkeit
- geplant oder ungeplant
- absichtsvoll oder absichtslos

- bewusst oder unbewusst.

Das inhaltliche Moment wird durch folgende, wie in der Definition in Kapitel 4.4 konstatiert, Merkmale charakterisiert:

- Nachvollziehbarkeit
- inhaltliche Abgeschlossenheit
- erfolgreich oder erfolglos.

Um eine (Makro-) *Strategie* aus der Literatur zu entwickeln, werden beide Momente berücksichtigt. Es werden Verben bzw. substantivierte Verben genutzt, um Prozesse bzw. Aktivitäten zu beschreiben. Dieses Verb beschreibt außerdem eine inhaltlich abgeschlossene Aktivität, die dann mit Hilfe von Adjektiven und Adverbien konkretisiert werden kann. Die Darstellung der Ableitung der *Strategien* ist in den folgenden Kapiteln anhand der ausgearbeiteten Strategieeinheiten gegliedert. So wird in Kapitel 12 dieses Instrument in Kombination mit den Forschungsergebnissen bei Kirsten (2021) angewandt, um Aktivitäten der Strategieeinheit VERSTEHEN zu entwickeln. In Kapitel 13 wird mit Hilfe der beschriebenen Momente *Strategien* abgeleitet, die unter der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN subsumiert werden. Die *Strategien* der Strategieeinheit DISKURS werden mit Hilfe des Instrumentes in Kapitel 14 entwickelt.

12 Strategieeinheit Verstehen

Grundlage für die Entwicklung von *Strategien* der Strategieeinheit VERSTEHEN, sind die in Kapitel 5.2 beschriebenen Perspektiven auf das VERSTEHEN als Prozess innerhalb von mathematischen Begründungen. Das VERSTEHEN ist Teil eines Problemlöseprozesses (Kapitel 4.2) und wird im Sinne von Scheibke (2022) zur wesentlich logischen Einheit und in der hier vorliegenden Untersuchung auf Basis dessen zur Strategieeinheit. Als Grundlage für die Erarbeitung möglicher *Strategien* im hier vorliegenden Verständnis soll das Phasenmodell von Kirsten (2021) heran gezogen werden. Ausgehend von den Überlegungen in Kapitel 11 zu formalen und inhaltlichen Momenten beim Ableiten einer *Strategie* werden nun auf Basis der Untersuchungen von Kirsten (2021) zunächst Makrostrategien entwickelt. Wird die Makrostrategie bezüglich der inhaltlichen Momente näher betrachtet, so entwickeln sich *Strategien* und *Strategien in spezifischen Ausprägungen*. Kirsten (2021) konstatiert in ihren Untersuchungen verschiedene typische Aktivitäten, die in der Phase des VERSTEHENS stattfinden (Kapitel 5.2: *Ergänzen, Folgern, Extrahieren, Visualisieren, Beispielbetrachtungen, Hinterfragen, Wiederholen, Paraphrasieren, Transformieren, Spezifizieren, Fokussieren, Klassifizieren*). Um eine größere Offenheit für die empirische Untersuchung im hier vorliegenden Projekt zu generieren, sollen diese Aktivitäten in größere Bereiche zusammengefasst und auf Basis der Charakterisierung, die Kirsten (2021) formuliert, neu geordnet werden. Es entstehen dadurch die drei Makrostrategien INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG, STRUKTURELLE AUSEINANDERSETZUNG und WIEDERHOLEN.

Die inhaltliche und die strukturelle Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung werden als Tätigkeiten des Bildens einer mentalen Repräsentation betrachtet und können anhand von thematischen bzw. inhaltlichen oder äußerlichen bzw. strukturellen Merkmalen der Aufgabenstellung erfolgen. Das WIEDERHOLEN trägt ebenfalls zum Aufbau eines Situationsmodells durch das Bilden einer mentalen Repräsentation bei.

Die Makrostrategie INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG wird aus den bei Kirsten (2021) beschriebenen Aktivitäten *Extrahieren, Anreichern, Visualisieren, Folgern, Ergänzen, Transformieren, Paraphrasieren, Wiederholen* und *Beispielbetrachtung* abgeleitet. Das Bilden einer mentalen Repräsentation erfolgt hier mit inhaltlichem Fokus. Mit Hilfe der Definition einer *Strategie*

können nun die drei *Strategien* EXTRAHIEREN, ANREICHERN, ÜBERSETZEN abgeleitet werden.

Das EXTRAHIEREN ist das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation mit dem Ziel der Entnahme von Informationen aus der Aufgabenstellung. Das ANREICHERN beschreibt das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation durch das Anreichern der Informationsbasis durch weitere Informationen. Das ÜBERSETZEN als dritte *Strategie* umfasst das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem der Inhalt der Aufgabenstellung übersetzt, d.h. auf einer anderen Repräsentationsebene dargestellt wird, um die Aufgabenstellung zu verstehen. Das EXTRAHIEREN kann mit Hilfe der Betrachtungen von Kirsten (2021) in zwei verschiedenen Ausprägungen vorkommen und kann entweder in Form des Übertragens auf einen Notizzettel oder des bewussten Betonens von Ausdrücken erscheinen. Die *Strategie* des Extrahierens kann für die hier vorliegende Untersuchung also entweder SCHRIFTLICH oder MÜNDLICH erfolgen. Abgeleitet werden können daraus das MÜNDLICHE EXTRAHIEREN und das SCHRIFTLICHE EXTRAHIEREN.

Das ANREICHERN als weitere *Strategie* kann als ERGÄNZENDES ANREICHERN und als FOLGERNDES ANREICHERN genauer konkretisiert werden. Basis dafür sind ebenfalls die Betrachtungen von Kirsten (2021). Die *Strategie* ERGÄNZENDES ANREICHERN ist ein Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation mit Hilfe des Anreicherns der Informationsbasis durch Vorwissen aus Vorlesung, vorangegangenen Aufgabenstellungen oder Schule. Die *Strategie* FOLGERNDES ANREICHERN ist ein Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation durch das Anreichern der Informationsbasis durch das Herleiten von Voraussetzungen, Eigenschaften und Zusammenhängen, die inhaltlich mit der Aufgabenstellung in Verbindung stehen.

Unter der *Strategie* ÜBERSETZEN sollen die von Kirsten (2021) beschriebenen Übersetzungsaktivitäten *Paraphrasieren*, *Transformieren*, *Beispielbetrachtung* und *Visualisieren* subsumiert und auf Basis dessen in die verschiedenen Ausprägungen SYMBOLISCH, BEISPIELHAFT, PARAPHRASIEREND oder VISUELL konkretisiert werden. Das SYMBOLISCHE ÜBERSETZEN beschreibt das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem die Aussage in formale Sprache übersetzt wird. Das BEISPIELHAFTE ÜBERSETZEN beschreibt das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem die Aussage anhand von Beispielen nachvollzogen wird. Das PARAPHRASIERENDE ÜBERSETZEN beschreibt das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem die Aussage in eigenen Worten umschreibend wiedergegeben wird. Das VISUELLE ÜBERSETZEN beschreibt das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation mit Hilfe des Anfertigens von Skizzen, graphischen oder ikonischen Darstellungen.

Kirsten (2012) beschreibt die Aktivitäten des *Spezifizierens*, des *Fokus-*

sierens und *Klassifizierens* als Tätigkeiten, die eine strukturelle Auseinandersetzung mit der Aufgabe zeigen. Abgeleitet daraus wird die Makrostrategie *strukturelle Auseinandersetzung*. Wird diese Makrostrategie bezüglich des inhaltlichen Momentes (inhaltliches Moment, Kapitel 11) konkretisiert, so lassen sich verschiedene *Strategien* ableiten. In Anlehnung an die von Kirsten (2021) beschriebenen Aktivitäten entsteht zum einen die Betrachtung von Sonderfällen, welches als SPEZIFIZIEREN bezeichnet werden kann. Das Bilden einer mentalen Repräsentation entsteht hier mit strukturellem Fokus. Des Weiteren kann das FOKUSSIEREN entwickelt werden. Diese *Strategie* beschreibt eine Aktivität, die Einschränkungen der Betrachtungen auf einen Bereich oder Aspekt zeigt. Auch hier geschieht diese Aktivität mit Fokus auf die Struktur der Aufgabenstellung. Schlussendlich zeigt die *Strategie* des KLASSIFIZIERENS die Betrachtung der logischen Struktur der Aufgabenstellung und unterscheidet hier zwischen All- und Existenzaussage ebenfalls mit einem strukturellen Fokus auf die Aufgabenstellung.

Die Makrostrategie WIEDERHOLEN umfasst in Anlehnung an Kirsten (2021) Aktivitäten, die das Wiederholen der gesamten Aufgabenstellung, Teile dieser oder im vorherigen Prozess bereits getätigte Verbalisierungen zeigen. Auf Basis dessen werden die *Strategien* TEILE DER AUFGABENSTELLUNG WIEDERHOLEN und VORHERGEHENDE ÄUSSERUNGEN WIEDERHOLEN ausdifferenziert. Diese *Strategien* beschreiben ein Bilden einer mentalen Repräsentation durch das Wiederholen der Aufgabenstellung oder bereits zuvor geäußelter Gedanken.

In der empirischen Untersuchung, die in einem späteren Abschnitt der Arbeit dargestellt wird (Abschnitt IV), wird um das laute Lesen der Aufgabenstellung gebeten. Deshalb wird das LESEN DER AUFGABE zu einer weiteren theoretisch abgeleiteten Makrostrategie, die nur das erstmalige Lesen der Aufgabe zu Beginn der Interviewsituation beschreibt. Jedes weitere wortgetreue Lesen der Aufgabenstellung fällt unter das WIEDERHOLEN. Die entwickelten Makrostrategien und *Strategien* sind begründungstypenspezifisch und sind deshalb in der Abbildung 12.1 typenübergreifend eingetragen.

KAPITEL 12. STRATEGIEEINHEIT VERSTEHEN

		typenorientiert		
		exem- plarisch	generisch	formal- deduktiv
chronosequentiell	Verstehen	-inhaltliche Auseinandersetzung -strukturelle Auseinandersetzung -Wiederholen -Lesen der Aufgabe		
	Argumente konstruieren und verknüpfen			
	Diskurs			

Abbildung 12.1: Makrostrategien der Strategieeinheit VERSTEHEN eingeordnet in das zweidimensionale Schema

Im Folgenden sollen die hier heraus gearbeiteten Makrostrategien und *Strategien* tabellarisch (Tabelle 12.1) mit den möglichen Ausprägungen mit Bezügen (Referenz) zum Modell nach Kirsten (2021) dargestellt werden. Diese tabellarische Zusammenstellung bietet die Grundlage für die Erarbeitung der Kategorien in Abschnitt IV (konkret in Kapitel 20.8).

KAPITEL 12. STRATEGIEEINHEIT VERSTEHEN

Tabelle 12.1: Tabellarisch zusammengestellte *Strategien* der Strategieeinheit VERSTEHEN

Makrostrategie	Strategie	Ausprägung	Beschreibung und Referenz
Inhaltliche Auseinandersetzung	Extrahieren	schriftlich	das Bilden einer mentalen Repräsentation mit inhaltlichem Fokus mit dem Ziel der Entnahme von Informationen aus der Aufgabenstellung/ Referenz: Extrahieren (Kirsten, 2021)
Inhaltliche Auseinandersetzung	Extrahieren	mündlich	das Bilden einer mentalen Repräsentation mit inhaltlichem Fokus mit dem Ziel der Entnahme von Informationen aus der Aufgabenstellung/ Referenz: Extrahieren (Kirsten, 2021)

KAPITEL 12. STRATEGIEEINHEIT VERSTEHEN

Inhaltliche Auseinandersetzung	Anreichern	ergänzend	das Bilden einer mentalen Repräsentation mit inhaltlichem Fokus Anreichern der Informationsbasis durch Vorwissen aus Vorlesung, vorangegangener Aufgabenstellungen oder Schule/ Referenz: Ergänzen (Kirsten, 2021)
-	Anreichern	folgernd	das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation durch das Anreichern von Informationen durch Herleiten von Voraussetzungen, Eigenschaften, Zusammenhängen/ Referenz: Folgern (Kirsten, 2021)
-	Übersetzen	symbolisch	das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem die Aussage in formal-symbolische Sprache übersetzt wird/ Referenz: Transformieren (Kirsten, 2021)

KAPITEL 12. STRATEGIEEINHEIT VERSTEHEN

-	Übersetzen	beispielhaft	das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem die Aussage anhand von Beispielen nachvollzogen wird/ Referenz: Beispielbetrachtung (Kirsten, 2021)
-	Übersetzen	paraphrasierend	das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, indem die Aussage in eigenen Worten umschreibend wiedergegeben wird/ Referenz: Paraphrasieren (Kirsten, 2021)
-	Übersetzen	visuell	das Bilden einer inhaltlichen mentalen Repräsentation, mit Hilfe des Anfertigen von Skizzen, graphischen oder ikonischen Darstellungen / Referenz: Visualisieren (Kirsten, 2021)

KAPITEL 12. STRATEGIEEINHEIT VERSTEHEN

strukturelle Auseinandersetzung	Spezifizieren	-	das Bilden einer strukturellen mentalen Repräsentation, indem Sonderfälle betrachtet werden/ Referenz: Spezifizieren
-	Fokussieren	-	das Bilden einer strukturellen mentalen Repräsentation, indem Einschränkungen der Betrachtungen auf einen Bereich oder Aspekt getätigt werden/ Referenz: Fokussieren
-	Klassifizieren	-	das Bilden einer strukturellen mentalen Repräsentation, indem die logische Struktur betrachtet und zwischen All- und Existenzaussage unterschieden wird
Wiederholen	Teile der Aufgabenstellung wiederholen	-	das Bilden einer mentalen Repräsentation durch das Wiederholen der Aufgabenstellung/ Referenz: Wiederholen (Kirsten, 2021)

KAPITEL 12. STRATEGIEEINHEIT VERSTEHEN

Wiederholen	vorhergehende Äußerung wiederholen	-	das Bilden einer mentalen Repräsentation durch das Wiederholen bereits zuvor geäußelter Gedanken/ Referenz: Wiederholen (Kirsten, 2021)
Lesen der Aufgabe	-	-	nur das erstmalige Lesen der Aufgabe zu Beginn der Interviewphase/ Referenz: Wiederholen (Kirsten, 2021)

13 Strategieeinheit Argumente konstruieren und verknüpfen

Neben Verstehensaktivitäten als Bilden einer mentalen Repräsentation lassen sich außerdem Aktivitäten ableiten, die das Erstellen der Begründung an sich genauer charakterisieren. Aus der genauen Charakterisierung der Phase des Begründungsprozesses (Kapitel 5.3) entnommen, ist diese Phase vor allem explorativ und enthält sowohl die Planung des weiteren Vorgehens als auch die Ausführung des Plans mit dem Ziel eine Beweisskizze zu erstellen. Um *Strategien* der Strategieeinheit *Argumente konstruieren und verknüpfen* abzuleiten, werden ergänzend zu den Betrachtungen, die sich aus den Begründungstypen (Kapitel 7) ergeben, auch Prozesse, Denkrichtungen (Kapitel 6) und Argumentationsrekonstruktionsmöglichkeiten (Kapitel 6.1) einbezogen. Die Bezeichnung dieser Strategieeinheit ergibt sich aus diesen Überlegungen. Angenommen wird, dass das einzelne Argument in seiner spezifischen Erscheinungsform Teil des gesamten Begründungsprozesses ist. Das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten wird zentrale Tätigkeit innerhalb dieser Phase. Aus der kettenartigen Struktur, die durch das Toulmin Schema (Kapitel 6.1) zur Rekonstruktion von Argumenten angeboten und von Meyer und Prediger (2009) auf eine mathematische Begründung übertragen wird, lässt sich schlussfolgern, dass eine *Ressource* im Sinne eines Mittels oder einer Information als Ausgangspunkt für diese Argumentation zugrunde liegt. Dieser Ausgangspunkt wird mit Hilfe von Regeln und Stützungen dieser Regeln transformiert. Das beschriebene Vorgehen kann mit Hilfe der Abbildung 13.1 nachvollzogen werden.

Zwei *Strategien*, die aufeinander aufbauen, werden hier auf drei Ebenen betrachtet. Ebene 1 stellt den beschriebenen Ausgangspunkt für diese Überlegungen in Form eines vereinfachten Toulmin Schemas dar. Aus einem Datum wird eine Konklusion geschlossen. Die durch die Regel und die Stützung geschlossene Konklusion wird hier zusammenfassend im Sinne eines Gedankenschrittes, der beobachtbar wird, betrachtet. In Ebene 2 wird diese Vorgehensweise anhand eines Beispiels illustriert und die in Kapitel 6.2.3 erläuterte Überlegung, dass die Rekonstruktion durch das Toulmin Schema auch auf deduktive Schlussweisen übertragen werden kann und dadurch eine kettenartige Struktur entsteht, dargestellt. Der Term $2x + 1 + 2x + 1$, der aufgestellt

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

wurde, um eine mathematische Situation in Symbolsprache auszudrücken wird mit Hilfe des deduktiven Schließens (Schlussregel) und der Kenntnis des Assoziativgesetzes zu $2x + 2x + 1 + 1$ transformiert. Die Stützung und die Schlussregel, die zu dieser sichtbaren Konklusion führen, werden als diesem zweiten Gedankenschritt inhärent angenommen. Geschlussfolgert werden kann aus diesen beiden Überlegungen in Ebene 3 eine Ressource, die durch eine bestimmte Art und Weise umgeformt oder transformiert wird. Daraus werden die beiden Makrostrategien RESSOURCENAUSWAHL und TRANSFORMIEREN abgeleitet.

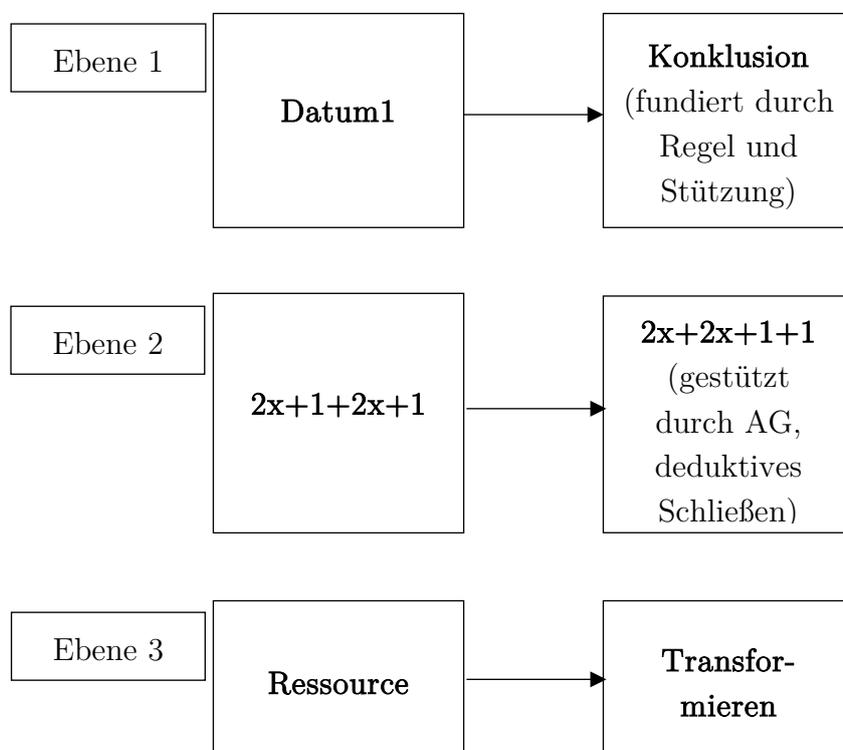


Abbildung 13.1: Ableitung der Makrostrategien RESSOURCENAUSWAHL und TRANSFORMIEREN aus der kettenartigen Struktur von Argumentationsprozessen

Die Erscheinungsformen der Ressource und die Art und Weise der Transformation lassen sich aus den theoretischen Überlegungen sowohl zu den Begründungstypen (Kapitel 7) als auch zur Rekonstruktion von Prozessen und Denkrichtungen (Kapitel 6) während der Phase des Begründens ableiten. Neben diesen beiden Makrostrategien lässt sich das Anfertigen einer

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Beweisskizze als dritte Makrostrategie ableiten. In der Abbildung 13.2 werden diese drei Makrostrategien ergänzt.

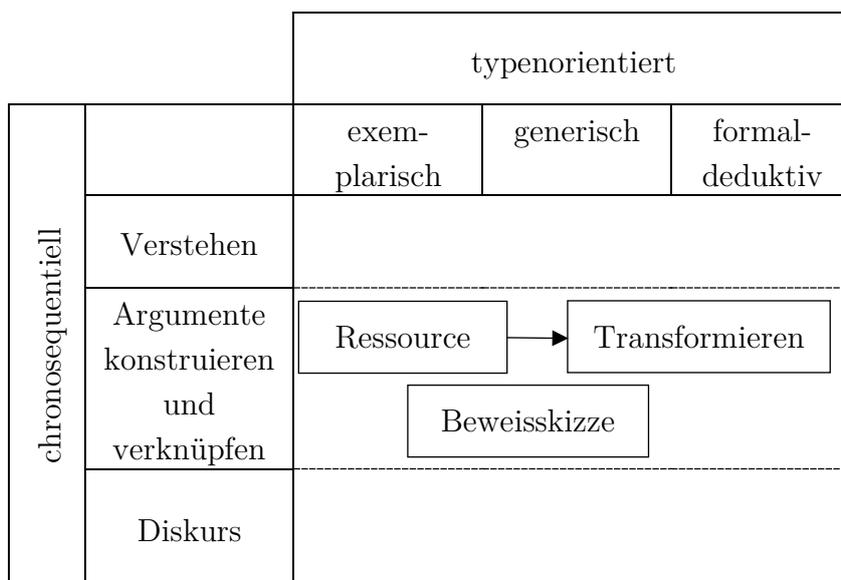


Abbildung 13.2: Makrostrategien der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN eingeordnet in das zweidimensionale Schema

Als Ressourcen werden hier mathematische oder nicht mathematische Mittel oder Informationen bezeichnet. Ressourcen ergeben sich aus den Betrachtungen von Knipping (2003), die Argumentationen anhand der Erscheinungsform des Datums aber auch des Garanten (Kapitel 6.1) genauer charakterisiert. Zunächst lässt sich aus der deduktiv-begrifflichen Argumentation die *Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN* ableiten und beschreibt dabei Informationen oder Mittel, die die mathematischen Begriffe bzw. durch Begriffe konstituierte mathematische Beziehungen beinhalten. Diese *Strategie* umfasst konkret mathematische Begriffe, Definitionen oder Sätze und damit auch mathematische Gesetze, wie Rechengesetze, die die Eigenschaften der mathematischen Objekte nutzbar machen und thematisieren.

Aus der *metaphorischen Argumentation* nach Knipping (2003), den *symbolischen Beweisen* (Reid & Knipping, 2010), den *narrativen Beweisen* (Reid & Knipping, 2010), der *anschaulichen Argumentation* (Knipping, 2003) und der *konstruktiven Argumentation* (Knipping, 2003) werden verschiedene Formen bzw. Ausprägungen der *Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN* erarbeitet. So ergibt sich eine *AUSWAHL METAPHORISCHER BEGRIFFLICHER*

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

RESSOURCEN, eine AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE, eine AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF NARRATIVER REPRÄSENTATIONSEBENE und eine AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE. Alle diese Ressourcen können in Anlehnung an Harel und Sowder (1998) und der *analogischen Argumentation* nach Knipping (2003) auch EXTERN GENERIERT, das heißt durch Dozierende, Lehrveranstaltung oder Schule gerechtfertigt, auftreten. Alle diese *Strategien* können demnach zusätzlich das Attribut EXTERN GENERIERT erhalten.

Neben den begrifflichen Ressourcen kann aus der Literatur auch die Nutzung von Beispielen als Ressourcen abgeleitet werden. Die *Strategie* der BEISPIELBETRACHTUNG (Knipping, 2003; Brandford, 1908;1913; Wittmann, 1985; Wittmann & Müller, 1988; Brunner, 2013;2014; Harel & Sowder, 1998; Balacheff, 1988) hat ebenfalls unterschiedliche Erscheinungsformen, die sich aus den Repräsentationsebenen ergeben. So kann auf Basis der Betrachtungen in Kapitel 8 zunächst unterschieden werden zwischen den folgenden Erscheinungsformen: BILDLICH (Padberg & Büchter, 2015; Reid & Knipping, 2010; Brunner, 2013;2014; Samadani, 1984; Knipping, 2003) und NUMERISCH (Padberg & Büchter, 2015; Reid & Knipping, 2010; Brunner, 2013;2014). Weiterhin kann aus der Aktivität des Aufstellens eines Gegenbeispiels in den Betrachtungen von Reid und Knipping (2010) die Erscheinungsform KOMPLEMENTÄR abgeleitet werden. Entwickelt werden können also die BILDLICHE BEISPIELBETRACHTUNG, die NUMERISCHE BEISPIELBETRACHTUNG und die KOMPLEMENTÄRE BEISPIELBETRACHTUNG. Die Beispiele, die hier genutzt werden können sowohl genetisch als auch nicht-genetisch sein.

In der nachstehenden Tabelle 13.1 werden die erläuterten *Strategien* inklusive ihrer Ausprägungen und der jeweiligen Literaturreferenz noch einmal zusammenfassend dargestellt. Diese Tabelle bietet außerdem die Grundlage für die Erarbeitung der Kategorien in Kapitel 20.8.

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Tabelle 13.1: Tabellarisch zusammengestellte *Strategien* der Makrostrategie RESSOURCENAUSWAHL

Strategie	Ausprägung	Literaturbezug
Auswahl begrifflicher Ressourcen	-	Knipping (2003): deduktiv-begriffliche Argumentation
Auswahl begrifflicher Ressourcen	metaphorisch	Knipping (2003): metaphorische Argumentation
Auswahl begrifflicher Ressourcen	metaphorisch und extern generiert	Knipping (2003): metaphorische Argumentation; Harel & Sowder (1998): external conviction; Knipping (2003): analogische Argumentation
Auswahl begrifflicher Ressourcen	bildlich	Knipping (2003): anschauliche Argumentation, konstruktive Argumentation
Auswahl begrifflicher Ressourcen	bildlich und extern generiert	Knipping (2003): anschauliche Argumentation, konstruktive Argumentation; Harel & Sowder (1998): external conviction
Auswahl begrifflicher Ressourcen	narrativ	Reid & Knipping (2010): narrative Beweise
Auswahl begrifflicher Ressourcen	narrativ und extern generiert	Reid & Knipping (2010): narrative Beweise; Harel & Sowder (1998): external conviction; Knipping (2003): analogische Argumentation
Auswahl begrifflicher Ressourcen	symbolisch	Reid & Knipping (2010): symbolische Beweise
Auswahl begrifflicher Ressourcen	symbolisch und extern generiert	Reid & Knipping (2010): symbolische Beweise; Harel & Sowder (1998): external conviction; Knipping (2003): analogische Argumentation
Beispielbetrachtung	-	Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveaus I und II; Brandford (1913): intuitives Ableiten; Wittmann (2014) und Brunner (2013;2014): inhaltlich-anschaulich bzw. operativer Beweis; Blum & Kirsch (1991): preformal proof

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Beispiel- betrachtung	bildlich	Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveau I; Reid & Knipping (2010): pictorial generic example und situational generic example; Bruner et al. (1971) und Brunner (2013;2014) ikonische und enaktive Darstellungsebene; Samadani (1984): action proof Knipping (2003): pragmatisch konstruktive Argumentation
Beispiel- betrachtung	numerisch	Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveau II; Reid & Knipping (2010): numeric generic example; Brunner (2013;2014): sprachlich-symbolische Darstellungsebene
Beispiel- betrachtung	komplementär	Reid & Knipping (2010): Gegenbeispiel

Die Weiterarbeit mit den angegebenen Ressourcen kann durch die Makrostrategie TRANSFORMIEREN genauer beschrieben werden. Aus verschiedenen Ansätzen zu Begründungsprozessen und zugehörigen Denkrichtungen können wiederum *Strategien* abgeleitet werden, um die Art und Weise der jeweiligen Transformation genauer zu charakterisieren.

So kann aus den Ausführungen nach Knipping (2003) das KONSTRUKTIVE TRANSFORMIEREN (bei Knipping, 2003: pragmatisch–konstruktive Argumentationsstruktur), das RECHNERISCHE TRANSFORMIEREN (bei Knipping, 2003: semantisch–rechnerische Argumentationsstruktur) und das METRISCHE TRANSFORMIEREN (bei Knipping, 2003: pragmatisch-metrische Argumentationsstruktur) abgeleitet werden.

Erstes zeigt ein Weiterarbeiten durch Ausrechnen von zuvor numerisch dargestellten Beispielen. Es wird hier also das Ausrechnen als charakteristisches Merkmal der Transformation zugrunde gelegt. Das KONSTRUKTIVE TRANSFORMIEREN ist eine Aktivität, die ein Transformieren im Sinne einer Manipulation von Konstruktionen, Zeichnungen oder ikonischen Darstellungen zeigt. Die Weiterarbeit geschieht also hier mit dem Mittel einer bildlichen Manipulation einer zuvor aufgestellten Ressource. Das METRISCHE TRANSFORMIEREN zeigt eine Aktivität, die ein Transformieren mit Hilfe der Tätigkeit des Abmessens zeigt. Die Art und Weise wie hier transformiert wird, ähnelt Techniken des Abmessens, wie sie beispielsweise in geometrischen Begründungen sichtbar werden können. Besonders aus dem exemplarischen Begründungstyp (Kapitel 7.1) aber auch durch die Betrachtung von Argu-

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

mentationsstrukturen lässt sich die BEISPIELVERIFIZIERUNG als eine weitere *Strategie* ableiten (Balacheff, 1988; Reid & Knipping, 2010). Wird exemplarisch begründet, so werden verifizierende Beispiele aneinandergereiht, um die Allgemeingültigkeit der Aussage zu begründen.

Das Beispiel, auf das sich bei der BEISPIELVERIFIZIERUNG bezogen wird, kann auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen dargestellt werden und kann dadurch in verschiedenen Ausprägungen vorkommen: BILDLICH (Reid & Knipping, 2010) und NUMERISCH (Padberg & Büchter, 2015; Bruner et al., 1971; Brunner, 2013;2014). Anhand der Betrachtungen von Harel und Sowder (1998) zum *proof by example and counterexample* lässt sich weiterhin auch die BEISPIELFALSIFIZIERUNG als *Strategie* ableiten. In logischer Konsequenz können auch hier die Beispiele entweder bildlich oder numerisch dargestellt werden. Wird die Allgemeingültigkeit der Aussage durch die Auflistung von verschiedenen Beispielen und dem Verweis auf eine mögliche unendliche Fortführung dieser Reihung geschlossen, so kann die *Strategie* BEISPIELREIHUNG herausgearbeitet werden. Begründet ist diese *Strategie* in Reid und Knipping (2010) (*extending the pattern* und *simple enumeration*). Diese *Strategie* kann in Anlehnung an die ausgearbeiteten Repräsentationsebenen auf BILDLICHER oder auf NUMERISCHER Repräsentationsebene auftreten.

Grundsätzlich ist es möglich, dass die Allgemeingültigkeit der Behauptung mit Hilfe eines genetischen Beispiels (Kapitel 7.2), welches dann verallgemeinert wird, begründet werden. Eine Verknüpfung der Argumente, also der verifizierenden bzw. falsifizierenden Beispiele wird induktiv, also aufgrund der Beobachtung von Phänomenen und dem anschließenden Versuch diese kausal zu interpretieren, vorgenommen (Brunner, 2013) und als genetisch bezeichnet. Wenn die Vorgehensweise insgesamt als genetisch beschrieben werden kann, so lässt sich das *Verallgemeinern* als Suche nach dem zentralen Muster betrachten, welches die Grundlage für eine allgemeingültige Begründung der Behauptung bietet (Padberg & Büchter, 2015; Wittmann, 1981;1985; Brandford 1908;1913; Rowland, 2002; Brunner, 2013;2014; Blum & Kirsch, 1991; Wittmann & Müller, 1988; Kempen, 2013;2019) (Kapitel 6.2.2). Einsichten in die relevanten Eigenschaften der mathematischen Objekte, deren Zusammenhänge und damit Einsicht in Strukturen und Muster können so gewonnen werden. Diese Erkenntnis über das zentrale Muster wiederum wird genutzt, um die Begründung allgemeingültig zu formulieren. Das Suchen nach dem zentralen Muster oder der Struktur innerhalb eines oder mehrere Beispiele kann entweder *empirisch* oder *theoretisch* erfolgen (Peschek, 1989; Dumitrascu, 2017; Krutektskii 1974; Samadeni, 1984) (Kapitel 6.2.2).

Schlussfolgernd aus den Ausführungen kann zum einen die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE und zum anderen die THEORETISCHE MUSTERSUCHE als *Strategie* abgeleitet werden. Dabei ist in Anlehnung an Dumitrascu (2017),

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Peschek (1989), Samadeni (1984) und Krutetskii et al. (1976) die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE die Suche nach der essentiellen Struktur mit Hilfe von mehreren zuvor aufgestellten Beispielen. Das Muster wird vergleichend erarbeitet und entweder durch den Zusammenhang zwischen den aufgestellten Beispielen oder durch das Herausarbeiten eines Musters mit Hilfe der Betrachtung von verschiedenen Beispielen entwickelt. Das Muster wird dabei, wie in Kapitel 6.2.2 dargestellt, anhand sinnlich oder leicht sinnlich wahrnehmbarer Merkmale entdeckt. Wenn das Muster in theoretischer Ausprägung gesucht wird, dann wird die Struktur, die zur allgemeingültigen Begründung notwendig ist, nur an einem Beispiel herausgearbeitet. Besonders in den Ausführungen nach Harel und Sowder (1998) (*analytical transformational proof*) und Balacheff (1988) (*calculation on statements*) aber auch aus der *deduktiv-begrifflichen Argumentation* nach Knipping (2003) und Padberg und Büchter (2015) (*Begründungsniveau III*) lässt sich das SYSTEMTATISCHE TRANSFORMIEREN als weitere *Strategie* ableiten. Beschrieben wird damit eine *Strategie*, die die Nutzung von mathematischen Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten zeigt. In der nachstehenden Tabelle 13.2 sollen die *Strategien* der Makrostrategie *Transformieren* mit ihren Literaturreferenzen übersichtlich dargestellt werden. Diese Tabelle bietet außerdem die Grundlage für die Erarbeitung des Kategoriensystems in Kapitel 20.8 und damit für die empirische Untersuchung, die in Abschnitt IV dargestellt wird.

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE
KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Tabelle 13.2: Tabellarisch zusammen gestellte *Strategien* der Makrostrategie TRANSFORMIEREN

Strategie	Ausprägung	Literaturbezug
Beispiel- verifizierung	-	Balacheff (1988) und Reid & Knipping (2010): the crucial experiment
Beispiel- verifizierung	bildlich	Balacheff (1988) und Reid & Knipping (2010): the crucial experiment; Padberg & Büchter (2015): BGN I; Bruner et al. (1971) und Brunner (2013;2014): ikonische, enaktive Darstellungsebene
Beispiel- verifizierung	numerisch	Balacheff (1988) und Reid & Knipping (2010): the crucial experiment
Beispiel- falsifizierung	-	Balacheff (1988) und Reid & Knipping (2010): the crucial experiment
Beispiel- falsifizierung	bildlich	Balacheff (1988) und Reid & Knipping (2010): the crucial experiment; Padberg & Büchter (2015): BGN I; Bruner et al. (1971) und Brunner (2013;2014): ikonische, enaktive Darstellungsebene
Beispiel- falsifizierung	numerisch	Balacheff (1988) und Reid & Knipping (2010): the crucial experiment; Padberg & Büchter (2015): BGN II; Brunner (2013;2014) sprachlich-symbolische Darstellungsebene
Beispielreihung	-	Reid & Knipping (2010): extending the pattern und simple enumeration
Beispielreihung	bildlich	Reid & Knipping (2010): extending the pattern und simple enumeration
Beispielreihung	numerisch	Reid & Knipping (2010): extending the pattern und simple enumeration; Padberg & Büchter (2015): BGN II; Brunner (2013;2014) sprachlich-symbolische Darstellungsebene

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE
KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

konstruktives Transformieren	-	Knipping (2003): pragmatisch-konstruktive Argumentationsstruktur
rechnerisches Transformieren	-	Knipping (2003): semantisch-rechnerische Argumentationsstruktur
metrisches Transformieren	-	Knipping (2003): pragmatisch-metrische Argumentationsstruktur
Mustersuche	-	Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveau I und II; Wittmann (1981;1985), Wittmann & Müller (1988) und Brunner (2013;2014): operativer bzw. inhaltlich-anschaulicher Beweis; Brandford (1908;1913): generic proof; Rowland (2002): genetische Beispiele; Blum & Kirsch (1991): preformal proof; Kempen (2013;2019): operativer Beweis
Mustersuche	empirisch	Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveau I und II; Wittmann (1981;1985) und Wittmann & Müller (1988): operativer bzw. inhaltlich-anschaulicher Beweis; Brandford (1908,1913): generic proof; Rowland (2002): genetische Beispiele; Brunner (2013;2014): operativer bzw. inhaltlich-anschaulicher Beweis; Blum & Kirsch (1991): preformal proof; Kempen (2013;2019): operativer Beweis; Peschek (1998), Dumitrescu (2017) und Krutetskii et al. (1976): empirisches Verallgemeinern; Samadeni (1984): Entdeckung des Musters an mehreren Beispielen

KAPITEL 13. STRATEGIEEINHEIT ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Mustersuche	theoretisch	Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveau I und II; Wittmann (1981;1985), Wittmann & Müller (1988) und Brunner (2013;2014): operativer bzw. inhaltlich-anschaulicher Beweis; Brandford (1908,1913): generic proof; Samadeni (1984): Entdeckung des Musters an mehreren Beispielen; Rowland (2002): genetische Beispiele; Blum & Kirsch (1991): preformal proof, Kempen (2013;2019): operativer Beweis; Peschek (1998), Dumitrascu (2017) und Krutetskii et al. (1976): theoretisches Verallgemeinern; Kempen (2013;2019): operativer Beweis
systematisches Transformieren	-	Harel & Sowder (1998): analytical transformational proof; Balacheff (1988): calculation on statements; Knipping (2003): deduktiv-begriffliche Argumentation; Padberg & Büchter (2015): Begründungsniveau III

In Anlehnung an die Phasenbeschreibungen nach Kirsten (2021) und Stein (1986) steht eine Beweisskizze am Ende der explorativen Etappe, die als *Argumente konstruieren und verknüpfen* bezeichnet wird. Als weitere Makrostrategie soll also BEWEISSKIZZE ERSTELLEN abgeleitet werden. Das Anfertigen einer Beweisskizze sehen beide Publizierende als eine Art Übergang, um in Kontakt mit der Community zu treten. Die Beweisskizze stellt demnach den ersten Entwurf der mathematischen Begründung dar, die im Anschluss mit Hilfe von *Strategien* der Strategieeinheit DISKURS überarbeitet werden.

14 Strategieeinheit Diskurs

Der Beweis in der Fachmathematik und damit auch das mathematische Begründen versteht sich in seiner vollständigen Form auch immer als Kommunikation mit der Fachcommunity bzw. der Lerngruppe. Dabei wird mathematisches *Begründen* als ein kommunikativer Akt verstanden, der das Ziel verfolgt, den vorher durchgeführten logischen Schluss auch sichtbar zu machen und zu verifizieren (Brunner, 2014). Die Begründung kann dabei innerhalb eines Aushandlungsprozesses (Brunner, 2014) akzeptiert oder zurück gewiesen werden (Knipping, 2003). Als Ergänzung des Phasenmodells nach Boero (1999) formuliert Ufer und Reiss (2009) die Akzeptanz durch die mathematische Community als siebten Schritt im Prozess.

Die Strategieeinheit DISKURS umfasst Tätigkeiten mit dem Ziel die zuvor erstellte Beweisskizze für die Fachcommunity bzw. die Lerngruppe oder nur für die interviewende Person zu überarbeiten und nachvollziehbar darzustellen. Aus dieser Perspektive lassen sich besonders aus den Ausführungen von Kirsten (2021) *Strategien* ableiten (Kapitel 5.4). Die Fragmente, die vorher in der Beweisskizze angelegt wurden, müssen anschließend kohärent zusammengefügt werden (Kirsten, 2021). Um diese Kohärenz zu erreichen, werden inhaltliche Lücken geschlossen und eine Formel- und Symbolsprache in Kombination mit einem Prosatext verwendet (Kirsten, 2021). Abgeleitet wird daraus die Makrostrategie *Formulieren* als Präsentationsaktivität. Beim Formulieren werden verschiedene Sprachregister angewendet.

So ergibt sich das FACHSPRACHLICHE FORMULIEREN, das ALLTAGSPRACHLICHE FORMULIEREN und das BILDUNGSSPRACHLICHE FORMULIEREN (Kapitel 5.4). Die *Strategien* beschreiben jeweils eine Nutzung des jeweiligen Sprachregisters für die Formulierung bzw. die damit verbundene sprachliche Überarbeitung der Beweisskizze. Außerdem öffnet Kirsten (2021) die Perspektive auf weitere Aktivitäten und knüpft damit an die Rückschau nach Polya (1949) oder auch Stein (1986) an. Neben dem Formulieren ist das VALIDIEREN eine weitere mögliche Makrostrategie. Nach Kirsten (2021) gehört hierzu das *Hinterfragen*, welches sowohl den Kriterienabgleich, eine Beweisstrukturkontrolle oder auch eine Beweisschemakontrolle beinhalten kann. Das HINTERFRAGEN als daraus abzuleitende *Strategie* wird hier nicht in die Strategieeinheit DISKURS eingeordnet, sondern zu den metakognitiven Aktivitäten in Kapitel 15 ergänzt. Diese Überlegungen ergeben sich sowohl

aus dem in Kapitel 9 dargestellten Modell nach Clarke und Wilson (2004) als auch aus den Ausführungen von Ericsson und Simon (1980), die das Bewerten und Evaluieren der eigenen Begründung als metakognitive Aktivität fasst und damit den metakognitiven fremdadressierten Lautdenkenprotokollen und nicht den hier untersuchten Lautdenkenprotokollen zugehörig beschreiben. Kirsten (2021) arbeitete weiterhin die *Rückschau* als zentrale Aktivität des *Validierens* heraus. Für die hier vorliegende Untersuchung wird die *Strategie RÜCKSCHAU HALTEN* abgeleitet. Im Gegensatz zu Kirsten (2021), die das Feststellen des Wertes der Begründung hier mit einbezieht, soll die Bewertung des eigenen Vorgehens dem Modell nach Clarke und Wilson (2004) folgend zu den metakognitiven Aktivitäten zugeordnet werden. Unter der *Strategie RÜCKSCHAU HALTEN* wird hier lediglich ein Vorgehen beschrieben, welches überblicksartig die zuvor entwickelte Beweisskizze bezüglich der inhaltlichen Sinnhaftigkeit, nicht jedoch das gesamte Vorgehen aus einer Metaperspektive beschreibt. In Tabelle 14.1 werden die hier abgeleiteten *Strategien* noch einmal übersichtlich dargestellt und bieten die Grundlage für die Erarbeitung des Kategoriensystems (Kapitel 20.8).

Tabelle 14.1: Tabellarisch zusammengestellte *Strategien* aus der Strategieeinheit DISKURS

Makrostrategie	Strategie	Literaturbezug
Formulieren	fachsprachliches Formulieren	Halliday (1978)
	alltagssprachliches Formulieren	Abshagen (2015)
	bildungssprachliches Formulieren	Gogolin & Duarte (2016)
Validieren	Rückschau halten	Polya (1949), Schoenfeld (1985), Kirsten (2021)

In Abbildung 14.1 werden die Makrostrategien in das Schema eingeordnet.

KAPITEL 14. STRATEGIEEINHEIT DISKURS

		typenorientiert		
		exem- plarisch	generisch	formal- deduktiv
chronosequentiell	Verstehen			
	Argumente konstruieren und verknüpfen			
	Diskurs	-Formulieren -Validieren		

Abbildung 14.1: Makrostrategien der Strategieinheit DISKURS eingeordnet in das zweidimensionale Schema

15 Metakognition

Wie bereits erläutert, ist anzunehmen, dass metakognitive Aktivitäten in Interviewsituationen, in denen das *Laute Denken* angewendet wird, ebenfalls beobachtet werden kann. Aus der in Kapitel 9 dargestellten Betrachtung zur Metakognition in Begründungsprozessen und der Unterscheidung von Ericsson und Simon (u.a.1980; Kapitel 17.1) in Verbalisierungslevel und der daraus resultierenden Differenzierung in Lautdenkenprotokolle und fremd-adressierte metakognitive Lautdenkenprotokolle (Stark, 2010; Heine, 2005), soll im folgenden beschrieben werden, wie diese *Strategien* von den oben heraus gearbeiteten *Strategien* unterschieden werden sollen.

Schlussfolgernd daraus, dass mentale Zustände als mentale Aktivitäten und hier als *Strategien* betrachtet werden, kann angenommen werden, dass mit dem Begriff der *Strategien* nur die Verbalisierungen auf Level 1 und 2 unter diesem Begriff subsumiert und erfasst werden können und damit unter den Begriff des Lautdenkenprotokolls fallen. Metakognitive Aktivitäten sind laut dieser Ausführungen eher den fremdadressierten metakognitiven Lautdenkenprotokollen zuzuordnen und fallen nicht unter die in Kapitel 4.4 erarbeitete Definition von *Strategien*. Metakognitive Aktivitäten sind grundsätzlich geprägt von einem Denken über das Denken und beschreiben eine Auseinandersetzung mit eigenen kognitiven Prozessen (Stangl, 1997). Untergliedert werden können sie anhand der in Kapitel 9 erläuterten Funktionen und den dort erläuterten konkreten Entsprechungen aus dem Projekt von Kunzle (2005). Um eine metakognitive Aktivität von einer *Strategie* im Lautdenkenprotokoll zu unterscheiden, werden folgende Kriterien formuliert:

- Die Begründenden verbalisieren Gedanken, die sich auf die Vorgehensweise und den Problemlöseprozess generell richten und aus einer Metaperspektive die einzelnen Gedankenschritte zusammenfassen (Awareness nach Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015).
- Die Begründenden verbalisieren Gedanken, die die eigene Vorgehensweise bewerten (Evaluation nach Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015).
- Die Begründenden steuern die eigenen Aktivitäten mit Hilfe von Wissen über die eigene Person, wie das Monitoring und das ‚self-questioning‘.

Außerdem verbalisieren sie Pläne bezüglich des Vorgehens (Regulation nach Wilson & Clarke, 2004; Kunzle, 2015).

Es grenzen sich also metakognitive *Strategien* von den übrigen *Strategien* in der vorliegenden Arbeit durch die Betrachtung des Inhaltes ab. Konkret bedeutet das, dass alle *Strategien* der Metakognition zuzuordnen sind, die Verbalisierungen zeigen, die sich inhaltlich eher mit der Person, der Aufgabe, erfolgreichen *Strategien*, Antizipation von nächsten Schritten, Gedanken über vorhergehende Schritte und Evaluation dieser beschäftigen und dabei konkrete Inhalte eher außen vor lassen.

16 Zusammenfassung

Mit Hilfe vorhandener Literatur können verschiedene *Strategien* abgeleitet werden. Die Grundlage dafür ist ein zweidimensionales Schema, das in einer vertikalen Dimension den intraindividuellen Prozess basierend auf chronosequentiellen Perspektiven und in einer horizontalen Dimension den Prozess interindividuell vergleichend erfasst und anhand von Begründungstypen *Strategien* ableitbar macht. Aus Betrachtungen zu Etappen des Gesamtprozesses lassen sich drei Strategieeinheiten ableiten: VERSTEHEN, ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN und DISKURS. *Strategien* aus erster und letzter Strategieeinheit bieten besonders die Ausführungen nach Kirsten (2021) an, auf Basis dessen eine Kollektion entwickelt wird, die im Abschnitt IV die Grundlage für die empirischen Betrachtungen liefert. *Strategien* der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN lassen sich besonders aus begründungstyporientierten Betrachtungen inklusive der jeweiligen Prozesse und Denkrichtungen entwickeln. Dafür wurden verschiedene Modelle subsumiert und das adaptierte Modell nach Brunner (2014) (Abbildung 4.1) angewendet. Die erarbeiteten Strategien dieser Strategieeinheit, die in den Tabellen 13.1 und 13.2 übersichtlich dargestellt wurden, bieten ebenfalls die Grundlage für die empirischen Betrachtungen im nächsten Abschnitt der Arbeit.

In Abbildung 16.1 werden die erarbeiteten Makrostrategien noch einmal innerhalb des Schemas dargestellt.

		typenorientiert		
		exemplarisch	generisch	formal-deduktiv
chronosequentiell	Verstehen	-Lesen der Aufgabe -strukturelle Auseinandersetzung -inhaltliche Auseinandersetzung -Wiederholen		
	Argumente konstruieren und verknüpfen			
	Diskurs	-Formulieren -Validieren		

Abbildung 16.1: Darstellung der Makrostrategien im zweidimensionalen Schema

Teil IV

Empirische Betrachtungen und Anreicherung der Strategiekollektion

Vorangegangene Untersuchungen und bereits existierende Literatur zum Thema mathematisches *Begründen* ermöglichen es, *Strategien* im Sinne von mental repräsentierten Gedankenschritten abzuleiten. Um diese *Strategien* empirisch sichtbar zu machen und zu ergänzen, werden mit Hilfe des *Lauten Denkens* Daten erhoben und durch die qualitative Inhaltsanalyse ausgewertet. Insgesamt wird in diesem Abschnitt die Forschungsfrage II adressiert. Zunächst soll das Forschungsdesign dargestellt werden. Dabei wird die Methode der Datenerhebung (Kapitel 17), die Datenerhebung an sich (Kapitel 18) und die Methode zur Vorbereitung der Daten (Kapitel 19) für die Auswertung (Kapitel 20) in den einzelnen Kapiteln gesondert dargestellt. Schließlich erfolgt die Darstellung der Ergebnisse (Kapitel 21). Der Forschungsfrage II folgend, wird in den Ergebnissen zwischen *Strategien* unterschieden, die sowohl theoretisch ableitbar waren als auch in der Stichprobe auftraten (Kapitel 21.1) und *Strategien*, die theoretisch ableitbar waren, aber empirisch nicht sichtbar wurden (Kapitel 21.3) und *Strategien*, die empirisch ergänzt werden konnten (Kapitel 21.2).

17 Forschungsmethode zur Datenerhebung

Um mentale Prozesse zu erheben, werden in der forschungsmethodischen Literatur verschiedene Möglichkeiten angeboten. Besonders kristallisieren sich Verfahren heraus, die es ermöglichen indirekt auf die ablaufenden mentalen Prozesse zuzugreifen. Dabei werden besonders das Eye-Tracking aber auch bildgebende Verfahren (fMRT) als fruchtbare Methoden benannt. Außer diesen beiden Methoden wird ebenfalls das *Laute Denken* zur Erhebung von Daten vorgeschlagen. In der vorliegenden Arbeit wurde sich für letzteres entschieden. Zielstellung war dabei die Erfassung von mentalen Aktivitäten, die hier als *Strategien* im Sinne von Gedankenschritten begriffen werden (Kapitel 4.4). Das *Laute Denken* ist dabei als eine qualitative Methode zum Erfassen von verbalen Daten zu betrachten.

In der Literatur ergeben sich durch eine Vielzahl von durchgeführten Untersuchungen mit der Methode des *Lauten Denkens* verschiedene Positionen bezüglich der Eignung dieser Methode für die Erlangung objektiver Erkenntnisse über Denkvorgänge, kognitive *Strategien* und Prozesse. In den folgenden Kapiteln soll die Methode des *Lauten Denkens* als Erhebungsmethode von verbalen Daten zunächst eingeordnet werden (Kapitel 17.1), bevor die Methode an sich (Kapitel 17.2) dargestellt, Grenzen der gewonnenen Daten diskutiert (Kapitel 17.3) und methodische Schlussfolgerungen für die Datenerhebung und die Gestaltung der Interviewsituation gezogen werden (Kapitel 17.4).

17.1 Verbale Daten

Zugänge zur Erfassung von Denk- und Problemlöseprozessen werden in *Selbstauskünfte*, *Verhaltensdaten* und *psychophysiologische Daten* klassifiziert (Funke & Spering, 2006). Selbstauskünfte können dabei durch verschiedene Methoden gegeben werden. Unterschieden werden dabei bei Funke und Spering (2006) neben der für die hier relevanten Erhebungsmethode *verbale Daten* auch beispielsweise *Befragungen*, *psychometrische Tests* und *kontrollierte Wissensdiagnostik*. „*Verbale Daten* bezeichnen qualitative Methoden [mit dem Ziel] die subjektive Konstruktion von Personen beim Denken und Problemlö-

sen (subjektive Weltsicht, ihre Erklärungsmuster und Handlungsprogramme)“ (Funke & Spring, 2006, S.25) zu erfassen und sichtbar zu machen.

Verbale Daten sind introspektive Daten, die „durch die Selbstäußerung der Person Aufschluss über die mentale Organisation und Verarbeitung von Informationen geben“ (Stark, 2010, S.62) und konkrete Verläufe einer konkreten Tätigkeit sichtbar machen (Stark, 2010). Als Ergebnis des Erfassens der verbalen Daten entstehen *verbal reports* (van Someren et al., 1994) oder *Verbalprotokolle* (Stark, 2010; Heine, 2005). Unterschieden werden können diese in *Lautdenkenprotokolle* und *fremdadressierte metakognitive Verbalprotokolle* (Stark, 2010; Heine, 2005). Ersteres bezeichnet Verbalisierungen ohne eine Fremdadressierung oder soziale Interaktion mit beispielsweise der Versuchsleitung, wohingegen letzteres eine metakognitive Selbstbeschreibung in Form einer Selbstbeobachtung bezeichnet (Stark, 2010).

Das Erheben verbaler Daten kann auf unterschiedliche Weise geschehen, in jedem Fall aber durch eine Antwort der Interviewten auf eine Aufgabe oder ein *probe* (Ericsson & Simon, 1980). Bevor die Interviewten die Gedanken verbalisieren, laufen verschiedene mentale Prozesse ab, die in die Interpretation der Daten einbezogen werden müssen. Als Grundlage für die Interpretation verbaler Daten wird in verschiedener Literatur das Mehrspeichermodell der Gedächtnispsychologie als sinnvoll erachtet (Ericsson & Simon, 1980; van Someren et al., 1994). Dieses Modell strukturiert den Verarbeitungsprozess in verschiedenen Phasen. Der Prozess beginnt mit der Informationsaufnahme über das *sensorische Register*, geht über die Weiterverarbeitung durch Aufmerksamkeitsprozesse über das *Arbeitsgedächtnis* (mit Ultrakurzzeitgedächtnis und Kurzzeitgedächtnis) bis hin zur Speicherung nach mehrfacher Wiederholung in das *Langzeitgedächtnis*. In Abbildung 17.1 werden diese Etappen dargestellt.

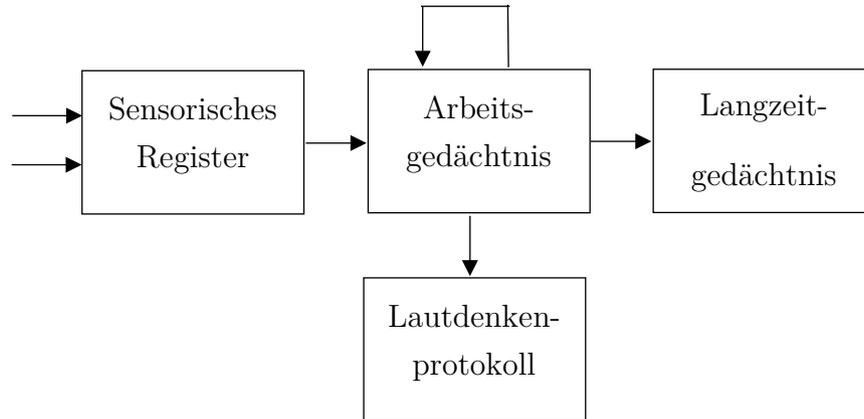


Abbildung 17.1: Das Mehrspeichermodell als Grundlage für die Betrachtung von vor der Verbalisierung ablaufenden Prozessen in Anlehnung an Konrad (2010) und van Someren et al. (1994)

Durch das sensorische Gedächtnis wird die Information von der Außenwelt aufgenommen, bevor sie im Arbeitsgedächtnis verarbeitet werden kann. Zusätzlich zu den neuen Informationen aus dem sensorischen Gedächtnis werden bereits abgespeicherte Informationen aus dem Langzeitgedächtnis aufgerufen und zur Verarbeitung hinzugezogen. Nach der Verarbeitung der gerade aktiven Informationen im Arbeitsgedächtnis werden die neu erarbeiteten Informationen wieder im Langzeitgedächtnis gespeichert. Die Anwendung von Elaborations- und Organisationsstrategien innerhalb dieses Prozesses setzt *Aufmerksamkeit* als zentrales Konzept der Gedächtnispsychologie voraus und adressiert Präkonzepte und Vorwissen aus dem Langzeitgedächtnis. Die Lenkung der Aufmerksamkeit auf den jeweiligen Bearbeitungsschritt hat Gedanken zur Folge, die unmittelbar mit der Aufgabenstellung in Verbindung stehen. Der Output dieses gesamten Prozesses ist das, was verbalisiert wird. Inhalte aus dem Langzeitgedächtnis können nicht verbalisiert werden und müssen zuerst ins Arbeitsgedächtnis transportiert werden, bevor sie sich in verbal erhobenen Daten zeigen können. Zwischen der kognitiven Verarbeitung und der Verbalisierung der Informationen liegen verschiedene mentale Aktivitäten. Je nach ablaufenden Zwischenprozessen, lassen sich verschiedene Level an Verbalisierungen unterscheiden.

Werden die versprachlichten Informationen direkt aus dem Arbeitsgedächtnis generiert, dann wird von einer Verbalisierung auf dem Level 1 gesprochen. Ein oder mehrere ablaufende Zwischenprozesse führen zu einer Level 2 oder Level 3 Verbalisierung (Ericsson & Simon, 1980). Auftauchende Zwischenprozesse verändern die Information, die verbalisiert wird. Beispielsweise transformieren sich die Informationen zu einer Level 2 Verbalisierung, wenn die Information aus der zentralen Executive nicht in verbaler Form vorliegt, sondern erst übersetzt werden muss (Ericsson & Simon, 1980).

Zu einer Level 3 Verbalisierung kommt es durch Filterprozesse. Dies tritt auf, wenn beispielsweise die Aufgabe nur einen Teil der im Arbeitsgedächtnis befindlichen Inhalte fordert, also die Versuchsleitung nur die Verbalisierung einzelner Aspekte der komplexeren Aufgabe erfragt (Ericsson & Simon, 1980). Level 3 Verbalisierungen werden bei Ericsson und Simon (1998) nicht als Ergebnisse des *Lauten Denkens* akzeptiert, da die Filterprozesse das Ergebnis zu sehr verfälschen und eine Interpretation schwierig machen. Smagorinsky (1989) ergänzt *socially directed speech* als Komponente der Level 3 Verbalisierung und fasst damit alle Verbalisierungen ebenfalls unter dieses Level, die durch soziale Interaktionen auftreten. Ausschließlich Verbalisierungen auf Level 1 und 2 werden unter dem Begriff der Lautdenkenprotokolle gefasst (Ericsson & Simon, 1980;1998; Stark, 2010; Heine, 2005), wohingegen Level 3 Verbalisierungen unter den fremdadressierten metakognitiven Verbalprotokollen zusammengefasst werden können (Stark, 2010; Heine, 2005). Das *Laut Denken* als Erhebungsmethode soll im Folgenden näher betrachtet werden.

17.2 Die Methode des Lauten Denkens als qualitative Erhebungsmethode verbaler Daten

Eine spezifische Art, wie verbale Daten erhoben werden können, ist die Methode des *Lauten Denkens* bzw. das Auswerten von *Lautdenkenprotokollen* (Stark, 2010). Sie wird nicht per se zu den quantitativen oder qualitativen Methoden zugeordnet, sondern ermöglicht nur die Sammlung von Daten, die sowohl quantitativ als auch qualitativ ausgewertet werden können (Konrad, 2010; Würffel, 2001). Mit dem Begriff des *Lauten Denkens* als qualitative Erhebungsmethode stehen verschiedene sich definitorisch zum Teil unterscheidende Begriffe in Zusammenhang (Konrad, 2010; Buber, 2009). Neben dem *Lauten Denken* (zu finden beispielsweise bei Völzke, 2012; Weidle & Wagner, 1994) finden sich in der Literatur in diesem Zusammenhang auch Begrifflichkeiten, wie die *Denke-Laut-Methode*, *Laut-Denk-Protokolle* (Dörner et al., 1983;

Lautdenkenprotokoll bei Stark, 2010) *Gedankenprotokoll*, *Thinking Aloud Methode*, *Thinking Aloud Interview*, *Think Aloud* oder auch *Verbal Protocol*, *Introspektion* und *Retrospektion* (Konrad, 2010; Buber, 2009). Die unterschiedlichen Bezeichnungen werden oft abhängig von fach- oder studienspezifischer Forschungstradition und Forschungsfeld verwendet. Gemein ist allen Begriffen jedoch, dass unter ihnen eine Methode verstanden wird, die das Individuum dazu auffordert, während der Bearbeitung einer Primäraufgabe alle Gedanken und Vorgehensweisen zu verbalisieren. Es werden „Produkte des Lauten Denkens, d.h. [...] die Verbalisierungen (verbal statements) der [Interviewten] erhoben [und] die [...] Daten systematisch dokumentiert, ausgewertet und interpretiert“ (Konrad, 2010, S.374).

Die Methode des *Lauten Denkens* ermöglicht es, Einblicke in die während der Handlung ablaufenden kognitiven Prozesse (Funke & Sperring, 2006) des Individuums zu gewinnen und lässt aus den gewonnenen Daten Rückschlüsse auf mentale *Strategien* im Sinne von Denkwegen und Vorgehensweisen aber auch affektiven Prozessen in Form von Absichten und Gefühlen zu (Frommann, 2005; Konrad, 2010). Es bietet die Möglichkeit, dass handlungsnah „prozedurale und dynamische Aspekte kognitiver Prozesse sichtbar werden“ (Funke & Sperring, 2006, S.26) und stellen sozusagen einen Online-Zugang zu handlungsleitenden Kognitionen zur Verfügung (Funke & Sperring, 2006). Grundsätzlich wird davon ausgegangen, dass die Versuchsperson die Gedanken verbalisieren kann, ohne, dass dies den Bearbeitungsprozess relevant beeinflusst. „Hierbei wird angenommen, dass Gedankenaktivität als eine Abfolge mentaler Zustände betrachtet werden kann“ (Heine, 2013, S.14). Das Ergebnis ist ein „Strom spontan geäußelter und häufig fragmentarisch und syntaktisch unverbundener verbaler Daten [...], aus denen dann rekonstruiert werden kann, worauf die Versuchsperson zu einem gegebenen Zeitpunkt jeweils ihre Aufmerksamkeit gerichtet hat“ (Heine, 2013, S.14). Die entstehenden Lautdenkenprotokolle bieten „interessante sowie aufschlussreiche Daten [...], die nicht anders erhoben werden könnten und die am ehesten die Möglichkeit bieten, handlungssteuernde Kognitionen und/oder Lernprozesse zu beleuchten“ (Konrad, 2010, S.481).

Eingesetzt wird das *Laute Denken* in verschiedenen Feldern der Sozialforschung und hier vor allem im Bereich der Markt- und Konsumforschung (u.a. Buber & Holzmüller, 2009; Kaas & Hofacker, 1983), aber auch in der Psychologie und verschiedenen Bildungswissenschaften und Didaktiken, wie auch der Mathematikdidaktik (u.a. Wellenreuther, 2013; Salle & Krause, 2021; Simon & Schindler, 2020a; 2020b), Fremdsprachenforschung (u.a. Heine & Schramm 2007; Smith et al., 2020) oder Problemlöseforschung (u.a. Dörner et al., 1983). Zusammengefasst werden aktuelle Anwendungen durch Konrad (2010). Er unterscheidet zwischen dem *Lauten Denken* als Strategietraining,

dem *Lauten Denken* in der Problemlöseforschung und dem *Lauten Denken* als Usability-Testmethode. Für den hier vorliegenden Fall ist besonders das *Laute Denken* als Methode in der Problemlöseforschung bzw. als Methode, um Aufgabenbearbeitungsprozesse sichtbar zu machen, relevant.

Den Ausführungen nach Konrad (2010) folgend, wären auch die fremd-adressierten metakognitiven Lautdenkenprotokolle als Ergebnis der Methode des *Lauten Denkens* hinzuzunehmen, da zu erwarten ist, dass die Protokolle im Verständnis des *Lauten Denkens* als Strategietraining ebenfalls metakognitive und fremdadressierte Passagen enthalten. In diesem Kontext ist das *Laute Denken* im Sinne der *self-verbalization* und ‚self-questioning‘ (Hattie, 2013) unterstützend bei der Suche nach benötigten Informationen (Konrad, 2010). *Lautes Denken* ist hier gleichsam eine wirksame Methode zur Aktivierung der Metakognition und der Selbstregulation (Raihan, 2011; White & DiBenedetto, 2015).

Für die hier vorliegende Untersuchung wird aber eher dem Vorgehen nach Ericsson und Simon (1980;1998) und Stark (2010) gefolgt und die Level 3 Verbalisierungen explizit als Ergebnis des *Lauten Denkens* ausgeschlossen bzw. als metakognitive Aktivitäten klassifiziert und zunächst in der Datenauswertung nicht berücksichtigt.

Lautes Denken im hier genutzten Verständnis nach Ericsson und Simon (1980) kann je nach zeitlichem Verhältnis zur Handlung drei verschiedene Formen annehmen. Die grundlegende Unterscheidung wird bei Ericsson und Simon (1980) in *introspektiv* und *retrospektiv* vorgenommen und in der Systematisierung bei Stark (2010) in das *simultane* und *gleichzeitig ablaufende Laute Denken* und das *nachträgliche Laute Denken* unterschieden. Als *introspektiv* oder *thinking aloud* wird die augenblickliche bzw. den Prozess begleitende Verbalisierung bezeichnet. Den englischen Begriff der *introspective* als *Introspektion* übersetzt, wird im deutschen Sprachraum (Konrad, 2010) mit dem Terminus ‚thinking aloud‘, der hauptsächlich im angloamerikanischen Sprachraum verwendet wird, synonym verwendet, ist aber aufgrund der historischen Entwicklung definitorisch nicht gleich zu setzen (Jahandar et al., 2012; van Someren et al., 1994). Die Introspektion beschreibt eher die Idee der Psychologen aus den 1920er und 1930er Jahren, dass mentale Vorgänge vom Teilnehmenden reflektiert und akkurat als leicht lesbare Protokolle wieder gegeben werden können. *Lautes Denken* im Gegensatz dazu ermutigt und fordert das Individuum auf, alle Gedanken auszusprechen ohne eine Reflexion, Strukturierung oder Ordnung jeglicher Art vorzunehmen und bezeichnet dabei das, was bei Konrad (2010) die unmittelbare und gleichzeitig stattfindende Verbalisierung der Gedanken und Vorgehensweisen noch direkt in der Situation ist.

Mit Hilfe dieser handlungsbegleitenden Verbalisierung lässt das Indivi-

duum einen Einblick in seine mentalen Prozesse zu (Konrad, 2010). Durch die fehlende Reflexion der Äußerungen bietet die Methode den Vorteil, dass die bewusste Anstrengung auf die Aufgabe gelenkt und Prozesse ungefiltert sichtbar werden können. Die Individuen werden nicht dazu gezwungen die Gedanken zu strukturieren und in eine erwartete Form zu bringen. Im Ergebnis entstehen *thinking aloud protocols* oder auch *concurrent protocols* (Someren et al., 1994), die alle verbalisierten Gedanken enthalten, die die Individuen während der Bearbeitung der Aufgabe verbalisieren. Im Unterschied dazu verbalisieren die Individuen in *directed reports* (Hayes & Flower, 1983) nur bestimmte Aspekte des Bearbeitungsprozesses. In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff des *Lauten Denkens* oder auch der Begriff der *introspektiven Umsetzungsmöglichkeit* für die Erfassung von verbalen Daten während der Bearbeitung der Aufgabenstellung verwendet, um sich damit explizit von der Begrifflichkeit der Introspektion aus der psychologischen Tradition der 1920er und 1930er Jahre abzugrenzen.

Neuere Ausführungen bei Konrad (2010) unterscheiden bezüglich des zeitlichen Verhältnisses neben einer introspektiven Durchführung des *Lauten Denkens* auch zwei retrospektive Umsetzungsmöglichkeiten. Als *unmittelbare Retrospektion* (immediate retrospective reporting) wird die sich zeitlich direkt an die Aktivität anschließende und die *verzögerte Retrospektion* als die sich an die Bearbeitung aller Aufgaben anschließende Umsetzungsmöglichkeit bezeichnet (Konrad, 2010). Letzteres kann sogar einige Tage danach stattfinden (Konrad, 2010).

Wahl (1983) unterscheidet im Forschungskontext der Unterrichtsforschung zwischen *gelenkter* und *ungelenkter Introspektion* anstatt zwischen Introspektion und Retrospektion zu differenzieren. Dabei äußert sich die Versuchsperson zuerst frei, beschreibt dabei kognitive und auch affektive Prozesse. Anschließend stellt die Versuchsleitung gezielte Nachfragen.

Des Weiteren kann die Methode des *Lauten Denkens* bezüglich der Strukturiertheit gegliedert werden. So genannte *unstrukturierte Lautdenkenprotokolle* ermöglichen einen Zugang zu den Gedanken der Individuen (Konrad 2010; Kaas & Hofacker, 1983). Von *strukturierten Denke-Laut-Protokollen* wird gesprochen, wenn die Teilnehmenden ihre eigenen Überlegungen anhand von vorgegebenen Beispielen reflektieren (Konrad, 2010). Die Versuchsleitung greift also ein, indem sie die Erhebungssituation vorstrukturiert.

17.3 Grenzen der Methode des Lauten Denkens

Das *Laute Denken* bietet zwar Einblicke in die kognitiven Prozesse, hat aber gleichzeitig Grenzen, die bei der Interpretation der Ergebnisse aber auch schon während der Datenerhebung berücksichtigt werden müssen. (Sandmann, 2014). „No one, save the strictest of behaviorists, argues that verbal reports are completely invalid. Nor does anyone argue that verbal reports provide a perfect window into the mind“ (Wilson, 1994, S.249). Wenn diese Methode genutzt wird, müssen die Ergebnisse demnach kritisch betrachtet werden, sind aber dennoch valide genug, um Einblicke in die mentalen Aktivitäten zu geben. Die Anwendung der Methode des *Lauten Denkens* wird aufgrund verschiedener Aspekte nicht als unproblematisch gesehen. Verfälscht werden können die entstehenden verbalen Protokolle durch verschiedene Prozesse und Faktoren, die hier im Folgenden diskutiert werden sollen.

Ein Faktor, der sich limitierend auf die Aussagekraft der Ergebnisse auswirken kann, ist die Bewusstheit bzw. Bewusstwerdung mentaler Prozesse (Weidle & Wagner, 1994). Dabei wird insbesondere diskutiert inwieweit komplex zu formulierende Vorgehensweisen überhaupt verbalisiert werden. Historisch kristallisieren sich besonders die konträren Standpunkte von Nisbett und Wilson (1977) und Ericsson und Simon (1980;1998), Ericsson und Lehmann (1996) und Ericsson (1993) heraus.

Nisbett und Wilson (1977) bezweifeln im Gegensatz zu Ericsson und Simon (1980;1998), Ericsson und Lehmann (1996) und Ericsson (1993) die Möglichkeit, Zugang zu eigenen kognitiven Prozessen insoweit zu erlangen, dass sich durch die Interpretation der Daten Aussagen über kognitive Vorgehensweisen, Denkwege oder Prozesse generieren lassen. Wilson (1994) formuliert besonders das Problem der Vollständigkeit der Protokolle als Schwäche der Methode des *Lauten Denkens*. Es ist grundsätzlich nicht zu erwarten, dass das Individuum reflektiert kognitive Prozesse und mentale *Strategien* verbalisiert. Das Individuum hat keinen Zugang zu den eigenen kognitiven Prozessen, ist sich der Gründe, also der Stimuli, die zu bestimmten Handlungen führen, nicht bewusst und äußert nur das Ergebnis des Denkprozesses und nicht den Vorgang an sich (Nisbett & Wilson, 1977; Miller, 1962). Ins Bewusstsein kommt demnach nicht der Prozess des Denkens, sondern nur das Ergebnis dessen. Des Weiteren birgt die Methode des *Lauten Denkens* die Gefahr, dass vom Individuum lediglich Regeln mitgeteilt werden, aber die wirklich ablaufenden Prozesse im Verborgenen bleiben (Nisbett & Wilson, 1977, Bilandzic & Trapp, 2000). Fragen, die der Versuchsperson nach dem tieferen Grund für bestimmte Vorgehensweisen gestellt werden, halten Nisbett und Wilson

(1994) aus diesem Grund für ungeeignet. Das Lautdenkenprotokoll ist also das Ergebnis dessen, was ins Bewusstsein des Individuums kommt und was leicht zu verbalisieren ist (Wilson, 1994) und kann damit zu unvollständigen Daten führen. Im Gegensatz dazu stehen die Ausführungen von Ericsson und Simon (1980;1998), Ericsson und Lehmann (1996) und Ericsson (1993). Sie stellen fest, dass das Individuum durchaus in der Lage ist, genaue Auskunft über die eigenen Gedanken zu geben.

Auch kann die mentale Kapazität und die Auswahl der zu verbalisierenden Gedanken die Bewusstwerdung beeinflussen (Weidle & Wagner, 1994; Kumar, 2005). Die Versuchsperson wählt dabei aus Kapazitätsgründen Informationen aus, die sie ausspricht. Es kann demnach auch dadurch nicht von einer Vollständigkeit der Prozesse ausgegangen werden, die mit dieser Methode erfasst werden (Stebler, 1999; Jahandar et al., 2012; Konrad, 2010; van Someren et al., 1994). Als Grund dafür wird bei Waern (1988) ausgewiesen, dass besonders automatisierte mentale Operationen nicht bewusst wahrgenommen werden. Dadurch werden unabsichtlich durch Gedächtnislücken einzelne Aspekte weggelassen oder bereits durch das Individuum interpretiert wiedergegeben (van Someren et al., 1994). Routinemäßige Tätigkeiten (Weidle & Wagner, 1994) oder auch Denkvorgänge und kognitive Vorgehensweisen, wie beispielsweise Automatisierung oder implizites Lernen (Ericsson & Simon, 1980; Wilson, 1994; Shapiro, 1994) werden vom Individuum oft ausgeführt ohne dass sie diesem ins Bewusstsein gelangen. Auch können Prozesse des Priming oder der Intuition von der Versuchsperson nicht erfasst und damit verbalisiert werden (Ericsson & Simon, 1980; Wilson, 1994; Shapiro, 1994).

Nach Ericsson (1993) tritt dies besonders während der retrospektiven Phase des *Lauten Denkens* auf und ist aber von der Situation und der Instruktion abhängig. Es ist allerdings auch möglich, dass das Individuum bestimmte Gedanken bewusst als irrelevant einstuft und sie damit nicht äußert (Russo et al., 1989). Weiterhin als problematisch gelten in diesem Zusammenhang so genannte *mental shortcuts*, die das Individuum anwendet, wenn es beispielsweise eigene Gedanken interpretiert bzw. aus ihnen durch die Nutzung naiver Theorien über mentale Prozesse bereits abgeleitet und geschlussfolgert hat, anstatt die Gedanken zu beobachten und zu verbalisieren (Shapiro 1994; Ericsson & Simon, 1980; Wilson & Nisbett, 1977).

Beobachtet werden können aber große interindividuelle Unterschiede in der Fähigkeit sich kognitive Prozesse bewusst zu machen (Weidle & Weber, 1994). Neben der Kapazität kann auch die Bereitschaft zur Anstrengung der Teilnehmenden als limitierend für die Aussagekraft der gewonnenen Daten betrachtet werden. Besonders kommt dies zum Tragen, wenn der Aufwand von Seiten der Versuchsteilnehmenden als zu hoch empfunden wird, Tabuthemen vorkommen oder das Verbalisieren der Gedanken als Eingriff in

die Privatsphäre empfunden wird (Silberer, 2005).

Des Weiteren kann sich die soziale Situation als problematischen Einflussfaktor herausstellen. Das Individuum glaubt, durch seine Verbalisierung bestimmte Erwartungen erfüllen zu müssen (Cohen, 1987). So kann die hypothetische Erwartung der Versuchsleitung oder anderer Beteiligter die Interviewsituation aber auch die verbalisierten Gedanken beeinflussen. Zusammengefasst wird das Phänomen unter dem Begriff der *sozialen Erwünschtheit* (Schlag, 2011; Konrad, 2010) bzw. *observer effect* (Kumar, 2005). Das Individuum hat bestimmte Regeln erlernt, die es anwendet, um das, was tatsächlich gedacht wird, sozial akzeptabel auszudrücken. Mathematik zeigt sich in der Gesellschaft als ein stark in den Fokus genommenes Konstrukt und damit auch als prädestiniertes Feld für die Beobachtung von sozialer Erwünschtheit.

Ein weiterer Faktor, der Ergebnisse beeinflussen kann, ist die begleitende Verbalisierung an sich. Das Verbalisieren von bewusst werdenden Gedanken setzt sprachliche Kompetenzen voraus, die das Individuum dazu befähigen, die Gedanken auszudrücken (Weidle & Weber 1994). So entstehen starke interindividuell unterschiedliche Verbalisierungen der Vorgehensweisen verursacht zum einen durch die Sprachkompetenz aber zum anderen auch durch sprachliche Sozialisationsprozesse. Die Auswahl der Worte wird beeinflusst von Erfahrungen und Enkulturationsprozessen (Frommann, 2005) aber auch durch die oben beschriebene *soziale Erwünschtheit*.

Außerdem kann es durch die begleitende Verbalisierung zu einer Interferenz der Versprachlichung und dem Problemlöseprozess kommen (Funke & Sperring, 2006). Es ist also möglich, dass die begleitende Verbalisierung und die dadurch entstehende Verlangsamung des Denkens den Problemlöseprozess störend beeinflussen kann (van Someren et al., 1994; Konrad, 2010). Gezeigt wurde dies beispielsweise in einer Untersuchung von Flaherty (1974), bei der Lernenden im Schulalter in einer Interviewsituation, in der sie aufgefordert wurden Probleme zu bearbeiten und dabei ‚laut zu denken‘, mehr Rechenfehler gefunden werden konnten, als in der Vergleichsgruppe. Erklärbar wird dies durch die Störung des Verarbeitungsprozesses im Arbeitsgedächtnis (Buder, 2009).

Buder (2009) und Frommann (2005) betonen weiterhin, dass Vorwissen und Erfahrungen insgesamt den Prozessablauf und damit die verbalen Protokolle beeinflussen und es damit zu einer Veränderung der Ergebnisse kommen kann. Grundsätzlich wird weiterhin auch in Frage gestellt, ob kognitive Prozesse höherer Ordnung und *Strategien* zur Informationsverarbeitung überhaupt verbalisiert werden können (Konrad, 2010).

Zusammengefasst werden können aufgrund der Ausführungen folgende Störfaktoren.

- Es existieren ein fehlender Zugang und Probleme bei der Verbalisierung

von komplex ablaufenden mentalen Prozessen.

- In das Bewusstsein kommt das Ergebnis des Denkprozesses und nicht der Prozess an sich.
- Mentale Kapazitäten sind von der Bearbeitung der Aufgabe an sich besetzt und können nicht für die Verbalisierung genutzt werden.
- Die Versuchsperson äußert nicht alle Gedanken. Sie nutzt ‚short cuts‘ und stuft Informationen als irrelevant ein.
- Die sprachlichen Fähigkeiten und die sprachliche Sozialisation sind unterschiedlich stark ausgeprägt und beeinflussen damit die Verbalisierung.
- Manche Prozesse lassen sich nicht in Worte fassen.
- Soziale Erwünschtheit gilt als ein zentrales Problem.

Insgesamt teilen gegenwärtige Arbeiten, trotzdem sie zeigen, dass auf kognitive Prozesse geschlossen werden kann, die Ansicht, dass objektive, valide und reliable Daten entstehen, nicht durchgängig (Konrad, 2010). Hinweise für die Validität der Methode des *Lauten Denkens* bieten jedoch verschiedene Studien im Kontext des Eye-Trackings an. So zeigt sich eine Übereinstimmung zwischen Variablen, also zwischen den Verbalisierungen und den Blickbewegungen bzw. der Fixation (Deffner, 1984; Russo et al., 1989; Wilson 1994). Ericsson und Simon (1998) zeigen durch eine Analyse der Lösungsmöglichkeiten der Aufgabe, dass bestimmte Vorgehensweisen bei verschiedenen Probanden mit gleicher Verbalisierung der Gedanken einher gehen. Andere Untersuchungen weisen ebenfalls aus, dass sowohl kognitive als auch metakognitive Aktivitäten mit Hilfe des *Lauten Denkens* sichtbar gemacht werden können (u.a. Durksen et al., 2021; Jacobse & Harskamp, 2012; Kani & Sharill, 2015).

Deshalb wird das *Laute Denken* besonders in qualitativen Settings eingesetzt, um beispielsweise mentale Aktivitäten in Bearbeitungsprozessen zu erheben. Besonders die qualitative Forschung „strebt ausdrücklich danach, Repräsentativität und Standardisierung durch Reichhaltigkeit, Offenheit, Breite, Detaillierung, Betroffenheit und Expertise zu ersetzen“ (zitiert nach Konrad, 2010 auf Basis von: Früh, 2011; Lamnek & Krell, 2010; Witt, 2001), wodurch die Anwendung der Methode besonders in qualitativer Forschung angemessen erscheint.

Grundsätzlich hängt die Eignung der Methode des *Lauten Denkens* stark vom Erkenntnisinteresse ab. Sollen weitestgehend subjektive Vorgehensweisen basierend auf der Erfahrung und Enkulturation der Versuchsteilnehmenden erfasst werden, kann die Auswertung des *Lauten Denkens* einen Beitrag zur

Beschreibung der Vorgehensweisen leisten. Mit dem Ziel mentale Aktivitäten im Sinne des hier genutzten Strategieverständnisses (Kapitel 4.4) während der Bearbeitung einer mathematischen Begründungsaufgabe zu erheben, erscheint die Methode vor diesem Hintergrund demnach ebenfalls geeignet. Durch die beschriebenen problematischen Einflussfaktoren auf die Validität der Daten können Verfälschungen in den Ergebnissen entstehen. Während der Datenerhebung sollten demnach Maßnahmen in Betracht gezogen werden, die die Validität positiv beeinflussen.

17.4 Methodische Schlussfolgerungen

Aus den methodischen Varianzen des *Lauten Denkens* und Grenzen dieser Methode lassen sich Schlussfolgerungen für den Einsatz ziehen. Im Folgenden sollen daraus konkrete methodische Umsetzungen für die vorliegende Untersuchung beschrieben werden.

- Vorbereitung und Instruktion:

Die potentiellen Teilnehmenden werden auf die Interviewsituation mit einem Einladungsbrief vorbereitet (Anhang A). Dieser Einladungsbrief thematisiert zentrale Zielstellungen, Zeitrahmen, Videoaufzeichnung und im Sommersemester 2021 das Hygienekonzept.

- Zurückhaltung der Interviewleitung;

Besonders das *Laute Denken*, welches introspektiv stattfindet, soll nicht gestört werden (Konrad, 2010). Daher ist eine Zurückhaltung der Versuchsleitung notwendig. Den Teilnehmenden wird dadurch ermöglicht sich ohne Unterbrechung auf die Aufgabe zu fokussieren (Ericsson & Simon, 1998). Unterbrechungen des *Lauten Denkens* können einen Einfluss auf die Daten haben (Shapiro, 1994) und sich nachteilig auf den Denkprozess der versuchsteilnehmenden Person auswirken. Es kann dabei Probleme beim Wiederaufgreifen des verlorenen ‚roten Fadens‘ geben (van Someren et al., 1994).

- Anonymität:

Um soziale Interaktionseffekte wie die soziale Erwünschtheit oder auch Rechtfertigungsmuster möglichst zu vermeiden, wird die Zusicherung

der Anonymität bereits durch die Einverständniserklärung am Beginn vorgenommen.

- Atmosphäre:

Außerdem wird versucht eine tolerante und wertungsfreie Grundatmosphäre während des Gesprächs und in der Vorbereitung durch folgende Formulierung im Einladungsbrief zu schaffen: *Innerhalb des Interviews, welches wir zu zweit führen, werden keine mathematischen Kenntnisse oder eine andere Art von Fachwissen abgefragt. Sie müssen für die Teilnahme nichts Besonderes können oder wissen. Es geht nur darum zu erfassen, wie Sie an eine bestimmte mathematische Aufgabe herangehen ohne, dass Wert auf Richtigkeit oder fachliche Vollständigkeit gelegt wird. Insgesamt wird also nur erfasst, wie Sie vorgehen.* Eine geeignete Gesprächsatmosphäre soll dadurch erlangt werden, dass die Versuchsführung lediglich Hilfestellungen leistet, in dem sie die Fragen offenlegt und damit eine persönliche Anerkennung zum Ausdruck bringt (Deffner, 1984).

- Offene Instruktion am Beginn der Interviewsituation:

Die Instruktion kann, wie Unterbrechungen auch, großen Einfluss auf die Daten haben (Shapiro, 1994). Die Studierenden werden vor Beginn der Vorübungen zur Methode des *Lauten Denkens* instruiert. Eine übliche Instruktion dem Modell von Ericsson (1993) folgend, ist eine ungerichtete Instruktion. Die Versuchsteilnehmenden werden dabei gebeten alles zu erzählen, was ihnen bei der Bearbeitung der Aufgabe in den Kopf kommt (Bilandzic & Trapp, 2000; Shapiro, 1994). Mit dieser Offenheit wird vermieden, dass Erwartungen an die Versuchsperson gestellt oder einzelne ausgewählte Aspekte zu starke Bedeutung erlangen und damit Verzerrungen im Datenmaterial entstehen (Bilandzic & Trapp, 2000; Shapiro, 1994). Russo et al. (1989) weisen darauf hin, dass es besser ist, zu riskieren, Daten nicht zu erheben, anstatt durch eine *prime instruction* einzelne Aspekte zu betonen. Des Weiteren ist davon auszugehen, dass Denkprozesse und damit auch die Verbalisierung dieser nicht gerichtet oder logisch-schlüssig sind und auch so formuliert werden. Rechtfertigungen oder ein Sich-selbst-Erklären soll für das Sichtbarmachen von Prozessen ebenfalls vermieden werden. Vor allem wird betont, dass nicht der Eindruck entstehen darf, dass das Individuum durch die Äußerungen während der Interviewsituation bewertet wird. Es soll

vermittelt werden, dass Meinungen und Äußerungen geschätzt werden (Shapiro, 1994).

- Aufwärm Aufgabe:

Da das Verbalisieren von Gedanken für die versuchsteilnehmenden Personen eher ungewöhnlich ist, wird in der Literatur empfohlen, eine Aufwärm Aufgabe zu nutzen (Ericsson & Simon, 1998; Russo et al., 1989; Mackensen-Friedrichs, 2004; Buber, 2009). Die Studierenden werden mit der Vorgehensweise vertraut und die Versuchsleitung hat die Möglichkeit ggf. Anweisungen zum Vorgehen zu konkretisieren. Die Aufwärm Aufgabe ist eine der Primäraufgabe vorgeschaltete Aufgabe, die nach dem gleichen Schema abläuft und die Studierenden vorbereitet. Ziel der Aufwärm Aufgabe ist es, dass während der Bearbeitung der Primäraufgabe nicht viel zum generellen Vorgehen nachgefragt werden muss und die Versuchsperson ihre ganze Aufmerksamkeit auf die Aufgabe richten kann.

- Verbalisierbarkeit:

Die gestellten Aufgaben sollten verbalisierbar sein und in verschriftlichter Form vorliegen (Konrad, 2010). Es wird damit die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung des Arbeitsspeichers herabgesetzt.

- Kombination von introspektiver und retrospektiver Datenerhebung:

Trotz dessen, dass besonders bei Ericsson und Simon (1980;1998) und Ericsson (1993) nachträglich erhobene Daten in einer Form eines Lautdenkenprotokolls aufgrund negativ beeinflussender Prozesse, wie *Vergessen* und *nachträgliche Interpretation, Reflexion* und *Zusammenfassen* der Gedankengänge durch die Versuchsperson als nachteilig gesehen werden, wird eine Form der Retrospektion oft in Kombination mit introspektiven Phasen angewendet. Aufgrund der beschränkten kognitiven Kapazität und der möglicherweise daraus resultierenden Unvollständigkeit der Lautdenkenprotokolle, erscheint dies als sinnvoll (Silberer, 2005; Kumar, 2005; Someren et al., 1994). Die retrospektiven Daten dienen zur Unterstützung und dem Schließen von Lücken im introspektiven Teil des Protokolls. Introspektiv gewonnenen Inhalten wird bei einem Widerspruch zu den retrospektiven Daten während der Datenauswertung der Vorzug gegeben (Someren et al., 1994; Ericsson, 1993; Nisbett & Wilson, 1977; Wagner et al., 1977).

18 Beschreibung der durchgeführten Datenerhebung

Aus den in Kapitel 17.4 beschriebenen methodischen Schlussfolgerungen zum *Lauten Denken* wurde der Ablauf für die Datenerhebung abgeleitet. Der folgende Abschnitt der Arbeit analysiert zunächst die Entstehungssituation der Daten (Kapitel 18.1), bevor die einzelnen Etappen beschrieben werden.

18.1 Beschreibung der Entstehungssituation des Materials

An der Untersuchung haben ausschließlich Studierende des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik der FU Berlin im Sommersemester 2021 und 2022 teilgenommen. Im Sommersemester 2021 musste die Interviewsituation mit Hygienemaßnahmen durchgeführt werden.

18.1.1 Auswahl der Stichprobe

Ausgewählt wurden grundständig Studierende des Bachelors Grundschulpädagogik der FU Berlin nach einmaligem Durchlaufen des Moduls ‚Mathematisches Professionswissen I‘. Die Auswahl erfolgte durch eine Kombination von zufallsbasierten Verfahren ergänzt durch nicht-zufallsbasierte Verfahren. Die Teilnahme am Interview war freiwillig. Den Studierenden, die teilgenommen haben, wurden jedoch 60% der Punkte auf ein selbstgewähltes Übungsblatt aus dem Modul ‚Mathematisches Professionswissen II‘ angerechnet. Kommuniziert wurde diese Möglichkeit durch die jeweiligen das Tutorium leitenden Studierenden.

Ausgewählt wurde die Vielzahl an Interessenten durch die Versuchsleitung nach dem Prinzip ‚first come first serve‘. Es gab mehr Interessenten als Möglichkeiten zur Interviewdurchführung vorhanden waren. Ergänzt wurde die Stichprobe durch Tutorien leitende Studierende, die selbst im Wintersemester zuvor die Klausur im Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘ geschrieben und direkt anschließend begonnen haben, Tutorien zu leiten. Sie nahmen zum

Zeitpunkt der Erhebung an den Lehrveranstaltungen des Moduls ‚Mathematisches Professionswissen II‘ teil. Das Interview wurde ausschließlich von der Autorin durchgeführt.

18.1.2 Hygienekonzept

Durch die Verpflichtung zur Einhaltung von Hygienevorschriften musste der Versuchsaufbau im Sommersemester 2021 angepasst werden. Teil der Maßnahmen war ein tagesaktuelles negatives Testergebnis und eine Plexiglasscheibe zwischen der Versuchsleitung und der jeweiligen teilnehmenden Person. Außerdem wurde vermieden, dass sich die teilnehmenden Personen begegneten, das Zimmer wurde gelüftet und der Platz desinfiziert.

18.2 Ablauf der Datenerhebung

Die Interviewsituation wurde in Anlehnung an Hinweise aus der Literatur in drei verschiedene Etappen geteilt. In der ersten Etappe wurden der Ablauf und die Besonderheiten der Interviewsituation erklärt. In der zweiten Etappe wurde die Aufwärmübung und in der dritten Etappe die Primäraufgabe bearbeitet. Die Interviews wurden ausschließlich als Einzelinterviews durchgeführt.

18.2.1 Erste Etappe - Einführung

Die erste Etappe verfolgte verschiedene Zielstellungen. Zunächst wurden Zielstellung des Interviews und Ablauf für die Studierenden transparent dargestellt. Die Interviewsituation begann mit einer Einführung und der Erklärung des Ablaufs und zur Methode (Anhang C). Es wurde auf die Verwendung der Daten und auf die Aufzeichnung per Video hingewiesen. Danach wurde den Teilnehmenden die Einverständniserklärung (Anhang D) vorgelegt.

18.2.2 Zweite Etappe - Bearbeitung der Aufwärmübung

Die Aufwärmübung wird empfohlen, um die Studierenden mit der Vorgehensweise und besonders mit dem *Lauten Denken* vertraut zu machen. Ericsson und Simon (1998) schlagen hierbei eine schriftlich zu rechnende Multiplikationsaufgabe vor. Schriftliche Rechenverfahren sind jedoch keine Problemlöseaufgaben, sondern Aufgaben, für die Algorithmen zur Bearbeitung genutzt werden. Da aber die Studierenden auf die Verbalisierung einer

Problemlöseaufgabe vorbereitet werden sollten, wurde sich auch hier für eine Aufgabe entschieden, die Problemlöseprozesse fordert.

Eine spezielle Flasche mit zugehörigem Korken gibt 1,10 Euro Pfand. Die Flasche gibt 1 Euro mehr Pfand als der Korken. Wie viel Pfand bekommt man für den Korken einzeln und wie viel für die Flasche?

Zu Beginn dieser Aufgabe wurden die Studierenden über die Besonderheit der parallel ablaufenden Verbalisierung instruiert. Genutzt wurde dabei die folgende Vorlage für alle Studierenden (angelehnt an Mackensen-Friedrichs, 2004; Heine & Schramm, 2007, Sandmann, 2014). Es ist im Fachbereich üblich die Mathematikstudierenden in Tutorien mit Du anzusprechen und selbst das Du anzubieten. Es wird ebenfalls angenommen, dass dies zur Verbesserung der Atmosphäre in der Interviewsituation beiträgt.

Denke bitte laut. Erzähle alles, was du denkst, wenn du die Aufgabe liest. Erzähle bitte so lange, bis alle im Text aufgeworfenen Fragestellungen für dich vollständig geklärt sind. Lies zu diesem Zweck laut. Du solltest möglichst ohne Unterbrechung, also möglichst pausenlos die Gedanken zu dem jeweiligen gerade zu bearbeitenden Material äußern. Du musst deine Äußerungen vor dem Sprechen jedoch nicht besonders ordnen oder besonders verständlich wiedergeben und auch nicht der Versuchsleitung das Problem oder deine Gedanken erklären. Stell dir vor, dass du ganz allein im Raum wärst und nur mit dir selbst sprichst. Wichtig ist, dass du möglichst immer redest. Es gibt Stifte und Papier, die du zum Lösen verwenden kannst, du musst aber auch gar nichts aufschreiben. Verwende aber die Stifte nur, wenn sie dir bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung helfen.

Die Aufgabe wurde in schriftlicher Form auf einem weißen Blatt Papier vorgelegt. Die Bearbeitung der Aufwärmübung wurde nicht aufgezeichnet.

Wie in Kapitel 17.4 erläutert wurde, wird es empfohlen zunächst die Daten introspektiv und im Anschluss retrospektiv zu erheben. Die Studierenden lösten demnach zunächst die Aufgabe allein. Im Anschluss wurden von der Versuchsleitung Fragen zu den Vorgehensweisen gestellt und ggf. Hinweise für die Bearbeitung der Primäraufgabe gegeben.

18.2.3 Dritte Etappe - Bearbeitung der Primäraufgabe

Zu Beginn der dritten Etappe wurde die Instruktion zum *Lauten Denken* noch einmal wiederholt.

Ich zeige dir nun eine zweite Aufgabe. Bitte teile mir auch hier alle deine Gedanken mit, die du hast. Rede bitte die ganze Zeit und sprich alles aus. Du

musst deine Gedanken auch nicht ordnen oder mir erklären. Es geht nicht darum, dass du ein schönes formales Ergebnis präsentierst. Mich interessiert hauptsächlich der Weg.

Die Aufgabe wurde ebenfalls in schriftlicher Form auf einem weißen Blatt Papier vorgelegt. Es waren weitere weiße Blätter und mehrere Stifte vorhanden.

Bei Beginn der Primäraufgabe begann die Videoaufzeichnung. Die Studierenden wurden über den Startzeitpunkt der Aufzeichnung informiert. Die Introspektion wurde lediglich anhand klar definierter Kriterien (Kapitel 18.2.4) unterbrochen. Die Phase der Retrospektion wurde durch eine standardisierte Fragestellung eingeleitet (Kapitel 18.2.5), bevor die Studierenden zu einzelnen Etappen des Vorgehens noch einmal genauer befragt wurden. Dazu wurden Fragen wie *Was hast du hier gemacht?*, *Erklär mir bitte noch einmal, was du danach oder davor gemacht hast?* oder *Warum bist du so vorgegangen?* gestellt.

18.2.4 Spezielle Aspekte der introspektiven Phase

Während der Phase der introspektiven Datenerhebung sollen die Studierenden möglichst ununterbrochen sprechen und nicht von der Versuchsleitung unterbrochen werden. Nach einer Zeitspanne von ca. 15 bis 60 Sekunden, in der die Studierenden nichts verbalisierten, wurde ein *nondirektiver Reminder* gegeben, um die Verbalisierung aufrecht zu erhalten oder neu zu initiieren (Bilandzic & Trapp 2000). Ericsson (1993) schlägt hierzu ein unaufdringliches *Sprich bitte weiter.* oder *Fahre fort.* vor. Fragen wie *Was geht dir durch den Kopf?* oder *Was denkst du?* sind ebenfalls als Vorschläge in der Literatur zu finden (Bilandzic & Trapp, 2000).

Da die Situation allerdings für die Studierenden befremdlich und der mathematische Inhalt nicht trivial ist, wurden bestimmte Kriterien formuliert, unter denen die Interviewsituation dennoch unterbrochen oder die Studierenden unterstützt wurden. Während der Auswertung wurde diese Besonderheit der dadurch entstehenden fremdadressierten metakognitiven Lautdenkenprotokolle berücksichtigt, indem Passagen der retrospektiven Phase zugeordnet und als solche in die Auswertung einbezogen wurden.

- Die Studierenden äußerten mehrfach, dass sie nicht wissen, wie sie weiter vorgehen sollen.
- Von der Versuchsleitung wurde beobachtet, dass schon seit längerem keine Gedanken geäußert wurden und auch durch mehrfache ‚nondirektive Reminder‘ keine weiteren Verbalisierungen mehr erfolgten.

Als Unterstützung wurden beispielsweise Fragen oder Anregungen wie folgt gegeben.

- Beschreibe, was du bisher gemacht hast.
- Wie kannst du den Inhalt der Aussage, also die ungerade Quadratzahl oder die Teilbarkeit durch 8 darstellen?
- Fällt dir etwas ein, wie sich das, was du dargestellt hast, umwandeln lässt?

Diese Kriterien wurden ebenfalls in Kombination mit den nachfolgenden Aspekten als Abbruchkriterien genutzt.

- Es wurde durch die Versuchsleitung beobachtet, dass keine weitere Bearbeitung mehr erfolgte und bestimmte Schritte mehrfach durchgeführt wurden.
- Zusätzlich wurde von der Versuchsleitung länger beobachtet, dass keine neuen Ideen zum weiteren Bearbeiten der Aufgabe produziert und mit der verfolgten *Strategien* keine weiteren Schritte eingeleitet wurden.

Im Fall eines Abbruchs wurde die Einleitungsfrage für die Phase der retrospektiven Datenerhebung angepasst gestellt: Anstatt *Was macht deine Begründung allgemeingültig und was bedeutet für dich Allgemeingültigkeit?*, wurde gefragt *Was braucht deine Begründung, damit sie allgemeingültig ist und du zufrieden bist? Und was verstehst du unter Allgemeingültigkeit?*

18.2.5 Spezielle Aspekte der retrospektiven Phase

Generell wird eine retrospektive Darstellung von Vorgehensweisen und Gedanken als eher schwierig für die Studierenden betrachtet, da Gedankengänge und Lösungswege im Nachhinein kaum rekonstruierbar sind (van Someren et al., 1994). Außerdem ist es möglich, dass die Studierenden Gedankengänge kohärenter und intelligenter präsentieren, als sie ursprünglich waren (van Someren et al., 1994). Der Grund dafür ist, dass das Gedächtnis von dem Resultat der Bearbeitung der Aufgabe geleitet ist und retrospektive Gedanken sich daran orientieren (van Someren et al., 1994). Studien zeigten (Beck & Maier, 1993; van Someren et al., 1994), dass, wenn nach Erinnerungen, Erklärungen oder Motivationen gefragt wird, Individuen eher interpretativ antworten, anstatt aus der Erinnerung an die vergangenen kognitiven Prozesse heraus ihre Gedankengänge darzustellen (van Someren et al., 1994). Die retrospektive

Phase begann grundsätzlich, wenn die Aufgabe durch die Studierenden als vollständig gelöst betrachtet wurde oder, wenn sie wie in Kapitel 18.2.4 erläutert, abgebrochen wurde. Wenn die Studierenden die Aufgabe als vollständig gelöst betrachteten und ihre Arbeit von selbst beendeten, so wurde folgende Frage formuliert:

Was ist Allgemeingültigkeit und warum ist deine Begründung allgemeingültig?

Die Studierenden wurden dadurch gebeten die Ausführungen genauer zu erklären. Anschließend wurde etappenweise auf verschiedene Vorgehensweisen verwiesen und gefragt, weshalb verschiedene Schritte so angewandt wurden und was damit bezweckt wurde. Besondere Konzentration lag dabei auf Aspekten, die in der introspektiven Phase eher lückenhaft verbalisiert wurden. Es ist auch vorgekommen, dass die retrospektive Phase eingeleitet wurde, auf Basis derer die Studierenden erneut introspektiv an der Aufgabe zu arbeiten begannen. Wenn dies beobachtet wurde, dann wurde die Phase der Retrospektion später erneut eingeleitet und die retrospektive Zwischenphase analog zur später folgenden retrospektiven Phase in die Auswertung einbezogen.

18.3 Beschreibung, Begründung und stoffdidaktische Einordnung der Primäraufgabe

Die Phase der introspektiven Datenerhebung erfolgte mit dem Vorlegen der Primäraufgabe:

Begründen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt: Teilt man eine ungerade Quadratzahl durch 8, so erhält man Rest 1.

Die Aufgabe ist auf Basis verschiedener Überlegungen ausgewählt worden: 1) Möglichkeit zur bewussten Verarbeitung, 2) Problem im Sinne des Problemlösens, 3) Vertrautheit mit den relevanten mathematischen Konzepten und 4) strukturelle Ähnlichkeit zu vorher in der Lehrveranstaltung bereits gelösten Aufgaben.

1. Für das *Laute Denken* sind generell eher Primäraufgaben geeignet, die vorwiegend bewusst verarbeitet werden, wie beispielsweise neue oder schwierige Aufgaben und solche, die von hohem Interesse für die Versuchspersonen sind (Bilandzic & Trapp, 2000; Shapiro, 1994; Wilson,

1994; Ericsson & Simon, 1980). Die Aufgabe sollte demnach eine gewisse Komplexität beinhalten (Völzke, 2012) und nach Möglichkeit von Interesse sein. Außerdem sollte es vermieden werden, dass die Bearbeitungsprozesse nicht durch häufige Wiederholung solcher oder ähnlicher Aufgabenstellungen automatisiert ablaufen (Ericsson & Simon, 1993). Dadurch werden kognitive Prozesse entschleunigt, Zwischenschritte werden bewusst und können sichtbar gemacht werden. Die ausgewählte Aufgabe ist hinreichend komplex und verlangsamt dadurch die Gedanken.

2. Die Aufgabe ist eine Problemlöseaufgabe im Sinne des Problemlösens (Kapitel 4.2) und kann daher nicht durch automatisierte Lösungsstrategien oder Lösungsalgorithmen bearbeitet werden.
3. Die Aufgabe wurde auf Basis der Inhalte aus den Lehrveranstaltungen im Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘ ausgewählt. Das Modul wird von allen Studierenden im Bachelorstudiengang Grundschulpädagogik im zweiten und dritten Fachsemester studiert und besteht aus Vorlesungen, großen Übungen und Tutorien. Inhaltlich umfasst das Modul eine Einführung in die für die Grundschule (Klasse 1-6) relevanten fachmathematischen Begriffe und Konzepte von einem höheren Standpunkt aus. Für die Lehrveranstaltungen werden folgende Ziele formuliert:
 - Die Studierenden erwerben durch die exemplarische und reflektierende Beschäftigung mit der Grundschulmathematik ein Verständnis für diese und einen vernetzenden Überblick (einschließlich der Weiterführung in der Sekundarstufe) und erkennen die Schwierigkeiten für Lernende in der Grundschule.
 - Die Studierenden erweitern ihre mathematischen Kompetenzen. Insbesondere vertiefen sie dabei ihre Argumentationskompetenz und erwerben die Fähigkeit, Beweise auf Grundschulniveau zu führen sowie die Korrektheit von geometrischen Konstruktionen mathematisch begründen zu können.
 - Die Studierenden lernen Mathematik klar und eindeutig zu kommunizieren, verwenden dazu die Fachsprache und legen Wert auf ihre korrekte Verwendung.
 - Die Studierenden reflektieren ihren eigenen Lernprozess und die dabei verwendeten Methoden.

- Die Studierenden können ihre erworbenen mathematischen Kompetenzen und ihre Bedeutung für sie als Grundschullehrkraft einschätzen (Selbsteinschätzung).

(Scharlach & Bücking, 2022)

Dabei beschäftigen sich die Studierenden auf der inhaltlichen Ebene mit den natürlichen Zahlen und Stellenwertsystemen, schriftlichen Rechenverfahren in Stellenwertsystemen (dezimal und andere Basen), Teilbarkeits- und Vielfachenrelation, Aussagenlogik, Mengenoperationen, Relationen, Funktionen, Bruchzahlen, Kombinatorik und Geometrie.

4. Die Primäraufgabe weist neben der inhaltlichen Vertrautheit auch eine hohe strukturelle Ähnlichkeit zu Aufgaben auf, die sowohl in der Vorlesung als auch in den Tutorien und auf Übungsblättern angeboten wurde. So lauteten beispielsweise andere zu begründende Sätze innerhalb der Lehrveranstaltung wie folgt: *Begründen Sie, dass folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt: Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade.* oder *Begründen Sie, dass folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.* Innerhalb der genannten Aufgabenstellungen werden die Studierenden dazu aufgefordert zu begründen. Die Lehrveranstaltungen des Moduls thematisieren *Begründen* von mathematischen Sachverhalten auf Basis des oben beschriebenen Ziels, die Argumentationskompetenz zu erweitern und grundschulbezogen zu erlernen. Konkret wird diese mit Hilfe der drei Begründungsniveaus nach Padberg und Büchter (2015) in den Lehrveranstaltungen thematisiert. Die gewählte Primäraufgabe ist, wie die beiden anderen benannten Beispiele, auf allen drei Begründungsniveaus begründbar und erscheint deshalb auch für die vorliegende Untersuchung geeignet.

18.4 Dokumentation der Daten mit Hilfe von Videoaufzeichnungen

Videoaufzeichnungen sind audiovisuelle Daten, die durch technisch registrierende Konservierung gewonnen werden (Bergmann, 1985) und unterscheiden sich damit von rekonstruktiven Daten (Tuma et al., 2013). Es wird im Unterschied zur Dokumentation durch Protokolle, Fotos oder reinen Audioaufnahmen ermöglicht etwas zu erheben, was in der Situation geschieht und nicht außerhalb von ihr (davor oder danach) (Tuma et al., 2013). Es kann sowohl

KAPITEL 18. BESCHREIBUNG DER DURCHGEFÜHRTEN DATENERHEBUNG

soziale Interaktion als auch ein zeitlicher Verlauf festgehalten werden (Corsten, 2010). Außerdem zeichnen sich audiovisuelle Daten durch eine *Dichte* und *Permanenz* (Grimshaw, 1982), also durch Detailreichtum, Akkuratheit und einen dauerhaften Zugang aus (Tuma et al., 2013).

Dennoch bilden Videoaufzeichnungen nicht genau die Realität ab, sondern projizieren eine dreidimensionale in eine zweidimensionale Perspektive und können auch nicht alle Sinneseindrücke wiedergeben (Tuma et al., 2013). Durch die Kameraeinstellung wird die Perspektive eingeschränkt und die Wahrnehmung gelenkt. Die Aufzeichnungen werden damit zu künstlichen Konserven (Tuma et al., 2013). Das Video stellt eine Datenquelle dar, aus der dann durch Selektionsprozesse das Datenmaterial identifiziert werden kann (Demuth, 2010). Im vorliegenden Projekt wurde die Kameraperspektive ausschließlich auf die Aufzeichnungen der Studierenden fokussiert. Es wurde demnach nur möglich, Auswertungen anhand dieser Daten in Kombination mit der Tonspur vorzunehmen. Daten, die beispielsweise eine Interpretation von Mimik oder Gestik zulassen, konnten damit nicht gewonnen werden. Durch die Wahl der Aufzeichnungszeitpunkte konnten außerdem sowohl das Vorgespräch als auch das Nachgespräch und die Aufwärmaufgabe nicht erfasst und damit nicht in die Auswertung einbezogen werden. Grundsätzlich können bei der Betrachtung von Videoaufzeichnungen als Datenmaterial zwei entstehende Datensorten unterschieden werden, die durch das Verhältnis von Forschendem und Situation ausdifferenziert werden. Konstruierte Daten zum einen entstehen im Gegensatz zu den natürlichen Daten zum anderen, wenn die Situation extra für die Aufnahme geschaffen wurde (Knoblauch, 2004).

Durch die Gestaltung der Situation im vorliegenden Projekt entstanden keine natürlichen, sondern konstruierte Daten. Die Studierenden wurden außerhalb der Lehrveranstaltungen zu einem separaten Termin eingeladen. Trotz dessen, dass damit das Gefühl, beobachtet zu werden minimiert wurde, muss das entstehende Problem der ungewollten Beeinflussung durch die Versuchsleitung (der beobachtenden Person) in die Datenauswertung kritisch einbezogen werden. Die Tonspur der Videoaufzeichnung wird in der vorliegenden Untersuchung als Grundlage für die Transkription (Kapitel 19.1) genutzt. Die Videospur und die darauf aufgenommenen Aufzeichnungen der Studierenden dient als Unterstützung für die Auswertung der transkribierten Passagen (Kapitel 19.2).

19 Vorbereitung des Materials für die Datenauswertung

Das Videomaterial wurde in verschiedenen Schritten vor der Datenauswertung im Hinblick auf die genutzte Methode der qualitativen Inhaltsanalyse vorbereitet. Zunächst wurde es transkribiert (Kapitel 19.1). Danach wurde in die transkribierten Dokumente Videomaterial in Form von Screenshots eingefügt (Kapitel 19.2).

19.1 Transkription

Zur Vorbereitung der Auswertung wurden die aus den Interviewsituationen entstandenen Videosequenzen transkribiert. Die Transkription der Videoaufzeichnungen erfolgte durch die Anfertigung eines Grundtranskriptes bzw. eines einfachen wissenschaftlichen Transkripts mit für die Forschungsfrage relevanten Erweiterungen aus einem Detailskript. Die Regeln für die Transkription und die Notation folgen weitestgehend Dresing und Pehl (2011) aufbauend auf Kuckartz (2010;2014). Formuliert wurden daraus zwölf Transkriptionsregeln.

1. Absätze der interviewenden Person werden durch ein ‚I:‘, die der befragten Person durch ein eindeutiges Kürzel, zum Beispiel „B**Nummer des Interviews**:“, gekennzeichnet (Kuckartz, 2014).
2. Jeder Sprechbeitrag wird als eigener Absatz transkribiert (Kuckartz, 2014).
3. Es wird wörtlich transkribiert, also nicht lautsprachlich oder zusammenfassend. Vorhandene Dialekte werden nicht mit transkribiert, sondern möglichst genau in Hochdeutsch übersetzt (Kuckartz, 2014).
4. Sprache und Interpunktion werden leicht geglättet, d.h. an das Schriftdeutsche angenähert. Zum Beispiel wird „Er hatte noch so’n Buch genannt“ transkribiert in „Er hatte noch so ein Buch genannt“. Die Satzform, bestimmte und unbestimmte Artikel etc. werden auch dann beibehalten, wenn sie Fehler enthalten (Kuckartz, 2014).

KAPITEL 19. VORBEREITUNG DES MATERIALS FÜR DIE DATENAUSWERTUNG

5. Wort- und Satzabbrüche werden mit ,/‘ markiert: „Ich habe mir aber Sor/
Gedanken gemacht.“ Wortdoppelungen werden immer notiert (Dresing
& Pehl, 2011).
6. Pausen werden je nach Länge durch Auslassungspunkte in Klammern
markiert. Hierbei steht ,(.)‘ für circa eine Sekunde, ,(..)' für circa zwei
Sekunden, ,(...)' für circa drei Sekunden und ,(Zahl)' für mehr als drei
Sekunden (Dresing & Pehl, 2019).
7. Besonders betonte Begriffe werden durch Unterstreichungen gekenn-
zeichnet (Kuckartz, 2014).
8. Nonverbale Aktivitäten und Äußerungen der Befragten wie auch der Ver-
suchsleitung werden in Doppelklammern notiert, zum Beispiel ((lacht)),
((stöhnt)) und Ähnliches (Kuckartz, 2014).
9. Rezeptionssignale und Fülllaute aller Personen (hm, ja, aha, ähm, etc.)
werden transkribiert. Ausnahme: Backchanneling der Versuchsleitung,
während die interviewte Person spricht, wird nicht transkribiert, solange
der Redefluss dadurch nicht unterbrochen wird (Dresing & Pehl, 2011).
10. Nach dem Partikel ,hm‘ wird eine Beschreibung der Betonung in Klammern
festgehalten. Zu nutzen sind: bejahend, verneinend, nachdenkend,
fragend, wohlfühlend, z.B. ,hm (bejahend)' (Dresing & Pehl, 2011).
11. Überlappungen der Sprechenden werden mit ,//‘ gekennzeichnet. Bei
Beginn des Einwurfes folgt ein ,//‘. Der Text, der gleichzeitig gesprochen
wird, liegt dann innerhalb dieser ,//‘ und der Einwurf der anderen Person
steht in einer separaten Zeile und ist ebenfalls mit ,//‘ gekennzeichnet
(Dresing & Pehl, 2011).
12. Mehrere Fülllaute hintereinander werden ohne Satzzeichen dazwischen
getippt (z.B. ähm ähm ähm also da sind wir ...) (Dresing & Pehl, 2011).

Aufgestellt wurden folgende Notationsregeln für die Notation von Lauten:

KAPITEL 19. VORBEREITUNG DES MATERIALS FÜR DIE DATENAUSWERTUNG

Hm	unabhängig von der Betonung (also nicht hhhmm)
Zögerungslaut	Ähm
Einheiten	ausschreiben
andere gesprochene Zeichen (Klammer usw.), wenn diese nicht im Zusammenhang mit einer mathematischen Gleichung genutzt werden	ausschreiben
Wortverkürzungen	grammatikalisch korrigieren

Festgelegt wurden weiterhin folgende Notationsregeln für die Verschriftlichung von mathematischen Zeichen:

mathematische Symbole in Satzzusammenhängen	generell: ausschreiben (Orientierung an dem, was unter Bildungssprache verstanden wird)
Zahlen/ Ziffern	Zahlsymbol genügt
(), +/-	ausschreiben, es sei denn es wird im Zusammenhang mit einem Term/Gleichung genutzt
wenn lange mathematische Formeln ohne Satzzusammenhänge gesprochen werden, dann können diese als Formeln notiert werden	$(3 + 4) \cdot (2 + 3)n = n + 1$

Für die Transkription wurde die Software MAXQDA genutzt, mit deren Hilfe auch die Auswertung der Daten stattfand. Außerdem wurde die Autorin durch eine studentische Hilfskraft unterstützt. Alle von ihr transkribierten Teile wurden von der Autorin nachträglich noch einmal überprüft und ggf. überarbeitet.

19.2 Einfügen des Videomaterials in die Transkripte

Da die Studierenden nicht nur verbal ihre Gedanken während der Phase der Introspektion äußerten, sondern auch Gedanken verschriftlichten, sollten diese Verschriftlichungen in der Auswertung einbezogen werden. Dieses Einbeziehen geschah auf Basis verschiedener im Folgenden erläuterten Kriterien:

KAPITEL 19. VORBEREITUNG DES MATERIALS FÜR DIE DATENAUSWERTUNG

1. Es werden deiktische Ausdrücke genutzt, in deren Nähe schon beim Transkribieren (schreibt) oder (Zeigen auf dem Blatt) notiert wird.
2. Die *Strategie* ist durch die deiktische Darstellung ohne Bezug zum Bildmaterial nicht einzuordnen.

Umgesetzt wird dies in MAXQDA mit Hilfe einer Memo-Funktion, in die ein Screenshot des Videomaterials eingefügt wird. Das Memo bezieht sich auf die jeweilige Textpassage von parallel verbalisierten Gedanken.

20 Auswertung der transkribierten Lautdenkenprotokolle

Für die Auswertung der transkribierten Lautdenkenprotokolle wurde die qualitative Inhaltsanalyse als Methode genutzt. Dazu wurden zunächst grundsätzliche Überlegungen zur qualitativen Inhaltsanalyse als Datenauswertungsmethode angestellt (Kapitel 20.1), bevor die Auswertung des vorliegenden Datenmaterials anhand einer Abfolge von Schritten nach Schreier (2014) (Kapitel 18, 20.3, 20.4, 20.5, 20.6, 20.7 und 20.8) konkreter beschrieben wird. Anschließend werden in Kapitel 20.9 die weitere Auswertung und die Ergebnisse dargestellt.

20.1 Die qualitative Inhaltsanalyse als Datenauswertungsmethode

Die qualitative Inhaltsanalyse als in der Wissenschaft heterogenes Verfahren der qualitativen Datenanalyse umfasst eine Vielzahl von interpretativen Ansätzen, um meist in verbaler Form vorliegende Daten auszuwerten. Es handelt sich um eine Forschungsmethode zur „Systematisierung von manifesten und latenten Kommunikationsinhalten“ (Stamann et al., 2016, S.6). Zielstellung der qualitativen Inhaltsanalyse ist es grundsätzlich, „am Material ausgewählte inhaltliche Aspekte zu identifizieren, zu konzeptualisieren und das Material im Hinblick auf solche Aspekte systematisch zu beschreiben“ (Schreier, 2014, S.5).

In der Literatur werden verschiedene Varianten der qualitativen Inhaltsanalyse und darauf aufbauend ebenso unterschiedliche Systematisierungsversuche der diversen Perspektiven und Vorgehensweisen angeboten. Auch wird der Begriff unterschiedlich weit gefasst.

Schreier (2014) versteht die qualitative Inhaltsanalyse als ein „Verfahren zur Beschreibung ausgewählter Textdeutungen [...], indem relevante Bedeutungen als Kategorien eines inhaltsanalytischen Kategoriensystems expliziert und anschließend Textstellen den Kategorien dieses Kategoriensystems zugeordnet werden“ (Schreier, 2014, S.3). Sie fasst dabei den Kern der inhaltsanalytischen Verfahren als die „systematische Analyse der Bedeutung interpretationsbedürf-

tigen Materials mittels Zuordnung zu den Kategorien eines Kategoriensystems“ zusammen (Schreier, 2014, S.4; in Anlehnung an Früh, 2011). Diese Definition erscheint sehr weit gefasst und wird deshalb von Kuckartz und Rädiker (2022) kritisiert, indem er den Entdeckungsvorgang durch die induktive Kategorienbildung am Material betont und die Tiefe hinter dem bloßen Beschreiben von Textdeutungen hin zum Entdecken von Zusammenhängen, Prüfen von Hypothesen und Theorien favorisiert (Kuckartz & Rädiker, 2022).

Durch die Sichtung der Literatur zur qualitativen Inhaltsanalyse ergibt sich eine Subsumtion vieler verschiedener Ansätze unter diesem Begriff, sodass nur eine weit gefasste Betrachtung der Methode geeignet erscheint (Stamann et al., 2016). Stamann et al. (2016) bieten eine Möglichkeit zur Systematisierung der verschiedenen Ansätze an, die hier als Grundlage für weitere Betrachtungen genutzt werden soll. Der Vergleich und die Einordnung einer gewählten Form der qualitativen Inhaltsanalyse wird dadurch möglich. Als Basis für die Systematisierung dienen vier verschiedene Bezugspunkte: *Art der Kategorien*, *Kategoriensystem und Modi der Kategorienbildung*, *Basisverfahren* und *kombinatorische Vorgehensweisen* (Stamann et al., 2016).

Abgeleitet daraus bieten Stamann et al. (2016) einen Baukasten an, der es Forschenden ermöglicht einen für das eigene Erkenntnisinteresse passenden Ansatz auszuwählen und zusammenzustellen. In der Abbildung 20.1 sind die vier benannten Bezugspunkte dunkelgrau hinterlegt. Hellgrau hinterlegt sind die Spezifika und methodischen Zugänge für die sich in der vorliegenden Untersuchung entschieden wurde.

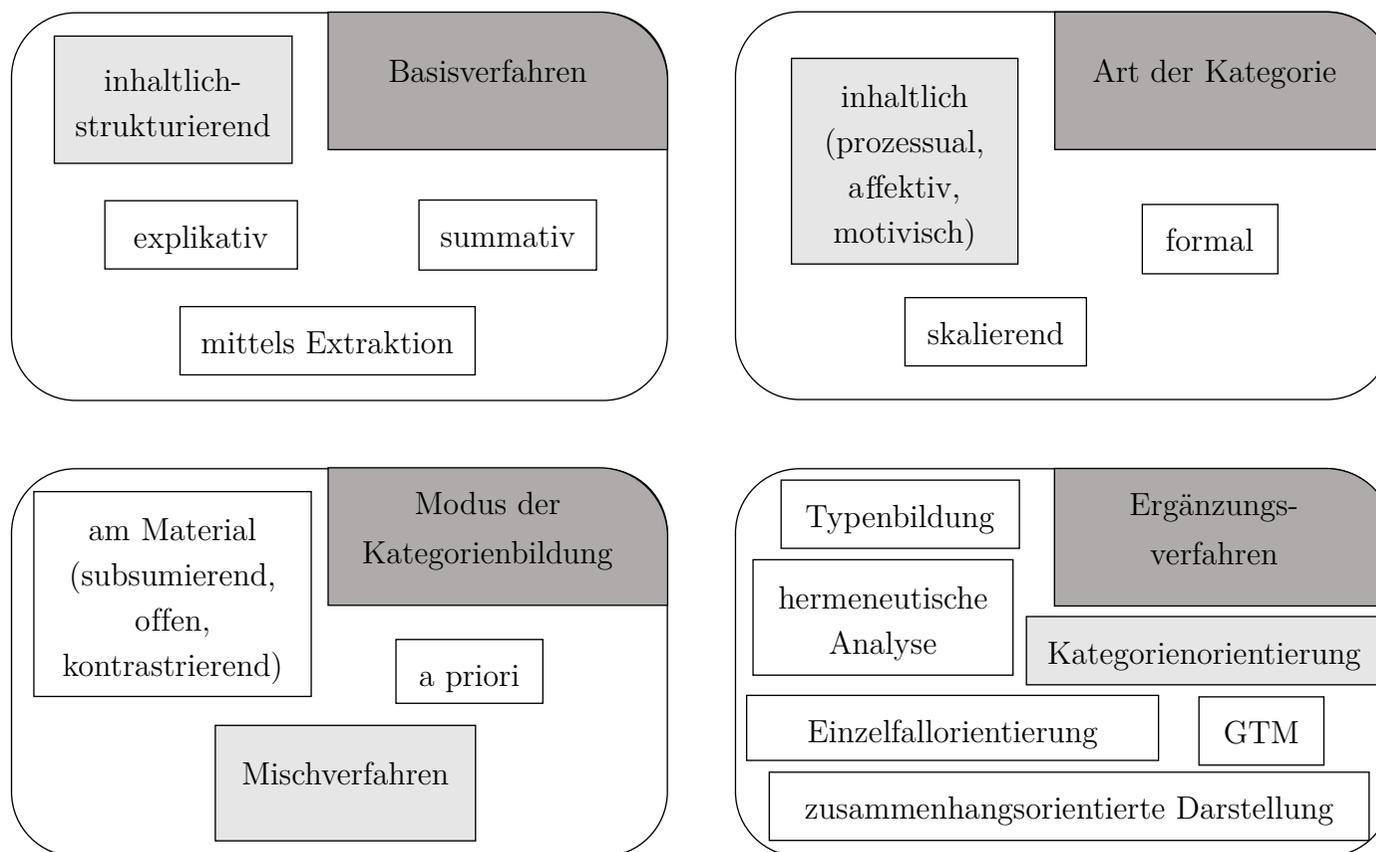


Abbildung 20.1: Baukasten zur erkenntnisinteressesgeleiteten Auswahl der Spezifika der qualitativen Inhaltsanalyse in Anlehnung an Stamann et al. (2016)

Auf Basis des Erkenntnisinteresses suchen die Forschenden zunächst ein passendes Basisverfahren aus. Dies dient als *First Cycle Coding Method* (Saldaña, 2016) dem Öffnen und Erschließen des Materials (Stamann et al., 2016).

Hier stehen *inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse* (im Kern bei Mayring und Kuckartz), *explikative Inhaltsanalyse* (Mayring, 2010), *summative Inhaltsanalyse* (Hsieh & Shannon, 2005) und *Inhaltsanalyse mittels Extraktion* (Gläser & Laudel, 2010) zur Auswahl (Stamann et al., 2016).

Je nach Forschungsfrage kann in einem zweiten Schritt die Art der inhaltsanalytischen Kategorie ausgewählt werden. Stamann et al. (2016) differenzieren hier zwischen *inhaltlich*, *skalierend* und *formal*. Kern der inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse ist es, am „Material ausgewählte inhaltliche Aspekte zu identifizieren, zu konzeptualisieren und das Material [...]systematisch zu beschreiben“ (Schreier, 2014).

Schreier (2014) bietet auf Basis der Betrachtungen von Saldaña (2016) eine genauere Betrachtung von Kodierungsvarianten an, differenziert die inhaltliche Inhaltsanalyse in *prozessual*, *affektiv*, *motivisch*, *dramaturgisch* und *narrativ* aus und konkretisiert damit die Inhalte, die durch die Analyse erfasst werden. Beispielsweise werden beim prozessualen Kodieren Handlungen bzw. Prozesse kodiert, wohingegen beim affektiven Kodieren eher Einstellungen kodiert werden.

Der dritte Baustein, der je nach Forschungsinteresse auszuwählen ist, wird als *Modus der Kategorienbildung* bezeichnet (Stamann et al., 2016). Unterschieden werden kann hier zwischen *induktiv*, *deduktiv* oder einem *Mischverfahren* (Stamann et al., 2016). Als passendere Alternative für das Attribut *deduktiv* sieht Kuckartz und Rädiker (2022) *a priori* und schlägt anstatt der Nutzung des Terms *induktiv* den Begriff *am Material* vor. Im Folgenden sollen die von Kuckartz und Rädiker (2022) vorgeschlagenen Begriffe genutzt werden, da sie vor dem Hintergrund der Verwendung der Begriffe *induktiv* und *deduktiv* im Kontext von mathematischen Denkrichtungen, eine gute Alternative bieten, um Doppelbelegungen von Begriffen zu vermeiden. Schreier (2014) differenziert den Modus der Kategorienbildung am Material durch die Optionen *subsumierend*, *offen* und *kontrastierend* aus. Mehr Optionen finden sich bei Saldaña (2016).

Der letzte Baustein beschreibt die Entscheidung für ein Ergänzungs- oder Sekundärverfahren. Schreier (2014) unterscheidet hier beispielsweise zwischen *einzelfallorientierten Verfahren*, *kategorienorientierten Verfahren* und *zusammenhangsorientierten Verfahren*. Des Weiteren bietet die Literatur hier die Darstellung der Ergebnisse in *Matrizen-oder Flussdiagrammform* für Einzelfälle oder Gruppen (Miles & Huberman, 1994; Saldaña, 2016) oder auch *code mapping* und *code landscaping* (Saldaña, 2016) an. Es wird

außerdem die *Typenbildung* (Kuckartz & Rädiker, 2022), die *hermeneutische Analyse* (Schneider, 1992), die *evaluative qualitative Inhaltsanalyse* (Kuckartz & Rädiker, 2022) oder die *Grounded Theory Method* (Kuckartz & Rädiker, 2022; Mayring, 2010) als Sekundärverfahren angeboten. Außerdem kann die Auswertung sich an den erarbeiteten Kategorien orientieren und damit *kategorienbasiert* (Muslic et al., 2020) erfolgen.

Die Darstellungen sind nicht als erschöpfend zu betrachten sondern ordnen das hier genutzte Vorgehen in den Diskurs der Inhaltsanalysen ein. Aus diesem Kontext heraus kann das gewählte Vorgehen wie folgt zusammengefasst werden. Die Daten wurden mittels der inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse als Basisverfahren unter Verwendung von inhaltlichen Kategorien ausgewertet. Konkret wurden Handlungen bzw. Prozesse kodiert, die zuvor mit Hilfe des *Lauten Denkens* erhoben wurden. Die Kategorien wurden in einem Mischverfahren gebildet. Als Ergänzungsverfahren wurde sich für eine Kategorienorientierung (Schreier, 2012; Muslic et al., 2020; Winkelhage et al., 2008) entschieden.

Aus den methodischen Entscheidungen, die auf Basis des Baukastensystems getroffen wurden, kann ein konkretes Vorgehen abgeleitet werden. Schreier (2014) entwickelte statt eines vorgeschriebenen Ablaufs einen so genannten Werkzeugkasten. Formuliert werden darin acht Schritte, die durchlaufen werden und in diese die Baukastenoptionen eingearbeitet sind. Auf Basis dieses Werkzeugkastens wird das Vorgehen, welches für die hier dargestellte Untersuchung genutzt wurde, erläutert.

20.2 Beschreibung des Ablaufs für die vorliegende Untersuchung

In der nachfolgenden Tabelle werden die von Schreier (2014) vorgeschlagenen acht Schritte dargestellt und für das hier gewählte Vorgehen konkretisiert. Für die Schritte 2 bis 8 erfolgt eine ausführlichere Darstellung in Kapitel 20.3, Kapitel 20.4, Kapitel 20.5, Kapitel 20.6, Kapitel 20.7 und Kapitel 20.8. Das Sekundärverfahren und die Ergebnisse werden kurz in Kapitel 20.9 aber ausführlich in Kapitel 21 dargestellt. Der erste Schritt ist das Festlegen der Forschungsfrage. Die Forschungsfrage und das erkenntnisgeleitete Interesse wurde zu Beginn der Ausführungen in Abschnitt I beschrieben. Adressiert wird in diesem Teil der Arbeit die Forschungsfrage II:

Welche aus der Theorie abgeleiteten Strategien nutzen die Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik der FU Berlin nach dem Besuch

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN LAUTDENKENPROTOKOLLE

des Moduls Mathematisches Professionswissen I, welche nutzen sie nicht und welche Strategien lassen sich durch die empirische Betrachtung ergänzen?

Im zweiten Schritt des Werkzeugkastens soll die Auswahl des Materials konkretisiert werden. Genutzt wurden für die vorliegende Untersuchung durch die Methode des *Lauten Denkens* entstandene Lautdenkenprotokolle, die in Einzelinterviewsituationen mit Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik der FU Berlin durchgeführt wurden. Nachfolgend wird im dritten Schritt das Kategoriensystem erstellt. Das Kategoriensystem basiert hier auf den in Abschnitt III dargestellten und auf Basis der Theorie entwickelten *Strategien*. In Schritt 4 wird das Material vorbereitet und in Einheiten unterteilt. Für die hier dargestellte Untersuchung wurde das Material zum einen in einen introspektiv und zum anderen in einen retrospektiv erhobenen Teil differenziert. Außerdem erfolgte eine Segmentierung auf Basis der Definition des Begriffs *Strategie* (Kapitel 4.4). Eine genauere Beschreibung des Vorgehens ist in Kapitel 20.5 zu finden. In Schritt 5 erfolgte eine Probekodierung von ca. 20% des Materials. Die Ergebnisse der Probekodierung wurden mit einer Kollegin besprochen. Auf dieser Basis wurde das Kategoriensystem modifiziert. Die Hauptkodierung in Schritt 7 fand ausschließlich durch die Autorin statt. Die kodierten Daten wurden hinsichtlich der folgenden drei Teilfragen ausgewertet und im Anschluss dargestellt:

- Welche der theoretisch abgeleiteten *Strategien* wurden genutzt? (Kapitel 21.1)
- Welche der theoretisch abgeleiteten *Strategien* wurden nicht genutzt? (Kapitel 21.3)
- Welche *Strategien* konnten auf Basis des Materials ergänzt werden? (Kapitel 21.2)

In Tabelle 20.1 werden die beschriebenen Schritte noch einmal überblicksartig zusammengefasst. Es wird außerdem auf das jeweilige Kapitel verwiesen.

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN
LAUTDENKENPROTOKOLLE

Tabelle 20.1: Werkzeugkasten zur Beschreibung der Datenauswertung mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse in Anlehnung an Schreier (2014)

Schritte der Inhaltsanalyse nach Schreier	Umsetzung für das Vorhaben	Abschnitt, Kapitel
1. Festlegen der Forschungsfrage	Kurzform: Welche <i>Strategien</i> werden genutzt, welche nicht und welche können ergänzt werden?	Kapitel 2
2. Auswahl des Materials	Nutzung von Lautdenkenprotokollen aus Einzelinterviews	Kapitel 17.2, Kapitel 18
3. Erstellen des Kategoriensystems	Der Kodierleitfaden wurde zunächst auf Basis der theoretischen Betrachtungen in Abschnitt 21.1 abgeleitet (a priori) und während des Kodierprozesses durch das Material ergänzt. Kodiert wurde also in einer sogenannten Mischform.	Abschnitt III und Kapitel 20.4
4. Unterteilung des Materials in Einheiten	Unterteilung der transkribierten Interviews in Introspektion und Retrospektion, Segmentierung mit Hilfe der Definition zu <i>Strategie</i>	Kapitel 4.4, Kapitel 20.5
5. Probekodierung oder kontinuierliche Überarbeitung	Es wurde sowohl eine zweite Kodierung von ca. 20% des Materials zu einem späteren Zeitpunkt durchgeführt, als auch die Ergebnisse mit Hilfe einer Kollegin evaluiert und Änderungen diskutiert.	Kapitel 20.6

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN LAUTDENKENPROTOKOLLE

6. Evaluation und Modifikation des Kategoriensystems	Auf Basis der Kodierbesprechung wurde das Kategoriensystem modifiziert.	-
7. Hauptkodierung	Die Hauptkodierung wurde allein durchgeführt.	Kapitel 20.8
8. Weitere Auswertung und Ergebnisdarstellung	Es wurden aus der Kodierung folgende Aspekte innerhalb der Auswertung genauer betrachtet: Welche der theoretisch abgeleiteten <i>Strategien</i> wurden genutzt? Welche theoretisch abgeleiteten <i>Strategien</i> wurden nicht genutzt? Welche <i>Strategien</i> konnten auf Basis des Materials ergänzt werden?	Kapitel 21

Neben den methodischen Betrachtungen muss die Besonderheit des Materials im Analyse- und Auswertungsprozess berücksichtigt werden. Sandmann (2014) formuliert dazu auf Basis der Ausführungen von Ericsson (1993) vier Konsequenzen:

1. Zunächst muss die Analyseeinheit identifiziert werden, die „den verbalisierten kognitiven Prozessen bzw. mentalen Repräsentationen entspricht (zum Beispiel: Begriffe, Sinneinheiten, Sätze, vollständige Gedankengänge)“ (Sandmann, 2014, S.181).
2. Jede dieser Analyseeinheiten ist im Zusammenhang mit den direkt zuvor und danach verbalisierten Einheiten zu betrachten.
3. Jede Verbalisierung ist in Bezug auf das Kodieren, was sie zum Ausdruck bringt bzw. wofür sie theoriekonform steht (zum Beispiel: eine Prozessbeschreibung, einen Wissensabruf, eine Metakognition).
4. „Verbalisierungen können unterschiedlich motiviert und von verschiedenster Art sein. Für die Analyse heißt das, dass die Kodierung stets in Relation zu den zugrunde liegenden Mechanismen und theoretischen

Annahmen erfolgt, d. h. die [K]odierung der Verbalisierungen muss immer ein in-Beziehung-setzen der Verbaldaten mit den Theorien und Annahmen der Forschenden sein“ (Sandmann, 2014, S.181f).

Für die Datenauswertung im vorliegenden Projekt wurden daraus folgende vier Schlussfolgerungen gezogen:

1. Die Auswahleinheiten wurden mit Hilfe des Strategiebegriffs segmentiert und damit in Analyseeinheiten unterteilt (Kapitel 20.5).
2. Um ein Segment zu kodieren, wurden sowohl vorangegangene als auch nachfolgende Aktivitäten berücksichtigt. Außerdem wurde zur Unterstützung die eingefügte Verschriftlichung (Kapitel 19.2) und die zugeordneten Passagen aus der Retrospektion (Kapitel 20.8) hinzugezogen.
3. Die zu kodierenden Einheiten wurden bezüglich ihrer Funktion in metakognitive und nicht-metakognitive Einheiten eingeteilt.
4. Die Ergebnisse der Datenauswertung wurden bezüglich der Entstehungssituation und des methodischen Vorgehens aus einer theoretischen Perspektive kritisch betrachtet und eingeordnet (Abschnitt V).

20.3 Schritt 2: Auswahl des Materials - Bestimmung der Auswahleinheit

Die Lautdenkenprotokolle sind in den Sommersemestern 2021 und 2022 entstanden. Dabei sind die Interviews aus dem Sommersemester 2021 als Pilotierung zu verstehen. Im Anschluss an die Pilotierung wurden drei Aspekte evaluiert: 1) Eignung der Primäraufgabe, 2) technische Umsetzung und 3) Verhalten der Versuchsleiterin. Die Evaluierung dieser drei Aspekte führte zu folgenden Ergebnissen 1) Die Primäraufgabe wurde aus den im Kapitel 18.3 genannten Gründen ausgewählt. Nach der Pilotierung zeigte sich, dass die Aufgabe gut geeignet war und auch in der Hauptstudie verwendet werden sollte. 2) Die Ton- und Bildaufnahmen waren von guter Qualität. Der Versuchsaufbau konnte daher auch in der Hauptstudie so durchgeführt werden. 3) Wie im Kapitel 18.2 dargestellt, sollte zunächst eine introspektive Datenerhebung erfolgen, bevor retrospektiv einzelne Vorgehensweisen erfragt werden. Außerdem wird in der Literatur empfohlen, die Gedanken der Studierenden so wenig wie möglich zu unterbrechen (Kapitel 17.4). Beiden Empfehlungen wurde gefolgt.

Nach Durchsicht der Videodateien der Pilotierung wurde deutlich, dass es drei Interviews gab, in denen diese Empfehlung nicht befolgt wurde. Es

entstanden eher fremdadressierte metakognitive Lautdenkenprotokolle (Stark, 2010) anstatt der Lautdenkenprotokolle (Stark, 2010), die für die Datenauswertung genutzt werden sollten. Aufgrund dessen wurden diese drei Interviews nicht in die Datenauswertung einbezogen, da die Gedankengänge der Studierenden zu oft unterbrochen und von Anfang an gelenkt wurden. Darüber hinaus musste ein weiteres Interview aufgrund technischer Probleme aus der Datenauswertung ausgeschlossen werden, da das Interview unvollständig aufgezeichnet wurde. Insgesamt wurden somit 20 Interviews in die Auswahl einbezogen.

20.4 Schritt 3: Erstellen des Kategoriensystems

Zentrales Merkmal des Verfahrens der qualitativen Inhaltsanalyse ist die *Kategorienorientierung*. Dadurch wird das Kategoriensystem zum Herzstück der Methode (Schreier, 2014).

Der Begriff der *Kategorie* wird in unterschiedlichen Kontexten verschieden genutzt. Grundsätzlich ist zu beobachten, dass verschiedene Inhalte zu einer Kategorie in den Sozialwissenschaften werden können. Laut Kuckartz (2016) kann alles zu einer Kategorie gemacht werden. Eine Kategorie ist auch ein Prozess oder eine Idee (Kuckartz, 2016, S.34). Kuckartz und Rädiker (2022) bietet hier eine Unterscheidung zwischen sieben Formen von Kategorien an. Für das hier vorliegende Vorhaben sind zunächst besonders die von Kuckartz und Rädiker (2022) bezeichneten *theoretischen Kategorien* von Bedeutung. Eine Kategorie ist daher im vorliegenden Projekt deckungsgleich mit einer *Strategie* im Sinne des in Kapitel 4.4 erarbeiteten Verständnisses. Die Kategorien fungieren dabei analog zu Variablen, deren Ausprägung für jede Textstelle bzw. jedes Segment (Kapitel 20.5) erfasst wird.

Grundsätzlich bietet Kuckartz und Rädiker (2022) an, das Kategoriensystem in drei verschiedenen Formen zu organisieren: *linear*, *hierarchisch* oder *als Netzwerk*. Für die hier vorliegende Untersuchung wurde ein hierarchisches Kategoriensystem auf Basis der theoretischen Kollektion möglicher *Strategien* (Abschnitt III) entwickelt, also concept-driven gearbeitet (Schreier, 2015). Klassisch werden Kategorien bzw. Oberkategorien und Subkategorien bzw. Unterkategorien (Kuckartz & Rädiker, 2022) in einer zwei-Ebenen Hierarchisierung genutzt. Für das hier beschriebene Vorhaben erwies es sich aufgrund der Komplexität einer *Strategie* als sinnvoll mehrere Ebenen einzuführen. Es ergaben sich durch die in Kapitel 4.4 erarbeiteten Strategieeinheiten die Kategorien *Verstehen*, *Argumente konstruieren und verknüpfen* und *Diskurs*

als Hauptkategorien und damit die erste Ebene der Kategorisierung.

Diese Kategorien „beziehen sich auf vorhandene Theorien bzw. sind aus ihnen abgeleitet“ (Kuckartz & Rädiker, 2022, S.56) und konkret im hier vorliegenden Projekt aus der vertikalen Ebene (chronosequentielle Dimension) entwickelt. Die Subkategorien werden ebenfalls anhand der Theorie und konkret anhand in der Literatur beschriebenen Begründungstypen und Betrachtungen von Argumentationsstrukturen entwickelt. Die Makrostrategien ergeben sich aus der waagerechten Dimension des Schemas (Abbildung 16.1). In einer dritten Ebene wird aus den *Strategien* eine weiter ausdifferenzierte Subkategorie. Wie in Kapitel 21.1 dargestellt und in den Tabellen 12.1, 13.1, 13.2 wiedergegeben, können auch die *Strategien* in verschiedenen Ausprägungen sichtbar werden. Dazu wurde auf einer vierten und zum Teil auch fünften Hierarchisierungsebene eine weitere Subkategorie hinzugefügt. In Abbildung 20.2 soll beispielhaft ein Ausschnitt der Kategorienhierarchie nach der Hauptkodierung und der empirischen Ergänzung dargestellt werden.

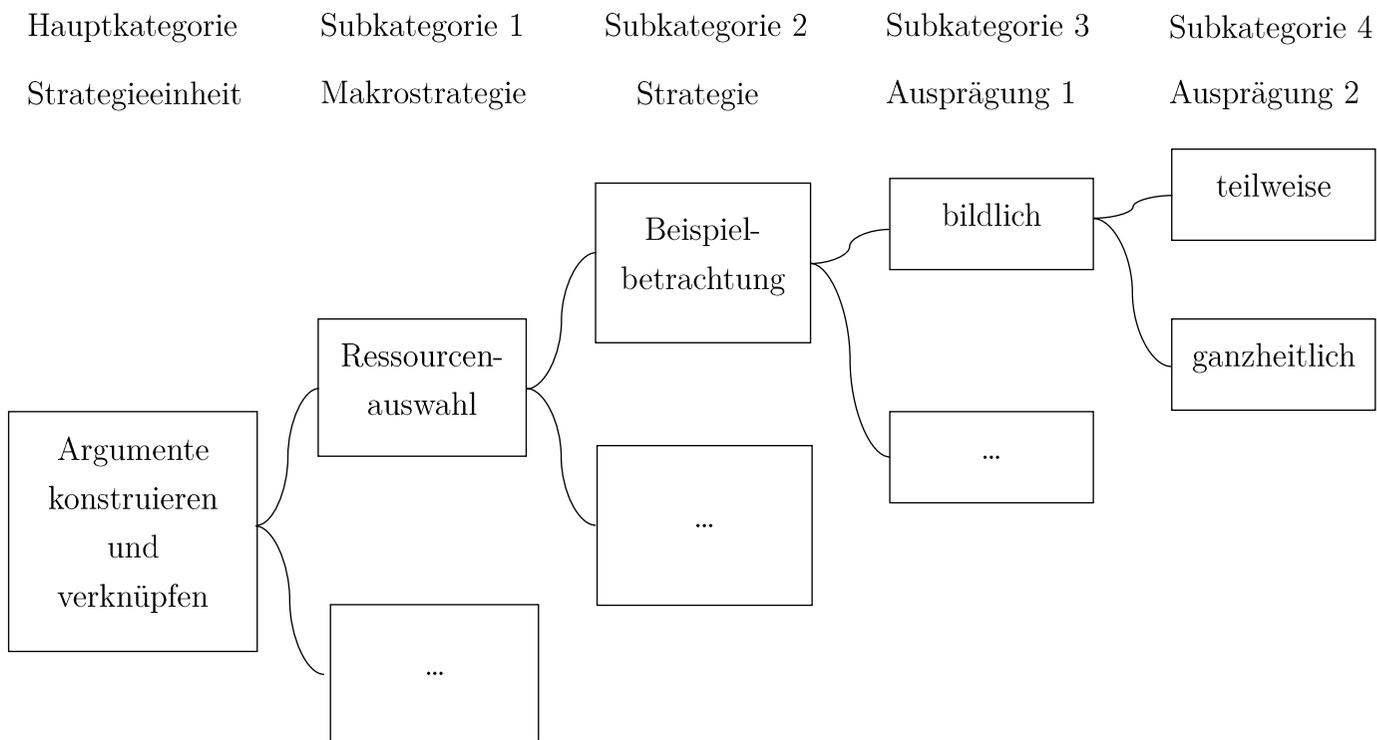


Abbildung 20.2: Ausschnitt aus der Kategorienhierarchie des vorliegenden Projekts

Der zum Kategoriensystem erarbeitete Kodierleitfaden besteht in Anlehnung an Schreier (2015) aus dem Kategorienamen, einer Beschreibung dessen, einem Ankerbeispiel und Entscheidungsregeln. Die Beschreibung kann dabei entweder eine Definition oder ein Indikator sein (Anhang E, unveröffentlicht). Die Ankerbeispiele wurden sowohl während des Probekodierens als auch während der Phase der Hauptkodierung hinzugefügt.

20.5 Schritt 4: Unterteilung des Materials in Einheiten

Durch die Betrachtung der Literaturgrundlage zur qualitativen Inhaltsanalyse kristallisieren sich bei Schreier (2012), Kuckartz und Rädiker (2022) und Mayring (2010) unterschiedliche Betrachtungen bezüglich der Unterteilung des Materials in Einheiten heraus.

Schreier (2012) sieht hier den Prozess der Segmentierung des Materials als zentrale Tätigkeit, um anschließende Kodiereinheiten zu bilden. Eine Kodiereinheit ist dabei das Resultat des Kodierens, also eine Abstraktion des Textmaterials auf einer höheren analytischen Ebene (Kuckartz und Rädiker, 2022; Schreier, 2012). „Ein Rückbezug auf das Ausgangsmaterial ist nach diesem Schritt nicht länger intendiert“ (Kuckartz und Rädiker, 2022, S.67). Es wird mit einer Art Datenmatrix bestehend aus den zwei Dimensionen *Analyseeinheit* und *Kategorie* weitergearbeitet (Kuckartz und Rädiker, 2022; Schreier, 2012). „Segmentation involves dividing the material into units in such a way that each unit fits into exactly one (sub)category of the coding frame“ (Schreier, 2012, S.178). Um die dazu notwendigen Segmentgrenzen zu bestimmen, kann das Material anhand *formaler* oder *inhaltlicher Kriterien* untergliedert werden (Rustemeyer, 1992). Formale Kriterien beziehen sich auf die innere Struktur des zu analysierenden Textes und umfassen Absätze oder einzelne Worte.

Die Segmentierung findet inhaltlich statt, wenn die Passagen eher anhand inhaltlicher Kriterien unterteilt werden. Im Gegensatz dazu sieht Kuckartz und Rädiker (2022) das Unterteilen in Einheiten nicht als separaten Prozess, sondern als einen durch das Kodieren von Sinneinheiten impliziten Vorgang. *Kodierte Segmente*, wie Kuckartz und Rädiker (2022) die entstehenden Einheiten nennt, können dadurch überlappen oder ineinander verschachtelt sein (Kuckartz & Rädiker, 2022). Mayring (2010) schlägt eine Unterteilung des Materials in Einheiten auf verschiedenen Ebenen vor. Zunächst wird die Auswertungseinheit festgelegt und beschreibt damit eine Auswahl der Texte, die in die Untersuchung einbezogen werden sollen. In der hier vorliegenden

Untersuchung wurden die Interviews wie in Kapitel 20.3 beschrieben ausgewählt und unter dem von Schreier (2014) genutzten Begriff Auswahleinheit subsumiert. Mayring (2010) spricht im Kontext des Unterteilens des Materials in Einheiten außerdem noch von der *Kontexteinheit* und der *Kodiereinheit*. Die Kontexteinheit ist dabei der größte Textbestandteil, der unter eine Kategorie fallen kann. Synonym für die Kodiereinheit wird auch der Begriff der *Analyseeinheit* genutzt (Bilandzic et al., 2001) und beschreibt den kleinsten Materialbestandteil (Mayring, 2010). Für die vorliegende Untersuchung wird in Anlehnung an Sandmann (2014) der Begriff der Analyseeinheit synonym für die von Schreier (2012) genutzte Kodiereinheit genutzt und beschreibt damit den Materialbestandteil, der im Kodierprozess die Zuordnung zu einer Kategorie beschreibt. Der Begriff der Kontexteinheit wird aus nachstehenden Gründen nicht relevant.

In der vorliegenden Untersuchung wurde sich für das Vorgehen von Schreier (2012) entschieden. Begründet ist dieses im Erkenntnisinteresse und konkret in der Erfassung von *Strategien* im Sinne von Gedankenschritten. Es wird angenommen, dass sich diese *Strategien* nicht überlappen oder ineinander verschachtelt sind, sondern nacheinander ablaufen.

Um diese einzelnen Schritte sichtbar zu machen, müssen folglich vor dem Zuweisen der Kategorien bzw. des Kodierens die einzelnen Textabschnitte festgelegt werden. Es wurde dadurch bestimmt, wo eine *Strategie* beginnt und wo sie endet. Außerdem sollten mit Hilfe des Kodierens die einzelnen Gedankenschritte abstrahiert und dadurch *Strategien* formuliert werden. Das Vorgehen von Schreier (2012) schien auch dafür als passend. Zunächst wird durch die Trennung der introspektiven Datenerhebung von der retrospektiven Datenerhebung die Analyseeinheit festgelegt (Kapitel 20.5.1). Der Teil, in dem die Daten introspektiv gewonnen wurden, wird auf Basis der in Kapitel 4.4 entwickelten Definition einer *Strategie* in Segmente unterteilt (Schreier, 2012) (Kapitel 20.5.2).

20.5.1 Festlegen der Analyseeinheit und Trennung in Introspektion und Retrospektion

Um die Analyseeinheit im Begriffsverständnis nach Schreier (2012) zu bestimmen, wird anhand des in Kapitel 18.2 dargestellten Ablaufs der Datenerhebung und der Spezifik der retrospektiven Phase der Datenerhebung (Kapitel 18.2.5) das Transkript jedes Interviews in die Phase der Introspektion und Retrospektion unterteilt. Umgesetzt wurde dies in MAXQDA, indem der gesamte Part der Retrospektion blau hinterlegt wurde. Welche Textbestandteile in die Retrospektion einbezogen wurden, ergibt sich durch die Betrachtungen in

Kapitel 18.2.5. Für die anschließende Kodierung wurden nur Textpassagen genutzt, die unter die Phase der Introspektion fallen.

20.5.2 Segmentierung der transkribierten Lautdenkenprotokolle der introspektiven Phase

In einem weiteren Schritt wurde das Material, welches vorher zur Introspektion zugeordnet wurde, in Analyseeinheiten (Sandmann, 2014) bzw. Kodiereinheiten (Schreier, 2012) unterteilt. Diese Segmente überlappen sich nicht und sind als trennscharfe kleinste Textbestandteile Grundlage für die anschließende Kodierung zu betrachten. In Anlehnung an die Auswertung von Lautdenkenprotokollen von Sandmann (2014) und die für die vorliegende Untersuchung erarbeitete Definition (Kapitel 4.4) einer *Strategie* als nachvollziehbarer Gedankenschritt, wird ein Segment zu einer *Strategie*, die anschließend durch die Zuordnung zu einer Kategorie abstrahiert wird. Auf Basis der zuvor in Abschnitt 21.1 theoretisch entwickelten *Strategien*, werden in Anlehnung an die in Kapitel 11 formulierten Momente der Strategienentwicklung die Segmente konkret bestimmt. Der der introspektiven Phase zugeordnete Text wird chronologisch durchgegangen und auf Basis der folgenden sich aus den inhaltlichen Momenten (Kapitel 11) ergebenden Merkmalen der *inhaltlichen Abgeschlossenheit* der Strategieentwicklung in Segmente aufgeteilt. Ein neues Segment beginnt, wenn der Gedankenschritt aus inhaltlicher Perspektive abgeschlossen erscheint. Die Nachvollziehbarkeit als weiteres inhaltliches Moment stellt sicher, dass die inhaltliche Abgeschlossenheit gewahrt bleibt und die Betrachtung einer *Strategie* nicht vorzeitig endet, bevor ein inhaltlich nachvollziehbarer Gedankenschritt abgeschlossen ist. Diese Abgeschlossenheit kann sich verschieden äußern, ist aber immer mit einer Veränderung der Aufmerksamkeit auf inhaltlicher Ebene verbunden. Die Studierenden

- ... richten ihre Aufmerksamkeit erneut auf Inhalte, die die Aufgabenstellung vorgibt oder auf Inhalte, die zuvor schon einmal verschriftlicht bzw. verbalisiert wurden.
- ... beginnen mit dem Inhalt weiter zu arbeiten und entwickeln diesen weiter.

Diese Betrachtung knüpft an die Ausführungen von Ericsson und Simon (1980;1998) an, die die Abgrenzung von Gedanken zu Gedanken anhand der Veränderung der Aufmerksamkeit auf inhaltlicher Ebene festmachen und jeden Gedankenschritt als ‚mental state‘ oder ‚thought‘ betrachten. Der jeweilige Gedanke entsteht durch das Lenken der Aufmerksamkeit auf den jeweiligen

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN
LAUTDENKENPROTOKOLLE

Inhalt (Kapitel 4.4, Abbildung 4.2). Im Ergebnis entsteht hier eine Erweiterung der Überlegungen aus Abbildung 13.1 mit Hilfe der oben beschriebenen Betrachtungen von Ericsson und Simon (1980;1998) (Abbildung 4.2). Aus der Zusammenfassung der Stützung und der Regel aus dem Toulmin Schema (Ebene 1) ließen sich, wie in Abschnitt III erläutert, neben anderen beispielsweise die beiden Makrostrategien RESSOURCENAUSWAHL und TRANSFORMIEREN ableiten (Ebene 3) und als verbalisierten Gedankenschritt (Ebene 4) mit Hilfe des *Lauten Denkens* erheben (Abbildung 20.3).

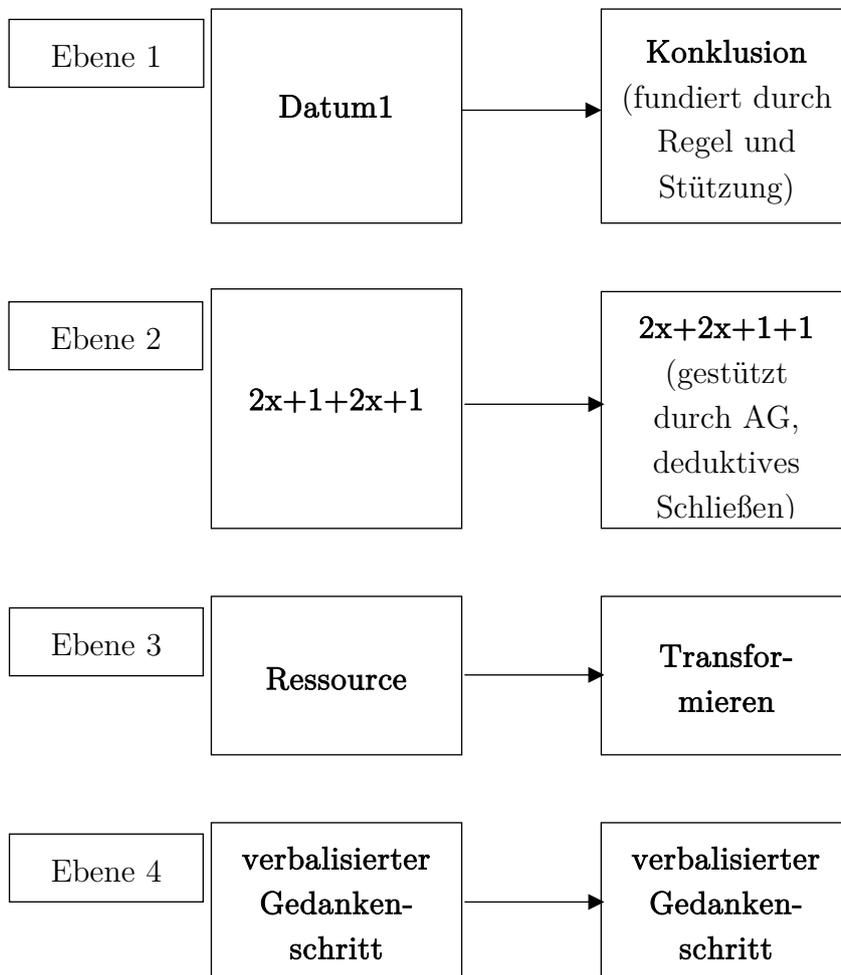


Abbildung 20.3: Darstellung der kettenartigen Struktur als verknüpfende Darstellung der Überlegungen aus Abbildung 4.2, 13.1

Ein verbalisierter Gedankenschritt wird so zu einem Segment.

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN LAUTDENKENPROTOKOLLE

Die Segmentierung der Texte erfolgte in MAXQDA durch das Zuweisen einer neuen Zeile. Jedes Segment bekam so eine eigene Zeilennummer.

In der folgenden Tabelle 20.2 soll das Kriterium der inhaltlichen Abgeschlossenheit auf einen Textabschnitt aus der Stichprobe und die Segmentierung beispielhaft nachvollziehbar dargestellt werden.

Tabelle 20.2: Anwendung des Kriteriums der *inhaltlichen Abgeschlossenheit* auf B07 aus der Stichprobe und nachvollziehbare Darstellung der Segmentierung

Nr.	Textabschnitt	Kommentar
Segment 1	„Ich gebe dir jetzt die zweite Aufgabe.“	Versuchsleitung spricht (Sprecherwechsel folgt)
Segment 2	„Hm (bejahend) (10) Okay. Begründen Sie, dass folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Teilt man eine ungerade Quadratzahl durch 8, so erhält man Rest 1. (..)“	Die Aufgabenstellung wird gelesen.
Segment 3	„Okay. (4) So. Okay. (...) Also: Eine ungerade Quadratzahl. (...) Eine ungerade Quadratzahl. (..)“	Es wird begonnen mit Hilfe eines Beispiels der Begriff der Quadratzahl zu klären.
Segment 4	„Was ist denn eine ungerade Quadratzahl? ((lacht)) Hm (nachdenkend). (...)“	Segment 3 wird unterbrochen durch dieses Segment. Es wird ein so genanntes ‚self-questioning‘ mit der Funktion der Regulation (metakognitive Aktivität) eingeschoben.
Segment 5	„Also, eine ungerade Quadratzahl ist jetzt zum Beispiel $7 \text{ hoch } 2$,“	Dieses Segment ist zugehörig zu Segment 3 und setzt die Betrachtung des mathematischen Objekts der Quadratzahl fort.
Segment 6	„würde ich einfach mal sagen, und wenn man die dann durch 8 teilt, erhält man Rest 1.“	Die zuvor in Segment 5 betrachtete Quadratzahl 49 ($7 \cdot 7$) erhält bei der Division durch 8 Rest 1.

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN
LAUTDENKENPROTOKOLLE

Segment 7	„Und wenn man jetzt zum Beispiel (..) 3 hoch 2 nimmt, weil die 3 ist ja ungerade, ist ja gleich $3 \cdot 3$ ist gleich 9 (...) und wenn man die durch 8 teilt, ähm genau, erhält man 8 (..) Rest 1. (schreibt)“	Es wird ein weiteres Beispiel formuliert, welches ganzheitlich den zu begründenden Sachverhalt wiedergibt.
Segment 8	„Okay. Nehmen wir mal eine andere Zahl. Hm (nachdenkend). (..) Nehmen wir mal zum Beispiel die 5, ist ja eine ungerade Zahl, zum Quadrat nimmt, dann erhält $5 \cdot 5$ ist gleich 25, und wenn man 25 durch 8 teilt, erhält man 24 Rest 1, weil 24 durch 8/ Ach ne Quatsch. 24 durch 8 ist ja 3. Und dann Rest 1. (schreibt)“	Es wird ein weiteres Beispiel formuliert, welches ganzheitlich den zu begründenden Sachverhalt wiedergibt.

Das Segment 3 endet mit dem Lenken der Aufmerksamkeit auf einen Teil der Aufgabenstellung bzw. hin zum mathematischen Objekt der Quadratzahl. Dieser Gedanke endet mit dem Beginn von Segment 4, einer Lenkung der Aufmerksamkeit hin zu einer beispielhaften Klärung des Begriffs der Quadratzahl, die durch Segment 4 unterbrochen und in Segment 5 fortgeführt wird. Segment 4 endet durch den Einschub einer metakognitiven Aktivität, dem so genannten ‚self-questioning‘. Segment 5 endet, als die Aufmerksamkeit weg vom beispielhaft betrachteten mathematischen Objekt der Quadratzahl hin zu einer Formulierung eines ganzheitlichen Beispiels für den zu begründenden Satz in Segment 6 gelenkt wird. Segment 7 und ebenso Segment 8 enden mit der Betrachtung eines weiteren ganzheitlichen Beispiels, welches den in der zu begründenden Aussage thematisierten Sachverhalt vollständig wiedergibt.

In der Tabelle 20.3 soll das Kriterium der inhaltlichen Abgeschlossenheit anhand eines weiteren Textabschnitts aus der Stichprobe beispielhaft dargestellt werden.

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN
LAUTDENKENPROTOKOLLE

Tabelle 20.3: Anwendung des Kriteriums der inhaltlichen Abgeschlossenheit auf B21 aus der Stichprobe und nachvollziehbare Darstellung der Segmentierung

Nr.	Textabschnitt	Kommentar
Segment 33	„Also n Quadrat geteilt durch 8 ist (...), (schreibt) ähm, (6) lässt den Rest 1. (4)“	Der Inhalt der Aussage wird in symbolischer Sprache wiedergegeben (auch verschriftlicht).
Segment 34	„Da schaue ich gerade“	Die Aufmerksamkeit richtet sich aus einer Metaperspektive auf das eigene Vorgehen und beschreibt die Art der Vorgehensweise.
Segment 35	„also n Quadrat ist ja auch $m \cdot 2 + 1$ geteilt durch 8. (schreibt)“	Hier wird das mathematische Objekt der Quadratzahl mit Hilfe der Kenntnis der Eigenschaften von ungeraden Zahlen zerlegt.
Segment 36	„Aber das ist jetzt ein bisschen schwierig zu erkennen einfach nur an den Variablen/ dass durch 8 geteilt wird.“	Das bisherige Vorgehen wird auf einer Metaperspektive evaluiert und stellt deshalb eine metakognitive Aktivität dar.
Segment 37	„Und deshalb hier $\cdot 2$ / Also ich weiß, das ist gerade (4) weil es ein Vielfaches von 2 ist. (...), ähm, (..) teilt man die jetzt durch 8 erhält man den Rest 1. (...“	Es erfolgt ein Rückbezug der zuvor getätigten Gedankenschritte auf die Aufgabenstellung.
Segment 38	„Ok, also ich habe zum Beispiel 9 geteilt durch 8 ist 1 und eine weitere ungerade Zahl/“	Ein zuvor aufgestelltes Beispiel wird wiederholt.

KAPITEL 20. AUSWERTUNG DER TRANSKRIBIERTEN
LAUTDENKENPROTOKOLLE

Segment 39	„Also als Zahlenbeispiel ist jetzt zum Beispiel 25 und 25 durch 8 ist erstmal, ähm, 3, weil $3 \cdot 8$ sind 24 und dann $25-24$ sind 1 und, ähm, (...) also 25 ist 3 mal 8 und dann damit ich den Rest rausbekomme, muss ich $25-24$, ähm, also 24 von 25 subtrahieren also $25-24$ ist 1, also habe ich hier noch den Rest 1. (4) (schreibt)“	Hier wird ein ganzheitliches Beispiel betrachtet. Konkret wird die Quadratzahl 25 betrachtet, die bei der Division durch 8 den Rest 1 ergibt.
------------	--	---

B21 beginnt in Segment 33 mit der Lenkung der Aufmerksamkeit auf eine symbolische Darstellung des in der Aussage thematisierten mathematischen Inhaltes. Segment 33 endet, als B21 die Aufmerksamkeit auf eine Betrachtung des eigenen Denkens aus einer Metaperspektive lenkt. Segment 34 endet, als die Aufmerksamkeit weg von der Betrachtung des Vorgehens aus einer Metaperspektive hin zu Betrachtungen zu den Eigenschaften von ungeraden Zahlen in Segment 35 gelenkt wird. Segment 35 endet als sich die Aufmerksamkeit weg von der Betrachtung der Eigenschaft der Quadratzahl als ungerade Zahl richtet und das Denken in Segment 36 erneut aus einer Metaperspektive betrachtet wird. Segment 36 endet, als B21 wieder die Aufmerksamkeit auf den konkreten Bearbeitungsprozess richtet und sich in Segment 37 auf vorher getätigte Äußerungen zurück bezieht. Segment 37 endet, als die Aufmerksamkeit auf eine im Prozess bereits geäußerte Verbalisierung gelenkt wird. Segment 38 endet, als B21 ein erneutes ganzheitliches Zahlenbeispiel für die zu begründende Behauptung aufgestellt und verbalisiert. Segment 39 als das letzte Segment in dieser Betrachtung endet als die Betrachtung des Beispiels endet.

Neben der inhaltlichen Abgeschlossenheit als Kriterium für die Segmentierung ist außerdem der Sprecherwechsel relevant. In Tabelle 20.2 beginnt beispielsweise die Segmentnummerierung mit Nr.2, da Segment 1 im Transkript eine Äußerung der Versuchsleiterin war, die transkribiert wurde.

20.6 Schritt 5: Probekodierung

Der Schritt der Probekodierung und die anschließende Überarbeitung des Kategoriensystems dient unter anderem auch zur Erreichung eines möglichst

guten intersubjektiv-konsensualen Textverständnis und ist Voraussetzung für die Erfüllung des Gütekriteriums der Reliabilität (Kapitel 23). Schreier (2012) schlägt unter anderem vor, die Probekodierung entweder durch mehrere Personen vorzunehmen oder von einer Person in einem Abstand von 10-14 Tagen durchzuführen. In der vorliegenden Untersuchung wurden ca. 20% des Materials zunächst kodiert, die Ergebnisse mit einer Kollegin besprochen und Änderungen eingearbeitet. Es erfolgte eine erneute Kodierung, die im Abstand von ca. drei Wochen durchgeführt wurde und sowohl das Material der Probekodierung als auch das Material der Hauptkodierung einbezog.

20.7 Schritt 6: Evaluation und Modifikation des Kategoriensystems

Auf Basis von Schritt 5 wurde das Kategoriensystem überarbeitet. Kategorien, die nicht trennscharf waren, wurden teilweise vereinigt oder aufgelöst und die Segmente neu zugeordnet. Außerdem wurden in dieser Phase erste Ankerbeispiele in den Kodierleitfaden eingefügt.

20.8 Schritt 7: Hauptkodierung

Neben dem Kategoriensystem als zentrales Element der qualitativen Inhaltsanalyse kommt dem Kodieren als Prozess ebenfalls eine große Bedeutung zu. Das Kategoriensystem hat dabei den Zweck, den Kategorien die entsprechende Textstelle zuzuweisen. Hier sieht Kuckartz und Rädiker (2022) im Unterschied zu Schreier (2012) eine bidirektionale Blickweise als zielführend, mit Hilfe derer die Beziehung zwischen Kategorie und Ausgangsmaterial während der gesamten Analyse bestehen bleibt. Schreier (2012) jedoch sieht die Verbindung zwischen Kategorie und Textsegment nur einseitig und blickt nur von der Kategorie auf die Kodiereinheit. Es wird dadurch dem jeweiligen Segment genau eine Kategorie zugeordnet.

Die Begründung, weshalb sich in der vorliegenden Analyse der Transkripte für das Vorgehen von Schreier (2012) entschieden wurde, ist die gleiche, wie in Kapitel 20.5 im Zusammenhang mit der Segmentierung bereits dargestellt wurde.

Da das Material für die Probekodierung nicht so ausgewählt werden konnte, dass alle Subkategorien vorkamen, wurden in der Phase der Hauptkodierung Ankerbeispiele hinzugefügt. Außerdem wurde das Kategoriensystem punktuell auch auf Basis der Ergebnisse der Hauptkodierung angepasst und mit einer

Kollegin diskutiert. Auf Basis dessen wurde die Kodierung relevanter Segmente erneut einer Prüfung unterzogen.

Die Hauptkodierung fand ausschließlich durch die Autorin statt und wurde in Anlehnung an Schreier (2012) im Abstand von drei Wochen ein zweites Mal durchgeführt.

Es wird angenommen, dass bei der Erhebung von verbalen Daten nicht nur Lautdenkenprotokolle, sondern auch fremdadressierte metakognitive Lautdenkenprotokolle entstehen bzw. Verbalisierungen sichtbar werden, die zu letzterem zugeordnet werden müssen (Heine, 2005). Diese metakognitiven Segmente wurden in der vorliegenden Untersuchung mit der Hauptkategorie *metakognitive Strategien* kodiert, jedoch in die auswertende Darstellung der Ergebnisse (Kapitel 21) nicht einbezogen. Alle übrigen Segmente wurden immer der kleinstmöglichen Subkategorie zugeordnet. Da der Kodierleitfaden evaluiert und überarbeitet wurde, schließt Schreier (2012) eine Möglichkeit der doppelten Kodierung aus.

Für die vorliegende Untersuchung konnte weitestgehend die doppelte Kodierung ebenfalls durch die trennscharfe Erarbeitung von Kategorien vermieden werden. Lediglich wurde, wie im Kodierleitfaden (Anhang E, unveröffentlicht) beschrieben, konkret einzelnen Kategorien die Eigenschaft zugewiesen, die zugeordneten Textabschnitte immer doppelt zu kodieren. Dieses Vorgehen entstand aus der Evaluation der Probekodierung, da es *Strategien* gab, die nur anhand ihrer Intension einer konkreten Kategorie zugeordnet werden konnten. Die Intension konnte aber nicht immer aus dem Kontext abgeleitet werden. Konnte diese nicht aus den anderen Textbezügen herausgelesen werden, so wurde diese Kategorie doppelt kodiert. Konkret trifft dies für die *Strategie BEISPIELHAFTES ÜBERSETZEN* zu, die ebenfalls auch als *NUMERISCHE BEISPIELBETRACHTUNG* interpretiert werden konnte.

Die Zuordnung der Segmente zu Kategorien wurde zum einen durch die in MAXQDA eingefügten Verschriftlichungen der Studierenden (Kapitel 19.2) und zum anderen mit Hilfe der in der Retrospektion formulierten Äußerungen unterstützt. Die Passagen aus der Retrospektion wurden mit Hilfe der Memo-Funktion den Segmenten innerhalb der Introspektion zugeordnet. Bei inhaltlichen Widersprüchen zwischen dem introspektiven Segment und der entsprechenden Passage der Retrospektive wurde der Interpretation des Segments der Vorzug gegeben. Begründet ist dieses Vorgehen in den Überlegungen, die in Kapitel 18.2.5 zusammengestellt sind.

Im Kodierleitfaden wurde außerdem eine weitere Kategorie hinzugefügt, die als *ZU GEHÖRIG* bezeichnet wurde. Diese Kategorie wurde vergeben, wenn aus inhaltlicher Perspektive sichtbar wurde, dass der vorhergehende Gedankenschritt unterbrochen und zu einem späteren Zeitpunkt fortgesetzt wurde. Es wurde damit vermieden, dass *Strategien* mehrfach auftraten, die eigentlich aus

inhaltlicher Perspektive zu einem Gedankenschritt zugeordnet werden konnten. Im Folgenden wird dies anhand eines Beispiels aus dem Lautdenkenprotokoll von B03 illustriert.

- B3, Segment 23 „Man hat, ähm/ (10) Man multipliziert, wenn man eine, ähm (..) eine Quadrat/ Bei einem Quadrat multipliziert man ja eigentlich immer zwei Zahlen. Ähm (...) immer (..) zwei ungerade Zahlen. (4)“
- B03, Segment 24 „ $1 \cdot 1$ (..)“
- B03, Segment 25 „ $3 \cdot 3$ “
- B03, Segment 26 „ $5 \cdot 5$ “
- B03, Segment 27 „ $7 \cdot 7$ “
- B03, Segment 28 „ $9 \cdot 9$ (schreibt)“
- B03, Segment 29 „Und die Ergebnisse (..) sind ja (...)/ Die Ergebnisse, wenn man zwei ungerade Zahlen miteinander multipliziert, sind die Ergebnisse ja auch immer ungerade. (...)“

Es wird hier sichtbar, dass der in Segment 23 begonnene Gedanke in Segment 29 erneut aufgegriffen und fortgeführt wird. B03 verbalisiert in Segment 23 den Begriff der Quadratzahl, um in Segment 29 den Gedanken der Multiplikation zweier gleicher natürlicher Zahlen fortzuführen und für die Multiplikation zweier ungerader natürlicher Zahlen zu konkretisieren.

20.9 Schritt 8: Weitere Auswertung und Ergebnisdarstellung

Wie bereits in Kapitel 20.1 und in Abbildung 20.1 zusammengestellt, wird anschließend an die Kodierung ein Ergänzungs- oder Sekundärverfahren je nach Erkenntnisinteresse ausgewählt. Für die hier vorliegende Untersuchung ist das durch die empirische Betrachtung entstandene vollständige Kategoriensystem von Interesse. Dieses zeigt welche *Strategien* aus der Theorie genutzt wurden, welche nicht genutzt wurden und welche ergänzt werden konnten. In Anlehnung an die Untersuchung von Muslic et al. (2020) wurde das Kategoriensystem die Grundlage für die Bezeichnung und Ausarbeitung der empirisch untersuchten *Strategien*. Der Formulierung der Forschungsfrage II folgend, wird in der Ergebnisdarstellung (Kapitel 21) unterschieden zwischen Kategorien, die wirklich in der Stichprobe auftauchten (Kapitel 21.1), zwischen Kategorien, die keine Verwendung fanden (Kapitel 21.3) und zwischen Kategorien, die durch das empirische Material ergänzt wurden (Kapitel 21.2).

21 Darstellung der Ergebnisse aus der empirischen Untersuchung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der empirischen Untersuchung anhand von drei Perspektiven dargestellt. Zunächst wird erläutert, welche vorher theoretisch erarbeiteten *Strategien* die Studierenden der Stichprobe genutzt haben (Kapitel 21.1). In einer zweiten Perspektive wird dargestellt, welche vorher theoretisch erarbeiteten *Strategien* nicht genutzt wurden (Kapitel 21.3). Eine dritte Perspektive beleuchtet die *Strategien*, die durch die empirische Untersuchung hinzugefügt aber aus der theoretischen Kollektion nicht abgeleitet werden konnten (Kapitel 21.2). Die Ergebnisse werden mit Hilfe von Beispielen aus dem Transkript unterlegt.

Grundlage für die Auswertung ist das Kategoriensystem mit den entwickelten Strategieeinheiten, Makrostrategien, *Strategien* und deren Konkretisierungen durch ein oder zwei *Ausprägungen* (Abbildung 20.2). Die begründenden Personen, aus deren Interviews die in den folgenden Kapiteln ausgeführten Beispiele entnommen wurden, sind in der Datenauswertung mit einem B und einer Nummer kodiert. Dieses personenspezifische Kürzel wird auch hier verwendet.

21.1 Theoretisch abgeleitete Strategien, die empirisch sichtbar geworden sind

Durch die empirische Betrachtung der Stichprobe wurde eine Vielzahl an vorher in Abschnitt III abgeleiteten *Strategien* sichtbar. Im folgenden Kapitel der Arbeit soll zusammenfassend dargestellt werden, welche der *Strategien* theoretisch abgeleitet und genau so empirisch sichtbar wurden. In Kapitel 22 werden diese *Strategien* mit dem Kürzel *th und e* gekennzeichnet.

Mit Hilfe von Beispielen wird deutlich gemacht, wie sich die entsprechende *Strategie* gezeigt hat. Der jeweilige Transkriptausschnitt wird kombiniert mit der Nummer des jeweiligen Segments im Transkript.

Begonnen werden soll mit *Strategien*, die der Strategieeinheit VERSTEHEN zugeordnet werden konnten, also das Ziel des Bildens einer mentalen Repräsentation der Aufgabenstellung der zu begründenden Aussage verfolgten.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

In der Stichprobe zeigte sich die Makrostrategie INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG, die sich sowohl in den *Strategien* EXTRAHIEREN, ANREICHERN als auch ÜBERSETZEN zeigte.

In der empirischen Untersuchung zeigte sich die *Strategie* EXTRAHIEREN in den Ausprägungen SCHRIFTLICHES EXTRAHIEREN und MÜNDLICHES EXTRAHIEREN. Extrahiert wurde hauptsächlich schriftlich und nur ein Mal mündlich. Dabei nutzen B03, B20, B21, B24, B26 und B28 diese *Strategie* in schriftlicher Form. Nachstehendes Beispiel zeigt einen verbalisierten Gedankenschritt, der, wie in Abbildung 21.1 dargestellt, auch verschriftlicht wurde. Die Darstellung wurde aufgrund der besseren Lesbarkeit nicht im Original eingefügt, sondern verschriftlicht.

B03, Segment 20 „Gegeben ist diese ungerade (...) Quadratzahl. (schreibt)
(12)“

geg.: ungerade Zahl

Abbildung 21.1: Parallel zur *Strategie* SCHRIFTLICHES EXTRAHIEREN angefertigte Darstellung

Im nachstehenden Beispiel wird die *Strategie* MÜNDLICHES EXTRAHIEREN von B20 illustriert. Das Extrahieren von Informationen erfolgte hier ohne eine parallel angefertigte Darstellung.

B20, Segment 2 „Also (6) Ähm, (...) also gegeben (..) habe ich eine ungerade Quadratzahl. Ich kann ja (..)/ Es ist ja egal welche. Sie soll ja nur natürlich sein.“

Das EXTRAHIEREN konnte anhand des empirischen Materials durch die Ausprägung MARKIEREND konkretisiert und wird dementsprechend in Kapitel 21.2 näher erläutert.

Die *Strategie* ANREICHERN zeigte sich in den beiden aus der theoretischen Kollektion ableitbaren Ausprägungen FOLGERNDES ANREICHERN und ERGÄNZENDES ANREICHERN.

Im nachfolgenden Beispiel wird ersteres anhand eines Beispiels der versuchsteilnehmenden Person B11 illustriert.

B11, Segment 24 „So. (3) Ähm, eine ungerade Zahl teile ich durch (...) eine gerade Zahl (7) und es bleibt ein Rest mit Sicherheit (..) und zwar dieser 1.“

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Angereichert wurde hier die Informationsbasis mit der Information, dass eine ungerade, also die ungerade Quadratzahl in der Behauptung durch eine gerade Zahl, also die 8 in der Behauptung geteilt wird. Gefolgert wurde daraus, dass dabei ein Rest, und konkret der Rest 1 bleibt.

Angereichert wurden aber auch andere Informationen. So wurde im nachstehenden Beispiel die Informationsbasis angereichert, dass es nur bei der Division durch 8 funktioniert. Gefolgert wurde, dass die Behauptung mit der Division durch 6 nicht gültig ist (B03).

B03, Segment 57 „Also mit der 6 funktioniert es ja nicht. (...) Es funktioniert ja nur mit der 8.“

Angereichert wurde die Informationsbasis aber auch durch Aspekte, die die Rechenoperation innerhalb der allgemeingültigen Aussage betreffen. So folgerte B30 im folgenden Beispiel, dass es um die Division geht, nachdem das Verb ‚teilt‘ inhaltlich einer ‚Teilungsaufgabe‘ zugeordnet wurde.

Außerdem konnte das FOLGERNDE ANREICHERN nicht nur auf inhaltlicher, sondern auch auf methodischer Ebene betrachtet werden. Im folgenden Beispiel von B13 wird deutlich, dass aus der Auseinandersetzung mit der Behauptung und der Aufgabenstellung geschlussfolgert wurde, dass eine Verallgemeinerung angefertigt werden muss.

B13, Segment 6 „Also man muss eine Verallgemeinerung machen. (.)“

Außer bei B11 konnte diese *Strategie* auch von B03, B13, B14, B15, B27 und B30 beobachtet werden und blieb damit kein Einzelfall.

Das ERGÄNZENDE ANREICHERN zeigte sich ebenfalls. Diese *Strategie* konnte aber nur einmal beobachtet werden.

B11, Segment 11 „Jetzt muss ich mal überlegen, wie dieses Modulo immer aufgeschrieben wurde.“

B11 versuchte hier die Informationsbasis anzureichern, indem Informationen aus der Lehrveranstaltung genutzt wurden. In dem Fall versucht die versuchsteilnehmende Person sich an ‚modulo‘ zu erinnern, um damit den Rest 1 bei der Division durch 8 darzustellen.

Das ÜBERSETZEN zeigte sich in drei verschiedenen Ausprägungen. Im folgenden Beispiel aus dem Transkript von B13 soll das SYMBOLISCHE ÜBERSETZEN anhand eines Textausschnittes illustriert werden.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B13, Segment 18 „Ok, Quadratzahl ist halt auf jeden Fall $n \cdot n$ (.)“

Außer bei B13 konnte diese *Strategie* bei B03, B08, B11, B13, B14, B15, B20, B21 und B30 kodiert werden. Die gleiche *Strategie* wurde beispielsweise von B03 anders umgesetzt und zeigte sich wie folgt.

B03, Segment 51 „Geteilt durch 8 ist gleich (...) Rest 1. Ähm, (5) wobei a nicht durch 2 ist. (schreibt) (...)“

Angefertigt wurde parallel zur Verbalisierung folgende Verschriftlichung, die die Betrachtung der *Strategie* als SYMBOLISCHES ÜBERSETZEN stützt (Abbildung 21.2). Aufgrund der besseren Lesbarkeit wurde hier nicht der Dokumentenausschnitt als Abbildung 21.2 eingefügt, sondern der handgeschriebene Text verschriftlicht.

$$a^2 : 3 = kR1, \text{ wobei } a \nmid 2$$

Abbildung 21.2: Parallel zur *Strategie* SYMBOLISCHES ÜBERSETZEN angefertigte Darstellung

ÜBERSETZEN trat ebenfalls in der Ausprägung BEISPIELHAFTES ÜBERSETZEN auf. Im nachfolgenden Beispiel wird die Umsetzung dieser *Strategie* anhand eines Transkriptausschnittes von B03 illustriert.

B03, Segment 24 „1 · 1“

Neben der versuchsteilnehmenden Person B03 nutzten auch B01, B08, B11, B15, B20, B21, B26, B27, B28 und B30 diese *Strategie*. Das BEISPIELHAFTE ÜBERSETZEN konnte neben der Darstellung in oben genannter Form auch als unten stehende Verbalisierung beobachtet werden (B15).

B15, Segment 10 „(..) Hm (nachdenkend). 9 zum Quadrat wäre 81. (schreibt)“

Die *Strategie* ÜBERSETZEN konnte auch als PARAPHRASIERENDES ÜBERSETZEN bei den Studierenden B14, B15, B16, B18 und B24 kodiert werden. Im nachfolgenden Beispiel wird die zu begründende Aussage von B16 umschrieben.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B16, Segment 25 „(7) Dann sagt die Aussage, sozusagen, dass eine ungerade Quadratzahl immer das Vielfache/ ein Vielfaches von $8 \cdot n + 1$, ist. (...) Hm (nachdenkend).“

Außerdem empirisch beobachtbar wurde die Makrostrategie STRUKTURELLE AUSEINANDERSSETZUNG, die sich in den *Strategien* SPEZIFIZIEREN und KLASSIFIZIEREN zeigte.

Die *Strategie* SPEZIFIZIEREN ist lediglich ein Mal kodiert worden und wird anhand der Verbalisierung von B12 illustriert.

B12, Segment 14 „Aber bei der/ Wenn man jetzt die Quadratzahl von 2 nimmt gilt das ja nicht mehr, zum Beispiel. Es gilt ja nur bei 3. Sobald die Zahl kleiner ist, geht das ja nicht mehr. (...) Wenn man 2 zum Quadrat nimmt ist ja 4 und da kannst du nicht mehr durch 8 teilen.“

B12 erweiterte den Kontext der Aussage und betrachtete die Gültigkeit für die Quadratzahl von 2 und von 4, blieb aber nicht bei einer beispielhaften Betrachtung eines irrelevanten Beispiels stehen, sondern formulierte eine neue Regel: „Sobald die Zahl kleiner ist, geht das ja nicht mehr.“ Der Sonderfall ist die Betrachtung der Gültigkeit der Aussage für den Fall, dass die ungerade Quadratzahl kleiner ist als 8.

Im folgenden Beispiel ist die *Strategie* KLASSIFIZIEREN anhand der versuchsteilnehmenden Person B21 dargestellt.

B21, Segment 5 „Und die Aussage soll für alle natürlichen Zahlen gelten. (schreibt) Also, weil es eine Aussage ist, die für alle Zahlen gilt, muss ich sie theoretisch/ Also nicht theoretisch, sondern allgemein begründen.“

Die versuchsteilnehmende Person B21 klassifiziert hier die Aussage als Allaussage und schlussfolgert daraus, dass *allgemein begründet* werden soll. Es wird innerhalb der folgenden Äußerungen allerdings nicht deutlich, was B21 mit der Begrifflichkeit der theoretischen Begründung meinte und wie sich eine solche theoretische Begründung von einer allgemeinen Begründung abgrenzt. Auch ist diese *Strategie* kein singulärer Fall, sondern ist auch in den Transkripten von B03, B11, B15 und B28 kodiert worden. Neben der im Beispiel von B21 illustrierten Betrachtung zeigte sich die *Strategie* auch in der Betrachtung der Gültigkeit der Aussage. B16 verbalisierte dazu folgendes.

B16, Segment 12 „Dann stimmt die Aussage.“

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Die Makrostrategie WIEDERHOLEN trat hier sowohl als *Strategie* VORHERGEHENDE ÄUSSERUNGEN WIEDERHOLEN als auch als TEILE DER AUFGABENSTELLUNG WIEDERHOLEN auf. Die nachfolgende Transkriptpassage ist ein Beispiel der versuchsteilnehmenden Person B14 für die erst genannte *Strategie*. Die in Segment 8 verbalisierte *Strategie* wird in Segment 9 in sehr ähnlichem Wortlaut wiederholt.

- B14, Segment 8 „Auf jeden Fall, muss ein Rest bleiben.“
B14, Segment 9 „Der Rest muss bleiben. (.)“

Es ist allerdings auch vorgekommen, dass eine Äußerung später und nach der Verbalisierung anderer Gedankenschritte, noch einmal wiederholt wurde. Im folgenden Beispiel wird anhand von B16 gezeigt, dass 30 Gedankenschritte dazwischen liegen.

- B16, Segment 21 „Wenn man eine ungerade Quadratzahl/ (36) die Quadratzahl (...) immer ein Vielfaches von 8, plus 1.(8)“
B16, Segment 52 „Ungerade Quadratzahl durch 8. (20) Ist eine ungerade Quadratzahl (6) immer ein Vielfaches von 8 (..) plus 1.“

Diese Strategieanwendung ist nicht als singulärer Fall zu betrachten, sondern ist durchaus häufig zu beobachten gewesen. So nutzten die versuchsteilnehmenden Personen B03, B07, B08, B11, B13, B14, B16, B18, B21, B23, B24, B27, B28, B30 ebenfalls diese *Strategie*.

Im folgenden Beispiel wird die oben genannte *Strategie* TEILE DER AUFGABENSTELLUNG WIEDERHOLEN sichtbar. Die versuchsteilnehmende Person B29 wiederholte Teile der zu begründenden Aussage und der Aufgabenstellung.

- B29, Segment 5 „Ähm, dass folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. (.) Teilt man eine ungerade Quadratzahl (..) durch 8, ähm/ (...)“

Auch diese *Strategie* konnte mehrfach bei verschiedenen Studierenden kodiert werden (B01, B03, B07, B11, B13, B14, B16, B18, B21, B23, B24, B27, B28, B30).

Neben *Strategien* aus der Strategieeinheit VERSTEHEN wurden auch *Strategien* aus der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN genutzt.

Die Makrostrategie RESSOURCENAUSWAHL zeigte sich unter anderem durch die *Strategie* AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN in fünf unterschiedlichen Ausprägungen.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Die AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE zeigte sich ein Mal im Lautdenkenprotokoll von B24.

B24, Segment 74 „Vielleicht kann man das dann 1,2,3,4,5,6,7,8 irgendwie so machen und dann 1,2,3,4,5,6,7,8.“

Parallel dazu wurde folgende bildliche Darstellung angefertigt (Abbildung 21.3).

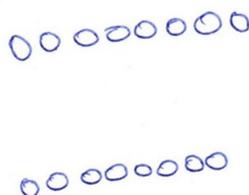


Abbildung 21.3: Parallel zur *Strategie* AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung (1)

Ebenfalls ein Mal zeigt sich diese *Strategie* als extern generierte Ausprägung im Lautdenkenprotokoll von B08.

B08, Segment 19 „OK, ähm (..) und dann (..) haben wir/ (..) Müssen wir erstmal Repräsentanten wählen. (8) Zum Beispiel für (.) $x = 3$ / Weil (..), ähm/ (14) Ne. (5) Hm (nachdenkend). So, und das sind die Standardrepräsentanten. (12) (schreibt).“

Parallel dazu wurde folgende bildliche Darstellung angefertigt (Abbildung 21.4).

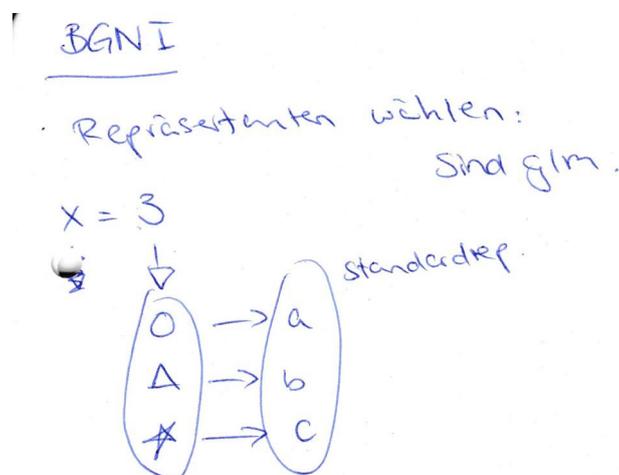


Abbildung 21.4: Parallel zur *Strategie* EXTERN GENERIERTE AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung (2)

Mehrfach, also in den Transkripten von B03, B11, B12, B14, B15, B18, B21, B23, B27 und B28 wurde die *Strategie* in der narrativen Ausprägung kodiert. Im nachfolgenden Beispiel von B15 wurde die Teilbarkeitsregel der 8 in Bildungssprache als Ausgangspunkt für die weitere Arbeit genutzt.

B15, Segment 15 „Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 und 4 teilbar. (...) Zwangsläufig. (..) Und Zahlen sind nur dann durch 2 teilbar wenn sie gerade sind. (..) Bei allen anderen hat man einen Rest. (...) Explizit Rest 1. (.) Weil die nächste gerade Zahl bleibt wieder durch 2 teilbar. (...) Hm (nachdenkend). (6)“

Neben der Teilbarkeitsregel der 8 wurde auch ein anderes mathematisches Konzept als Ressource ausgewählt und in Bildungssprache beschrieben. So wurde im nachfolgenden Beispiel von B18 die Auswirkung der Parität der Faktoren auf die Parität des Produktes als BEGRIFFLICHE RESSOURCE in Bildungssprache genutzt.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B18, Segment 33 „Vielleicht, ähm, (..) liegt es einfach daran, (.) dass, ähm, (..) also an dem Gesetz, (.) und/ Also, eine ungerade Zahl multipliziert mit einer ungeraden Zahl ist ja (.) wieder eine ungerade Zahl. Und das beschreibt ja auch einfach, ähm, das ist ja das Ähnliche wie ungerade Quadratzahl, weil wir eine ungerade Zahl mit sich selber multiplizieren, und 8 als gerade Zahl, ähm, (.) kann/ könnte die Zahl darstellen, als ein Vielfaches, aber immer mit dem Rest 1, weil die Summe einfach ungerade ist.“

Auch diese *Strategie* kam in der Ausprägung EXTERN GENERIERT vor und zeigte sich beispielsweise im folgenden Textabschnitt von B24.

B24, Segment 31 „Das kommt mir ((lacht)) bekannt vor (..) von Mathe-Profi. (..) Ähm. (6) Vielleicht könnte ich an irgendwelche Teilbarkeitsregeln denken, die wir in Mathe hatten aber die sind nach der Klausur längst weg. (...)“

B24 versuchte hier auf Wissen aus den Lehrveranstaltungen und konkret auf die Teilbarkeitsregel der 8 zurückzugreifen. Inhaltlich wurde bei B27 auch der oben beschriebene Einfluss der Parität der Faktoren auf die Parität des Produktes *extern generiert*, d.h. direkt aus der Lehrveranstaltung zu entnehmen versucht. Im nachfolgenden Beispiel verwies B27 dabei auf die MatheProfi Veranstaltungen (Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘).

B27, Segment 17 „Ich weiß, wir hatten in MatheProfi eine Regel. Die haben das einfach so gesagt, dass, wenn man, ähm, eine ungerade Zahl mit einer ungeraden Zahl multipliziert, kommt immer etwas ungerades raus, also eine andere ungerade Zahl.“

Die *Strategie* AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE zeigte sich in den Lautdenkenprotokollen von B03, B11, B13, B14, B15, B16, B20, B21, B28 und B30. Das nachfolgende Beispiel ist entnommen aus B20.

B20, Segment 7 „(..) Teilt man eine ungerade (.) und das dann durch 8, (4) so erhält man x Rest 1. (schreibt)“

Die begriffliche Ressource, die hier als Ausgangspunkt genutzt wurde, wurde auf einer symbolischen Repräsentationsebene dargestellt. Es wurde

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

wie in Abbildung 21.5 sichtbar, ein Term bestehend aus Variablen genutzt. Auch hier wurde, um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten, nicht die Originalmitschrift eingefügt.

$$\boxed{x^2 + 1}$$

Abbildung 21.5: Parallel zur *Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE* angefertigte Darstellung

Inhaltlich bezogen sich die Studierenden aber nicht nur auf mathematische Konzepte, die direkt aus der Behauptung entnommen werden konnten, sondern ergänzten, wie im nachfolgenden Beispiel sichtbar wird, auch Informationen, wie die Primfaktorenzerlegung. Diese nutzten die Studierenden wiederum als Ausgangspunkt für weitere Bearbeitung und stellten sie auf symbolischer Repräsentationsebene dar.

B14, Segment 15 „(7) Hm (nachdenkend). Hat bestimmt irgendwas mit der (räuspert) Primfaktorzerlegung zu tun.“

Parallel dazu wurde folgende Verschriftlichung angefertigt (Abbildung 21.6).

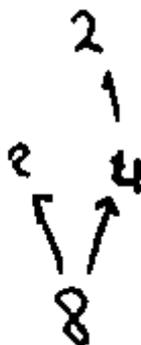


Abbildung 21.6: Parallel zur *Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE* angefertigte Darstellung

Die *Strategie BEISPIELBETRACHTUNG* zeigte sich prinzipiell in verschiedenen Ausprägungen. Theoretisch abgeleitet wurden die verschiedenen Repräsentationsebenen NUMERISCH und BILDLICH. Da durch die empirische Untersuchung eine Konkretisierung dieser Repräsentationsebene hinzugefügt

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

werden konnte, findet sich die genauere Betrachtung dieser *Strategien* in Kapitel 21.2.

In den Transkripten von B14, B17 und B18 konnte jedoch das bewusste Aufstellen eines Gegenbeispiels als *Strategie* KOMPLEMENTÄRE BEISPIELBETRACHTUNG entnommen werden. Das nachfolgende Beispiel illustriert dieses Vorgehen am Textauschnitt von B14.

B14, Segment 22 (.) Also muss man, grundsätzlich, schon mal, Gegenbeispiel finden, um zu beweisen, dass es nicht nicht geht. Man kann nicht jede Zahl beweisen, dass jede Zahl gilt. (...)

Innerhalb der empirischen Untersuchung zeigte sich weiterhin die Makrostrategie TRANSFORMIEREN in Form von verschiedenen *Strategien* mit unterschiedlichen Ausprägungen.

Die *Strategie* BEISPIELVERIFIZIERUNG konnte als BEISPIELVERIFIZIERUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE ein Mal beobachtet werden. So verifizierte B24 wie im folgenden Beispiel und ergänzend dazu in Abbildung 21.7 visuell zugänglich wird, die Allgemeingültigkeit der Aussage anhand eines ikonisch dargestellten Beispiels. Die Division durch 8 und der dabei bleibende Rest 1 wurde dabei in der ikonischen Darstellung markiert.

B24, Segment 41 „Aber auf jeden Fall sieht man hier, dass es zum Beispiel immer so $3 \cdot 8$ geben würde und dass der eine dann übrig bleibt (schreibt) und das wäre dann das Beispiel, an dem ich das begründet hätte.“

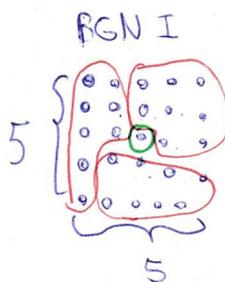


Abbildung 21.7: Parallel zur *Strategie* BEISPIELVERIFIZIERUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Die *Strategie* BEISPIELREIHUNG konnte im Lautdenkenprotokoll von B24 zwei Mal beobachtet werden. An beiden Stellen wurde die *Strategie* auf BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE genutzt.

B24, Segment 66 „Auf jeden Fall quasi (5) um von (...) der 9 die gleich $8 \cdot 1 + 1$ ist, (schreibt) muss man nochmal zwei Achterbündel dazu kommen und (5) 6,7,8 (...) und dann kann man das bestimmt auch auffüllen. (..) Quasi 1,2,3 (.) 4,5,6,7,8. (4) (schreibt)“

In Abbildung 21.8 wird die zugehörige Darstellung sichtbar. B24 nutzte hier die ikonische Darstellung der Quadratzahl von 3 und von 5 in einer Darstellung und zeigte die Division durch 8 beider Quadratzahlen in einer Darstellung.

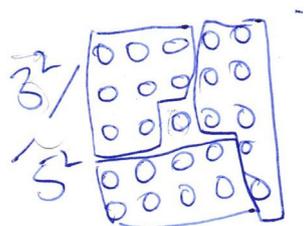


Abbildung 21.8: Parallel zur *Strategie* BEISPIELREIHUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung

Des Weiteren zeigte sich die *Strategie* KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN in der empirischen Untersuchung. Das KONSTRUKTIVE TRANSFORMIEREN zeigt sich im folgenden Textabschnitt und wird anhand von Abbildung 21.9 visuell zugänglich.

B24, Segment 64 „8 Punkte (5) (schreibt) und halt 1 übrig und vielleicht ist das, so, wenn man quasi/“



Abbildung 21.9: Parallel zur *Strategie* KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN angefertigte Darstellung

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

In Lautdenkenprotokollen der versuchsteilnehmenden Personen B01, B12, B23 und B28 wurde diese *Strategie* ebenfalls mit dem inhaltlichen Schwerpunkt des Darstellens der Division durch 8 gefunden.

Diese *Strategie* zeigt sich auch mit einem anderen inhaltlichen Schwerpunkt, wie im Transkriptausschnitt von B11 sichtbar wird. Hier wurde nicht, wie beispielsweise bei B24, die Division durch 8 ikonisch dargestellt, sondern versucht die Eigenschaft *ungerade* in die Zeichnung einzubringen (Abbildung 21.10).

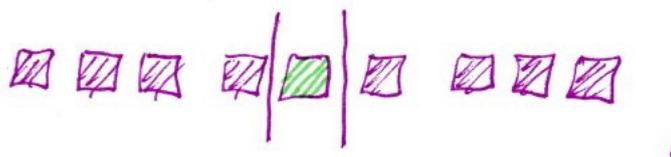


Abbildung 21.10: Parallel zur *Strategie* KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN angefertigte Verschriftlichung unter Berücksichtigung des thematischen Schwerpunktes der Eigenschaft *ungerade* der Quadratzahl 9

Im Transkript von B11 zeigte sich diese *Strategie* wie folgt.

B11, Segment 27 „Rest 1. (..) Weil, Teilen durch 2, (...) ähm, da bleibt 1 übrig. (.) (schreibt)“

Dieser inhaltliche Schwerpunkt konnte außerdem auch in den Transkripten von B26 beobachtet werden.

Die *Strategie* RECHNERISCHES TRANSFORMIEREN, die theoretisch abgeleitet wurde, wurde ebenfalls in der empirischen Untersuchung sichtbar. So zeigte sich diese *Strategie* in den Lautdenkenprotokollen von B08, B13, B16, B20, B21, B27. Immer, wenn diese *Strategie* auftrat, wurde eine Ressource, die vorher aufgestellt wurde, rechnerisch weiterentwickelt. Die Beispiele ähneln sich, beziehen sich aber auf unterschiedliche Ressourcen bzw. Zahlenbeispiele. In den nachfolgenden Beispielen (B13, B27) zeigt sich, wie zuvor aufgestellte Ressourcen auf Zahlenebene ausgerechnet wurden.

B13, Segment 59 „Das ist jetzt die Frage/ (..) Weil das könnte/ Also es müsste ja irgendwie 2,4/ (..) Weil $4 \cdot 3$ genau, das wäre ja nicht durch 8 teilbar. (..)“

Im nachfolgenden Beispiel errechnete B27 das Ergebnis von 3^2 .

B27, Segment 7 Also 3 Quadrat sind, ähm, 9.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE trat ebenfalls auf, zeigte sich aber durch die empirische Betrachtung in spezifischeren Ausprägungen als in Abschnitt III theoretisch erarbeitet und wird deshalb ebenfalls in Kapitel 21.2 näher betrachtet.

Die *Strategie* SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN, die theoretisch abgeleitet werden konnte, zeigte sich zwar in der empirischen Untersuchung, jedoch konnten anhand des Materials verschiedene Ausprägungen konkretisiert werden. Deshalb werden diese *Strategien* in Kapitel 21.2 näher betrachtet.

Ebenso wurde mit der Makrostrategie BEWEISSKIZZE ERSTELLEN verfahren.

In der theoretischen Ableitung der *Strategien* der Strategieeinheit DISKURS zeigten sich die Makrostrategien FORMULIEREN und VALIDIEREN. Ersteres trat als *Strategie* BILDUNGSSPRACHLICHES FORMULIEREN auf und wird nachfolgend im Textausschnitt aus dem Lautdenkenprotokoll von B01 dargestellt.

B01, Segment 32 „Weil die, also die Vorgänger, praktisch, nicht die Nachbarzahl. (.) Vorgänger (schreibt). (..) Der Vorgänger ist ein Vielfaches der 8. ((lacht)).“

B01 formulierte hier unter Nutzung der Bildungssprache die Begründung (NARRATIV-ZUSAMMENFASSENDES DARSTELLEN DER BEWEISSKIZZE) um diese der Community zu präsentieren.

Die *Strategie* RÜCKSCHAU HALTEN im hier definierten Sinn zeigte sich in den Lautdenkenprotokollen von B14 und B28.

B14, Segment 76 „Ist jetzt formal nicht ganz richtig, aber, ich glaube, so sollte das lösbar sein.“

B28, Segment 50 „Und dann hätte man das bildlich so ein bisschen veranschaulicht (..)“

B28 schaute hier auf die zuvor erstellte zeichnerisch dargestellte Beweisskizze zurück. B14 nutzte die *Strategie*, um auf eine zuvor genutzte *Strategie* zurück zu blicken.

Das LESEN DER AUFGABENSTELLUNG wurde durch die Instruktion gefordert und trat daher in allen Transkripten auf.

21.2 Durch die empirische Untersuchung ergänzte Strategien bzw. am Material ergänzte Strategien

Mit Hilfe der empirischen Untersuchung konnten am Material weitere *Strategien* und Ausprägungen abgeleitet und damit die theoretische Kollektion aus Abschnitt III ergänzt werden. Eine *Strategie* wird dann als neu durch die Betrachtung des Materials bezeichnet, wenn sie mindestens eine neue Ausprägung enthält. Beispielsweise wurde die *Strategie* xy bestehend aus einer Strategienbezeichnung und einer Ausprägung theoretisch abgeleitet und genau so im Material auch gefunden. Konnte eine zweite Ausprägung durch das Material hinzugefügt werden, so zeigte sich die *Strategie* xyz. Diese *Strategie* ist als neue am Material abgeleitete *Strategie* zu verstehen. In Kapitel 22 werden diese *Strategien* mit dem Kürzel *e* gekennzeichnet.

Die *Strategie* EXTRAHIEREN, die zur Makrostrategie INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG zugeordnet wird, konnte mit Hilfe des Materials um die Ausprägungsform MARKIEREND ergänzt werden. Die Studierenden bildeten hier ein Situationsmodell, indem Informationen innerhalb der Aufgabenstellung markiert wurden. Das MARKIERENDE EXTRAHIEREN stellte neben dem im theoretischen Teil abgeleiteten MÜNDLICHEN und SCHRIFTLICHEN EXTRAHIEREN eine weitere Möglichkeit dar, mit der Aufgabenstellung konkret zu arbeiten. In der folgenden Abbildung 21.11 ist zu sehen, dass B13 „alle natürlichen Zahlen“ unterstreicht bzw. markiert und diese *Strategie* Anwendung fand.

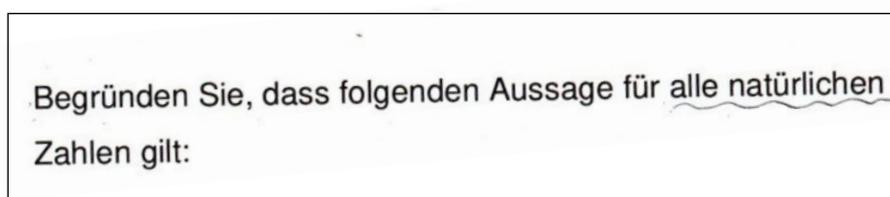


Abbildung 21.11: Parallel zur *Strategie* MARKIERENDES EXTRAHIEREN markierte Textabschnitte

Begleitet wird diese Tätigkeit durch die folgende Verbalisierung.

B13, Segment 5 „Es ist halt natürlichen Zahlen/ Man muss so begründen, dass es für alle gilt.“

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Beobachtet wurde diese *Strategie* außerdem in den Lautdenkenprotokollen von B11 und B30, blieb also nicht singulär.

Innerhalb der Strategieeinheit VERSTEHEN wurde neben den bereits beschriebenen *Strategien*, die der Makrostrategie INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG zuzuordnen sind, die *Strategie* BEGRIFFE KLÄREN ergänzt. Diese *Strategie* zeigte das Bilden einer mentalen Repräsentation mit inhaltlichem Fokus durch die Klärung von in der Aufgabe gefundenen und als relevant bewerteten Begriffen. Die empirische Untersuchung zeigte außerdem, dass diese Begriffsklärung in verschiedenen Ausprägungen stattfinden kann. Sie zeigte sich unter anderem EIGENSCHAFTSBASIIERT. Das bedeutet, dass die Begriffsklärung anhand von Definitionen oder Begriffsbestimmungen stattfand. Im nachfolgenden Beispiel nutzte B30 den Aspekt der Definition einer Quadratzahl, der beschreibt, dass diese durch die Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entsteht.

B30, Segment 6 „Ok, ich brauche eine ungerade Quadratzahl. Also erstmal eine Quadratzahl./ Sind Zahlen, die ich, ähm, er-mittle, wenn ich x hoch 2 rechne.“

Diese beispielhaft dargestellte *Strategie* wurde auch in anderen Lautdenkenprotokollen von B03, B13, B14, B24 und B28 gefunden. Neben der Klärung des Begriffs der Quadratzahl über ihre Eigenschaften erfolgte weiterhin auch einmal der Versuch einer Klärung von Eigenschaften der 8, wie im Textabschnitt aus B24 sichtbar wird.

B24, Segment 12 „Jetzt muss ich überlegen (4), was so mit der 8 auf sich hat. (7)“

Die 8 wurde hier als in der Aufgabe verwendeter Begriff gewertet, da im Kontext der Aufgabenbearbeitung sichtbar wurde, dass sich nacheinander mit den einzelnen Bestandteilen der Behauptung auf inhaltlicher Ebene auseinandergesetzt wurde. Die 8 als mathematisches Objekt wurde hier auf Eigenschaften untersucht, um ein Situationsmodell von der Aufgabenstellung zu bilden.

Des Weiteren konnte aus den empirischen Untersuchungen entnommen werden, dass die *Strategie* BEGRIFFE KLÄREN auch BEISPIELBASIIERT sichtbar wurde. Die Studierenden nutzten hier Beispiele zum Bilden einer mentalen Repräsentation, um Begriffe zu klären. Der folgende Transkriptausschnitt von B24 ist ein Beispiel für diese *Strategie*.

B24, Segment 10 „9 Quadrat 81“

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

In einem zweiten Beispiel wird deutlich, dass der Begriff der Quadratzahl auch mit einem Beispiel geklärt wurde, welches für die gegebene Behauptung nicht von Bedeutung ist.

B01, Segment 7 „So, warte mal, dann gibt es noch, warte die 4, (..) ähm, die 16 (schreibt) ist auch eine Quadratzahl, das ist $4 \cdot 4$, ist aber auch eine gerade Zahl.“

B01 nutzte, wie hier zu sehen ist, die Quadratzahl der 4, um den Begriff der Quadratzahl zu klären. Außer im Lautdenkenprotokoll von B01 wurde diese *Strategie* auch in den Transkripten von B03, B07, B13, B14, B16, B24 und B27 kodiert. Abgeleitet werden konnten aus den Darstellungen die EIGENSCHAFTSBASIERTE BEGRIFFSKLÄRUNG und die BEISPIELBASIERTE BEGRIFFSKLÄRUNG als *Strategien* in ihrer spezifischen Ausprägung.

Weitere *Strategien* konnten innerhalb der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN empirisch ergänzt werden. Die Makrostrategie der RESSOURCENAUSWAHL kann neben den theoretisch abgeleiteten *Strategien* auch eine NICHT-INHALTLICHE RESSOURCENAUSWAHL zeigen. Diese *Strategie* beschreibt ein Vorgehen, welches die Verwendung nicht-inhaltlicher Informationen zur Konstruktion von Argumenten zeigt. Diese kam lediglich in der Ausprägungsform EXTERN GENERIERT vor. Es wurde explizit auf Inhalte der Lehrveranstaltung ‚Mathematisches Professionswissen I‘ verwiesen und versucht eine dort erlernte Struktur zu übernehmen. Geschlussfolgert werden kann hier demnach die *Strategie* EXTERN GENERIERTE NICHT-INHALTLICHE RESSOURCENAUSWAHL. Diese *Strategie* kam zwei Mal im Lautdenkenprotokoll von B28 vor.

B28, Segment 51 „Ähm, (8) ich weiß, wir hatten in MatheProfi I hatten wir irgendwann auch mal so BGN I gehabt und dann hatten wir das immer so mit Punkten veranschaulicht. Ich weiß jetzt nicht, ob man das hier machen darf.“

Wie in Kapitel 21.1 benannt, konnte die *Strategie* BEISPIELBETRACHTUNG neben den Repräsentationsebenen konkreter ausdifferenziert werden. So ließen sich die theoretisch abgeleiteten *Strategien* BILDICHE BEISPIELBETRACHTUNG und NUMERISCHE BEISPIELBETRACHTUNG ebenfalls zu GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE und TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE bzw. GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE und TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE konkretisieren. Dabei ist zu

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

bemerken, dass die GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE lediglich als EXTERN GENERIERT innerhalb der Stichprobe kodiert werden konnte. Es wurde also noch eine weitere Spezifizierung hinzugefügt und die *Strategie* EXTERN GENERIERTE GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE abgeleitet.

Wie bereits beschrieben, konnte die *Strategie* GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE in der Stichprobe ein Mal kodiert werden. Dies fand im Transkript von B01 statt. Der nachfolgende Transkriptausschnitt zeigt diese *Strategie*. B01 begann im Segment 12 mit dieser *Strategie*, unterbrach sie dann in Segment 13 durch eine metakognitive *Strategie* und fuhr mit ihr in Segment 14 fort.

- B01, Segment 12 „Warte, ich mach das mal mit diesen Punkten,“
B01, Segment 13 „metakognitive Strategie“
B01, Segment 14 „das mit den Punkten, (..) den Paaren. So. 6 (.) / 6, 8, 9. (schreibt) (.) Wir haben jetzt praktisch durch 8, auf 8 aufteilen, dann bleibt der 1 übrig. (.) Weil 9 1 mehr ist, als 8.“

Begleitet wurde diese *Strategie* mit folgender Verschriftlichung.



Abbildung 21.12: Parallel zur *Strategie* GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung

Im folgenden Transkriptausschnitt wurde die ungerade Quadratzahl der 25 ikonisch dargestellt und damit die *Strategie* TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE genutzt. Der Rest 1 wurde außerhalb der 25 als zusätzlicher Punkt dargestellt. Die Division durch 8 wird aber nicht gekennzeichnet. Aus diesem Grund wird diese *Strategie* als TEILWEISE und nicht als GANZHEITLICH kategorisiert.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B24, Segment 42 „Ich probiere es mal irgendwie ikonisch. (..) Wenn man quasi $5 \cdot 5$ ikonisch darstellen möchte, könnte man das so machen. Also 5 Fünferreihen (...) 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5. (..) plus halt 1.“

Parallel dazu erfolgte folgende Verschriftlichung und unterstützt die Kategorisierung.



Abbildung 21.13: Parallel zur *Strategie* TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung

Außer bei B24 konnte diese *Strategie* so ähnlich auch bei B11, B12, B20, B21, B23, B24, B26 und B28 beobachtet werden.

Der folgende Transkriptausschnitt zeigt ein Beispiel für GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE und zeigt damit ein Vorgehen, welches an der ungeraden Quadratzahl 1 zeigt, dass bei Division durch 8 ein Rest von 1 bleibt.

B03, Segment 12 Hm (nachdenkend) (..) Und (6) so. (5) Bei 1 durch 8 bleibt der Rest 1.

Außer bei B03 konnte diese *Strategie* auch in den Lautdenkenprotokollen von B01, B07, B08, B11, B12, B14, B15, B16, B18, B21, B27, B28 und B30 beobachtet werden.

Der folgende Transkriptausschnitt zeigt die *Strategie* TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE. Es wurde ein Gedankenschritt sichtbar, der keine Division durch 8, sondern ausschließlich die Betrachtung dieser ungeraden Quadratzahl 1 zeigte.

B21, Segment 11 Und, ähm, um eine ungerade Quadratzahl rauszufinden, also zum Beispiel 1 Quadrat ist 1 und das ist ungerade

Außer im Lautdenkenprotokoll von B21 konnte diese *Strategie* bei B03, B12, B13, B15, B16, B17, B21, B27 und B28 so ähnlich beobachtet werden.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Des Weiteren zeigte sich durch die empirische Untersuchung, dass die *Strategie* BEISPIELBETRACHTUNG auch mit Hilfe von für die Aufgabenstellung nicht relevanten Beispielen erfolgte. Als ‚nicht-relevant‘ wird hier lediglich die sachstrukturelle Ebene bezeichnet, nicht jedoch die *Strategie* an sich. Jede gewählte *Strategie* ist als für die Studierenden relevant zu betrachten. Daraus lässt sich die *Strategie* der IRRELEVANTEN BEISPIELBETRACHTUNG ableiten, die durch die empirische Betrachtung in die *Strategien* IRRELEVANTE TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG und IRRELEVANTE GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG ausgeschärft werden konnte. Grundsätzlich zeigt die *Strategie* meist das Aufstellen von geraden Quadratzahlen als Ausgangspunkt für die Argumentation. Im dargestellten Beispiel nutzte B18 das Quadrat der 4 und stellte fest, dass der Rest in diesem konkreten Beispiel bei 4 liegt. Das Beispiel zeigt die *Strategie* IRRELEVANTE GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG.

B18, Segment 24 „Hm (nachdenkend). (...) Zum Beispiel, 4, geht es nicht. Da ist ja Rest 4. Ne. weil 2 Quadrat, das ist 4, da ist der Rest 4.“

Außer im Lautdenkenprotokoll von B18 zeigte sich diese *Strategie* auch bei B14, B15, B16, B18 und B28 in ähnlicher Weise. B30 nutzte, wie im folgenden Beispiel sichtbar wird, die *Strategie* in der Ausprägung TEILWEISE.

B30, Segment 15 „also wenn ich die 2 zum Quadrat nehme, würde eine gerade Zahl rauskommen. Wenn ich die 4, ähm/“

In ähnlicher Weise konnte diese *Strategie* in den Lautdenkenprotokollen von B01, B13, B16, B21, B24 und B28 kodiert werden.

Die Analyse der Transkripte machte weiterhin in diesem Kontext deutlich, dass die BEISPIELBETRACHTUNG weiter ausdifferenziert werden kann, also dies theoretisch ableitbar war. Es wurde sichtbar, dass die Beispiele zwar in der jeweiligen Repräsentationsebene entweder BILDLICH oder NUMERISCH dargestellt wurden, jedoch nicht immer für den gesamten in der Behauptung thematisierten Zusammenhang ein Beispiel waren. Daraus lassen sich zum einen die *Strategien* IRRELEVANTE GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG und zum anderen der IRRELEVANTE TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG ableiten.

Der folgende Transkriptausschnitt gibt ein Beispiel für die *Strategie* IRRELEVANTE GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG. Irrelevant ist das Beispiel aus dem Grund, dass eine gerade Quadratzahl genutzt wird, anstatt einer, wie in der Aufgabenstellung geforderten ungeraden Quadratzahl. Als

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

GANZHEITLICH ist diese *Strategie* zu betrachten, weil sie die Division durch 8 vornimmt und den entstehenden Rest berechnet.

B15, Segment 30 „Wenn wir 36 betrachten, wird es 32, also 4. (.) Ne halt. Doch (7) $6 \cdot 6$ ist 36. 36 geteilt durch 8 wäre (..) 4, aber da hätten wir (10) (unv.) (5) 8, 16, 24, 32. Ja. (...)“

Außer im Lautdenkenprotokoll von B15 kam diese *Strategie* auch bei B14, B16 und B28 vor.

Im nachfolgenden Transkriptausschnitt lässt sich eine IRRELEVANTE TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG sehen. Irrelevant ist dieses Beispiel ebenfalls, weil eine gerade Quadratzahl betrachtet wurde. Als TEILWEISE ist diese *Strategie* von B13 zu bezeichnen, da nur die Quadrierung der Zahl erfolgte, aber weder die Division durch 8 noch eine Bestimmung des Rests durchgeführt wurde.

B13, Segment 24 „ $2 \cdot 2$ hingegen ist, ähm 4.“

Außer bei B13 konnte diese *Strategie* sehr ähnlich bei B16, B21, B24 und B28 beobachtet werden.

Ebenfalls konnte durch die empirischen Betrachtungen die Makrostrategie TRANSFORMIEREN um verschiedene *Strategien* ergänzt werden. Die *Strategie* ÜBERTRAGEN beschreibt das Anwenden von Erkenntnissen aus einer zuvor genutzten Information oder Ressource auf den Kontext der Aufgabenstellung. Es wird eine *Strategie* sichtbar, die eine Art Rückbezug darstellt. Im folgenden Beispiel aus dem Lautdenkenprotokoll von B03 wurde zuvor die Ressource der Teilbarkeitsregel der 8 genutzt (Segment 30) und die daraus gewonnenen Erkenntnisse in Segment 33 auf die Aufgabenstellung übertragen.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B03, Segment 30	„Und ähm (..) wenn man (..) ähm, (10) sich die Teilbarkeitsregeln von der 8 anguckt (5)	Teilbarkeitsregel der 8: Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCE AUF NARRATIVER REPRÄSENTATIONSEBENE“
B03, Segment 31	„ähm, oh Gott, wie war das? (4)	metakognitive Strategie (unterbricht den vorher verbalisierten Gedankenschritt)“
B03, Segment 32	„Also, da muss die Zahl ja auf jeden Fall zumindest durch 2 teilbar sein. (schreibt) (...) Und (..) der Rest der Teilbarkeitsregel von der 8 fällt mir grade nicht ein. Ähm (..), ähm (...) Also alleine, dass sie schon immer durch 2 teilbar sein kann/ Das heißt ja, dass es sozusagen, ähm (...) nie (.) / Also, dass es/ Es muss auf jeden Fall immer einen Rest geben. (5)	kodiert mit ZUGEHÖRIG, gehört zur Strategie aus Segment 30“
B03, Segment 33	„Und ich meine die Zahl ist ja auf jeden Fall auch immer durch (...) / Die Zahl ist ja auch immer durch 4 teilbar. (schreibt) (..)“	Strategie ÜBERTRAGEN

Es wird im oben gezeigten Beispiel von B03 sichtbar, dass die Erkenntnis, dass eine Zahl durch 8 teilbar ist, wenn sie durch 2 und durch 4 teilbar ist, explizit auf die Aufgabenstellung bezogen und daraus geschlussfolgert wurde, dass die ungerade Quadratzahl der Aufgabenstellung auch immer durch 4 teilbar sein müsste.

Neben B03 nutzten auch B13, B15, B16, B21, B23 und B24 diese *Strategie*, die hier als ÜBERTRAGEN bezeichnet werden soll.

Außerdem ließ sich anhand der Daten eine *ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE* als weitere *Strategie* herausarbeiten. Diese Änderung trat innerhalb der Stichprobe in drei verschiedenen Ausprägungen auf: *ABSTRAHIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE*, *EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE* und *IKONISIERENDE ÄNDERUNG*

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

DER REPRÄSENTATIONSEBENE.

Die ABSTRAHIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE beschreibt ein Umwandeln von vorher aufgestellten Beispielen in abstrakte Informationen und wird im nachfolgenden Beispiel anhand des Textabschnittes von B21 illustriert.

B21, Segment 12	oder zum Beispiel 3 Quadrat ist 9. Und 9 ist ein Vielfaches von 3.	Strategie BEISPIELHAFTES ÜBERSETZEN bzw. TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUFNUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B21, Segment 13	Ne, das ist , ähm, $3 \cdot 4$, ne $4 \cdot 2$, so, also $8+1$ und weil ich hier erstmal einen Rest habe von 1, weiß ich, dass die Quadratzahl ungerade ist. (schreibt) (...)	Strategie ZERLEGENDES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN
B21, Segment 24	Also ich könnte jetzt die 4 hier ersetzen durch eine weitere Variable zum Beispiel m und dann habe ich n Quadrat ist $m \cdot 2 + 1$. Also es einmal ein Vielfaches von 2 und dann bleibt einmal noch der Rest von 1 übrig. Und dann weiß ich, dass die Quadratzahl ungerade ist.	Strategie ABSTRAHIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE

Zunächst wurde von B21 das Beispiel $3^2 = 9$ aufgestellt (Segment 12). Dieses wurde, wie in Segment 13 sichtbar, in $3^2 = 9 = 2 \cdot 4 + 1$ zerlegt und in Segment 24 wieder aufgegriffen und die 4 durch die Variable m ersetzt bzw. abstrahiert. Die Repräsentationsebene des zuvor aufgestellten und später zerlegten Beispiels wurde von der NUMERISCHEN auf die SYMBOLISCHE Ebene mit Hilfe eines Transformationsprozesses verändert. Beobachtbar war die Anwendung dieser *Strategie* außerdem im Lautdenkenprotokoll von B27. Sichtbar wird hier im Beispiel auch die empirisch ergänzte *Strategie* ZERLEGENDES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN, auf die später noch einmal separat eingegangen werden wird.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Die EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE beschreibt eine Aktivität, die das Überführen einer zuvor gewählten abstrakten Ressource in ein Beispiel zeigt. Im nachfolgenden Beispiel von B21 wird dieses Vorgehen illustriert.

B21, Segment 7	Also, dass ich/ Gegeben habe ich eine ungerade Quadratzahl (schreibt) und, ähm, zeigen muss ich, dass/ Also die ungerade Quadratzahl ist zum/ n Quadrat und, ähm, wenn ich (5), ja, wenn ich, ähm, ja,	Strategie SCHRIFTLICHES EXTRAHIEREN
B21, Segment 9	n Quadrat geteilt durch 8 ist, ähm, ein Vielfaches von einer Zahl plus den Rest 1. (schreibt)	zugehörig zur Strategie SCHRIFTLICHES EXTRAHIEREN in Segment 7
B21, Segment 70	Ja. ich könnte mir das aufschreiben als, ähm, (5)	Strategie EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE
B21, Segment 72	eigentlich als (...)/ also n Quadrat ist ja auch $n \cdot n$ (14) und dann versuche ich eigentlich Analogien dazu zu finden (8) und das habe ich mit dem Beispiel von 9 gemacht.	zugehörig zur Strategie EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE
B21, Segment 74	Dann ist 9 auch $3 \cdot 3$.	zugehörig zur Strategie EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE
B21, Segment 76	und das habe ich mir dann hier aufgeschrieben.	zugehörig zur Strategie EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE

B21 nutzt das $n \cdot n$, welches vorher schriftlich extrahiert wurde (Segment

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

7 und Segment 9), als Ausgangspunkt. Die Variablen wurden durch $3 \cdot 3$ ersetzt und demnach in ein Beispiel umgewandelt und so EXEMPLIFIZIERT.

Genutzt wurde diese *Strategie* so ähnlich auch von B03, B13, B15, B16 und B21.

Als dritte Ausprägung der *Strategie* ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE kann hier die IKONISIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE empirisch ergänzt werden. Dieser Gedankenschritt umfasst das Umwandeln eines zuvor aufgestellten Beispiels in eine BILDLICHE (hier: ikonische) Darstellung.

Im nachfolgenden Textausschnitt aus dem Lautdenkenprotokoll von B01 wird das Beispiel $5 \cdot 5$ auf numerischer Repräsentationsebene aufgestellt und anschließend ikonisiert, d.h. in eine BILDLICHE (hier: ikonische) Darstellung umgewandelt.

B01, Segment 16 Warte mal hier: 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. (schreibt) (.) Hm (nachdenkend). (..)

Sichtbar wurde diese ikonische Darstellung in der parallel zur Verbalisierung angefertigten Darstellung der figurierten Quadratzahl 25 (Abbildung 21.14). Außerdem zeigte sich diese *Strategie* so ähnlich im Lautdenkenprotokoll von B13.



Abbildung 21.14: Parallel zur *Strategie* IKONISIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE angefertigte Darstellung

Wie in Kapitel 21.1 bereits beschrieben, konnte die *Strategie* KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN aus der Literatur abgeleitet jedoch durch die empirischen Betrachtungen durch das Attribut EXTERN GENERIERT ergänzt werden. Geschlussfolgert werden kann daraus die *Strategie* EXTERN GENERIERTES KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN, welche in den Lautdenkenprotokollen von B08 und B24 auftrat und hier anhand des folgenden Beispiels illustriert werden soll.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B24, Segment 73 Das war immer so mit den Punkten dazwischen (4) Also vielleicht muss man gar nicht verallgemeinern, dass es/ Dass 8 (..) zusammen gebündelt sind, weil es um die Teilbarkeit durch 8 geht. (..) Sondern wie viele Achterbündel es gibt.

Inhaltlich davon verschieden nutzte B08 diese *Strategie*, wie im folgenden Beispiel sichtbar wird. Anstatt des Versuches Pünktchen zur Verallgemeinerung der ikonischen Darstellung zu nutzen und diese damit konstruktiv zu verändern, nutzte B08 ein anderes mathematisches Konzept.

B08, Segment 21 Sind (4) gleichmächtig. (5) Ok. Ähm. (..) und dann haben wir (..) das und das. (..) hoch 2 (10) das heißt, wir haben das nochmal. (10) Und das sind (..), ähm (..) so und so. (schreibt) (8)

Um den Gedankenschritt von B08 nachvollziehen zu können, müssen die Verschriftlichungen (Abbildung 21.15) einbezogen werden.

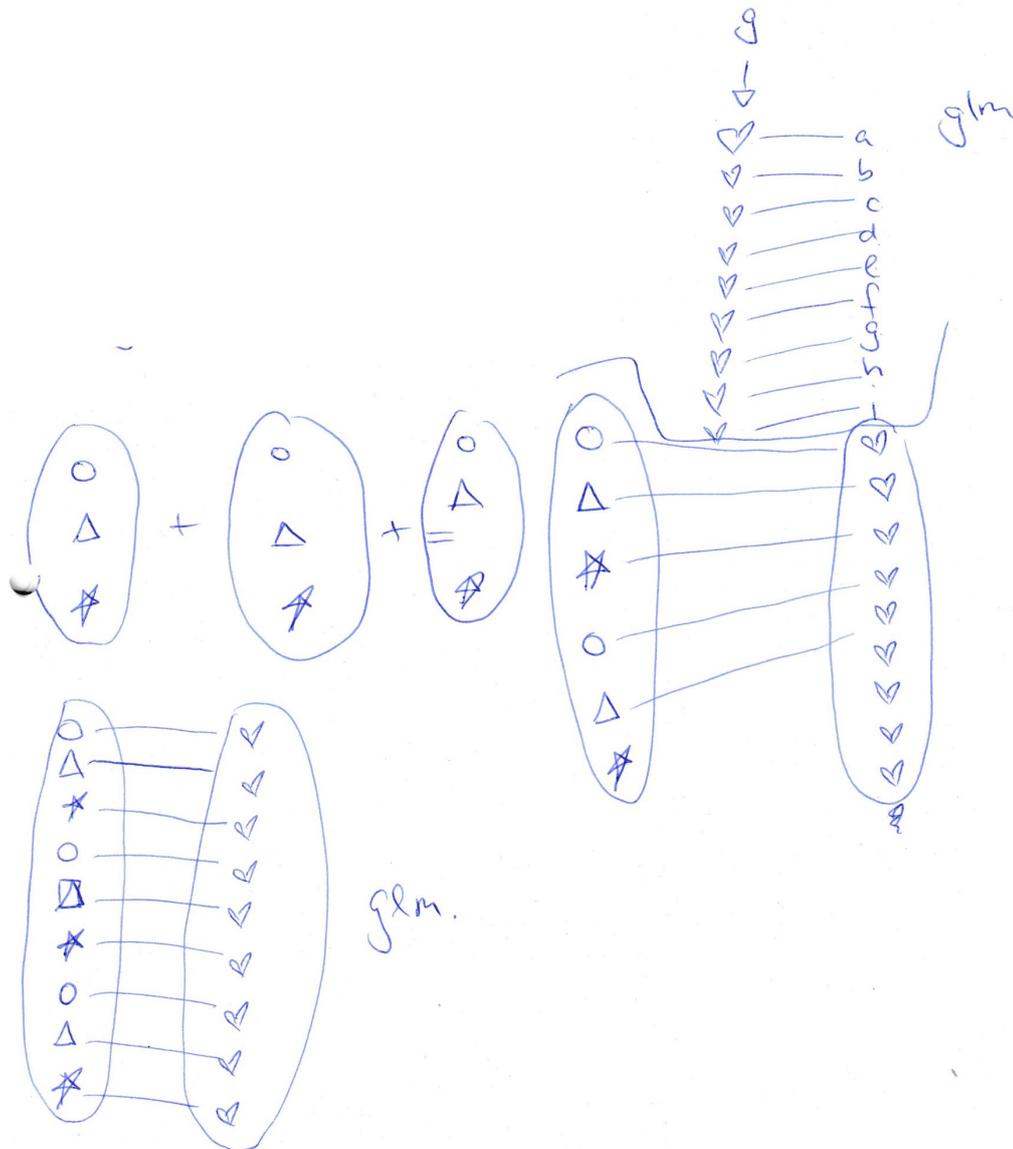


Abbildung 21.15: Parallel zur *Strategie* EXTERN GENERIERTES KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN angefertigte Darstellung

B08 nutzte hier das Konzept des Standardrepräsentanten im Kontext der Kardinalität von natürlichen Zahlen und versuchte damit zu zeigen, dass die Zahl 3 ein geeigneter Repräsentant für eine ungerade Quadratzahl ist, da eine Menge bestehend aus 3 Elementen gleichmächtig zu einer anderen Menge mit 3 Elementen ist.

Des Weiteren ließen sich drei Ausprägungen der *Strategie* SYSTEMATISCHES

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

TRANSFORMIEREN durch die Analyse und Auswertung der Lautdenkenprotokolle herausarbeiten: das EINSETZENDE SYSTEMATISCHE TRANSFORMIEREN, das ZERLEGENDE SYSTEMATISCHE TRANSFORMIEREN und das ANGEWANDTE SYSTEMATISCHE TRANSFORMIEREN

Das EINSETZENDE SYSTEMATISCHE TRANSFORMIEREN beschreibt einen Gedankenschritt, der zuvor aufgestellte Ressourcen nutzt, um diese in neu ausgewählte Ressourcen einzusetzen.

Im nachfolgenden Beispiel wurde zunächst die Ressource $n \cdot n$ in Segment 18 als begriffliche Ressource auf symbolischer Repräsentationsebene dargestellt und diese dann mit Hilfe des EINSETZENDE SYSTEMATISCHEN TRANSFORMIERENS weiterentwickelt, indem für das n der symbolische Ausdruck $1 + 2 \cdot k$ (Segment 31) eingesetzt wurde.

B13, Segment 18	Ok, Quadratzahl ist halt auf jeden Fall $n \cdot n$ (.)	Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCE AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B13, Segment 31	Und das setzt sich dann so zusagen (..) ein für n . Also ich habe ein n (..), was ist $1 + 2 \cdot k$. k ist Element der natürlichen Zahlen, weil wir wollen ja (.) bei allen natürlichen Zahlen bleiben.	Strategie EINSETZENDES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN

So ähnlich zeigte sich diese *Strategie* auch in den Lautdenkenprotokollen von B14 und B21.

Das ZERLEGENDE SYSTEMATISCHE TRANSFORMIEREN beschreibt die Nutzung von mathematischen Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten, um Ressourcen in einzelne Strukturen aufzugliedern und dadurch Eigenschaften sichtbar zu machen. Die Aufgliederung kann sowohl mit konkreten Zahlen als auch mit formalen Ausdrücken anhand von Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten geschehen. Im nachfolgenden Beispiel aus dem Lautdenkenprotokoll von B18 wurde die 9 mit Hilfe des Wissens über die Struktur von natürlichen Zahlen in $4 \cdot 2 + 1$ zerlegt. Es ist anzunehmen, dass B18 eine Teiler-/Vielfachbeziehung genutzt hat, um Eigenschaften der 9 in Bezug zur Aufgabenstellung sichtbar zu machen (Segment 31). B18 bezog sich auf ein zuvor aufgestelltes Beispiel (Segment 5).

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B18, Segment 5	(..) Wenn ich jetzt (..) von (.) 3 die Quadratzahl neh- me, das ist ja (.) die 9. (schreibt) (..) Wenn ich jetzt 9 durch 8 rechne, ha- be ich ja (.) ein Mal 8 plus Rest 1. (.) Hier würde man (.) einfach (.) den Rest er- kennen. (schreibt)	Strategie NUMERISCHE GANZHEITLICHE BEI- SPIELBETRACHTUNG
B18, Segment 31	Weil, ob/ Hm hm. (.) Wenn ich das vielleicht mit der 4 mache, (.) dann wäre ja, beispielsweise, ich neh- me einfach jetzt hier die 9, weil es eine Quadratzahl ist, dann ist ja auch bei der 9, ähm, das ist ja das Gleiche wie $2 \cdot 4 + 1$. Also hier hätten wir eigentlich auch wieder den Rest 1. (.) (schreibt)	Strategie ZERLEGENDES SYSTEMATISCHES TRANS- FORMIEREN

Ein weiteres Beispiel für diese *Strategie* wurde im Kontext der *Strategie* EINSETZENDES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN dargestellt. Ähnlich zum Vorgehen von B18 hier und B21 weiter oben zeigte sich diese *Strategie* ZERLEGENDES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN auch in den Lautdenkenprotokollen von B11, B13, B14, B15, B16, B20, B21 und B30.

Des Weiteren konnte aus der empirischen Untersuchung auch die *Strategie* ANGEWANDTES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN abgeleitet werden. Dieser Gedankenschritt zeigt eine Nutzung von mathematischen Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten, um damit deduktiv weiterzuarbeiten und eine zuvor ausgewählte Ressource weiterzuentwickeln. Im nachfolgenden Beispiel nutzte B13 in Segment 33-39 die *Strategie* AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE, um diese Ressource dann mit der Anwendung des Ausmultiplizierens in Segment 43 und 45 umzuformen bzw. zu transformieren.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

$$(1+2k) \cdot (1+2k) = 1 + 2k + 2k + 4k^2 = 1 + 4k + 4k^2$$

Abbildung 21.16: Parallel zur *Strategie* ANGEWANDTES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN angefertigte Darstellung

B13, Segment 33	Und dann zu zeigen ist, dass (...), ähm, (...) n (...) also/	Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B13, Segment 35	Doch $n \cdot n$ schreibe ich jetzt und setze das dann gleich ein. Ähm, $n \cdot n$ (...) geteilt durch 8 (4), ähm/	zugehörig zu Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B13, Segment 37	Die ungerade Zahl wird durch 8 geteilt.	
B13, Segment 39	Durch 8, ähm, ist gleich/ (...) Ja, weiß ich nicht frei unter den Rest 1. (...)	zugehörig zu Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B13, Segment 43	Ich werde jetzt erstmal ausrechnen, was $1 + 2 \cdot k(\cdot) \cdot 1 + 2 \cdot k$ ist, um das ein bisschen zu haben. (...) Also die ungerade Quadratzahl. (...) Und, das multipliziere ich aus. (...) Und das sind dann ja 1/	Strategie ANGEWANDTES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN
B13, Segment 45	Also es ist $1 + 2 \cdot k$ (...) Jetzt ist/ $+2 \cdot k(\cdot) + 4 \cdot k$ Quadrat. (...) Das ist gleich $1 + 4k + 4k$ Quadrat. (...) (schreibt)	Strategie ANGEWANDTES SYSTEMATISCHES TRANSFORMIEREN

Abbildung 21.16 unterstützt die oben aufgeführte Verbalisierung. Diese *Strategie* zeigte sich so ähnlich auch in den Lautdenkenprotokollen

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

von B14, B15, B16, B20, B21, B27 und B30. Unterschiede finden sich in den unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten, die verwendet wurden.

Abgeleitet wurde weiterhin in Abschnitt III die Mustersuche in zwei verschiedenen Ausprägungen. Wie in Kapitel 21.1 beschrieben, konnte die *Strategie* der EMPIRISCHEN MUSTERSUCHE durch das Datenmaterial weiter ausdifferenziert werden und wird deshalb an dieser Stelle dargestellt.

Die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE zeigte sich ausschließlich, dafür aber mehrfach im Lautdenkenprotokoll von B24. Wie das nachstehende Beispiel illustriert, wurde das Muster anhand von zwei vorher bildlich aufgestellten Beispielen (Segment 42 und 45) gesucht. Abbildung 21.17 gibt exemplarisch anhand des Beispiels $7 \cdot 7$ wieder, wie die Beispiele bildlich dargestellt wurden. Die Darstellung des Beispiels in Segment 42 verlief analog dazu. Die MUSTERSUCHE wurde in Segment 50 verbalisiert, nachdem ein Zwischenschritt über die *Strategie* KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN (Segment 48) angewandt wurde. Abbildung 21.18 zeigt die parallel angefertigte Darstellung der EMPIRISCHEN MUSTERSUCHE AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER
EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B24, Segment 42	(4) Ich probiere es mal irgendwie ikonisch. (..) Wenn man quasi 5 · 5 ikonisch darstellen möchte, könnte man das so machen. Also 5 Fünferreihen (...) 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5. (..) plus halt 1. (4) (schreibt)	Strategie TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B24, Segment 45	Aber ich probiere das nochmal mit 7 · 7. (.)	Strategie TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B24, Segment 48	Wenn ich hier auch wieder die Achtergruppen suche (5) Hier auch nochmal. (...) (schreibt) Also irgendwie sieht es auch jetzt schon ein bisschen so aus/ (schreibt) (4)	Strategie KONSTRUKTIVES TRANSFORMIEREN
B24, Segment 49	Ich hatte kurz gedacht, dass es immer so ein bisschen ein Rand bleibt, der zu einer Achtergruppe gemacht werden kann. Das würde ja auch irgendwie Sinn machen mit der ungerade/ Dass es immer mit den ungeraden ist. (..) Weil immer so eine Einser/ Also eine Reihe. Am Ende übrig bleibt und diese ikonischen Darstellungen. Aber (...).	Strategie EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG



Abbildung 21.17: Parallel zur *Strategie TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE* angefertigte Darstellung

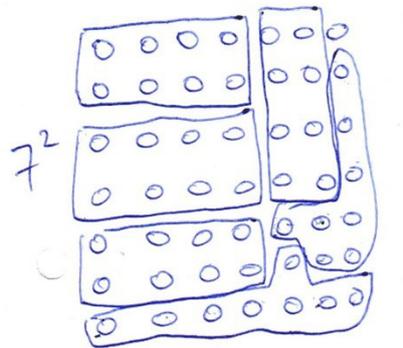


Abbildung 21.18: Parallel zur *Strategie empirische Mustersuche auf bildlicher Repräsentationsebene* angefertigte Darstellung

Die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE zeigte sich außerdem auf numerischer Repräsentationsebene, wie im Textausschnitt von B18 zu sehen ist. B18 nutzte mehrere vorher aufgestellte Ressourcen für die Suche nach dem Muster. Im nachfolgenden Beispiel zeigen sich in den Segmenten 5,7,9,10,11 und 17 die Ressourcen und in Segment 47 die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE.

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER
EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B18, Segment 5	(..) Wenn ich jetzt (..) von (.) 3 die Quadratzahl nehme, das ist ja (.) die 9. (schreibt) (..) Wenn ich jetzt 9 durch 8 rechne, habe ich ja (.) 1·8 plus Rest 1. (.) Hier würde man (.) einfach (.) den Rest erkennen. (schreibt)	Strategie GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER RE- PRÄSENTATIONSEBENE
B18, Segment 7	Wenn wir das für 5 machen würden, das ist ja 25. 25 durch 8/	Strategie GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER RE- PRÄSENTATIONSEBENE
B18, Segment 9	(.) 16, 24, 3, (.) ja, 3 · 8. (.) Und dann wieder diese (.) +1, die wir hier haben. (schreibt)	zugehörig zur Strategie GANZHEITLICHE BEI- SPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄ- SENTATIONSEBENE
B18, Segment 10	7 (.) ist die 49. (..) Es wäre die 6 · 8 (...), 6 · 8 (.) und wieder mit dem Rest 1. (...) Hm (nachdenkend). (schreibt)	Strategie GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER RE- PRÄSENTATIONSEBENE
B18, Segment 11	Na, bei 1 (.) ich habe ja die 1 übersprungen, aber ich könnte nochmal als Quadrat die 1, und das ist das Gleiche. 1 (.) durch 8 sind ja allgemeingültig (.) $0 \cdot 8 + 1$. (schreibt)	Strategie GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER RE- PRÄSENTATIONSEBENE
B18, Segment 17	bei der 11, (..) (unv.) 121, (..) dann (.) sind es (...)/ Ich mache es nochmal mit der 11. (4) Ne, Hundert/ (...) 10 · 11 sind/ (.) 11/ ne, 110, 121 doch.	Strategie GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER RE- PRÄSENTATIONSEBENE

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B18, Segment 47 Und das sind die ersten Strategie EMPIRISCHE
Quadratzahlen, damit hat MUSTERSUCHE AUF
es auch nichts (.) zu tun. NUMERISCHER REPRÄ-
Und dann kommt ja noch SENTATIONSEBENE
die 25, also (..), das passt
halt immer, bei jeder zwei-
ten, aber (...)/ Und das
jetzt/ also, Zufall kann es
ja nicht sein, dass es bei
den passt. (...) Würde ich
mal jetzt so behaupten.

In den Transkriptausschnitten wird mit der Notation ‚(schreibt)‘ wie in Kapitel 19.1 beschrieben, der Verweis auf eine Verschriftlichung, die parallel angefertigt wurde, gegeben. Da diese im oben dargestellten Beispiel von B18 eine Verschriftlichung exakt der vorher verbalisierten Terme und Gleichungen zeigte, wird hier auf das Einfügen der Abbildungen verzichtet.

Zu finden waren diese *Strategien* in ähnlicher Form auch in den Lautdenkenprotokollen von B01, B16, B24, B27 und B28.

Empirisch ergänzt werden konnte anhand des Datenmaterials neben der theoretisch abgeleiteten THEORETISCHEN MUSTERSUCHE und der EMPIRISCHEN MUSTERSUCHE die FOKUSSIERENDE MUSTERSUCHE und die VARIATIVE MUSTERSUCHE.

Die FOKUSSIERENDE MUSTERSUCHE beschreibt einen Gedankenschritt, in dem ein Zusammenhang zwischen einzelnen Elementen innerhalb einer Ressource oder zwischen Elementen in verschiedenen Ressourcen gesucht wird. Das nachfolgende Beispiel von B03 zeigt die Anwendung einer solchen *Strategie*.

B03, Segment 58 Warum funktioniert es nur mit der 8? (..) Ähm (14).
Das hat irgendwas mit den/ (...) mit dem Quadrat zu
tun.

B03 versuchte einen Zusammenhang zwischen der 8 und einer Quadratzahl zu sehen. Diese Aktivität ist ein unspezifisches Vorgehen und beschreibt den Versuch eine Struktur zu ‚sehen‘. Neben B03 nutzten auch B11, B14, B21 und B28 diese *Strategie* in ähnlicher Weise, aber mit jeweils verschiedenem Fokus bzw. unterschiedlichem inhaltlichen Bezug. So versuchte B11, wie im nachfolgenden Beispiel illustriert wird, einen Zusammenhang zwischen einer vorher aufgestellten Ressource (Segment 14) und dem Rest 1 aus dem zu begründenden Satz zu ‚sehen‘ (Segment 18).

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

B11, Segment 14	Jetzt sehe ich schon mal, ungerade wird beschrieben, $2n+1$ (1)	Strategie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE
B11, Segment 18	(...) hm (nachdenkend) (...) Okay. Pff (lachend) (...) Also, was ich hier sehe, ist halt 1 und 1. (23)	Strategie FOKUSSIERENDE MUSTERSUCHE

Ähnlich sind auch die *Strategien*, die B14 und B28 nutzten. Beide versuchten einen Zusammenhang zwischen der 8 als Potenzschreibweise und der Parität der Quadratzahl oder der Faktoren auszumachen.

Die VARIATIVE MUSTERSUCHE beschreibt die Suche nach einem Muster, indem die ursprüngliche Aussage variiert wird. Es wird versucht, über das Prüfen der Aussage für die Division durch beispielsweise 4, 6 oder 12, Gemeinsamkeiten bezüglich des bleibenden Rests herauszuarbeiten und daraus wiederum das Muster abzuleiten. Im nachfolgenden Textausschnitt ist diese *Strategie* aus einem Transkriptausschnitt von B18 dargestellt.

B18, Segment 35	Hm (nachdenkend). (..) Bei (.) 6, ähm, (.) bei 6, würde das (.)/ ne, bei 6 würde das zum Beispiel nicht klappen. $9 = 1 \cdot 6$ (.) +3. (...) (schreibt) Ja, zum Beispiel, bei der 6 klappt es nicht. (..)
-----------------	---

Die *Strategie* VARIATIVE MUSTERSUCHE kam auch in den Lautdenkenprotokollen von B14, B16, B18 und B28 vor. Alle diese Studierenden nutzten diese *Strategie* in ähnlicher Weise und suchten ein Muster, indem sie die Division durch 4, 6 oder auch 12 anhand von Beispielen durchführten und einen Zusammenhang suchten.

Abgeleitet wurde im Abschnitt III das Anfertigen einer Beweisskizze als Makrostrategie. Anhand des Datenmaterials konnte diese in *Strategien* weiter ausdifferenziert werden.

Sichtbar wurde zunächst die *Strategie* SYMBOLISCHES DARSTELLEN DER BEWEISSKIZZE. Diese *Strategie* zeigt das Anfertigen der Beweisskizze auf SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE und kam lediglich ein Mal vor.

B30, Segment 33	Ähm, wobei ich hiermit (Zeigen auf dem Blatt) jetzt bewiesen hätte, dass, wenn ich es durch 8 teile, ich eine gerade Zahl mit dem Rest 1 behalte.
-----------------	---

KAPITEL 21. DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE AUS DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNG

Verwiesen wird hier von B30 auf den vorher notierten formalen Ausdruck $2(x : 4) + 1$ durch das Zeigen auf dem Blatt.

Anhand der Daten lässt sich ebenfalls das ZEICHNERISCHE DARSTELLEN DER BEWEISSKIZZE als weitere *Strategie* ergänzen. Diese *Strategie* kam in den Lautdenkenprotokollen von B26 und B28 vor und zeigt sich im nachstehenden Beispiel.

B26, Segment 12 Und dann haben wir/ Also, dass es ungerade ist, symbolisieren wir durch die Zweierpärchen und einen übrigen und das ist geeignet, weil wir hier den Rest 1 haben.

Begleitet wurde die Verbalisierung durch die folgende Darstellung (Abbildung 21.19), in der nach dem Vorbild der ikonischen Verallgemeinerung im Modell nach Padberg und Büchter (2015), eine ikonische Verallgemeinerung versucht wird.

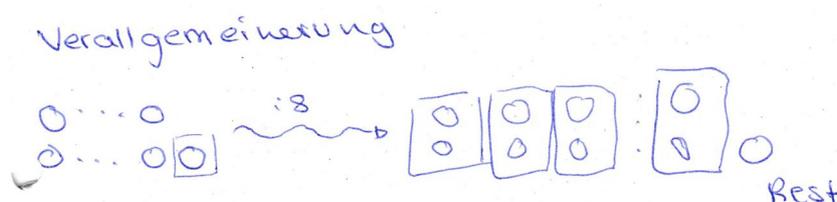


Abbildung 21.19: Parallel zur *Strategie* ZEICHNERISCHES DARSTELLEN DER BEWEISSKIZZE angefertigte Darstellung

Als dritte *Strategie* kann das NARRATIV-ZUSAMMENFASSENDE DARSTELLEN DER BEWEISSKIZZE aus den Daten ergänzt werden. Hier wird die Beweisskizze in narrativer Form verbalisiert. Diese *Strategie* zeigte sich, indem die zuvor verbalisierten Gedankenschritte verbal zusammen gefasst wurden. Im nachfolgenden Beispiel wird die *Strategie* anhand der Verbalisierung von B18 illustriert.

B18, Segment 54 Vielleicht liegt es auch einfach daran, dass die 8, halt, an sich eine gerade Zahl ist. Aber die (.), ähm, (..) Quadratzahlen ungerade sind. Da, wie gesagt, die ja von einer ungeraden Zahl stammen.

Auch zeigte sich diese *Strategie* in den Lautdenkenprotokollen von B01, B03, B07, B11, B13, B15, B23, B27, B28 und B30.

Die Makrostrategie BEWEISSKIZZE ERSTELLEN war nicht nur am Ende der Begründung zu beobachten, sondern wurde auch dazu genutzt, um im

Prozess eine Hypothese als Zielstellung für das Ende der Begründung zu formulieren. Ergänzt werden konnte demnach die *Strategie* ZIELFORMULIERENDE HYPOTHESE AUFSTELLEN aus dem Material.

B21, Segment 100 Ähm (8) Ich muss jetzt hier ein Vielfaches von 8 (..) kommen(4)

Wie im Beispiel sichtbar wird, wurde hier das Ziel formuliert, dass als Ergebnis des Begründungsprozesses ein Vielfaches von 8 dargestellt werden muss.

Beobachtet werden konnte diese *Strategie* in ähnlicher Weise auch im Lautdenkenprotokoll von B30.

21.3 Strategien, die empirisch nicht beobachtet werden konnten

Nicht alle in Abschnitt III abgeleiteten *Strategien* sind in der betrachteten Stichprobe sichtbar geworden.

Aus der Strategieeinheit VERSTEHEN wurden nicht alle vorher ableitbaren *Strategien* von den Studierenden umgesetzt. So wurde innerhalb der Interviews zunächst das FOKUSSIEREN, welches der Makrostrategie STRUKTURELLE AUSEINANDERSETZUNG zugeordnet wird, nicht sichtbar. Daneben ist auch die *Strategie* VISUELLES ÜBERSETZEN nicht angewandt worden. Weitere *Strategien* aus der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN zeigten sich, wie nachfolgend beschrieben, ebenfalls nicht.

Die AUSWAHL METAPHORISCHER BEGRIFFLICHER RESSOURCEN wurde weder als extern generierte Form noch als nicht extern-generierte Form genutzt. Ebenfalls nicht beobachtbar war die EXTERN GENERIERTE AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF SYMBOLISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE. Auch die BILDICHE BEISPIELBETRACHTUNG konnte, wie theoretisch abgeleitet nicht beobachtet werden, sondern musste durch das Hinzufügen verschiedener Ausprägungen konkretisiert werden, um sichtbar zu werden. Ebenso verhielt es sich mit der NUMERISCHEN BEISPIELBETRACHTUNG

Genau so verhielt es sich mit verschiedenen *Strategien* des TRANSFORMIERENS. So zeigte sich das METRISCHE TRANSFORMIEREN, die THEORETISCHE MUSTERSUCHE und die BEISPIELFALSIFIZIERUNG gar nicht und die BEISPIELVERIFIZIERUNG und die BEISPIELREIHUNGEN nur auf bildlicher und nicht aber auf numerischer Repräsentationsebene.

Teil V

Zusammenfassende Betrachtungen, Diskussion, Grenzen und Ausblick

In diesem Abschnitt der Arbeit werden die Ergebnisse der theoretischen Ableitung (Abschnitt III) und der empirischen Untersuchung (Abschnitt IV) zusammenfassend und interpretierend betrachtet. Anschließend werden die Grenzen der Ergebnisse aufgezeigt und ein Ausblick für die hochschuldidaktische Praxis und Forschung gegeben (Kapitel 23,24).

22 Zusammenfassende Betrachtungen und Diskussion der Ergebnisse

Insgesamt ist die Literatur- und Studienlage zum Thema *Begründen, Beweisen* und *Argumentieren* im mathematikdidaktischen Kontext vielfältig, sowohl hinsichtlich des Begriffsverständnisses als auch hinsichtlich der Betrachtung der einzelnen oder der gesamten Prozesse, die bei der Aufgabenbearbeitung ablaufen. In der vorliegenden Arbeit wird *Begründen* zum Oberbegriff für *Argumentieren* und *formal-deduktives Beweisen*. Beide sind in dem hier gewählten Verständnis Begründungsformen (Gerloff, 2021).

Mit dieser Sichtweise werden unterschiedliche Prozesse, Herangehensweisen, Denkrichtungen, Repräsentationsebenen und Formalisierungsgrade in den Bearbeitungsprozess einer mathematischen Begründungsaufgabe einbezogen. Im Abschnitt II wurden die relevanten theoretischen Grundlagen zusammengetragen, um sie für die Bearbeitung der Forschungsfragen nutzbar zu machen.

Hier wurde auch ein Strategieverständnis erarbeitet, das eine *Strategie* als Gedankenschritt bzw. mentale Aktivität versteht (Kapitel 4.4). Ausgehend von dem hier erarbeiteten Strategieverständnis bot sich die Möglichkeit, mit Hilfe des *Lauten Denkens* und der Interpretation der inhaltlich abgeschlossenen ‚thoughts‘ (Ericsson & Simon, 1980;1998) *Strategien* bzw. Gedankenschritte in kettenartigen Zusammenhängen zu erheben (Abbildung 4.2).

Auf dieser theoretischen Grundlage wurde zunächst die Forschungsfrage I beantwortet und mögliche *Strategien* abgeleitet. Bei der Beantwortung dieser Forschungsfrage entstand durch die Betrachtung des Begründungsprozesses aus einer chronosequentiellen und einer typenorientierten Perspektive eine Gesamtbetrachtung, die es ermöglichte, den komplexen Begründungsprozess individuenzentriert in seinen Einzelschritten auf einer Mikroebene sichtbar zu machen. Aus dieser Gesamtbetrachtung ergab sich ein zweidimensionales Schema (Abbildung 16.1), das es erlaubt, den individuellen Prozess sowohl phasenspezifisch als auch begründungstypenspezifisch zu betrachten. So ergibt sich die vertikale Dimension aus der Betrachtung des Begründungsprozesses als Problemlösungsprozess und die horizontale Dimension aus den in der bestehenden Literatur unterschiedenen Begründungstypen. Darüber hinaus bietet das Schema einen Rahmen, in den zukünftig weitere Betrachtungen

einzelner Begründungstypen oder Phasen des Begründungsprozesses integriert werden könnten.

Bei näherer Betrachtung des Begründungsprozesses an sich und der damit verbundenen Tätigkeit des Konstruierens und Verknüpfens von Argumenten sowie der beiden oben genannten Prozesse bzw. Begründungsformen des *Argumentierens* und des *formal-deduktiven Beweisens* mit Hilfe von Argumentationsrekonstruktionsmodellen ergibt sich eine kettenartige Struktur von Gedankenschritten bzw. *Strategien*. Jedes Kettenglied ist dabei eine *Strategie* im hier erarbeiteten Verständnis. Die kettenartige Verknüpfung der einzelnen *Strategien* kann dabei sowohl aus inhaltlicher als auch aus zeitlicher Perspektive betrachtet werden. Das Ergebnis der Forschungsfrage I ist eine Kollektion potentiell möglicher *Strategien*.

Forschungsfrage II wurde im zweiten, empirischen Teil der Arbeit (Abschnitt III) bearbeitet. Dabei wurden, aufbauend auf der Erarbeitung der potentiell möglichen *Strategien* aus Abschnitt III (Forschungsfrage I), die *Strategien* einer Stichprobe von Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik der FU Berlin nach dem Besuch des Moduls ‚Mathematisches Professionswissen I‘ empirisch untersucht. Dabei wurde zwischen den potentiell möglichen, den tatsächlich genutzten und den nicht genutzten *Strategien* unterschieden. Außerdem wurden *Strategien* ergänzt, die so nicht aus der Literaturgrundlage ableitbar waren. Im Ergebnis liegt hier eine erweiterte Kollektion von tatsächlich in der Stichprobe auftretenden *Strategien* gegenüber einer Sammlung von zwar potentiell möglichen, aber empirisch nicht gezeigten *Strategien* vor.

Grundsätzlich folgt die Interpretation der Ergebnisse der Idee, dass die Studierenden in der Lage waren, ihre Denkprozesse so weit zu verbalisieren, dass zumindest durch die Kombination von Introspektion und Retrospektion während der Interviewsituation mentale Prozesse über zwei Zugänge erhoben und nachvollzogen werden konnten. Dabei wurde der Idee von Ericsson und Simon (1980; 1984) und Ericsson (1993) gefolgt und angenommen, dass Prozesse durch die Primäraufgabe als Stimuli sichtbar gemacht werden können, da sie im Arbeitsgedächtnis verarbeitet und verbalisiert werden können.

Es zeigte sich, dass die Studierenden der Stichprobe einige *Strategien* aus der theoretischen Ableitung nutzten, andere hingegen nicht. Darüber hinaus ergaben sich aus der empirischen Beobachtung weitere *Strategien*. Warum einige *Strategien* empirisch sichtbar wurden und andere nicht, kann anhand von drei verschiedenen Erklärungsansätzen diskutiert werden.

Harel und Sowder (1998) stellen fest, dass die Anwendung der verschiedenen *proof shemes* ihres Modells kontextabhängig sind. Ausgehend von dieser Überlegung kann vermutet werden, dass einzelne *Strategien* möglicherweise nicht angewendet wurden, weil der Inhalt oder der mathematische Kontext

der Aufgabenstellung eine Anwendung nicht erforderte bzw. die Anwendung nicht angemessen oder nützlich erschien. Ein weiterer Erklärungsansatz ergibt sich aus der Betrachtung der Stichprobe, die für die hier vorgestellte Untersuchung ausgewählt wurde. Es ist möglich, dass die Anreize, die zur Teilnahme an der Befragung motivieren sollten, auf Studierende mit einem bestimmten Fähigkeitsrepertoire abzielten. Da jedoch keine weiteren Daten zum allgemeinen Fähigkeitspektrum erhoben wurden, können hier nur Vermutungen angestellt werden, die einer weiteren Untersuchung und Synthese von persönlichen Dispositionen und genutzten Fähigkeiten bedürften.

In engem Zusammenhang damit steht die Beeinflussung der *Strategien* durch die Teilnahme am Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘. Es ist davon auszugehen, dass die dort erlernten und geübten Inhalte und Vorgehensweisen auch die Wahl der *Strategie* beeinflussten. Hier erlernte und erprobte Vorgehensweisen bieten neue *Strategien* neben den bereits in der Schule oder früheren Ausbildungen erlernten.

Diese Erklärungsansätze werden in den folgenden Kapiteln bei der zusammenfassenden Betrachtung und Interpretation der Ergebnisse integriert und konkretisiert.

Insgesamt zeigte sich, dass die Studierenden vor allem *Strategien* aus den Strategieeinheiten VERSTEHEN und ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN nutzten. Die zuvor abgeleiteten *Strategien* aus der Strategieeinheit DISKURS wurden kaum genutzt, kamen aber dennoch vor. Grundsätzlich deutet diese Beobachtung auf eine Strukturierung des Prozesses in drei unterschiedliche Phasen hin. Dieses Ergebnis konnte bereits in früheren Untersuchungen wie beispielsweise Rott (2014), aber auch in anderen Modellen aus der Problemlöseprozessforschung, die im Kapitel 4.2 vorgestellt wurden, gezeigt werden. In den folgenden drei Kapiteln der Arbeit werden die Ergebnisse nach Strategieeinheiten geordnet näher betrachtet.

22.1 Strategieeinheit Verstehen

Aus der Literatur zum VERSTEHEN in Aufgabenbearbeitungsprozessen und mathematischen Begründungssituationen lassen sich vor allem *Strategien* ableiten, die eine inhaltliche oder eine strukturelle Auseinandersetzung mit einer Aufgabe zeigen. Daraus wurden die beiden Makrostrategien INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG und STRUKTURELLE AUSEINANDERSETZUNG theoretisch abgeleitet. Darüber hinaus konnte WIEDERHOLEN als weitere Makrostrategie aus der Literatur abgeleitet werden. Alle Makrostrategien ergaben sich aus dem Ziel, mit Hilfe dieser Gedankenschritte ein Situationsmodell aufzubauen und das Problem bzw. die Aufgabe mental zu repräsentieren.

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Die Makrostrategien konnten bezüglich des Inhalts in *Strategien* und *Strategien* in spezifischen Ausprägungen ausdifferenziert werden. Das Ableiten der *Strategien* der Strategieeinheit VERSTEHEN erfolgte zum großen Teil auf Basis der in den Ausführungen von Kirsten (2021) bereits beschriebenen Aktivitäten (Kapitel 12). Die sich daraus ergebende Kollektion von *Strategien* soll im Folgenden aufzählend benannt werden, die Herleitung ist in Abschnitt III ausführlich beschrieben. Eine Einordnung und Diskussion dieser Ergebnisse erfolgt im Anschluss auf die Aufzählung. Die Makrostrategie ist in Klammern notiert, findet sich aber auch in Abbildung 16.1 in Kapitel 16.

- schriftliches Extrahieren (inhaltliche Auseinandersetzung)
- mündliches Extrahieren (inhaltliche Auseinandersetzung)
- ergänzendes Anreichern (inhaltliche Auseinandersetzung)
- folgerndes Anreichern (inhaltliche Auseinandersetzung)
- symbolisches Übersetzen (inhaltliche Auseinandersetzung)
- beispielhaftes Übersetzen (inhaltliche Auseinandersetzung)
- paraphrasierendes Übersetzen (inhaltliche Auseinandersetzung)
- visuelles Übersetzen (inhaltliche Auseinandersetzung)
- Spezifizieren (strukturelle Auseinandersetzung)
- Fokussieren (strukturelle Auseinandersetzung)
- Klassifizieren (strukturelle Auseinandersetzung)
- Teile der Aufgabenstellung wiederholen (Wiederholen)
- vorhergehende Äußerung wiederholen (Wiederholen)
- Lesen der Aufgabenstellung (ist bereits die Makrostrategie)

Insgesamt lässt sich aus diesen Überlegungen schlussfolgern, dass das VERSTEHEN im Sinne der Bildung einer mentalen Repräsentation prinzipiell in Bezug auf den Inhalt der zu begründenden Aussage oder auf die Struktur dieser Aussage betrachtet werden kann. Das sich aus dem Bilden der mentalen Repräsentation ergebende Situationsmodell hat damit sowohl eine inhaltliche als auch eine strukturelle Komponente. Außerdem wird das WIEDERHOLEN

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND DISKUSSION DER ERGEBNISSE

als für den Aufbau des Situationsmodells unterstützenden Gedankenschritt von den Studierenden genutzt und vermutlich intuitiv als hilfreich empfunden.

Werden die oben aufgeführten theoretisch möglichen *Strategien* mit Hilfe der empirischen Untersuchung betrachtet bzw. durch diese ergänzt, ergibt sich folgende Kollektion. In der nachstehenden Tabelle 22.1 werden die in Kapitel 21.1, Kapitel 21.2 und Kapitel 21.3 getrennt nach den drei Aspekten der Forschungsfrage II dargestellten *Strategien* der Strategieeinheit VERSTEHEN synthetisiert. Dabei wird in der Spalte 1 die *Strategie* benannt, ist in Spalte 2 die Makrostrategie notiert, in Spalte 3 wird mit Hilfe eines Kürzels die Herleitung vermerkt. Wenn die jeweilige *Strategie* ausschließlich theoretisch abgeleitet werden konnte aber empirisch nicht so sichtbar wurde, wurde diese mit *th* gekennzeichnet. Wurde sie theoretisch abgeleitet und genau so empirisch beobachtet, so wurde sie mit *th und e* gekennzeichnet. Ist sie ausschließlich durch die empirischen Betrachtungen ergänzt worden so wurde ein *e* in die dritte Spalte notiert. Wenn eine neue *Strategie* durch die Datenauswertung entstand, die nur durch Hinzufügen einer oder mehrere Ausprägungen zu einer bereits theoretisch abgeleiteten *Strategie* entwickelt wurde, so wurde dies mit dem Kürzel *th* und dem Vermerk *aber konkretisiert* versehen. Im Anhang G findet sich eine alternative Darstellung geordnet nach diesen Aspekten. Das LESEN DER AUFGABE wurde hier als *Strategie*, die in jedem Transkript zu beobachten war, nicht einbezogen, da sie durch die Instruktion erzwungen wurde und das Auftreten damit keine Rückschlüsse auf selbstständig ausgewählte *Strategien* zulässt.

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND
DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Tabelle 22.1: Synthese der Ergebnisse der *Strategien* der Strategieeinheit VERSTEHEN

Strategie	Makrostrategie	Vermerk
schriftliches Extrahieren	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
mündliches Extrahieren	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
markierendes Extrahieren	inhaltliche Auseinandersetzung	e
ergänzendes Anreichern	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
folgerndes Anreichern	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
symbolisches Übersetzen	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
beispielhaftes Übersetzen	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
paraphrasierendes Übersetzen	inhaltliche Auseinandersetzung	th und e
visuelles Übersetzen	inhaltliche Auseinandersetzung	th
Spezifizieren	strukturelle Aufeinandersetzung	th und e
Fokussieren	strukturelle Auseinandersetzung	th
Klassifizieren	strukturelle Auseinandersetzung	th und e
eigenschaftsbasiertes Begriffe klären	inhaltliche Auseinandersetzung	e
beispielbasiertes Begriffe klären	inhaltliche Auseinandersetzung	e
Teile der Aufgabenstellung wiederholen	Wiederholen	th und e
vorhergehende Äußerung Wiederholen	Wiederholen	th und e

In der Tabelle 22.1 zeigt sich, dass grundsätzlich *Strategien* der Makrostrategien *inhaltliche Auseinandersetzung* und *strukturelle Auseinandersetzung* eingesetzt wurden, die auf eine sowohl inhaltliche als auch strukturelle Aus-

einandersetzung mit der Aufgabenstellung schließen lassen.

Auffällig ist zunächst als Ergebnis der theoretischen Kollektion, dass die Vielfalt der *Strategien* der inhaltlichen Auseinandersetzung im Vergleich zu denen der strukturellen Auseinandersetzung quantitativ überwiegt. So differenziert Kirsten (2021) in ihrem Projekt mehr *Strategien*, die eine inhaltliche Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung zeigen, als solche, die auf eine strukturelle Auseinandersetzung schließen lassen. Dieses Übergewicht zeigte sich auch in der empirischen Betrachtung der vorliegenden Studie.

Während alle theoretisch abgeleiteten *Strategien*, die eine inhaltliche Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung zeigten, eingesetzt wurden und hier sogar empirisch die *Strategie* BEGRIFFE KLÄREN ergänzt werden konnte, zeigte sich, dass die strukturelle Auseinandersetzung von vornherein sowohl theoretisch als auch empirisch weniger Berücksichtigung fand. Eine inhaltliche Auseinandersetzung mit einer gestellten Begründungsaufgabe erscheint den Studierenden dementsprechend naheliegender. Neben der Disposition der Studierenden für eine bestimmte Art der Auseinandersetzung mit der zu begründenden Aussage ist es auch möglich, dass der Blick von Kirsten (2021), aber auch der Autorin der vorliegenden Studie, auf eine INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG differenzierter ist als auf eine STRUKTURELLE AUSEINANDERSETZUNG. In diesem Zusammenhang könnte es auch sein, dass die Vielfalt der *Strategien* der *inhaltlichen Auseinandersetzung* aufgrund der Vielfalt der inhaltlichen Zugänge häufiger vorkommt. Es ist also denkbar, dass strukturell gar nicht so viele unterschiedliche Zugänge zu der zu begründenden Aussage möglich sind, wie inhaltliche Zugänge denkbar sind. Eine weitere Betrachtung vergleichbarer Primäraufgaben im gleichen Setting könnte hier hilfreich sein.

Die *Strategie* BEGRIFFE KLÄREN konnte durch die empirische Betrachtung ergänzt und in zwei weitere Ausprägungen differenziert werden. Die in der Aufgabenstellung verwendeten Begriffe wurden im Rahmen der inhaltlichen Auseinandersetzung entweder anhand von Eigenschaften und Definitionen oder anhand von Beispielen geklärt. Es gab also sowohl Studierende, die für ihre Arbeit einen eher begrifflichen oder algebraischen Zugang zu mathematischen Objekten bevorzugten, als auch solche, die eher einen beispielhaften Zugang zu mathematischen Objekten als hilfreich empfanden. Neben der Klärung von Begriffen konnten auch Übersetzungsaktivitäten auf verschiedenen Repräsentationsebenen theoretisch und empirisch herausgearbeitet werden. Aus empirischer Sicht erfolgte die Übersetzung entweder PARAPHRASIEREND, SYMBOLISCH oder BEISPIELHAFT. Empirisch nicht beobachtet, aber theoretisch hergeleitet werden konnte das VISUELLE ÜBERSETZEN. Aus der Betrachtung weiterer *Strategien* aus der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN lässt sich jedoch vermuten, dass in Form der VISUELLEN

BEISPIELBETRACHTUNG (Makrostrategie: BEISPIELBETRACHTUNG) dennoch eine Form der visuellen Übersetzung von Aufgabeninhalten zum Aufbau eines Situationsmodells genutzt wurde. Diese *Strategie* unterscheidet sich jedoch von der *Strategie* VISUELLES ÜBERSETZEN (Makrostrategie: INHALTLICHE AUSEINANDERSETZUNG) dahingehend, dass sie nicht primär dem Aufbau eines Situationsmodells dient, sondern eher als Ausgangspunkt, d.h. als Ressource für das TRANSFORMIEREN genutzt wird. Ausgehend von diesem Ergebnis ist es möglich, dass die Übersetzung mit Hilfe von visuellen Beispielen zu einem späteren Zeitpunkt im Prozess wieder auftaucht, aber immer als Ausgangspunkt, d.h. als Ressource, aber nicht zum Aufbau eines Situationsmodells verwendet wird. Darüber hinaus lässt dieses Ergebnis den Schluss zu, dass die Studierenden das Situationsmodell eher PARAPHRASIEREND oder eben NUMERISCH aufbauen und die in der Aufgabenstellung vorkommenden Sachverhalte entweder nicht auf ikonischer Ebene repräsentiert sind oder intuitiv nicht darauf zugegriffen wird. Weitere detaillierte Untersuchungen sind notwendig, um die Ursache dieser Beobachtung zu klären.

Darüber hinaus zeigte die empirische Untersuchung der *Strategien* der Strategieeinheit VERSTEHEN, dass die Studierenden die Aufgabenstellung bzw. den Inhalt der Behauptung inhaltlich anreicherten, d.h. die *Strategie* ANREICHERN zum Aufbau eines Situationsmodells nutzten. Dabei wurde in der empirischen Untersuchung deutlich, dass Informationen genutzt wurden, die die Studierenden entweder ergänzten oder aus der inhaltlichen Diskussion ableiteten. Die *Strategie* ANREICHERN konnte mit Hilfe der Überlegungen von Kirsten (2021) in FOLGERNDES ANREICHERN und ERGÄNZENDES ANREICHERN konkretisiert werden. Während des FOLGERNDEN ANREICHERNS wurden von den Studierenden besonders die Eigenschaften von geraden und ungeraden Zahlen, Rechenoperationen, die in der allgemeingültigen Aussage vorkamen und Einschränkungen bezüglich der Ausweitung auf die Division durch andere Zahlen angereichert. Darüber hinaus wurden Inhalte angereichert, die sich auf den weiteren Verlauf der zu erarbeitenden Begründung beziehen. Das ERGÄNZENDE ANREICHERN bezog sich nur auf Informationen, die im Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘ gelehrt wurden. Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Informationsbasis zwar auf inhaltlicher Ebene angereichert wurde, aber eher keine ergänzenden Informationen hinzugefügt wurden, sondern eher Informationen aus der Aufgabenstellung und höchstens aus dem besuchten Modul genutzt wurden. Darüber hinaus zeigte die empirische Untersuchung, dass neben der Anreicherung von Informationen aus der Aufgabenstellung auch Informationen aus der Aufgabenstellung extrahiert wurden. So zeigte sich das EXTRAHIEREN, also das Herausarbeiten von Informationen aus der Aufgabenstellung entweder in SCHRIFTLICHER, MÜNDLICHER oder MARKIERENDER Ausprägung. Der Einsatz dieser *Strategien*

unterstützt die Annahme, dass die Studierenden intensiv mit Informationen aus der Aufgabenstellung gearbeitet haben, um das Situationsmodell aufzubauen.

Werden die *Strategien* der strukturellen Auseinandersetzung betrachtet, so fällt besonders auf, dass das FOKUSSIEREN, also das Bilden der mentalen Repräsentation durch das Einschränken der Betrachtungen auf einen Bereich oder Aspekt, gar nicht genutzt wurde. Insgesamt kann aus dieser Beobachtung gefolgert werden, dass diese *Strategie* wohl eher bei komplexeren und strukturell, aber auch inhaltlich reichhaltigeren Begründungsaufgaben mehr Anwendung finden könnte. Möglicherweise erscheint eine einfache ‚Wenn-dann-Aussage‘ mit quantitativ überschaubarem Inhalt als strukturell zu wenig herausfordernd, um sich auf einzelne Aspekte zu fokussieren, wie dies von Kirsten (2021) beobachtet werden konnte. Es ist aber auch möglich, dass den Studierenden eine solche *Strategie* nicht vertraut genug ist, um sie anzuwenden. Auch hier sind weitere Untersuchungen notwendig, um eine Aussage treffen zu können.

Die empirische Beobachtung hat jedoch gezeigt, dass die Studierenden eher inhaltlich als strukturell fokussieren. Dies lässt sich insbesondere daran erkennen, dass eine separate Betrachtung einzelner Aspekte der Aufgabenstellung in anderen *Strategien* implizit vorhanden war. So zeigt die Betrachtung der *Strategien* der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN eine Betrachtung von Beispielen, die nur die Quadratzahl an sich fokussiert, aber nicht für die gesamte Behauptung stehen und damit die Division durch 8 und den entstehenden Rest von 1 ebenfalls unberücksichtigt lassen. Die Studierenden haben sich hier also auf das Aufstellen einer Quadratzahl als einen Aspekt konzentriert, der in der zu begründenden Aussage eine Rolle spielt. Es ist anzunehmen, dass die Studierenden durchaus fokussieren, dies aber eher nicht strukturell tun, sondern eher inhaltlich. In der hier dargestellten Untersuchung zeigte sich diese Art des Fokussierens in Form von Beispielbetrachtungen, die als Ausgangspunkte, also als Ressourcen genutzt wurden. Aus diesem Grund wurde auf eine gesonderte Darstellung einer inhaltlichen Fokussierung als zusätzliche *Strategie* verzichtet. Eine solche wäre jedoch auf der Basis des empirischen Materials möglich gewesen.

Die empirischen Ergebnisse zeigten auch die Anwendung der *Strategie* KLASSIFIZIEREN und damit, dass die Studierenden die Aussage bezüglich ihrer Klasse einordnen und diese Information zum Bilden der mentalen Repräsentation nutzen. Weitere Ausprägungen dieser *Strategie* konnten empirisch nicht herausgearbeitet werden. Auf dieser Basis erschien es den Studierenden hilfreich, sich zumindest mit der Art der Aussage auseinanderzusetzen. Darüber hinaus konnte die Betrachtung eines Einzelfalls beobachtet und damit die *Strategie* SPEZIFIZIEREN zur Erarbeitung eines Situationsmodells identifiziert

werden.

Bei der empirischen Untersuchung der Makrostrategie WIEDERHOLEN wurde zudem deutlich, dass die Studierenden immer wieder zu verschiedenen Gedankengängen zurückkehrten. Die Makrostrategie WIEDERHOLEN zeigte sich in zwei unterschiedlichen *Strategien*: TEILE DER AUFGABENSTELLUNG WIEDERHOLEN und VORHERGEHENDE ÄUSSERUNG WIEDERHOLEN, wobei sich beides entweder direkt im Anschluss an zuvor verbalisierte Äußerungen oder auch als ein ‚späteres darauf zurück kommen‘, gezeigt haben. Das WIEDERHOLEN fungiert an verschiedenen Stellen als Unterstützung und baut entweder das Situationsmodell hinsichtlich des Erfassens der Struktur oder selbiges bezüglich der mathematischen Konzepte und Inhalte der Aussage mit auf. Darüber hinaus hat das WIEDERHOLEN die Funktion, zuvor entwickelte Ideen und Aufgabenbearbeitungsschritte, die möglicherweise auch aus anderen Strategieeinheiten stammen, in das Situationsmodell zu integrieren und dieses damit zu erweitern. Insbesondere letzteres bedeutet in der Folge für den Gesamtprozess eine eher zirkuläre und nicht lineare Betrachtung des Aufgabenbearbeitungsprozesses, wie sie bereits die Modelle von Wilson et al. (1993) oder Yimer und Ellerton (2010) gezeigt haben. Das WIEDERHOLEN als Makrostrategie scheint explizit darauf hinzuweisen.

Zusammenfassend nutzten die Studierenden vornehmlich inhaltliche Aspekte, hauptsächlich aus der Aufgabenstellung, um ein Repräsentationsmodell aufzubauen. Es ist also davon auszugehen, dass sie eher Wert auf eine inhaltliche Auseinandersetzung mit der Aufgabe legen, strukturelle Aspekte für die Aufgabenbearbeitung aber nicht favorisieren oder als nicht wichtig erachten. Dies steht im Gegensatz zu den von Kirsten (2021) beobachteten Studierenden beim Lösen von Beweisaufgaben. Dies könnte auf drei verschiedene Aspekte zurückzuführen sein. Zum einen ist die Struktur der Primäraufgabe im vorliegenden Projekt nicht so komplex, dass eine strukturelle Betrachtung in größerem Umfang zwingend erforderlich wäre, zum anderen unterscheiden sich auch die Studierendengruppen und die Inhalte und Anforderungen der Lehrveranstaltungen. Während Kirsten (2021) Studierende des gymnasialen Lehramts beobachtete, wurden in der vorliegenden Untersuchung Studierende des Grundschullehramts befragt. Diese beiden Studierendengruppen unterscheiden sich von vornherein in ihrer Affinität zur Mathematik. Während die Gymnasiallehramtsstudierenden das Fach Mathematik freiwillig wählen, ist die Veranstaltung ‚Mathematisches Professionswissen I‘ Pflichtveranstaltung im Bachelorstudiengang Grundschulpädagogik an der FU Berlin. Aus dieser persönlichen Disposition lässt sich auch die unterschiedliche Herangehensweise an solche Aufgaben ableiten. Darüber hinaus lässt sich insgesamt feststellen, dass die Wiederholung von Aspekten eine zentrale Rolle in den Prozessen der Aufgabenbearbeitung einzunehmen scheint.

Darüber hinaus hat die empirische Untersuchung gezeigt, dass sich die Strategieeinheiten nicht immer voneinander trennen lassen und Aspekte, die das VERSTEHEN charakterisieren, auch in der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN zu finden sind.

22.2 Strategieeinheit Argumente konstruieren und verknüpfen

Die *Strategien*, die der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN zugeordnet werden können, wurden aus in der Literatur befindlichen allgemeinen bzw. mathematikspezifischen Argumentationsrekonstruktionsmodellen und Begründungstypbetrachtungen abgeleitet. Wie in Kapitel 13 ausführlich in der Herleitung mit Literaturbezügen dargestellt, ergibt sich auch hier eine Strategiekollektion, deren *Strategien* im Folgenden einzeln aufgezählt werden sollen. Die jeweilige Makrostrategie ist in Klammern angegeben. Für die Makrostrategie BEWEISSKIZZE ERSTELLEN konnten aus der Literatur zunächst nicht unmittelbar *Strategien* abgeleitet werden, die die Erstellung der Beweisskizze konkretisieren. Sie wurde daher in dieser Auflistung der *Strategien* nicht aufgeführt, sondern in die Tabelle 22.2 durch die empirische Betrachtung integriert.

- Auswahl metaphorischer begrifflicher Ressourcen (Ressourcenauswahl)
- Auswahl begrifflicher Ressourcen auf bildlicher Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)
- Auswahl begrifflicher Ressourcen auf narrativer Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)
- Auswahl begrifflicher Ressourcen auf symbolischer Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)
- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf metaphorischer Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)
- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf bildlicher Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)
- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf narrativer Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND DISKUSSION DER ERGEBNISSE

- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf symbolischer Repräsentationsebene (Ressourcenauswahl)
- bildliche Beispielbetrachtung (Ressourcenauswahl)
- numerische Beispielbetrachtung (Ressourcenauswahl)
- komplementäre Beispielbetrachtung (Ressourcenauswahl)
- bildliche Beispielverifizierung (Transformieren)
- numerische Beispielverifizierung (Transformieren)
- bildliche Beispielfalsifizierung (Transformieren)
- numerische Beispielfalsifizierung (Transformieren)
- bildliche Beispielreihungen (Transformieren)
- numerische Beispielreihungen (Transformieren)
- konstruktives Transformieren (Transformieren)
- metrisches Transformieren (Transformieren)
- rechnerisches Transformieren (Transformieren)
- systematisches Transformieren (Transformieren)
- empirische Mustersuche (Transformieren)
- theoretische Mustersuche (Transformieren)

Insgesamt lässt sich aus diesen Überlegungen schlussfolgern, dass das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten zum einen aus dem Aufstellen einer Ressource und zum anderen aus dem Transformieren dieser besteht. Die in Kapitel 6 und Kapitel 20.5.2 bereits beschriebene kettenartige Struktur, die durch die erarbeiteten Grundannahmen in Kapitel 11 entstanden ist, wird innerhalb dieser Strategieeinheit besonders deutlich. Wird mit einer zuvor aufgestellten Ressource weitergearbeitet, so entstehen inhaltlich aufeinander bezogene Kettenglieder. Jedes Kettenglied ist eine *Strategie* bzw. Makrostrategie. Aus den theoretisch fundierten Überlegungen zu diesen Gedankenschritten ergaben sich die drei Makrostrategien RESSOURCENAUSWAHL, TRANSFORMIEREN und BEWEISSKIZZE ERSTELLEN. Wie in der vorangegangenen Aufzählung sichtbar wurde, konnten aus der Literaturgrundlage zunächst die ersten beiden Makrostrategien mit Hilfe der Überführung in eine *Strategie* konkretisiert

werden. Die *Strategien* der Makrostrategie RESSOURCENAUSWAHL lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Zum einen ist es möglich Beispiele als Ressourcen zu nutzen (BEISPIELBETRACHTUNG) und zum anderen können abstrakt vorliegende mathematische Konzepte als Ausgangspunkt für die Konstruktion und Verknüpfung der Argumente genutzt werden (AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN). In der bestehenden Literaturgrundlage wird demnach angenommen, dass entweder Beispiele oder mathematische Konzepte, die sich in der Kenntnis von Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten zeigen, als Ausgangspunkt für die Konstruktion und Verknüpfung von Argumenten anzunehmen sind. Sowohl die BEISPIELBETRACHTUNG als auch die AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN konnten wiederum zum einen durch den Aspekt der Repräsentationsebene und zum anderen durch den Aspekt EXTERN GENERIERT in ihrer Erscheinung weiter konkretisiert werden.

Auf Grundlage der in der Arbeit (Abschnitt III) dargestellten Systematisierung ließ sich das TRANSFORMIEREN als weitere Makrostrategie ableiten. Damit wurde ein Weiterarbeiten mit zuvor aufgestellten Ressourcen bezeichnet und kann sich in verschiedenen *Strategien* konkretisieren. Dabei ist es zwar wahrscheinlich, dass eine spezifische Makrostrategie des Transformierens auf eine spezifische Ressource (Makrostrategie RESSOURCENAUSWAHL) folgt, sich also bezüglich der Methode oder des Inhaltes zwingend ergeben muss, jedoch wurde dieser Aspekt in den vorherigen Untersuchungen nicht berücksichtigt und bedarf weiterer Auswertung des Materials, ob dem grundsätzlich so ist oder ob die *Strategien* untereinander andere Beziehungen aufweisen.

Aus der Literatur wurde entnommen, dass das TRANSFORMIEREN auf Basis eines Beispiels erfolgen kann. Verschiedene Arten der Verwendung von Beispielen konnten hier herausgearbeitet werden. Das Beispiel kann für sich allein stehen und die Aussage damit Verifizieren oder Falsifizieren (BEISPIELVERIFIZIERUNG, BEISPIELFALSIFIZIERUNG). Des Weiteren können Beispiele bewusst aneinandergereiht werden, um auf Basis der Reihung die Allgemeingültigkeit der Aussage zu begründen (BEISPIELREIHUNG).

Auch haben das RECHNERISCHE TRANSFORMIEREN und das METRISCHE TRANSFORMIEREN Beispiele als Ausgangspunkt. Das KONSTRUKTIVE TRANSFORMIEREN ist ebenso meist auf ein Beispiel bezogen, wobei es sich auch, wie im Modell von Padberg und Büchter (2015) im Schritt des Verallgemeinerns gezeigt, auch auf nicht konkrete Beispiele, sondern beispielsweise allgemein dargestellte Zahlen beziehen kann (siehe Kapitel 7.2). Die Studierenden verändern je nach gewählter Repräsentationsebene durch visuelle Manipulation, Ausrechnen oder durch Abmessen das Beispiel, um Zusammenhänge zu erkennen und die Aussage allgemeingültig zu begründen und damit das Allgemeine sichtbar zu machen.

Auch die MUSTERSUCHE bezieht sich inhaltlich auf Beispiele und versucht

die Allgemeingültigkeit der Aussage mit dem Ausweiten von anhand eines oder mehrerer Beispiele gefundenen Musters auf die ganze Klasse der mathematischen Objekte auszuweiten. Das SYSTEMATISCHE TRANSFORMIEREN als weitere *Strategie* bezieht sich nicht auf Beispiele, sondern nutzt mathematische Definitionen, Sätze und Gesetzmäßigkeiten, um weiterzuarbeiten und gegebenenfalls Ressourcen umzuformen oder zu verändern.

Insgesamt kann demnach unterschieden werden zwischen einem TRANSFORMIEREN, welches auf Beispielen basiert und einem, welches eher auf abstrakt und möglicherweise auch algebraisch vorliegenden mathematischen Konzepten basiert. Bezogen auf das Modell nach Brunner (2013;2014), das in Kapitel 10 in Form der Abbildung 10.1 auf das Erkenntnisinteresse der vorliegenden Arbeit adaptiert wurde, bedeutet dies, dass die in der Beweistypenbetrachtung vereinten Prozesse, Repräsentationsebenen und Denkrichtungen auch getrennt voneinander betrachtet werden können und hinsichtlich der Art der ausgewählten Ressource und der Art und Weise, wie mit dieser weiter gearbeitet wird (TRANSFORMIEREN), unterschieden werden kann. Die Prozesse (*Argumentieren* bzw. *formal-deduktives Beweisen*) gehen in den Denkrichtungen auf und sind in die *Strategien* der RESSOURCENAUSWAHL und des TRANSFORMIERENS integriert.

Das Ergebnis einer eher explorativen Phase ist eine Beweisskizze, die wiederum als Ausgangspunkt für die Überarbeitung und Formgebung der Argumentation betrachtet werden kann (BEWEISSKIZZE ERSTELLEN). Diese Makrostrategie wird mit Hilfe der empirischen Betrachtung zu *Strategien* konkretisiert.

Werden die oben aufgezählten theoretisch möglichen *Strategien* mit Hilfe der empirischen Untersuchung betrachtet bzw. ergänzt, ergibt sich eine Kollektion. In der nachstehenden Tabelle 22.2 werden die in Kapitel 21.1, Kapitel 21.2 und Kapitel 21.3 nach den drei Aspekten der Forschungsfrage II separat dargestellten *Strategien* der Strategieeinheit *Argumente konstruieren und verknüpfen* synthetisiert. Dabei wird in der Spalte 1 die *Strategie* benannt, ist in Spalte 2 die Makrostrategie notiert, in Spalte 3 wird mit Hilfe eines Kürzels die Herleitung vermerkt. Wenn die jeweilige *Strategie* ausschließlich theoretisch abgeleitet werden konnte aber empirisch nicht so sichtbar wurde, wurde diese mit *th* gekennzeichnet. Wurde sie theoretisch abgeleitet und genau so empirisch beobachtet, so wurde sie mit *th und e* gekennzeichnet. Ist sie ausschließlich durch die empirischen Betrachtungen ergänzt worden so wurde ein *e* in die dritte Spalte notiert. Wenn eine neue *Strategie* durch die Datenauswertung entstand, die nur durch Hinzufügen einer oder mehrere Ausprägungen zu einer bereits theoretisch abgeleiteten *Strategie* entwickelt wurde, so wurde dies mit dem Kürzel *th* und dem Vermerk *aber konkretisiert* versehen. Im Anhang G findet sich eine nach diesen Aspekten geordnete

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND
DISKUSSION DER ERGEBNISSE

alternative Darstellung.

Tabelle 22.2: Synthese der Ergebnisse bezüglich der *Strategien* der Strategieeinheit ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN

Strategie	Makrostrategie	Vermerk
Auswahl metaphorischer begrifflicher Ressourcen	Ressourcenauswahl	th
extern generierte Auswahl metaphorischer begrifflicher Ressourcen	Ressourcenauswahl	th
Auswahl begrifflicher Ressourcen auf bildlicher Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	th und e
extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf bildlicher Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	e
Auswahl begrifflicher Ressourcen auf narrativer Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	th und e
extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf narrativer Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	th und e
Auswahl begrifflicher Ressourcen auf symbolischer Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	th und e
extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf symbolischer Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	th
bildliche Beispielbetrachtung	Ressourcenauswahl	th (aber konkretisiert)
ganzheitliche Beispielbetrachtung auf bildlicher Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	e
teilweise Beispielbetrachtung auf bildlicher Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	e

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND
DISKUSSION DER ERGEBNISSE

extern generierte ganzheitliche Beispielbetrachtung auf bildlicher Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	e
numerische Beispielbetrachtung	Ressourcenauswahl	th (aber konkretisiert)
ganzheitliche Beispielbetrachtung auf numerischer Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	e
teilweise Beispielbetrachtung auf numerischer Repräsentationsebene	Ressourcenauswahl	e
komplementäre Beispielbetrachtung	Ressourcenauswahl	th und e
irrelevante teilweise Beispielbetrachtung	Ressourcenauswahl	e
irrelevante ganzheitliche Beispielbetrachtung	Ressourcenauswahl	e
extern generierte nicht-inhaltliche Ressourcenauswahl	Ressourcenauswahl	e
bildliche Beispielverifizierung	Transformieren	th und e
numerische Beispielverifizierung	Transformieren	th
bildliche Beispielfalsifizierung	Transformieren	th
numerische Beispielfalsifizierung	Transformieren	th
bildliche Beispielreihung	Transformieren	th und e
numerische Beispielreihung	Transformieren	th
konstruktives Transformieren	Transformieren	th und e
extern generiertes konstruktives Transformieren	Transformieren	e
rechnerisches Transformieren	Transformieren	th und e
metrisches Transformieren	Transformieren	th
empirische Mustersuche	Transformieren	th (aber konkretisiert)

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND
DISKUSSION DER ERGEBNISSE

empirische Mustersuche auf bildlicher Repräsentationsebene	Transformieren	e
empirische Mustersuche auf numerischer Repräsentationsebene	Transformieren	e
theoretische Mustersuche	Transformieren	th
fokussierende Mustersuche	Transformieren	e
variative Mustersuche	Transformieren	e
systematisches Transformieren	Transformieren	th (aber konkretisiert)
einsetzendes systematisches Transformieren	Transformieren	e
zerlegendes systematisches Transformieren	Transformieren	e
angewandtes systematisches Transformieren	Transformieren	e
abstrahierende Änderung der Repräsentationsebene	Transformieren	e
exemplifizierende Änderung der Repräsentationsebene	Transformieren	e
ikonisierende Änderung der Repräsentationsebene	Transformieren	e
Übertragen	Transformieren	e
symbolisches Darstellen der Beweisskizze	Beweisskizze erstellen	e
zielformulierende Hypothese aufstellen	Beweisskizze erstellen	e
zeichnerisches Darstellen der Beweisskizze	Beweisskizze erstellen	e
narrativ-zusammenfassendes Darstellen der Beweisskizze	Beweisskizze erstellen	e

Es konnte empirisch gezeigt werden, dass die Studierenden die Makrostrategie RESSOURCENAUSWAHL, aber auch die Makrostrategie TRANSFORMIEREN anwendeten. Als Ressourcen wurden Beispiele auf VISUELLER und NUMERISCHER Repräsentationsebene aufgestellt und betrachtet (BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE, BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE in spezi-

fischen weiteren Ausprägungen).

Um die Beispiele *BILDlich* zu repräsentieren, wurden ausschließlich Punktmuster in Form von figurierten Zahlen, jedoch keine anderen möglichen Arten von bildlichen Darstellungen, wie Konstruktionen oder ähnliches genutzt. Punktmuster eignen sich gut für Aussagen im Bereich der Arithmetik und stellen natürliche Zahlen ikonisch dar. Die empirische Untersuchung zeigte weiterhin, dass die Konkretisierung der Beispielbetrachtung anhand der gewählten Repräsentationsebene nicht ausreicht, sondern diese weiter ausdifferenziert werden muss. So wurde unterschieden, ob das betrachtete Beispiel den gesamten in der Aussage thematisierten Inhalt transportiert oder nur einen Aspekt der gegebenen Aussage zeigt. So erschien es den Studierenden zum Teil zielführend ein Beispiel zu finden, welches nicht nur eine ungerade Quadratzahl darstellt, sondern auch die Division durch 8 und den sich ergebenden Rest 1 darstellt (*GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE* oder *GANZHEITLICHE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE*). An anderer Stelle wurde ausschließlich für die ungerade Quadratzahl ein Beispiel aufgestellt und damit die *Strategie* *TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE* oder *TEILWEISE BEISPIELBETRACHTUNG AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE* genutzt. Aus der Beobachtung, dass Beispiele als Ressource für die Konstruktion und Verknüpfung von Argumenten aufgestellt und betrachtet wurden, kann angenommen werden, dass Beispiele nicht nur zum Aufbau eines Situationsmodells (Kapitel 22.1) verwendet werden, sondern auch als Bestandteil eines Arguments eine wichtige Rolle spielen. Dies zeigt sich auch in bereits veröffentlichter Literatur in den Betrachtungen zum generischen *Begründen* und der Anwendung von generischen Beispielen (Kapitel 7.2).

Im Kodierungs- und Auswertungsprozess der Lautdenkenprotokolle konnte an einigen Stellen nicht eindeutig aus dem Kontext geschlossen werden, ob das Aufstellen des Beispiels dem Aufbau eines Situationsmodells dient oder als Ausgangspunkt für die Konstruktion und Verknüpfung der Argumentation wichtig ist. Grund dafür war, dass sowohl aus dem Material der introspektiven Phase als auch aus dem Material der retrospektiven Phase hier keine eindeutige Zuordnung erfolgen konnte, da keine Intention geäußert wurde. Folglich sind einige *Strategien*, die das Betrachten von ganzheitlichen bzw. teilweisen Beispielen auf *BILDLICHER* bzw. *NUMERISCHER* Repräsentationsebene zeigen, entweder mit dem Ziel des Aufbaus eines Situationsmodells aufgestellt wurde (*BEISPIELHAFTES ÜBERSETZEN* oder *VISUELLES ÜBERSETZEN*, siehe Kapitel 22.1) oder mit dem Ziel anhand eines als genetisch bewerteten Beispiels ein Argument zu konstruieren.

Für die Gesamtbetrachtung des Aufgabenbearbeitungsprozesses bedeu-

tet dies, dass Beispiele in ihrer Funktion nicht immer klar bewertet werden können und das Aufstellen der Beispiele nicht eindeutig einer Phase bzw. einer Strategieeinheit zuzuordnen ist. Zum einen zeigte sich darin der explorative Charakter, der Begründungs- und Beweisprozessen im Kontext von Problemlöseprozessen als Charakteristika zugeschrieben wird (Kapitel 4.2). Zum anderen zeigte es sich darin, dass den Studierenden selbst eine Phasierung ihres gesamten Bearbeitungsprozesses nicht explizit bewusst zu sein scheint, sondern Schritte eher intuitiv ausprobiert und aneinandergereiht werden. Der Zusammenhang von *Strategien* bedarf noch weiterer Forschung.

Neben den bereits genannten Typen von Beispielbetrachtungen konnten im Material auch die *Strategien* IRRELEVANTE BEISPIELBETRACHTUNG und KOMPLEMENTÄRE BEISPIELBETRACHTUNG im Material beobachtet werden. In den meisten Fällen wurden gerade Quadratzahlen als Beispiele betrachtet, anstatt sich auf ungerade Quadratzahlen zu konzentrieren, wie es die Aufgabenstellung explizit beschreibt. Für die Studierenden scheint es wichtig zu sein, entweder bewusst Gegenbeispiele zu generieren oder die Klasse der Objekte über die Gültigkeit der Aussage hinaus zu erweitern, um Zusammenhänge und Muster zu erkennen und diese als Grundlage für die Begründung zu nutzen. Die Bezeichnung als irrelevantes Beispiel bezieht sich hier auf eine sachstrukturelle Ebene und damit nur auf Inhalte der zu begründenden Aussage. Aus Sicht der Studierenden ist das Aufstellen dieser Beispiele an sich nicht als irrelevant, sondern als relevante *Strategie* zu betrachten.

Die begrifflichen Ressourcen traten ausschließlich BILDLICH, NUMERISCH, NARRATIV und SYMBOLISCH auf, nicht aber METAPHORISCH. Insgesamt zeigt sich darin, dass alle vier genutzten Repräsentationsebenen naheliegende Möglichkeiten bieten, einen Ausgangspunkt für die Konstruktion von Argumenten zu formulieren.

Weiterhin ist zu konstatieren, dass metaphorische begriffliche Ressourcen nicht ausgewählt wurden. Dies liegt zum einen in der Natur der Aufgabe begründet. Eine Metapher bietet sich hier nicht unbedingt an. Zum anderen kann dies aber auch im Vorwissen der Studierenden begründet sein, die durch das Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘ nur mit einer BILDLICHEN (ikonischen), einer NUMERISCHEN, einer NARRATIVEN oder einer SYMBOLISCHEN Repräsentationsebene konfrontiert wurden. Die NARRATIVE Repräsentationsebene bezieht sich hier auf die instruierte Verwendung von Bildungssprache im Sinne der Begründungsebene II nach Padberg und Büchler (2015). Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass eine Verwendung der BILDLICHEN Repräsentationsebene ausschließlich mit der zusätzlichen Eigenschaft EXTERN GENERIERT kodiert werden konnte. Die Studierenden nutzten die BILDLICHE Ebene für begriffliche Ressourcen nur dann, wenn sie versuchten Inhalte aus der Lehrveranstaltung abzurufen bzw. versuchten

etwas bekanntes nachzuzahlen. Da diese *Strategie* jedoch nur einmal in der Stichprobe auftrat, kann auch gefolgert werden, dass eine Darstellung abstrakter Inhalte auf der ikonischen Repräsentationsebene für die Studierenden nicht selbstverständlich ist. Es scheint keine eigene Vorstellung davon zu geben, wie abstraktere Sachverhalte mit Hilfe von Punktmustern dargestellt werden können.

Insgesamt lässt sich aus der empirischen Untersuchung ableiten, dass es zwei Möglichkeiten gibt, eine Ressource zu entwickeln. Wie beschrieben, kann sich entweder für das Aufstellen von Beispielen oder für das Entwickeln von begrifflichen Ressourcen auf Basis von Definitionen, Sätzen und Gesetzmäßigkeiten entschieden werden. Das bedeutet also, dass der Ausgangspunkt für die Konstruktion und Verknüpfung von Argumenten aus zwei Bereichen kommen kann. Einerseits kann die Entscheidung aus einem eher abstrakten und möglicherweise algebraischen Konzept, das mathematische Strukturen verwendet, und andererseits aus einem eher konkreten Konzept, das leicht überschaubare und konkrete arithmetische Konzepte verwendet, getroffen werden.

Die empirische Untersuchung hat auch gezeigt, dass die Studierenden mit den zuvor aufgestellten Ressourcen weitergearbeitet haben und diese umgestaltet oder transformiert haben, um eine allgemeingültige Begründung zu erstellen. Dabei konnten unterschiedliche Transformationen beobachtet werden. Wurde versucht anhand von Einzelbeispielen oder Aneinanderreihungen von Beispielen die Aussage zu verifizieren, so trat dies ausschließlich auf BILDLICHER Repräsentationsebene auf. Ein ähnliches Vorgehen mit NUMERISCH dargestellten Beispielen konnte nicht beobachtet werden. Wenn versucht wurde, die Aussage mit einzelnen Beispielen zu untermauern, dann nicht mit Zahlenbeispielen, sondern mit Hilfe von ikonischen Darstellungen (konkret: Punktmuster in Form von figurierten Zahlen).

In Verbindung mit der oben beschriebenen Auffälligkeit, dass begriffliche Ressourcen ausschließlich auf dieser Ebene betrachtet wurden, liegt die Vermutung nahe, dass es für die Studierenden naheliegend ist, dass Einzelbeispiele auf einer BILDLICHEN Repräsentationsebene als ausreichender Bestandteil einer allgemeingültigen Begründung gelten, Zahlenbeispiele jedoch nicht. Auch hier kann der Grund in den Erfahrungen in der besuchten Lehrveranstaltung gesucht werden. Es ist zu vermuten, dass die Studierenden ikonische Darstellungen und figurierte Zahlen erst im Laufe des Studiums im Kontext des mathematischen *Begründens* und *Beweisens* kennengelernt haben und sich daraus das Konzept entwickelt hat, dass das Aufstellen von Beispielen auf dieser Repräsentationsebene eine gewisse Allgemeingültigkeit zeigt, die nur NUMERISCH dargestellten Beispielen nicht zugeschrieben wird. Welches Konzept von Allgemeingültigkeit die Studierenden haben, bedarf

jedoch weiterer Forschung und kann mit der vorliegenden Datenauswertung nicht eindeutig beantwortet werden.

Es war weiterhin zu beobachten, dass das METRISCHE TRANSFORMIEREN (Strategieeinheit: ARGUMENTE KONSTRUIEREN UND VERKNÜPFEN, Makrostrategie: TRANSFORMIEREN) nicht angewendet wurde. Dies könnte beispielsweise darin begründet sein, dass es keinen Anlass zum Abmessen innerhalb der Aussage gibt. Wenn die zu begründende Aussage mathematische Konzepte, die ein Abmessen statt beispielsweise ein Ausrechnen beinhaltet hätte, dann hätte sich diese *Strategie* eventuell zeigen können. Es ist also davon auszugehen, dass die *Strategien* eng mit der Art der Aufgabe zusammenhängen.

Außerdem zeigte sich in der empirischen Betrachtung, dass grundsätzlich eine Suche nach Mustern zu beobachten war. Die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE zeigte sich weniger als durch die intensive Thematisierung einer induktiven Denkrichtung innerhalb der Lehrveranstaltung und die hohe Ähnlichkeit der Aufgabe innerhalb der Untersuchung und Aufgaben auf den Übungsblättern des Moduls zu erwarten gewesen wären. Durch die Untersuchung ergänzt werden konnte die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE durch die Attribute BILDLICH und NUMERISCH. Es ließen sich daher die *Strategien* EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE und EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE ableiten. Beobachtet werden konnte, dass die Studierenden die Beispiele, welche sie als Ausgangspunkt für die Suche nach Mustern nutzten, auf zwei verschiedenen Repräsentationsebenen darstellten. Es wurde sowohl anhand von Punktemustern (bildlich) als auch anhand von Zahlenbeispielen (numerisch) ein Muster bzw. ein Zusammenhang gesucht, der als Basis für die Begründung dienen kann.

Die THEORETISCHE MUSTERSUCHE, wie aus den Konzepten zum Verallgemeinern abgeleitet werden konnte, zeigte sich gar nicht. Die Studierenden zogen es insgesamt also vor, ein Muster anhand mehrerer Beispiele zu suchen und das Muster entweder vergleichend innerhalb der aufgestellten Beispiele zu finden oder es anhand von Verhältnissen und Beziehungen zwischen den Beispielen auszumachen. Sie zeigten demnach keine Vorgehensweise, die eine Suche nach Mustern anhand der Struktur innerhalb eines Beispiels erkennen ließ.

Um diese Beobachtung einzuordnen, bieten sich verschiedene Erklärungsansätze an. Möglicherweise besteht eine Unsicherheit bezüglich des Findens eines geeigneten bzw. generischen Beispiels, welches die Struktur bzw. die wesentlichen Merkmale gut transportieren kann. Mit Blick auf die Übungsaufgaben, mit denen die Studierenden innerhalb des Moduls konfrontiert wurden, kommt außerdem noch der Erklärungsansatz in Frage, der den Einfluss der

Inhalte des Moduls auf die Gedankenschritte thematisiert. Innerhalb des Übungsbetriebes lösten die Studierenden Aufgaben, die ein Aufstellen von mehreren Beispielen forderten, um zu verallgemeinern (im Sinne des Modells nach Padberg & Büchter, 2015). Außerdem gab es ebenfalls Aufgaben, die das Allgemeine zwischen den aufgestellten Beispielen bzw. in den Verhältnissen dieser Beispiele zueinander sehen ließen. Es ist anzunehmen, dass beide Faktoren das Strategierepertoire beeinflussten.

Darüber hinaus zeigte die empirische Untersuchung, dass grundsätzlich eine Suche nach Mustern zu beobachten war. Die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE zeigte sich weniger, als aufgrund der intensiven Thematisierung einer induktiven Denkrichtung innerhalb der Lehrveranstaltung und der hohen Ähnlichkeit der Aufgabe innerhalb der Untersuchung und den Aufgaben auf den Übungsblättern des Moduls zu erwarten gewesen wäre. Durch die Untersuchung ergänzt werden konnte die EMPIRISCHE MUSTERSUCHE durch die Attribute BILDlich und NUMERISCH. Es ließen sich daher die *Strategien* EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE und EMPIRISCHE MUSTERSUCHE AUF NUMERISCHER REPRÄSENTATIONSEBENE ableiten. Es konnte beobachtet werden, dass die Studierenden die Beispiele, die sie als Ausgangspunkt für die Suche nach dem Muster verwendeten, auf zwei verschiedenen Repräsentationsebenen darstellten. Es wurde sowohl mit Hilfe von Punktmustern (bildlich) als auch mit Hilfe von Zahlenbeispielen (numerisch) nach einem Muster bzw. einem Zusammenhang gesucht, der als Grundlage für die Begründung dienen kann.

Durch die empirischen Beobachtungen konnte die *Strategie* ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE in den drei Ausführungen ABSTRAHIEREND, EXEMPLIFIZIEREND und IKONISIEREND ergänzt werden. Hier zeigte sich demnach ein TRANSFORMIEREN oder Umwandeln von einer Repräsentationsebene zu einer anderen. Aus dieser Beobachtung kann geschlossen werden, dass es für die Studierenden naheliegend ist, die Ebene zu wechseln, um das Allgemeine für die Begründung oder sich selbst sichtbar zu machen. Dies unterstreicht noch einmal den explorativen Charakter der Aufgabenbearbeitung, wie er u.a. auch von Stylianides und Ball (2008) in ihren Ausführungen (Kapitel 4.2) herausgearbeitet wurde. Zusätzlich lässt das empirische Material die Beobachtung zu, dass sowohl eine Umwandlung von abstrakten bzw. allgemeinen Darstellungen von Variablen in konkrete Beispiele auf Zahlenebene und umgekehrt stattfanden (*abstrahierende Änderung der Repräsentationsebene*, EXEMPLIFIZIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE), jedoch die IKONISIERENDE ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE nur in eine Richtung stattfand. Das bedeutet, dass BILDliche Repräsentationen nicht in NUMERISCHE oder abstrakte Repräsentationen umgewandelt wurden, sondern immer nur in BILDliche Repräsentationen.

Ein naheliegender Erklärungsansatz für die Änderungen der Repräsentationsebene ist anzunehmen, dass die erlernten Fähigkeiten der Studierenden hier ausschlaggebend sind. So erlernten sie im Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘ die Darstellung von mathematischen Sachverhalten auf verschiedenen Ebenen kennen. Allerdings wurde das direkte Überführen von einer Darstellungsebene zur anderen nicht explizit thematisiert. Diese *Strategie* ergab sich offenbar durch die Beschäftigung mit den verschiedenen Repräsentationsebenen an sich.

Ebenfalls empirisch ergänzt werden konnte eine *Strategie*, die hier als ÜBERTRAGEN bezeichnet wird. Diese *Strategie* beschreibt, wie bereits definiert, ein Vorgehen, das einen Rückbezug auf die vorgegebene Aussage (in der Aufgabenstellung enthaltene Behauptung) zeigt. Zuzuordnen ist diese *Strategie* möglicherweise auch dem zirkulären Charakter von Problemlösebearbeitungsprozessen, wie sie in anderen Veröffentlichungen bereits beschrieben wurden (Kapitel 4.2). Durch diese Art inhaltlichen Abgleichs und Rückgriff auf Inhalte aus der Aussage ist es möglich, dass neben dem TRANSFORMIEREN, zu welchem das ÜBERTRAGEN zugeordnet wurde, auch erneut Verstehensaktivitäten einbezogen werden. Es ist möglich, dass die *Strategie* ÜBERTRAGEN damit auch der Strategieeinheit VERSTEHEN zuzuordnen. Eine Klärung dieses Zusammenhangs bedarf weiterer Untersuchungen, um auf die Funktion dieser *Strategie* schließen und eine abschließende Aussage zu dieser Vermutung treffen zu können.

Die Makrostrategie BEWEISSKIZZE ERSTELLEN konnte empirisch konkretisiert werden. Hier zeigte sich, dass die Beweisskizze auf verschiedenen Repräsentationsebenen erstellt werden kann, ähnlich den Ebenen, die für die Ressourcen verwendet wurden. Es erscheint daher naheliegend, auch bei der Darstellung der Beweisskizze auf diese den Studierenden bekannten Repräsentationsebenen zurückzugreifen. Bemerkenswert ist hier auch, dass sich nicht nur für eine Repräsentationsebene entschieden wurde, sondern die Gesamtheit der Studierenden aus der Stichprobe verschiedene Möglichkeiten nutzte. Es zeigt sich jedoch, dass die ZUSAMMENFASSEND-NARRATIVE Ebene weitaus verbreiteter war als die anderen.

Durch das Datenmaterial konnte weiterhin die *Strategie* ZIELFORMULIERENDES HYPOTHESE AUFSTELLEN abgeleitet werden. Auch diese *Strategie* zeigt die in der Literatur bereits konstatierte zirkuläre Betrachtung von Problemlöseprozessen, zu denen ein Begründungsaufgabenbearbeitungsprozess ebenfalls zählt.

Insgesamt wurde durch die empirische Betrachtung sichtbar, dass während einer Phase, in der Argumente konstruiert und verknüpft werden, *Strategien* der drei beispielsweise bei Wittmann und Müller (1988) aber auch bei Brunner (2013;2014) oder Knipping und Reid (2010) beschriebenen Begründungstypen

genutzt wurden. Auch wenn hier ein Einfluss der Lehrveranstaltung erkennbar ist, scheinen die drei mit den Typen verbundenen Konzepte in ihren Ausprägungen eher stabil zu sein.

Zudem zeigte sich, dass die Studierenden die in der Literatur, insbesondere bei Bruner et al. (1971), aber auch bei Brunner (2014) beschriebenen Repräsentationsebenen für die Darstellung der Ressourcen verwendeten. Beides führt zu der Annahme, dass die Studierenden der Stichprobe keine Präferenz für eine Denkrichtung oder Repräsentationsebene hatten. Darüber hinaus wurde deutlich, dass die Aktivitäten, die das Konstruieren und Verknüpfen von Argumenten zeigen, sowohl das Aufstellen von Ressourcen als auch das Weiterarbeiten mit ihnen oder das Umformen von Ressourcen zeigen. Es wird durch die empirische Betrachtung demnach die Annahme bestätigt, dass die in Abschnitt III erarbeitete Sichtweise auf Prozesse als kettenartige Struktur als tragfähig bewertet werden kann.

22.3 Strategieeinheit Diskurs

Die *Strategien*, die der Strategieeinheit DISKURS zugeordnet werden können, wurden aus in der Literatur befindlichen Ausführungen zu Aktivitäten des *Formulierens* und *Validierens* im Kontext *Akzeptanz des Beweises durch die mathematische Community* (Ufer & Reiss, 2009) abgeleitet.

Wie im Kapitel 14 in der Herleitung mit Literaturhinweisen ausführlich dargestellt, ergibt sich auch hier eine Strategiekollektion, deren *Strategien* im Folgenden einzeln aufgeführt werden. In Klammern ist die jeweilige Makrostrategie angegeben.

- fachsprachliches Formulieren (Formulieren)
- alltagssprachliches Formulieren (Formulieren)
- bildungssprachliches Formulieren (Formulieren)
- Rückschau halten (Validieren)

Im Prinzip ist diese Phase bzw. Strategieeinheit durch Formulierungs- und Validierungsaktivitäten gekennzeichnet. Die Beweisskizze wird hier so überarbeitet, dass sie in den Diskurs mit der mathematischen Community oder der Lerngruppe eingebracht und dort diskutiert werden kann. Für die sprachliche Überarbeitung können drei verschiedene Sprachregister verwendet werden. Daraus ergeben sich die *Strategien* FACHSPRACHLICHES FORMULIEREN, ALLTAGSSPRACHLICHES FORMULIEREN und BILDUNGSSPRACHLICHES

KAPITEL 22. ZUSAMMENFASSENDE BETRACHTUNGEN UND DISKUSSION DER ERGEBNISSE

FORMULIEREN. Neben dem Formulieren ist auf Basis der Betrachtung des Aufgabenbearbeitungsprozesses als Problemlöseprozess die RÜCKSCHAU (Polya, 1949) Basis für eine weitere *Strategie* dieser Strategieeinheit. Daraus ergibt sich die *Strategie* RÜCKSCHAU HALTEN.

Werden die oben aufgezählten theoretisch möglichen *Strategien* mit Hilfe der empirischen Untersuchung betrachtet bzw. durch diese ergänzt, ergibt sich die folgende Kollektion. In der nachstehenden Tabelle 22.3 werden die in Kapitel 21.1, Kapitel 21.3 und Kapitel 21.2 nach den drei Aspekten der Forschungsfrage II separat dargestellten *Strategien* der Strategieeinheit DISKURS synthetisiert. Dabei wird in der Spalte 1 die *Strategie* benannt, ist in Spalte 2 die Makrostrategie notiert, in Spalte 3 wird mit Hilfe eines Kürzels die Herleitung vermerkt. Wenn die jeweilige *Strategie* ausschließlich theoretisch abgeleitet werden konnte aber empirisch nicht so sichtbar wurde, wurde diese mit *th* gekennzeichnet. Wurde sie theoretisch abgeleitet und genau so empirisch beobachtet, so wurde sie mit *th und e* gekennzeichnet. Ist sie ausschließlich durch die empirischen Betrachtungen ergänzt worden so wurde ein *e* in die dritte Spalte notiert. Wenn eine neue *Strategie* durch die Datenauswertung entstand, die nur durch Hinzufügen einer oder mehrere Ausprägungen zu einer bereits theoretisch abgeleiteten *Strategie* entwickelt wurde, so wurde dies mit dem Kürzel *th* und dem Vermerk *aber konkretisiert* versehen. Im Anhang G findet sich eine alternative Darstellung geordnet nach diesen Aspekten.

Tabelle 22.3: Synthese der Ergebnisse bezüglich der *Strategien* der Strategieeinheit DISKURS

Strategie	Makrostrategie	Vermerk
fachsprachliches Formulieren	Formulieren	th
alltagssprachliches Formulieren	Formulieren	th
bildungssprachliches Formulieren	Formulieren	th und e
Rückschau halten	Validieren	th und e

Die empirischen Untersuchungen zeigen, dass die Studierenden der Stichprobe lediglich eine bildungssprachliche Überarbeitung einer zuvor erstellten Beweisskizze vornahmen. Eine fachsprachliche oder alltagssprachliche Überarbeitung konnte nicht gefunden werden. Als Erklärungsansatz bietet sich die intensive Thematisierung der Bildungssprache in der zuvor besuchten

Lehrveranstaltung an. Die Studierenden wurden in der Vorlesung und in den Übungen häufig mit bildungssprachlichen Formulierungen mathematischer Begriffe konfrontiert. Die *Strategie* RÜCKSCHAU HALTEN konnte lediglich zwei Mal kodiert werden. Die Studierenden überprüften ihre Begründungen also nur sehr selten.

Insgesamt hat sich empirisch gezeigt, dass eine Überarbeitung der zuvor erstellten Beweisskizze kaum stattgefunden hat. Die Begründung verbleibt somit fast immer auf der Ebene der Beweisskizze und die *Strategien* der Strategieeinheit DISKURS werden somit kaum genutzt. Für den daraus resultierende fehlende Abschluss der Begründung können verschiedene Ursachen vermutet werden. Zum einen wurde innerhalb der Ankündigung, die an die Studierenden im Vorhinein gegeben wurde, aber auch innerhalb des Vorgesprächs das eigentliche *Begründen* betont und besonders Wert auf den Prozess, weniger aber auf das Ergebnis gelegt (siehe auch Anhang A). Eine Überarbeitung der Beweisskizze für eine mögliche Einreichung wurde nicht explizit gefordert.

Die empirischen Beobachtungen vermitteln weiterhin den Eindruck, dass die studentischen Konzepte des mathematischen *Begründens* und *Beweisens* den sozialen Aushandlungsprozess nicht einbeziehen. Formulierungs- und Validierungsaktivitäten treten hinter diesem Konzept zurück. Sichtbar wurde dieses Ergebnis bereits in Studien zu Beliefs über mathematische Beweise und Begründungen von Mingus und Grassl (1999) und Mudaly (2016). Auch hier betonten die Studierenden andere Funktionen eines mathematischen Beweises oder einer mathematischen Begründung und vernachlässigten die Funktion der Überzeugung oder des In-Kontakt-Tretens mit der Lerngruppe oder der mathematischen Community. Dies führt zu der Annahme, dass diese Phase bzw. diese Funktion eines Beweises in der Lehrveranstaltung nicht oder zu wenig explizit thematisiert wurde. Betrachtet man die Inhalte und Übungen, so ist dieser Erklärungsansatz durchaus wahrscheinlich.

22.4 Fazit

Um die übergeordnete Forschungsfrage

Welche Strategien werden genutzt, um eine allgemeingültige Begründung eines mathematischen Satzes im Bereich der Arithmetik zu erarbeiten?

zu beantworten, lassen sich neben der oben detailliert dargestellten (Kapitel 21) und später eingeordneten und diskutierten Kollektion (Kapitel 22) an Einzelstrategien auch insgesamt als Essenz folgende Ergebnisse formulieren.

- Die Studierenden wenden *Strategien* an, die auf einen explorativen

(möglicherweise auch zirkulären) und nicht linearen Prozess schließen lassen.

- In fast allen Fällen führen die Studierenden die Begründung höchstens bis zu einer *Beweisskizze*, überarbeiten diese aber nicht, um mit der mathematischen Community oder der Lerngruppe in Kontakt zu treten.
- Aus der Betrachtung der *Strategien* lässt sich schließen, dass die Studierenden häufig einzelne Komponenten und Strukturen aus der Vorlesung imitieren. Daraus lässt sich wiederum ableiten, dass die Studierenden der Stichprobe nach Abschluss des Moduls ‚Mathematisches Professionswissen I‘ keine eigenen tragfähigen Konzepte von Begründungs- und Beweisschritten erworben haben.
- Die gewählten *Strategien* erscheinen abhängig von Inhalt und Struktur der Begründungsaufgabe und stehen in engem Zusammenhang mit den Erfahrungen und Inhalten aus der Lehrveranstaltung.
- Die Studierenden verwenden jedoch alle drei in der vorangegangenen Literatur dargestellten *Denkrichtungen*. Die Bedeutung der Lehrveranstaltung ist hier prinzipiell zu finden, ist aber nicht der einzige Einfluss auf die Wahl der *Strategie*.
- Das Aufstellen von Beispielen auf verschiedenen Repräsentationsebenen spielt eine zentrale Rolle im Prozess. Durch irrelevante und komplementäre Beispiele wird der Kontext der mathematischen Aussage erweitert.
- Das Aufstellen von generischen Beispielen und das ‚Sehen‘ von Strukturen ist als herausfordernde Aktivität zu betrachten.
- Das Betrachten von Zusammenhängen unter Verwendung verschiedener Repräsentationsebenen scheint von den Studierenden intuitiv als zielführend im explorativen Prozess des mathematischen Argumentierens bewertet zu werden.

23 Grenzen der Studie und Reflexion der Ergebnisse

Im folgenden Kapitel der Arbeit sollen die dargestellten, zusammengefassten und interpretierten Ergebnisse vor dem Hintergrund der getroffenen methodischen Entscheidungen eingeordnet und mögliche Grenzen der Übertragbarkeit und Verallgemeinerbarkeit aufgezeigt werden. In der vorliegenden Untersuchung wurde eine Kombination aus der Entwicklung eines theoretischen Rahmens (zweidimensionales Schema) zur Betrachtung von *Strategien* und einem qualitativen empirischen Zugang zur Erhebung von *Strategien* der Studierenden gewählt.

Im Forschungsprozess wurden verschiedene methodische Entscheidungen bezüglich der Literatúrauswahl und der Vorgehensweise getroffen. Obwohl jede Entscheidung auf Basis des Erkenntnisinteresses und der methodischen Grundlagenliteratur begründet wurde, ergeben sich aus diesen Entscheidungen auch die Grenzen der Ergebnisse.

Ziel der vorliegenden Untersuchung war es, die *Strategien* der Studierenden zu erfassen und mit den zuvor synthetisierten theoretischen Überlegungen in Beziehung zu setzen. Dazu wurde zunächst ein Rahmen in Form eines zweidimensionalen Schemas entwickelt. Dabei wurde auf bereits vorhandene Literatur und Systematisierungen zu Vorgehensweisen und Prozessen beim mathematischen *Begründen* zurückgegriffen.

Die Auswahl der Literatur erfolgte auf Basis des im Kapitel 4.1 dargestellten Begriffsverständnisses, jedoch ergänzt um weitere Ansätze und Modelle, die das Begriffsverständnis in der Systematik nach Gerloff (2021) nicht explizit teilen. So wurden Ansätze, die das *Begründen* als Oberbegriff für das *Argumentieren* verstehen (u.a. Brunner, 2013;2014), mit Ansätzen, die das *Argumentieren* als Oberbegriff für das *Begründen* verstehen, kombiniert. Darüber hinaus wurden Ansätze aufgenommen, die wiederum das *Argumentieren* als umfassenderes Ganzes und damit das *Begründen* als Teilkomponente begreifen. Diese Entscheidung, die in Kapitel 6 genauer erläutert wurde, führt zur theoretisch abgeleiteten Strategiekollektion (Abschnitt III). Eine andere Literatúrauswahl würde wahrscheinlich zu einem anderen, aber in seinen Einzelstrategien hinreichend ähnlichen Theorierahmen führen. Der Grund für diese Annahme liegt darin, dass sich die in den verschiedenen Ansätzen

grundsätzlich ablaufenden Prozesse im Detail und in den Ansatzpunkten deutlich unterscheiden, sich aber auf einer abstrakteren Ebene ähneln. Die Thematisierung der Verwendung z.B. von Repräsentationsebenen und unterschiedlichen Denkrichtungen unter Einbeziehung verschiedener Arten des logischen Schließens und Problemlösestrategien findet sich in allen verwendeten Ansätzen und bildet die Grundlage für die hier dargestellte Integration in das zweidimensionale Schema. Bezüglich der Generalisierbarkeit der Ergebnisse bedeutet dies, dass die Ergebnisse zwar nur in dem hier dargestellten Begriffsverständnis und Rahmen übertragbar sind, aber aufgrund der nachvollziehbar dargestellten Entwicklung des Rahmens auch auf andere Projekte oder Kontexte übertragbar wären.

Für das Projekt wurde ein empirischer Zugang gewählt und mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse umgesetzt. In Anlehnung an Kuckartz und Rädiker (2022) können für eine qualitative Inhaltsanalyse die beiden Gütekriterien *interne Studiengüte* und *externe Studiengüte* unterschieden werden. Erstere zeichnet sich beispielsweise durch die Faktoren Zuverlässigkeit, Glaubwürdigkeit, Verlässlichkeit, Regelgeleitetheit und intersubjektive Nachvollziehbarkeit aus. Die hier genutzte Inhaltsanalyse (Kapitel 20) basiert zwar nur in Auszügen auf dem Vorgehen nach Kuckartz (2010;2014) und Kuckartz und Rädiker (2022), jedoch erscheinen seine Gütekriterien auch für andere Spielarten von Inhaltsanalysen angemessen und sollen auch hier zur Reflexion und Einordnung dienen.

Die interne Studiengüte bezüglich der Datenerhebung stellt Anforderungen an die Aufzeichnung und angemessenen Vorbereitung der Daten. Die Daten wurden mit Hilfe des *Lauten Denkens* erhoben, das einen indirekten Zugang zu mentalen Aktivitäten bietet. Im Kapitel 17.3 wurden mögliche Störfaktoren identifiziert und daraus im Kapitel 17.4 methodische Schlussfolgerungen gezogen. Durch den indirekten und damit eingeschränkten Zugang zu mentalen Aktivitäten ist eine eingeschränkte Erfassung der Ergebnisse zu erwarten. Die Ergebnisse können aufgrund begrenzter mentaler Kapazitäten unvollständig und damit in ihrer Abfolge lückenhaft sein. Abhängig von den sprachlichen Fähigkeiten kann es vorkommen, dass andere mentale Aktivitäten vorlagen als tatsächlich verbalisiert wurden und somit in der nachfolgenden qualitativen Inhaltsanalyse den einzelnen Segmenten andere Codes zugeordnet wurden. Auch die soziale Erwünschtheit oder gar Angst vor der mathematischen Begründungssituation spielt eine nicht zu vernachlässigende Rolle. Dies könnte auch durch die Videoaufzeichnung der Aufgabenbearbeitung verstärkt werden. Der dadurch bedingte fehlende Zugang zu den tatsächlich vorhandenen *Strategien* muss bei der Verallgemeinerung der Ergebnisse berücksichtigt werden.

Die Verbalisierungen sind daher insgesamt nur als Hinweise auf die ablaufende mentale Aktivität und nicht als Interpretationsgrundlage für eine

Strategiezuordnung auf der Metaebene zu verstehen. Sie beschreiben vielmehr ein konkretes Vorgehen, das mental repräsentiert wird. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass keine kognitiven Strategien höherer Ordnung erhoben werden konnten, sondern lediglich ein Zugang zu konkreten Strategien auf inhaltlicher Ebene erreicht werden konnte. Trotz dessen, dass die Ergebnisse auf Basis dieser Überlegungen kritisch eingeordnet werden müssen, bietet die Datenerhebung mit Hilfe des *Lauten Denkens* einen realistischen Zugang zumindest zu konkreten *Strategien* und Gedankenschritten der Studierenden.

Die Aufbereitung der Daten für die Datenauswertung erfolgte mit Hilfe eines gängigen und dem Erkenntnisinteresse der Untersuchung angepassten Transkriptionsregelwerks (Kapitel 19.1). Es wurde ein Basistranskript bzw. ein einfaches wissenschaftliches Transkript gewählt, das mit Hilfe von Abbildungen aus den Verschriftlichungen der Studierenden ergänzt wurde. Auf diese Weise konnte das Datenmaterial ergänzt und eine reichhaltige Datenbasis für die Auswertung generiert werden. Zur Datenaufbereitung gehört auch die Segmentierung des Materials (Kapitel 20.5.2). Auch hier wurde durch das regelgeleitete Vorgehen eine intersubjektiv nachvollziehbare Datenbasis für die Auswertung geschaffen. Dieses Vorgehen kann aufgrund der Erfahrungen und Ergebnisse in der vorliegenden Studie auch für zukünftige Datenerhebungen mit der Methode des *Lauten Denkens* als tragfähig und geeignet angesehen.

Kuckartz und Rädiker (2022) sehen weiterhin die intersubjektive Nachvollziehbarkeit als Gütekriterium für die interne Studiengüte. Bei Mayring (2010) wird diese mit Objektivität gleichgesetzt und Schreier (2012) ordnet dieses Kriterium eher der Reliabilität zu.

Im Verständnis nach Schreier (2012) wird die Beurteilerübereinstimmung für die Bewertung der durchgeführten qualitativen Inhaltsanalyse hinsichtlich der Reliabilität und der intersubjektiven Nachvollziehbarkeit nach Kuckartz und Rädiker (2022) relevant. Die qualitative Inhaltsanalyse wird als ein Verfahren zur intersubjektiven Feststellung von Bedeutung beschrieben und sollte deswegen nicht von einer forschenden Person allein durchgeführt werden (Stamann et al., 2016). „Idealerweise findet ein Vergleich bzw. ein Abgleich der Kodierungen durch mindestens zwei Personen“ (Stamann et al., 2016, S.11) und/oder eine Bestimmung von Interrater-Koeffizienten statt. Gleichzeitig zeigt sich jedoch das intersubjektiv-konsensuale Textverständnis, welches angestrebt wird, nicht nur in der Bestimmung dieser Koeffizienten (Kuckartz & Rädiker 2022; Schreier, 2012). Der qualitativen Inhaltsanalyse ist weiterhin die subjektive Entscheidung bei der Zuordnung zwischen Kategorie und Textstelle inhärent (Kuckartz & Rädiker, 2022).

Das Kodieren als Zuordnung einer Textstelle zu einer Kategorie gilt als ‚Achillesferse‘ der Reliabilität der Ergebnisse einer qualitativen Inhaltsanalyse (Sandmann, 2014). In Bezug auf das hier vorgestellte Projekt wurde

auf die Bestimmung eines Koeffizienten verzichtet und eine intersubjektive Textverständlichkeit durch die in Kapitel 20.7 und Kapitel 20.8 dargestellte Evaluation und Überarbeitung des Kategoriensystems realisiert. Auch durch dieses Vorgehen wurde eine nicht nur singuläre, sondern eine ko-konstruktive Zuordnung von Segment und Kategorie vorgenommen. Trotz dieser Maßnahmen bleibt die Zuordnung ein subjektiver Prozess, der von verschiedenen Faktoren beeinflusst wird. Die Ergebnisse einer qualitativen Inhaltsanalyse müssen daher im Kontext des beschriebenen Vorgehens und aus der Perspektive der jeweiligen Forschenden betrachtet werden.

Die Studierenden wurden mit einer Primäraufgabe konfrontiert, die sich stark an den im vorangegangenen Wintersemester auf den Übungsblättern bearbeiteten Aufgaben orientierte. Die Auswahl dieser Aufgabe erfolgte auf den in Kapitel 18.3 beschriebenen Überlegungen, ist aber dennoch unter folgenden Gesichtspunkten kritisch zu betrachten. Zum einen ist die Aufgabe sehr komplex und die Interviews haben gezeigt, dass auch als gut eingestufte Studierende nicht in der Lage waren, die Aufgabe vollständig zu bearbeiten. Dies wurde bereits in der Pilotierung deutlich. Dennoch wurde diese Aufgabe gewählt, da gerade durch die höhere Schwierigkeit Einzelstrategien besser sichtbar werden und nicht auf ein Standardverfahren zurückgegriffen werden kann. Dem steht jedoch gegenüber, dass gerade diese hohe Schwierigkeit eine Stresssituation auslöst und es möglich ist, dass eigentlich zugängliche *Strategien* nicht genutzt werden. Zum anderen suggeriert die Art der Aufgabenstellung einen vorgezeichneten Weg, der mit Hilfe der in der Lehrveranstaltung vermittelten Wege (Anwendung der Begründungsniveaus I-III in Anlehnung an Padberg & Büchter, 2015) beschränkt wird. Möglicherweise werden dadurch *Strategien* bereits implizit vorgegeben. Weitere Aussagen zum Einfluss der Aufgabenstellung auf die *Strategien* bedürfen einer zusätzlichen Klärung in weiteren Untersuchungen. Ein Einfluss auf die Wahl der jeweiligen *Strategien* ist durchaus wahrscheinlich und bedarf ebenfalls weiterer Klärung.

Die externe Studiengüte setzt sich aus Betrachtungen zur Reliabilität, Validität und Übertragbarkeit der Ergebnisse zusammen (Mayring, 2010; Kuckartz & Rädiker, 2022). Da in den vorliegenden Ausführungen die Entscheidung getroffen wurde, die Reliabilität im Sinne der intersubjektiven Nachvollziehbarkeit zu betrachten, wird hier ausschließlich auf die Validität und die Übertragbarkeit eingegangen. Die methodischen Entscheidungen und Vorgehensweisen werden vor diesem Hintergrund reflektiert.

Es wurde eine Stichprobe aus dem Bachelorstudiengang der FU Berlin ausgewählt. Allen Teilnehmenden dieser Stichprobe ist gemeinsam, dass sie die Lehrveranstaltung ‚Mathematisches Professionswissen I‘ besucht haben. Im Hinblick auf die Generalisierbarkeit bedeutet dies jedoch, dass andere Studierende mit anderem Vorwissen aus anderen Lehrveranstaltungen wahr-

scheinlich ein anderes Strategierepertoire genutzt hätten und auch weitere oder andere *Strategien* hätten ergänzt werden können. Zudem ist davon auszugehen, dass durch die in Kapitel 18.1.1 beschriebene Stichprobenauswahl eine implizite Vorauswahl der Studierenden hinsichtlich ihres Strategierepertoires und ihrer persönlichen Dispositionen für Mathematik und das Lösen mathematischer Aufgaben getroffen wurde. Eine Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Stichproben kann daher nur unter Berücksichtigung der jeweils angenommenen Fähigkeiten erfolgen.

Außerdem wurde eine im Vergleich zu den jeweiligen Jahrgangskohorten kleine Stichprobe von Studierenden befragt, so dass eine größere Stichprobe möglicherweise zu einer breiteren Nutzung der Strategien geführt hätte. Diese Hypothese bedarf jedoch weiterer Untersuchungen.

Das Gütekriterium der Validität zeigt sich in der Forderung, das Kategoriensystem so zu erstellen, dass wesentliche Bedeutungsaspekte des Materials erfasst werden können (Schreier, 2014). Sandmann (2014) sieht diesen Aspekt insbesondere in der handlungsnahen Erfassung, d.h. die Daten werden in engem Bezug zu den zu erfassenden kognitiven Prozessen erhoben. Umgesetzt wurde dies in der vorliegenden Untersuchung zum einen durch die Erhebung der Daten in einer konkreten Begründungssituation und zum anderen in Anlehnung an Schreier (2014) durch die Ergänzung der Kategorien durch die empirischen Beobachtungen. Die daraus resultierende Strategiekollektion kann daher als hinreichend valide angesehen werden.

Insgesamt ist eine Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Studierendengruppen möglich und erscheint auch als relevantes Forschungsinteresse für weitere Untersuchungen, wobei die hier erarbeitete Strategiekollektion immer vor dem Hintergrund der Studierendengruppe mit ihrem spezifischen Vorwissen und ihrer spezifischen Situation zu betrachten ist. Übertragbar auf andere Erkenntnisinteressen ist jedoch in jedem Fall der erarbeitete Rahmen, der sich in dem zweidimensionalen Schema widerspiegelt.

24 Implikationen und Ausblick

Aus den Ergebnissen der Untersuchung (Abschnitt IV und V), der zugrunde liegenden theoretischen Arbeit (Abschnitt III) und der Darstellung der Grenzen der Ergebnisse (Kapitel 23) ergeben sich sowohl Implikationen für die weitere Forschung als auch für die hochschuldidaktische Praxis. In den folgenden beiden Kapiteln der Arbeit (Kapitel 24.1 und 24.2) werden Implikationen für die Forschung und die hochschuldidaktische Praxis gegeben.

24.1 Implikation und Ausblick für die Forschung

In der vorliegenden Studie wurde mit Hilfe einer Systematisierung der Überlegungen zu Begründungs- und Beweisprozessen als Problemlöseprozesse und Begründungstypen mit ihren spezifischen Denkrichtungen und Repräsentationsebenen mittels eines zweidimensionalen Schemas eine Kollektion theoretisch möglicher *Strategien* erarbeitet. Diese Sammlung wurde anschließend empirisch ergänzt und eingeordnet.

Diese Grundlage bietet zum einen die Möglichkeit, weitere Betrachtungen zum Prozess des *Begründens* theoretisch in diesen Rahmen einzuordnen, und zum anderen eine Basis, um weitere empirische Forschung im Kontext des mathematischen *Begründens* und *Beweisens* durchzuführen. Im Folgenden werden verschiedene Anknüpfungspunkte für zukünftige Projekte diskutiert. Das hier erarbeitete Verständnis des Begriffs *Strategie* (Kapitel 4.4) bietet das Potenzial, Aktivitäten in Prozessen ganz allgemein und einzeln zu betrachten und damit neue Perspektiven auf Gesamtbearbeitungsprozesse zu gewinnen. Beispielsweise kann dieses Verständnis dazu beitragen, neue Konzepte und Perspektiven für Vorgehensweisen auf dieser Mikroebene im Zusammenhang mit der Datenerhebung durch Eye-Tracking oder bildgebende Verfahren (fMRT) oder auch für zukünftige Forschung mit der Methode des *Lauten Denkens* zu entwickeln. Ein Blick auf die aktuelle Ausrichtung der mathematikdidaktischen Forschung zeigt eine Entwicklung hin zur Nutzung neuer Technologien und der damit verbundenen Suche nach adäquaten Begrifflichkeiten und neuen Heurismen, insbesondere im Bereich der Problemlöseforschung

(Diskussion des AK Problemlösen, GDM 2022).

In diesem Zusammenhang bietet die hier entwickelte Perspektive auf *Strategien* auch einen Zugang zur Kombination der Methode des *Lauten Denkens* mit direkteren, auf mentale Prozesse zugreifenden Datenerhebungsmethoden wie dem Eye-Tracking. Diese Art der Kombination findet in der mathematikdidaktischen Forschung bereits statt (Simon et al., 2021; Simon & Schindler, 2020a;2020b) und kann auch auf das mathematische *Begründen* übertragen werden. Im Vergleich zum *Lauten Denken*, bei dem Gedanken in Sprache transformiert werden, liegt der höhere Grad der Direktheit beim Eye-Tracking darin, dass die Variablen ohne diese Transformation durch Bewusstseinsprozesse erhoben werden können, wie sie bei Ericsson und Simon (u.a. 1980) in Form der Beschreibung der drei Level zu finden sind. Die Kombination der verschiedenen Datenerhebungsmethoden ermöglicht einen multiperspektivischen Blick auf nicht beobachtbare kognitive Prozesse.

In Kapitel 23 wurde bereits die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Studierendengruppen diskutiert. Für die weitere Forschung kann es interessant sein, sich dieser Frage zu widmen. So ist es möglich, mit Hilfe der theoretisch erarbeiteten Strategiekollektion und des zweidimensionalen Schemas andere Grundschullehramtsstudierende mit einer Begründungsaufgabe zu konfrontieren und die hier vorgestellten Ergebnisse zu überprüfen bzw. die Strategiekollektion damit zu ergänzen und den Einfluss z.B. der Lehrveranstaltung erneut zu diskutieren. Darüber hinaus könnte das Ergebnis, dass *Strategien* von der Art der Aufgabe abhängen, durch eine Veränderung der Primäraufgabe weiter untersucht werden. *Strategien* können so im Kontext der Aufgabe genauer betrachtet werden.

Neben der Untersuchung anderer Studierendengruppen bieten die hier verwendeten Daten auch eine Grundlage für weitere Forschungen in verschiedene Richtungen. Auf der Basis der hier vorgestellten Strategiekollektion können durch die Betrachtung der inhaltlichen und zeitlichen Zusammenhänge von *Strategien* weitere Aussagen zum einen über größere Bearbeitungsmuster und Gesamtprozesse und zum anderen über Strategiekombinationen an sich getroffen werden. Zusammenhänge z.B. zwischen der Wahl der Ressource und deren Verarbeitung können so geklärt werden. Darüber hinaus kann die bereits vorhandene Datenbasis genutzt werden, um das Verhältnis von Metakognition und *Strategien*, aber auch die Rolle von Metakognition in ebendiesen Begründungsprozessen genauer zu betrachten. Die in Kapitel 9 und Kapitel 15 erarbeiteten Grundlagen können als Basis für die Untersuchung dieser Zusammenhänge genutzt werden. Darüber hinaus bietet die hier erarbeitete Strategiekollektion die Möglichkeit, metakognitive *Strategien* mit den Konzepten der Studierenden zu *Beweisen* und *Begründen* in Beziehung zu setzen und so Rückschlüsse auf das Verständnis von Allgemeingültigkeit

zu ziehen. Mit Hilfe weiterer Auswertungen des vorliegenden Datenmaterials können auch Aussagen über das bei den Studierenden vorhandene Konzept mathematischer Begründungen getroffen werden.

Aus der Betrachtung zur *Strategie* MUSTERSUCHE kann außerdem für weitere Forschungsvorhaben von Interesse sein, wie Muster ‚gesehen‘ werden und welche Aktivitäten im Detail dazu führen, ein tragfähiges Muster zu erkennen. Methodisch kann eine Kombination von *Lautem Denken* und neueren Technologien, wie oben erwähnt, sinnvoll sein.

Inwieweit und ob die von den Studierenden erarbeiteten Begründungen gültigen Standards entsprechen und *Strategien* zielführend und tragfähig sind, wurde in dem hier vorgestellten Projekt nicht evaluiert. Mit Hilfe weiterer Auswertung des vorhandenen Datenmaterials oder der Erhebung neuer Daten können Aussagen darüber getroffen werden, inwieweit bestimmte *Strategien* zu tragfähigen Ergebnissen führen.

24.2 Implikation und Ausblick für die Hochschulmathematikdidaktik und Praxis

Dass das eigenständige Konstruieren von mathematischen Begründungen und Beweisen für Studierende sowohl der Lehramtsstudiengänge als auch anderer Studienfächer Schwierigkeiten bereitet, zeigen verschiedene Studien (u.a. Sommerhoff & Ufer, 1978; Krieger & Winter, 2015; Bauer et al., 2022; Mariotti, 2006; Weber, 2001) und wurde zu Beginn der vorliegenden Arbeit in Abschnitt I in den wissenschaftlichen Diskurs eingeordnet.

Die Vermittlung von mathematischem *Begründen* und *Beweisen* wird damit zum Bestandteil aktueller hochschuldidaktischer Überlegungen. So werden beispielsweise im Teilprojekt ‚Beweiskompetenzen Studierender systematisch erweitern‘ der WWU Münster typische Fehler und Schwierigkeiten beim mathematischen *Begründen* erfasst und daraus resultierende Konsequenzen diskutiert (Krieger & Winter, 2015).

Die vorliegende Untersuchung zeigt, dass Studierende des Grundschullehramts unter anderem *Strategien* verwenden, von denen angenommen werden kann, dass sie aus Erfahrungen in Lehrveranstaltungen resultieren. Sie übernehmen sowohl Strukturen (EXTERN GENERIERTE NICHT-INHALTLICHE RESSOURCEN) als auch Repräsentationen (beispielsweise bildliche Repräsentationsebenen, wie AUSWAHL BEGRIFFLICHER RESSOURCEN AUF BILDLICHER REPRÄSENTATIONSEBENE oder BILDLICHE BEISPIELBETRACHTUNG) und andere Vorgehensweisen (z.B. EMPIRISCHE MUSTERSUCHE oder BEISPIELBETRACHTUNG), die sie im Modul kennengelernt haben.

Daraus lässt sich schließen, dass die Studierenden zum Zeitpunkt des Interviews noch keine eigene tragfähige Vorgehensweise entwickelt haben (siehe auch Kapitel 22), sondern und eher erlernte Vorgehensweisen nachahmen.

Für die hochschuldidaktische Praxis bedeutet dies, dass der Übergang in Strukturen, die den Studierenden als tragfähige Vorgehensweise gezeigt werden, begleitet werden muss, damit sie zu eigenen reflektierten Darstellungen kommen und diese dann auch im Schulkontext mit den Lernenden im Schulalter thematisieren können.

Das bedeutet konkret für die Umsetzung in dem hier gestalteten Modul ‚Mathematisches Professionswissen I‘, dass innerhalb der Übungsaufgaben die Diskussion von Begründungen stärker in den Fokus genommen werden sollte. Dies steht auch im Zusammenhang mit der Feststellung, dass die Studierenden kaum *Strategien* aus der Strategieeinheit DISKURS nutzten. Es wurde sichtbar, dass die Vorstellung, was eine mathematische Begründung bzw. ein Beweis ist und dass deren bzw. dessen Kommunikation mit sozialen Aushandlungsprozessen verbunden ist, bei den Studierenden nicht vorhanden zu sein scheint.

Um das Konzept einer mathematischen Begründung oder eines Beweises als explorativen Prozess zu erweitern, liegt es daher nahe, genau diesen Aspekt in die Lehrveranstaltungen zu integrieren. Didaktische Formate, die kooperativ und reflektierend stattfinden, können dazu beitragen. Durch die kooperative Erarbeitung der mathematischen Inhalte, gelenkt durch die gemeinsame Abgabe von Übungsblättern und den zusätzlichen Sprechzeiten wird zwar vermittelt, dass Mathematik ko-konstruktiv erarbeitet werden kann. Jedoch kann das Potenzial der gemeinsamen Arbeit ebenfalls genutzt werden, um Begründungsdarstellungen zu vergleichen, miteinander zu diskutieren und den sozialen Aushandlungsprozess von beispielsweise tragfähigen Darstellungen innerhalb der Begründungskette explizit in die Lehrveranstaltungen zu integrieren.

Die empirischen Beobachtungen haben zudem gezeigt, dass *Strategien*, die für unterschiedliche Begründungstypen typisch sind, genutzt und auch zwischen ihnen gewechselt wird (ÄNDERUNG DER REPRÄSENTATIONSEBENE). Für die hochschuldidaktische Praxis ergibt sich daraus, dass die Flexibilität im Umgang mit Vorstellungen, mathematischen Konzepten und Ideen, die von den Studierenden intuitiv genutzt werden, stärker in den Vordergrund rücken und Raum für ko-konstruktive Reflexion bieten. Es kann vermutet werden, muss aber noch weiter untersucht werden, dass die Studierenden auf diese Weise versuchen, das ‚Sehen‘ von mathematischen Zusammenhängen intuitiv zu steuern. In Lehrveranstaltungen kann hier im Kontext kooperativer Lehr- und Lernformen die Verwendung von Repräsentationsebenen und die Überführung einer Repräsentationsebene in eine andere thematisiert werden.

Die empirische Beobachtung zeigte weiterhin, dass die Studierenden eine Vielzahl von Beispielen betrachteten und versuchten, Muster zwischen den Beispielen oder in der Struktur der Beispiele zu erkennen. Die MUSTERSUCHE erwies sich jedoch trotz vielfältiger Thematisierung innerhalb der Lehrveranstaltung als eher unterrepräsentiert und wurde eher als Teil eines explorativen Prozesses genutzt. Die BEISPIELBETRACHTUNG an sich erfolgte zwar vielfältig, führte aber selten zu tragfähigen weiteren Begründungsschritten. Für die hochschuldidaktische Praxis lässt sich daraus ableiten, dass die Suche nach guten generischen oder geeigneten Beispielen einen höheren Stellenwert einnehmen und auch im Hinblick auf die Schulpraxis deutlicher diskutiert werden sollte.

Wie bereits mehrfach diskutiert, kann aus den empirischen Ergebnissen geschlussfolgert werden, dass innerhalb des Aufgabenbearbeitungsprozesses eher eine inhaltliche Auseinandersetzung zum Bilden einer mentalen Repräsentation (Verstehen) genutzt wurde, jedoch eine STRUKTURELLE AUSEINANDERSETZUNG mit der Behauptung unterrepräsentiert war. Für die hochschuldidaktische Praxis bedeutet dies, dass der Struktur einer Aussage mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte. Eine stärkere Fokussierung auf die Struktur mathematischer Aussagen ist für Begründungen durchaus relevant, den Studierenden aber nicht geläufig.

Die hier thematisierten Konsequenzen für die hochschuldidaktische Praxis sind im Einklang mit der Fokusverschiebung weg von der Überbetonung formaler Strenge hin zu einer stärkeren Konzentration auf das so genannte *convincing argument* (Mariotti, 2006) zu sehen. Damit rücken soziale Aushandlungsprozesse und die Kommunikation über Begründungen und Beweise stärker in den Fokus (Mariotti, 2006) und damit ko-konstruktive Erarbeitungsprozesse und das mathematische *Begründen* im Kontext sozio-mathematischer Normen (Yackel & Cobb, 1996; Kempen, 2019) durch hochschuldidaktische Interventionen in den Vordergrund. Typische Arbeitsweisen und Charakteristika der Mathematik als Fachwissenschaft würden damit auch im Hinblick auf die Tätigkeit in der Grundschule gestärkt.

25 Schlussbemerkungen

Insgesamt trägt die vorliegende Untersuchung dazu bei, die Vorgehensweisen auf der Mikroebene besser zu verstehen. Insbesondere ermöglicht diese Bestandsaufnahme in Verbindung mit den Ergebnissen anderer Forschungsarbeiten, das Erlernen des mathematischen *Begründens*, *Argumentierens* und *Beweisens* in Lehrveranstaltungen besser zu unterstützen und es damit den Studierenden zu ermöglichen, tragfähige Vorstellungen und Konzepte aufzubauen. Dies wiederum bietet die Grundlage dafür, Mathematik nicht nur als Algorithmen verwendende Disziplin, sondern auch als beweisende und begründende Disziplin den Lernenden im Grundschulalter zu präsentieren.

Teil VI
Literaturverzeichnis

- Aberdein, A. & Dove, I. J. (Hrsg.). (2013). *The Argument of Mathematics*. Springer.
- Abshagen, M. (2015). *Praxishandbuch Sprachbildung Mathematik: Sprachsensibel unterrichten - Sprache fördern. Praxishandbuch Sprachbildung*. Ernst Klett Sprachen.
- Aebli, H. (1994). *Denken, das Ordnen des Tuns* (3. Aufl.). Klett-Cotta.
- Akinwunmi, K. (2011). Zum Verallgemeinern mathematischer Muster und zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011: Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.2011 bis 25.02.2011 in Freiburg* (S. 47–50). WTM-Verlag.
- Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster. Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts: Band 8*. Vieweg+Teubner Verlag.
- Alcock, L. & Weber, K. (2010). Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course. In F. Hitt, D. Holton & P. Thompson (Hrsg.), *CBMS Issues in Mathematics Education. Research in Collegiate Mathematics Education. VII* (Bd. 16, S. 93–114). American Mathematical Society.
<https://doi.org/10.1090/cbmath/016/04>
- Anderson, L. W., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J. D. & Wittrock, M. C. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman.
- Artz, A. F. & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. *Cognition and Instruction*, 9(2), 137–175. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0902_3
- Ashcraft, M. H. (1990). Strategic Processing in Children's Mental Arithmetic: A Review and Proposal. In D. F. Bjorklund (Hrsg.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*. (S. 185–212). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Baker, J. D. (1996, April). *Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction* [Paper Presentation]. Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, USA.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. In D. Pimm (Hrsg.), *Mathematics, Teachers, and Children* (S.216-235). Hodder and Stoughton.

- Bauer, T., Müller-Hill, E., Neuhaus-Eckhardt, S. & Rach, S (2022). Beweisverständnis im Mathematikstudium unterstützen: Vergleich unterschiedlicher Varianten der Strategie „Illustrieren am Beispiel“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43(2), 311–346.
<https://doi.org/10.1007/s13138-021-00191-6>
- Bayer, K. (2007). *Argument und Argumentation: Logische Grundlagen der Argumentationsanalyse* (2., überarb. Aufl.). *Studienbücher zur Linguistik: Band 001*. Vandenhoeck & Ruprecht.
- Beck, C. & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 14(2), 147–179.
<https://doi.org/10.1007/BF03338788>
- Beckmann, A. (1997). *Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. Studienbücher für den Unterricht in Lehre und Schule, Bd. 2*. LIT.
- Beitlich, J. & Reiss, K. (2014). Das Lesen mathematischer Beweise - Eine Eye Tracking Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. WTM-Verl. für wissenschaftliche Texte und Medien.
- Bergmann, J. (1985). Flüchtigkeit und methodische Fixierung sozialer Wirklichkeit,. In W. Bonß (Hrsg.), *Soziale Welt: Bd. 3. Entzauberte Welt: Zur Relativität und Geltung soziologischer Forschung* (S. 299–320). Schwartz.
- Bescherer, C. & Hoffkamp, A. (2022). Argumentieren und Beweisen mit digitalen Werkzeugen. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule* (S. 347–374). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_15
- Betzold, A. (2008). Beweisen–Argumentieren–Begründen: Entwicklung von Argumentationskompetenz im Mathematikunterricht. *Grundschulmagazin*, 76(6), 35–40.
- Beyer, A., Grieser, D. & Schlüters, S. (2022). Mathematisches Problemlösen und Beweisen in Oldenburg. In R. Hochmuth, R. Biehler, M. Liebendörfer & N. Schaper (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen* (S. 457–470). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-662-64833-9_16
- Bezold, A. (2010). *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern*. IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

-
- Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences. In K. Krainer & N. Vondrová, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Prague, Czech Republic.
- Bilandzic, H. & Trapp, B. (2000). Die Methode des lauten Denkens: Grundlagen des Verfahrens und die Anwendung bei der Untersuchung selektiver Fernsehnutzung bei Jugendlichen. In I. Paus-Haase & B. Schorb (Hrsg.), *Qualitative Kinder- und Jugendmedienforschung: Theorie und Methoden: ein Arbeitsbuch* (S. 183–210). KoPäd-Verl.
- Bilandzic, H., Koschel, F. & Scheufele, B. (2001). Theoretisch-heuristische Segmentierung im Prozeß der empiriegeleiteten Kategorienbildung. In W. Wirth & E. Lauf (Hrsg.), *Inhaltsanalyse: Perspektiven, Probleme, Potentiale*. Herbert von Halem Verlag.
- Bjorklund, D. F (Hrsg.) (1990). *Children's Strategies: Contemporary Views of Cognitive Development*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Bjorklund, D. F & Harnishfeger, K. K. (1990). Children's Strategies Their Definition and Origins. In D. F. Bjorklund (Hrsg.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*. (S. 309–324). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Bjorklund, D.F., Muir-Broadbuss, J.E. & Schneider, W. (1990). The role of knowledge in the development of strategies. In D. F. Bjorklund (Hrsg.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*. (S. 67-92). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Bjorklund, D. F (2015). *Psychology Press Book. Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*. Routledge.
- Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 183–203.
<https://doi.org/10.1007/BF00555722>
- Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. VS, Verl. für Sozialwiss.
- Boero, P (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*.

- <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>
- Boero, P., Garuti, R. & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. In P. Boero (Hrsg.), *Theorems in school. New directions in mathematics and science education*. (S. 249–264). Sense Publishers.
- Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. A (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In L. Puig & A. Gutiérrez, *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Valencia, Spain.
- Brandford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education*. Cleardon Press.
- Brandford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Teubner Verlag.
- Brown, A. L. (1984). Metakognition, Handlungskontrolle, Selbststeuerung und andere, noch geheimnisvollere Mechanismen. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Metakognition, Motivation und Lernen* (S. 60–109). Kohlhammer.
- Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In W. Herget & L. Flade (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen* (S. 69–78). Volk-und-Wissen-Verl.
- Bruner, J., Olver, R. R. & Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung: Eine kooperative Untersuchung*. Klett.
- Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I: Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Waxmann.
- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8>
- Brunner, E. (2016). Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr didaktisches Potenzial. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, 50. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Heidelberg, Deutschland. <https://doi.org/10.17877/DE290R-17374>
- Buber, R. (2009). Denke-Laut-Methode. In R. Buber & H. H. Holzmüller (Hrsg.), *Qualitative Marktforschung* (S. 555–568). Gabler.
- Buber, R. & Holzmüller, H.H. (2009). *Qualitative Marktforschung*. Gabler.

-
- Büchter, A. & Leuders, T. (2023). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen* (9. Aufl.). Cornelsen Scriptor.
- Bürger, H. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht — Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht*. (S. 103–134). Vieweg & Teubner.
- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35.
<https://doi.org/10.2307/748986>
- Bussi, M. B., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching and developing the culture of geometry theorems in school. In P. Boero (Hrsg.), *Theorems in School* (S. 211–217). BRILL.
https://doi.org/10.1163/9789087901691_013
- Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students` justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educ Stud Math (Educational Studies in Mathematics)*, 24(4), 359-387.
<https://doi.org/10.1007/BF01273371>
- Cohen, A. D. (1987). Using verbal reports in research on language learning. In C. Faerch & G. Kasper (Hrsg.), *Introspection in second language research*. Multilingual Matters.
- Corsten, M. (Hrsg.). (2010). *Kultur und gesellschaftliche Praxis. Videographie praktizieren: Herangehensweisen, Möglichkeiten und Grenzen*. VS-Verl.
- Cowan, N. (1995). *Attention and memory: An integrated framework*. Oxford University Press.
- Davis, R. B. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhäuser.
- Davydov, V.V. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht: logisch-psychologische Probleme des Aufbaus von Unterrichtsfächern*. Volk und Wissen.
- Davydov, V. V. (1990). *Soviet studies in mathematics education*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Deffner, G. (1984). *Lautes Denken: Untersuchung zur Qualität eines Datenerhebungsverfahrens. Europäische Hochschulschriften: Bd. 125*. Lang.
- Deffner, G. (1989). Interaktion zwischen Lautem Denken, Bearbeitungsstrategien und Aufgabenmerkmalen? Eine

- experimentelle Prüfung des Modells von Ericsson und Simon. *Sprache & Kognition*, 8(2), 98–111.
- Demuth, C. (2010). Videoanalysen. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Detlefsen, M. (1992). *Proof, Logic and Formalization*. Routledge.
- Dewey, J. (2002). *Wie wir denken*. Pestalozzianum.
- Dörfler, W. (1984). Verallgemeinern als zentrale mathematische Fähigkeit. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 5(4), 239–264.
<https://doi.org/10.1007/BF03339248>
- Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. In Bishop, A.J.; Mellin-Olsen, S & van Dormolen, J. (Hrsg.), *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching* (S.61-85). Dordrecht.
- Dörner, D. (1974). *Die kognitive Organisation beim Problemlösen*. Huber.
- Dörner, D. (1987). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (3. Aufl.). *Kohlhammer Standards Psychologie : Studententext : Teilgebiet Denkpsychologie*. Kohlhammer.
- Dörner, D., Kreuzig, H. W., Reither, F., & Stäudel, T. (Hrsg.). (1983). *Lohhausen: Vom Umgang mit Unbestimmtheit und Komplexität*. Huber.
- Dresing, T. & Pehl, T. (2011). *Praxisbuch Transkription: Regelsysteme, Software und praktische Anleitungen für qualitative ForscherInnen* (2. Aufl.). Eigenverlag.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking* (S. 25–41). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Waxmann.
- Duden Band 5 (2001). Duden- Das Fremdwörterbuch. (7.Aufl.). Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG.
- Dumitrascu, G. (2017). Understanding the Process of Generalization in Mathematics through Activity Theory. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 16(12), 46–69.
<https://doi.org/10.26803/ijlter.16.12.4>
- Duncker, K. (Hrsg.). (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Springer.
- Durksen, T. L., Sheridan, L. & Tindall-Ford, S. (2021). Pre-service Science and Mathematics teachers' reasoning: a think-aloud study.

- Educational Studies*, 1–16.
<https://doi.org/10.1080/03055698.2021.1973377>
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductive et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233–261.
- Einsiedler, M. & Wieser, A. (2022, 05.März). *Analysis I (Kapitel 1-9)* [Vorlesungsskript]. ETH Zürich.
<https://people.math.ethz.ch/~einsiedl/Analysis-Skript.pdf>
- Eggerichs, L. (2023). Strategies in mathematical justification settings of students in the primary school education bachelor's program of Free University Berlin. *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Budapest, Hungary.
- Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221–262.
<https://doi.org/10.1080/10508400701193705>
- Ellis, A. B. (2011). Generalizing-Promoting Actions: How Classroom Collaborations Can Support Students' Mathematical Generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308–345.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.4.0308>
- Ericsson, K. A (1993). *Protocol Analysis*. MIT Press.
- Ericsson, K. A & Lehmann, A. C. (1996). Expert and exceptional performance: evidence of maximal adaptation to task constraints. *Annual review of psychology*, 47, 273–305.
<https://doi.org/10.1146/annurev.psych.47.1.273>
- Ericsson, K. A & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review*, 87(3), 215–251. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.3.215>
- Ericsson, K. A & Simon, H. A. (1998). How to Study Thinking in Everyday Life: Contrasting Think-Aloud Protocols With Descriptions and Explanations of Thinking. *Mind, Culture, and Activity*, 5(3), 178–186. https://doi.org/10.1207/s15327884mca0503_3
- Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof; a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof*. Teachers College.
- Fernandez, M. L. & Hadaway, N., & Wilson, J. W. (1994). Problem solving: Managing it all. *The Mathematics Teacher*, 87(3), 195–199.
- Fischer, A. Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige Algebraische Denkhandlungen im

- Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(33), 1-7.
- Flaherty, E. G. (1974). The thinking aloud technique and problem solving ability. *Journal of Educational Research*, 68(6), 223–225.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906–911. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906>
- Flavell, J. H. (1985). *Cognitive development* (2.Aufl.). Prentice-Hall.
- Freudenthal, H. (1979). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2. Aufl.). Bd. 2. Klett.
- Friedrich, H. F. & Mandl, H. (1992). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In H. Mandl (Hrsg.), *Lern- und Denkstrategien: Analyse und Intervention*. Hogrefe, Verl. für Psychologie.
- Fritzljar, T. (2011). Zum Beweisbedürfnis im jungen Schulalter. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011: Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik. Freiburg, Deutschland*.
- Frommann, U. (2005). *Die Methode "Lautes Denken"*. https://www.e-teaching.org/didaktik/qualitaet/usability/Lautes%20Denken_e-teaching_org.pdf
- Früh, W. (2011). *Inhaltsanalyse*. UVK Verlagsgemeinschaft.
- Funke, J. & Spering, M. (2006). Methoden der Denk- und Problemlöseforschung. In N. Birbaumer, D. Frey, J. Kuhl, W. Schneider & R. Schwarzer, *Denken und Problemlösen. Kognition 8* (S.647-744). Hogrefe Verlage.
- Garner, R. (1990). Children's Use of Strategies in Reading. In D. F. Bjorklund (Hrsg.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*. (S. 309–324). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Garuti, R., Boero, P & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Hrsg), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Stellenbosch, South Africa.
- Gerloff, S. (2021). *Begründen bei Geometrieaufgaben der Grundschule*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-36028-3>
- Gläser, J. & Laudel, G. (2010). *Experteninterviews und qualitative Inhaltsanalyse als Instrumente rekonstruierender Untersuchungen* (4. Aufl.). *Lehrbuch*. VS Verlag. <http://d-nb.info/1002141753/04>

-
- Gogolin, I. & Duarte, J. (2016). Bildungssprache. In J. Kilian, B. Brouër & D. Lüttenberg (Hrsg.), *Handbuch Sprache in der Bildung* (S. 478–499). De Gruyter.
- Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen in Mathematikstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-28681-1>
- Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer Netherlands.
- Grieser, D. (2016). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 661–675). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_41
- Grimshaw, A. D. (1982). Sound-Image Data Records for Research on Social Interaction. *Sociological Methods & Research*, 11(2), 121–144. <https://doi.org/10.1177/0049124182011002002>
- Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-08937-5>
- Halliday, M.A.K. (1978). *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning*. Edward Arnold.
- Halliday, M.A.K. (1994). *An introduction to functional grammar* (2. Aufl.). Edward Arnold.
- Hanna, G. (2005). A Brief Overview of Proof, Explanation, Exploration and Modelling. In H.-W. Henn & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation: Festschrift für Werner Blum* (S. 139–151). Franzbecker.
- Hanna, G & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop (Hrsg.), *Kluwer international handbooks of education. International handbook of mathematics education Bd. 2*. Kluwer Academic Publishers.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Hrsg.), *Issues in mathematics education: v. 7. Research in collegiate mathematics education* (S.234-294). American Mathematical Society; Mathematical Association of America.

- Harel, G. & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27–50. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3
- Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen: Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von "Visible Learning"*. (W. Beywl & K. Zierer, Hg.). Schneider Verlag Hohengehren GmbH.
- Hayes, J. R. & Flower, L. S. (1983). Uncovering Cognitive Processes in Writing: An Introduction to Protocol Analysis. In P. Mosenthal, Tamor. L. & S. Walmsley (Hrsg.), *Uncovering Cognitive Processes in Writing: An Introduction to Protocol Analysis* (S. 207–220). Longman.
- Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Re-port on thee Nationwide Survey.: Technical Re-port on thee Nationwide Survey. Mathematical Science*. Institute of Education, University of London.
<http://doc.ukdataservice.ac.uk/doc/4004/mrdoc/pdf/a4004uab.pdf>
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. In *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(4), 396- 428.
<https://doi.org/10.2307/749651>
- Hefendehl-Hebeker, L. & Hußmann, S. (2010). Beweisen-Argumentieren. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (5. Aufl.). Cornelsen.
- Heine, L. (2005). Lautes Denken als Forschungsinstrument in der Fremdsprachenforschung. *Zeitschrift für Fremdsprachenforschung*, 16(2), 163–185.
- Heine, L. (2013). Introspektive Verfahren in der Fremdsprachenforschung: State-of-the-Art und Desiderata. In K. Aguado, L. Heine & K. Schramm (Hrsg.), *Introspektive Verfahren und Qualitative Inhaltsanalyse in der Fremdsprachenforschung* (S. 13–30). Peter Lang.
- Heine, L. & Schramm, K. (2007). Lautes Denken in der Fremdsprachenforschung. Eine Handreichung für die empirische Praxis. In H. J. Vollmer & W. Zydatis (Hrsg.), *KFU: Bd. 27. Synergieeffekte in der Fremdsprachenforschung: Empirische Zugänge, Probleme, Ergebnisse*. Lang.
- Heinrich, F., Bruder, R. & Bauer, R. (2015). Problemlösen lernen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum.
- Heinze, A. (2007). Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 28(1), 3–30. <https://doi.org/10.1007/BF03339331>

-
- Heinze, A. & Reiss, K. (Hrsg.). (2003). *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*.
- Herold-Blasius, R. (2021). *Problemlösen mit Strategieschlüsseln: Eine explorative Studie zur Unterstützung von Problembearbeitungsprozessen bei Dritt- und Viertklässlern. Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Hofstaedter, D. R. (2008). *Gödel, Escher, Bach: Ein endloses geflochtenes Band*. Klett-Cotta.
- Housman, D. & Porter, M. (2003). Proofs shemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139–158.
<https://doi.org/10.1023/A:1025541416693>
- Hsieh, H.-F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, 15(9), 1277–1288.
<https://doi.org/10.1177/1049732305276687>
- Hsieh, F.-J., Horng, W.-S. & Shy, H.-Y. (2012). From Exploration to Proof Production. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (S. 279–303). Springer Netherlands.
- Huethorst, L. (2022). *Überzeugungen und Begründungen fachfremd Mathematiklehrender*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40546-5_5
- Hußmann, S. (2010). Umgangssprache - Fachsprache. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (5. Aufl., S. 60–75). Cornelsen.
- Jacobse, A. E. & Harskamp, E. G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition and Learning*, 7(2), 133–149. <https://doi.org/10.1007/s11409-012-9088-x>
- Jahandar, S., Khodabandehlou, M., Seyedi, G. & Abadi, R. M. D. (2012). The Think-aloud Method in EFL Reading Comprehension. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 3(9), 1-9.
- Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_12
- Jones, K. & Herbst, P. (2012). Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: Theories and Contexts. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (S. 261–346). Springer Netherlands.
- Jurow, A. S. (2004). Generalizing in Interaction: Middle School Mathematics Students Making Mathematical Generalizations in a Population-

- Modeling Project. *Mind, Culture, and Activity*, 11(4), 279–300.
https://doi.org/10.1207/s15327884mca1104_4
- Kaas, K., & Hofacker, T. (1983). Informationstafeln und Denkprotokolle: Bestandaufnahme und Entwicklungsmöglichkeiten der Prozessverfolgungstechniken. In Forschungsgruppe Konsum und Verhalten (Hrsg.), *Innovative Marktforschung* (S. 75–103). Physica-Verlag.
- Kani, M. H. A. & Shahrill, M. (2015). Applying-the-Thinking-Aloud-Pair-Problem-Solving-Strategy-in-Mathematics-Lessons. *Asian Journal of Management Sciences and Education*, 4(2), 20–28.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Hrsg.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (S. 133–155). Lawrence Erlbaum.
- Kempen, L. (2013). *Generische Beweise in der Hochschullehre*.
<https://doi.org/10.17877/DE290R-1384>
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Kempen, L. & Biehler, R. (2021). Design-Based Research in der Hochschullehre am Beispiel der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“. In R. Biehler, A. Eichler, R. Hochmuth, S. Rach & N. Schaper (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik* (S. 477–525). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6_20
- Kieran, C. (1989). A Perspective on Algebraic Thinking. In G. Vernand & J. Rogalski (Hrsg.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Frankreich.
- Kintsch, W. (1997). Kognitionspsychologische Modelle des Textverstehens: Literarische Texte. In K. Reusser (Hrsg.), *Verstehen: Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe* (S. 39–54). Verlag Hans Huber.
- Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-32242-7>
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Teubner Verlag.
- Knipping, C. (2001). Argumentationsstrukturen in Beweisprozessen. Theoretische Konzepte und empirische Ergebnisse einer Untersuchung zum Beweisen in deutschem und französischem Geometrieunterricht.

-
- In G. Kaiser (Hrsg.), *35. Tagung der GDM, Ludwigsburg, Deutschland* (S. 356–359). Verlag Franzbecker.
- Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis: Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre: Bd. 23.* Franzbecker.
- Knipping, C. (2004). *Argumentation structures in classroom proving situations.* Paper contributed to working Group 4: Argumentation and Proof. Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3), Bellaria, Italien.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM*, *40*(3), 427–441.
- Knipping, C. (2020). Argumentieren und Beweisen im Mathematikunterricht - diskursive und epistemologische Herausforderungen. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 11–18). WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- Knoblauch, H. (2004). Die Video-Interaktions-Analyse. *Sozialer Sinn*, *5*(1), 123–138.
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 373–393). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26887-9_41
- Krämer, J., Schukajlow, S. & Blum, W. (2012). Bearbeitungsmuster von Schülern bei der Lösung von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen. *mathematica didacta*, *Bd. 35*, 50–72. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2012.1101>
- Kratz, J. (1978). Wie kann der Geometrieunterricht der Mittelstufe zu konstruktivem und deduktivem Denken erziehen? *Didaktik der Mathematik*, *6*(2), 87–107.
- Krauthausen, G. (1998). Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. *Die Grundschulzeitschrift*, *12*(119), 54–61.
- Krieger, M. & Winter, K. (2015). Mathematische Beweiskompetenzen Studierender diagnostizieren und fördern – eine Bestandsaufnahme. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 508–511). Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.
- Krosanke, N. (2021). *Entwicklung der professionellen Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden zur Bedeutung von Sprache.*

- Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-33505-2>
- Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb (Hrsg.), *Studies in Mathematical Thinking and Learning Series. The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (S. 229–269). Taylor and Francis.
- Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(6), 247–256.
<https://doi.org/10.1007/BF02656689>
- Krutetskii, V. A. Teller, J., Kilpatrick, J. & Wirszup, I. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Survey of recent East European mathematical literature*. University of Chicago Press.
- Kuckartz, U. (2010). *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten* (3., aktualisierte Aufl.). *Lehrbuch*. VS, Verlag für Sozialwissenschaften.
- Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (2., durchgesehene Aufl.). *Grundlagentexte Methoden*. Beltz Juventa.
- Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (5., überarbeitete Aufl.). *Grundlagentexte Methoden*. Juventa Verlag ein Imprint der Julius Beltz GmbH & Co. KG.
- Kumar, V. (2005). The think aloud method: Some concerns adressed. *Journal of Modern Languages*, 15(1), 13–25.
- Kunzle, A. (2015). Metakognitive Prozesse beim mathematischen Problemlösen von Grundschulkindern erfassen. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015: Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik* (S. 536–539). WTM - Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien.
- Lack, C. (2010). *Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr*. Vieweg+Teubner.
- Lakatos, I., Worrall, J. & Zahar, E. (2012). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781139171472>
- Lamnek, S. & Krell, C. (2010). *Qualitative Sozialforschung*. Beltz.
- Leontjew, A. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Prentice-Hall.

-
- Lesseig, K. (2016). Conjecturing, Generalizing and Justifying: Building Theory around Teacher Knowledge of Proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(3).
<https://doi.org/10.2307/30034866>
- Lockwood, E., Ellis, A.B. & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 2(2), 165–196.
- Mackensen-Friedrichs, I. (2004). *Förderung des Expertiseerwerbs durch das Lernen mit Beispielaufgaben im Biologieunterricht der Klasse 9*. DNB.
- Maher, C. A. & Martino, A. M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194. <https://doi.org/10.2307/749600>
- Malle, G. (2002). Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, 110, 4–8.
- Manin, Y. (1992). The Theory and Practice of Proof [Beitrag zur Panel Discussion]. 1. Proceedings of the seventh international congress on mathematical education, Montreal, Kanada.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology Mathematics Education* (S. 171–204). Sense.
- Martin, M. (2018). *Problemlösen mit Schwerpunkt Beweisen im Mathematikunterricht am Beispiel der Geometrie*. *Mathematikdidaktik im Kontext*. epub Bayreuth.
- Martinez, M. V. (2010). The conjecturing process and the emergence of the conjecture to prove. In Pinto, Márcia, M. F. & T. F. Kawasaki (Hrsg.), *PME*, Belo Horizonte, Brasilien.
- Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Hrsg.), *Approaches to Algebra* (S. 65–86). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2011). *Thinking mathematically*. Pearson Educación.
- Mason, J.; Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. Sage Publications.
- Mayer, R. E. (1979). *Denken und Problemlösen: E. Einf. in menschl. Denken u. Lernen. Heidelberger Taschenbücher: Bd. 199 : Basistext Psychologie*. Springer.

- Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 601–613). VS Verlag für Sozialwissenschaften.
https://doi.org/10.1007/978-3-531-92052-8_42
- Mejía-Ramos, J. P. & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof? *Research in Mathematics Education*, *11*(1), 77–78. <https://doi.org/10.1080/14794800902732258>
- Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht — Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(3-4), 286–310.
<https://doi.org/10.1007/BF03339350>
- Meyer, M. & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *51*(30), 1–7.
- Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht: Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *54*(45), 2–9.
- Meyer, M. & Sommerhoff, D. (2020). *Bewertung von (potenziellen) Beweisen im Verlauf des Studiums. Erste Einblicke in eine mixed-methods Studie*. <https://doi.org/10.17877/DE290R-21461>
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2. Aufl.). SAGE.
<http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0655/93041204-d.html>
- Miller, G. A. (1962). *Psychology: The science of mental life*. Harper & Row.
- Mizzi, A. (2018). *The Relationship between Language and Spatial Ability: An Analysis of Spatial Language for Reconstructing the Solving of Spatial Tasks*. Springer.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249–266.
<https://doi.org/10.1007/BF01273731>
- Muslic, B., Gisske, A. & Hartung-Beck, V. (2020). Die qualitative Inhaltsanalyse innerhalb der empirischen Bildungsforschung. Einsatzmöglichkeiten in einer sekundäranalytischen Längsschnittstudie zur Identifikation von Reorganisationsmustern schulischer Organisationen. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, *21*(1), Art21.
<https://doi.org/10.17169/fqs-21.1.3451>
- Myers, D. G. (2014). Denken und Sprache. In D. G. Myers (Hrsg.), *Springer-Lehrbuch. Psychologie* (S. 367–397). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-40782-6_10

- Neuhaus, K. (2002). *Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik*. Dr. Köster.
- Neuhaus-Eckardt, S. & Rach, S. (2018). Beweisverständnis in der Studieneingangsphase – Konzeptualisierung und erste Ergebnisse [Konferenzbeitrag]. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018, Band III* (S. 1307-1311). WTM-Verlag.
- Neuhaus-Eckhardt, S. (2022). *Beweisverständnis von Studierenden: Zusammenhänge zu individuellen Merkmalen und der Nutzung von Beweislesestrategien. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik: Band 42*. Waxmann.
- Nisbett, R. E. & Wilson, T. D. (1977). Telling more than we can know: Verbal reports on mental processes. *Psychological Review*(84), 231–259.
- Niss, M. A. (2005). Modelling and Proving as Forms of Justification - an analytic essay. In H.-W. Henn & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation: Festschrift für Werner Blum* (S. 175–183). Franzbecker.
- Oerter, R. & Dreher, M. (2006). Entwicklung des Problemlösens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), *Lehrbuch. Entwicklungspsychologie* (5. Aufl., S. 469–494). Beltz, PVU.
- Ottinger, S., Ufer, S. & Kollar, I. (2016). *Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase – Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren*. <https://doi.org/10.17877/DE290R-17582>
- Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung in die Mathematik Primarstufe - Arithmetik. Mathematik Primarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x>
- Peirce, C. S. (1985). *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften* (Ungekürzte Ausg.). *Ullstein: Nr. 35230 : Ullstein-Materialien*. Ullstein.
- Peschek, W. (1989). Abstraktion und Verallgemeinerung. *JMD*, 10(3), 211–285. <https://doi.org/10.1007/BF03338724>
- Philipp, K. (2012). *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Vieweg.

- Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 2(3), 176–186. <https://doi.org/10.1002/tea.3660020306>
- Pimm, D. (Hrsg.). (1988). *Mathematics, Teachers, and Children*. Hodder and Stoughton.
- Polya, G. (1949). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke.
- Polya, G. (1954). *Mathematik und plausible Schliessen: Band 1 Induktion Und Analogie in der Mathematik. Typen und Strukturen plausibler Folgerung: Bd. 2*. Birkhäuser.
- Polya, G. (1979). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*. Springer.
- Quarfoot, D. & Rabin, J. M. (2022). A Hypothesis Framework for Students' Difficulties with Proof By Contradiction. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(3), 490–520. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00150-z>
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz & Méndez, A. (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Merida, Yucatan, Mexico.
- Raihan, A. (2011). ‚Think-aloud‘ techniques used in metacognition to enhance self-regulated learning. *Journal of Educational Research*, 25(2), 125–160.
- Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5–41. <https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5>
- Reid, D. A. (2001). Proof, proofs, proving and probing: Research related to proof. Short Oral presentation. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Netherlands.
- Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Sense Publishers.
- Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV*, 111(4), 155–177.
- Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung.: Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben*. Universität Bern.
- Reusser, K. & Reusser-Weyeneth, M. (1994). *Verstehen: Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe*. Verlag Hans Huber.

- Rossi Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the twenty ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Melbourne, Australia.
- Rott, B. (2013). Process regulation in the problem-solving processes of fifth graders In *Center for Educational Policy Studies Journal*, 3(4), 25-39
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(2), 251–282.
- Rott, B. (2018). Empirische Zugänge zu Heuristiken und geistiger Beweglichkeit in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern. *mathematica didacta*, 41(1), 1–29.
- Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In S. Campbell & R. Zaskis (Hrsg.), *Learning and Teaching Number Theory* (S. 157–183). Ablex.
- Rubinstein, S. L. (1972). *Das Denken und die Wege seiner Erforschung*. Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Russo, J. E., Johnson, E. J. & Stephens, D. L. (1989). The validity of verbal protocols. *Memory & cognition*, 17(6), 759–769.
<https://doi.org/10.3758/bf03202637>
- Rustemeyer, R. (1992). *Praktisch-methodische Schritte der Inhaltsanalyse: Eine Einführung am Beispiel der Analyse von Interviewtexten. Arbeiten zur sozialwissenschaftlichen Psychologie : Beiheft: Bd. 2*. Aschendorff.
- Saldaña, J. (2016). *The coding manual for qualitative researchers*. Sage.
- Salle, A. & Krause, C. (2021). Kognitive Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(1), 123–158. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00169-w>
- Samadani, Z. (1984). Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics*, 4(1), 32–34.
- Samkoff, A., Lai, Y. & Weber, K. (2012). On the different ways that mathematicians use diagrams in proof construction. *Research in Mathematics Education*, 14(1), 49–67.
- Sandmann, A. (2014). Lautes Denken – die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179–188). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-37827-0_15

-
- Scharlach, C. & Bücking, U. (2022). 1. Vorlesung Mathe Profi I.1 (19.02.2022). Mathematik und Informatik, FU Berlin.
- Scheibke, N. (2022). *Herausforderungen der Aufgabenbearbeitung in der Studieneingangsphase Effekte ergänzender digitaler Aufgaben auf die Bearbeitungsprozesse von StudienanfängerInnen in der Linearen Algebra*. DNB.
- Schlag, S. (2011). *Kognitive Strategien zur Förderung des Text- und Bildverstehens beim Lernen mit illustrierten Sachtexten. Theoretische Konzeptualisierung und empirische Prüfung* (150. Aufl.). *Wissensprozesse und digitale Medien: Bd. 19*. Logos.
- Schlagler, S. (2020). *Zur Erforschung des Zusammenhangs zwischen Sprachkompetenz und Mathematikleistung: Oberflächlichkeit als potenzieller Mediator*. Springer.
- Schneider, W.-L. (1992). Hermeneutische Einzelfallrekonstruktion und funktionalanalytische Theoriebildung: ein Versuch ihrer Verknüpfung, dargestellt am Beispiel der Interpretation eines Interviewprotokolls. In Jürgen Hoffmeyer-Zlotnik (Hrsg.), *Analyse verbaler Daten. Über den Umgang mit qualitativen Daten* (S. 168–215). Westdeutscher Verlag.
- Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. *Unterrichtswissenschaft*, 29(4), 292-318.
<https://doi.org/10.25656/01:7717>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Sage.
- Schreier, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: Ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, 15(1), Art.18.
<https://doi.org/10.17169/fqs-15.1.2043>
- Schreier, M. (2015). Qualitative Content Analysis. In Flick (Hrsg.), *The sage handbook of qualitative data analysis* (S.170-183). Sage.
- Schwarz, B. B., Hershkowitz, R. & Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. In K. Littleton & C. Howe (Hrsg.), *Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction* (S. 115–141). Routledge.
- Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Texte zur mathematischen Forschung & Lehre: Bd. 10*. Franzbecker.
- Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?

- Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1).
<https://doi.org/10.2307/30034698>
- Setiawan, Y. E., Purwanto, P., Parta, I. N. & Sisworo, S. (2019). Generalization strategy of linear patterns from field-dependent cognitive style. *Journal on Mathematics Education*, 11(1), 77–94.
<https://doi.org/10.22342/jme.11.1.9134.77-94>
- Sfard, A. (1995). The development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 15–39.
- Shapiro, M. A. (2014). Think-aloud and thought-list procedures in investigating mental processes. In A. Lang (Hrsg.), *Measuring Psychological Responses To Media Messages* (S. 1–4). Routledge.
- Siegler, R. S. & Jenkins, E. (1989). *How Children Discover new Strategies*. Erlbaum.
- Silberer, G. (2005). Die videogestützte Rekonstruktion kognitiver Prozesse beim Ladenbesuch. *Marketing ZFP*, 27(4), 263–271.
<https://doi.org/10.15358/0344-1369-2005-4-263>
- Simon, A.L., & Schindler, M. (2020a). Anordnung von Zahlen am Zahlenstrahl: Ein Vergleich der Erkenntnisse durch Eye Tracking und durch Lautes Denken bei Kindern mit und ohne Rechenschwierigkeiten. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020: 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 877–880). WTM-Verlag.
- Simon, A.L., & Schindler, M. (2020b). A comparative analysis of eye tracking and thinking aloud in number line estimation tasks: A study on students with and without mathematical difficulties. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Hrsg.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (S.537–545), Khon Kaen, Thailand.
- Simon, A.L., Rott, B. & Schindler, M. (2021). Identification of geometric shapes: An eye-tracking study on triangles. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Hrsg.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (S.47-55), Khon Kaen, Thailand.
- Skemp, R. R. (1986). *The psychology of learning mathematics* (2. Aufl). Penguin Books.
- Smagorinsky, P. (1989). The Reliability and Validity of Protocol Analysis. *Written Communication*, 6(4), 463–479.
<https://doi.org/10.1177/0741088389006004003>

-
- Smith, E. R. & Henderson, K. (1959). Proof. In Fawcett, H., Hach, C., Junge, C., Syer, H., van Egen, H., Jones, P. (Hrsg.), *The Growth of Mathematical Ideas Grades K-12-Twenty-Fourth Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Smith, P., Kim, D., Vorobel, O. & King, J. R. (2020). Verbal reports in the reading processes of language learners: A methodological review. *Review of Education*, 8(1), 37–114. <https://doi.org/10.1002/rev3.3170>
- Söhling, A.-C. (2017). *Problemlösen und Mathematiklernen*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Someren van, M. W., Barnard, Y. F. & Sandberg, J. A. (1994). *The think aloud Methode. A practical guide to modelling cognitive processes*. Academic Press.
- Sommerhoff, D. & Ufer, S. (1978). Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1978* (S. 1127–1130). Hermann Schroedel Verlag KG.
- Sponsel, R. *Einführung in die Denkpsychologie aus Sicht der Allgemeinen und Integrativen Psychotherapie*. IP-GIPT. <https://www.sgipt.org/gipt/allpsy/denk/denk0.htm>
- Stamann, C., Janssen, M. & Schreier, M. (2016). Qualitative Inhaltsanalyse – Versuch einer Begriffsbestimmung und Systematisierung. *Forum Qualitative Sozialforschung/ Forum: Qualitative Social Research*, 17(3), Art. 16. <https://doi.org/10.17169/fqs-17.3.2581>
- Stangl, W. (1997). *Uncovering Cognitive Processes in Writing: An Introduction to Protocol Analysis*. <https://www.stangl-taller.at/ARBEITSBLAETTER/LERNEN/Lernstrategien.shtml>
- Stark, T. (2010). Lautes Denken in der Leseprozessforschung. Kritischer Bericht über eine Erhebungsmethode. In Didaktik Deutsch (Hrsg.), *Halbjahresschrift für die Didaktik der deutschen Sprache und Literatur. deutschen Sprache und Literatur* (S.58-83). Schneider-Verlag Hohengehren. <https://doi.org/10.25656/01:21288>
- Stebler, R. (1999). *Einständiges Problemlösen: Zum Umgang mit Schwierigkeiten beim individuellen und paarweisen Lösen mathematischer Problemgeschichten - Theoretische Analyse und empirische Erkundigung. Explorationen: Bd. 28*. Lang.
- Stein, M. (1986). *Beweisen*. Franzbecker.

-
- Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 20(1), 3–27. <https://doi.org/10.1007/BF03338881>
- Stephanou, G. & Mpiontini, M.-H. (2017). Metacognitive Knowledge and Metacognitive Regulation in Self-Regulatory Learning Style, and in Its Effects on Performance Expectation and Subsequent Performance across Diverse School Subjects. *Psychology*, 08(12), 1941–1975. <https://doi.org/10.4236/psych.2017.812125>
- Sturm, W. (2005). *Aufmerksamkeitsstörungen*. Hogrefe.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proofing in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Stylianides, A. J. (2015). The role of mode of representation in students' argument constructions. In K. Krainer & N. Vondrová, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prague, Czech Republic.
- Stylianides, A. J. & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307–332. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9>
- Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353–387. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0604_1
- Tall, D. (1995). 'Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking'. In L. Meira & D. Carraher (Hrsg.), *Proceedings of the ninetenth PME Conference*, Recife, Brazil.
- Tall, D. (2014). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202>
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whitteley, W., Kondratieva, M. & Cheng, Y. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer Netherlands.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, 41(5), 541–555. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0195-3>

- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II* (2., durchgesehene Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag.
- Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>
- Tuma, R., Schnettler, B. & Knoblauch, H. (2013). *Videographie*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-531-18732-7>
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 30–54. <https://doi.org/10.1007/BF03339072>
- Völzke, K. (2012). *Lautes Denken bei kompetenzorientierten Diagnoseaufgaben zur naturwissenschaftlichen Erkenntnisgewinnung: Ausgezeichnet mit dem Martin-Wagenschein-Preis 2012 des ZLB. Reihe Studium und Forschung: Bd. 20*. Kassel Univ. Press.
- Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen*. Fischer.
- Waern, Y. (1988). Thoughts on text in context: Applying the think-aloud method to text processing. *Text - Interdisciplinary Journal for the Study of Discourse*, 8(4). <https://doi.org/10.1515/text.1.1988.8.4.327>
- Wagner, A. C., Uttendorfer-Marek I. & Weidle, R. (1977). Die Analyse von Unterrichtsstrategien mit der Methode des "Nachträglichen Lauten Denkens" von Lehrern und Schülern zu Ihrem unterrichtlichen Handeln. *Unterrichtswissenschaft*, 5(3), 244–250.
- Wahl, D. (1983). *Naive Verhaltenstheorie von Lehrern: Abschlussbericht e. Forschungsvorhabens zur Rekonstruktion u. Validierung subjektiver psycholog. Theorien*. Zentrum für pädag. Berufspraxis.
- Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. Watts & Co.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>
- Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56(3), 209–234. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1>
- Weidle, R. & Wagner, A. C. (1994). Die Methode des Lauten Denkens. In G. L. Huber (Hrsg.), *Verbale Daten: Eine Einführung in die Grundlagen und Methoden der Erhebung und Auswertung* (2. Aufl., S. 81–103). Beltz; Psychologie Verlas Union.
- Wellenreuther, M. (1986). Zur Methodologie der 'Fehleranalyse' in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*. 7(4), 269-303.

- Wentura, D. & Frings, C. (2012). *Kognitive Psychologie. Basiswissen Psychologie*. Springer VS.
- Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken* (W. Metzger, Übers.). *Klassische texte der Wissenschaft*. Springer Spektrum.
- White, M. C. & DiBenedetto, M. K. (2015). *Self-regulation and the common core: Application to ELA standards*. Routledge.
- Willatts, P. (1990). Development of Problem-Solving Strategies in Infancy. In D. F. Bjorklund (Hrsg.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*. (S. 23–66). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Wilson, T. D. (1994). The Proper Protocol: Validity and Completeness of Verbal Reports. *Psychological Science*, 5(5), 249–252.
<https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1994.tb00621.x>
- Wilson, J. W. (2001). *Assessing metacognition*. Unpublished doctoral thesis. The University of Melbourne.
- Wilson, J. W. & Clarke, D. (2004). Towards the Modelling of Mathematical Metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 25–48.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L. & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In J. W. Wilson (Hrsg.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (S. 57–77). MacMillan.
- Winkelhage, J., Winkel, S., Schreier, M., Heil, S., Lietz, P. & Diederich, A. (2008). Qualitative Inhaltsanalyse: Entwicklung eines Kategoriensystems zur Analyse von Stakeholderinterviews zu Prioritäten in der medizinischen Versorgung. *FOR 655*(5), 2–22.
- Winter, H. (1978). Argumentieren im Arithmetikunterricht der Primarstufe. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1978* (S. 293–295). Hermann Schroedel Verlag KG.
- Wirtz, M. A. (Hrsg.). (2021). *Dorsch. Lexikon der Psychologie*. Hogrefe.
- Witt, H. (2001). Forschungsstrategien bei quantitativer und qualitativer Sozialforschung. *Forum Qualitative Sozialforschung/ Forum: Qualitative Social Research*, 2(1), Art.8.
- Wittmann, E. C. (1981). Beziehungen zwischen operativen “Programmen” in Mathematik, Psychologie und Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2(1), 83–95.
<https://doi.org/10.1007/BF03338645>
- Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren*(11), 7–11.

- Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didacta*, 37, 213–232.
- Wittmann, E. C. & Müller N.G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Cornelsen.
- Wittmann, E. C. & Ziegenbalg, J. (2007). Sich Zahl um Zahl hochangeln. In P. Bender & G. N. Müller (Hrsg.), *Programm Mathe 2000. Arithmetik als Prozess* (2. Aufl., S. 35–53). Kallmeyer.
- Würffel, N. (2001). Protokolle Lauten Denkens als Grundlage für die Erforschung von hypertext- geleiteten Lernprozessen im Fremdsprachenunterricht. In A. Müller-Hartmann & M. Schocker-von Ditfurth (Hrsg.), *Giessener Beiträge zur Fremdsprachendidaktik. Qualitative Forschung im Bereich Fremdsprachen lehren und lernen* (S. 163–186). Gunter Narr.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.
- Yimer, A. & Ellerton, N. F. (2010). A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM*, 42(2), 245–261.
<https://doi.org/10.1007/s11858-009-0223-3>

Teil VII
Anhang

Anhang A

Einladungsbrief für potenzielle Interviewteilnehmende (SoSe21)

Liebe Studierende,

ich bin Lisa Roch, wissenschaftliche Mitarbeiterin im Fachbereich Mathematik und Informatik im Arbeitsbereich Mathematik für das Grundschullehramt und möchte im Rahmen meiner Forschung Interviews mit Studierenden des Grundschullehramtes durchführen. Dafür benötige ich Ihre Unterstützung. Innerhalb des Interviews, welches wir zu zweit führen, werden keine mathematischen Kenntnisse oder eine andere Art von Fachwissen abgefragt. Sie müssen für die Teilnahme nichts Besonderes Können oder Wissen. Es geht nur darum zu erfassen, wie Sie an eine bestimmte mathematische Aufgabe herangehen ohne, dass Wert auf Richtigkeit oder fachliche Vollständigkeit gelegt wird. Insgesamt wird also nur erfasst, wie Sie vorgehen. Das Interview dauert etwa 30-45 min., wird an der Fakultät in den Räumen der FU Berlin durchgeführt und mit Ihrem Einverständnis als Videoaufzeichnung gespeichert. Dieses Video und die verschriftliche Version Ihrer Äußerungen werden nur für Forschungszwecke verwendet und anonym gespeichert. Aufgrund der aktuellen Situation und weil das Interview in Präsenz stattfindet, müssen wir ein Hygienekonzept beachten. Wir treffen uns vor dem Gebäude. Bitte tragen Sie eine medizinische Mund- und Nasenbedeckung, wenn Sie das Gebäude betreten. Außerdem müssen Sie zum Termin einen tagesaktuellen Negativ-Schnelltest mitbringen. Diesen erhalten Sie zum Beispiel im Testzentrum der FU Berlin, können diesen aber im Testzentrum Ihrer Wahl durchführen. Während des Interviews tragen Sie keine Maske, da es zu Tonverzerrungen bei den Aufnahmen kommen kann. Es steht allerdings eine Plexiglasscheibe zum direkten Schutz zwischen uns. Der Raum wird natürlich regelmäßig gelüftet und ist ausreichend groß.

Bei Fragen zum Ablauf oder auch zum Hygienekonzept können Sie mich gern kontaktieren. Ich freue mich, mit Ihnen zusammen zu arbeiten.

Viele Grüße Lisa Roch

Anhang B

Einladungsbrief für potenzielle Interviewteilnehmende (SoSe22)

Liebe Studierende,

ich bin Lisa Roch, wissenschaftliche Mitarbeiterin im Fachbereich Mathematik und Informatik im Arbeitsbereich Mathematik für das Grundschullehramt und möchte im Rahmen meiner Forschung Interviews mit Studierenden des Grundschullehramtes durchführen. Dafür benötige ich Ihre Unterstützung. Innerhalb des Interviews, welches wir zu zweit führen, werden keine mathematischen Kenntnisse oder eine andere Art von Fachwissen abgefragt. Sie müssen für die Teilnahme nichts Besonderes Können oder Wissen. Es geht nur darum zu erfassen, wie Sie an eine bestimmte mathematische Aufgabe herangehen ohne, dass Wert auf Richtigkeit oder fachliche Vollständigkeit gelegt wird. Insgesamt wird also nur erfasst, wie Sie vorgehen. Das Interview dauert etwa 30-45 min., wird an der Fakultät in den Räumen der FU Berlin durchgeführt und mit Ihrem Einverständnis als Videoaufzeichnung gespeichert. Dieses Video und die verschriftliche Version Ihrer Äußerungen werden nur für Forschungszwecke verwendet und anonym gespeichert.

Bei Fragen zum Ablauf können Sie mich gern kontaktieren. Ich freue mich, mit Ihnen zusammen zu arbeiten.

Viele Grüße Lisa Roch

Anhang C

Leitfaden für die erste Etappe

Herzlich Willkommen und vielen Dank, dass du mich in meinem Promotionsvorhaben unterstützt. Ich werde kurz mit einer Erklärung der Vorgehensweise beginnen, bevor du, wenn du einverstanden bist, eine Einverständniserklärung unterschreibst. Der Ablauf des Interviews wird wie folgt gestaltet sein. Ich werde dir zwei mathematische Aufgaben geben, ein einfaches Testbeispiel und danach die eigentliche Testaufgabe. Diese Aufgaben löst du bitte. Unter welchen Bedingungen du sie lösen sollst und was das Besondere daran ist, erklären ich kurz bevor ich dir die Aufgabe gebe. Während der Bearbeitung der Aufgabe werde ich sehr wenig oder gar nicht nachfragen oder sprechen. Immer, wenn du eine Aufgabe gelöst haben, werde ich aber noch ein paar Fragen dazu stellen. Das bedeutet nicht, dass du die Aufgabe falsch gelöst haben. Du kannst sie gar nicht falsch lösen, weil es mir nur darauf ankommt, wie du die Aufgabe löst und nicht ob oder ob er richtig ist. Zu passenden Zeitpunkten und wenn ich es im Rahmen der Studie es für notwendig empfinde, werde ich Hilfestellungen anbieten. Das gesamte Gespräch wird aufgezeichnet und im Nachhinein transkribiert und ausschließlich für die Forschung, nicht aber für die Lehre oder andere Zwecke verwendet. Im Sinne der Anonymisierung werden von mir keine Fragen oder Aufgaben gestellt, die es erfordern, dass du personenbezogene Daten benennst. Anschließend entwerfen Sie noch einen 8-stelligen Code, unter dem das Video anonym zu speichern.

Anhang D

Einverständniserklärung

Einverständniserklärung zur Erhebung und Verarbeitung von personenbezogenen Interviewdaten

Im Rahmen des Promotionsprojektes von Lisa Roch im Fachbereich Mathematik und Informatik der Freien Universität Berlin, Arbeitsbereich: Mathematik für Grundschullehramt werden Interviews durchgeführt. Diese erfolgen mit Hilfe von Videoaufnahmen, die in der Folge transkribiert und pseudonymisiert sowie wissenschaftlich ausgewertet und veröffentlicht werden. Dabei werden personenbezogene Daten so unkenntlich gemacht, dass es nicht zu einer Identifizierung der Person führen kann. Auf die Interviewdaten haben ausschließlich die wissenschaftliche Mitarbeiterin Lisa Roch, Dr. Christine Scharlach und Christine Gärtner Zugang.

Über Art und Umfang von Erhebung und Auswertung wurde ich mündlich informiert.

Die Teilnahme an dem Interview ist freiwillig. Ihre Einwilligung können Sie jederzeit widerrufen. Die weitere Verarbeitung Ihrer Daten wird ab diesem Widerruf unzulässig. Dies berührt jedoch nicht die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung.

Ich bin damit einverstanden, an dem Interview teilzunehmen.

Ja Nein

Ich bin damit einverstanden, dass Videoausschnitte meines Interviews in wissenschaftlichen Vorträgen gezeigt werden dürfen. Hierbei werden Namen selbstverständlich pseudonymisiert und personenbezogene Daten anonymisiert.

Ja Nein

Ich bin damit einverstanden, dass Tonaufnahmen (ohne Video) meines Interviews in wissenschaftlichen Vorträgen gezeigt werden dürfen. Hierbei werden Namen selbstverständlich pseudonymisiert und personenbezogene Daten anonymisiert.

Ja Nein

Vorname Nachname in Druckschrift

Ort, Datum / Unterschrift

Anhang E
Kodierleitfaden

unveröffentlicht

Anhang F

Ergänzungen der Ankerbeispiele des Kodierleitfadens

unveröffentlicht

Anhang G

Alternative Darstellung der Ergebnisse

theoretisch abgeleitet, empirisch aber nicht sichtbar bzw. nur konkretisiert sichtbar (Kürzel: th und th (aber konkretisiert))

- visuelles Übersetzen
- Fokussieren
- Auswahl metaphorischer begrifflicher Ressourcen
- extern generierte Auswahl metaphorischer begrifflicher Ressourcen
- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf symbolischer Repräsentationsebene
- bildliche Beispielbetrachtung
- numerische Beispielbetrachtung
- numerische Beispielverifizierung
- bildliche Beispielfalsifizierung
- numerische Beispielfalsifizierung
- numerische Beispielreihung
- metrisches Transformieren
- empirische Mustersuche
- theoretische Mustersuche
- systematisches Transformieren
- fachsprachliches Formulieren
- alltagssprachliches Formulieren

empirisch ergänzt (Kürzel: e)

- markierendes Extrahieren

- eigenschaftsbasiertes Begriffe klären
- beispielbasiertes Begriffe klären
- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf bildlicher Repräsentationsebene
- ganzheitliche Beispielbetrachtung auf bildlicher Repräsentationsebene
- teilweise Beispielbetrachtung auf bildlicher Repräsentationsebene
- extern generierte ganzheitliche Beispielbetrachtung auf bildlicher Repräsentationsebene
- ganzheitliche Beispielbetrachtung auf numerischer Repräsentationsebene
- teilweise Beispielbetrachtung auf numerischer Repräsentationsebene
- irrelevante teilweise Beispielbetrachtung
- irrelevante ganzheitliche Beispielbetrachtung
- extern generierte nicht-inhaltliche Ressourcenauswahl
- extern generiertes konstruktives Transformieren
- empirische Mustersuche auf bildlicher Repräsentationsebene
- empirische Mustersuche auf numerischer Repräsentationsebene
- fokussierende Mustersuche
- variative Mustersuche
- einsetzendes systematisches Transformieren
- zerlegendes systematisches Transformieren
- angewandtes systematisches Transformieren
- abstrahierende Änderung der Repräsentationsebene
- exemplifizierende Änderung der Repräsentationsebene
- ikonisierende Änderung der Repräsentationsebene
- Übertragen

- symbolisches Darstellen des Beweisskizze
- zielformulierende Hypothese aufstellen
- zeichnerisches Darstellen der Beweisskizze
- narrativ-zusammenfassendes Darstellen der Beweisskizze

theoretisch abgeleitet und genau so empirisch sichtbar (Kürzel: th und e)

- schriftliches Extrahieren
- mündliches Extrahieren
- ergänzendes Anreichern
- folgerndes Anreichern
- symbolisches Übersetzen
- beispielhaftes Übersetzen
- paraphrasierendes Übersetzen
- Spezifizieren
- Klassifizieren
- Teile der Aufgabenstellung wiederholen
- vorhergehende Äußerung Wiederholen
- Auswahl begrifflicher Ressourcen auf bildlicher Repräsentationsebene
- Auswahl begrifflicher Ressourcen auf narrativer Repräsentationsebene
- extern generierte Auswahl begrifflicher Ressourcen auf narrativer Repräsentationsebene
- Auswahl begrifflicher Ressourcen auf symbolischer Repräsentationsebene
- komplementäre Beispielbetrachtung
- bildliche Beispielverifizierung
- bildliche Beispielreihung

ANHANG G. ALTERNATIVE DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE

- konstruktives Transformieren
- rechnerisches Transformieren
- bildungssprachliches Formulieren
- Rückschau halten

Anhang H

Zusammenfassung der Ergebnisse nach §7 Abs. 5 Promotionsordnung

Zum einen ergibt sich durch die theoretische Arbeit ein Rahmen, der sowohl chronosequentielle als auch begründungstypspezifische *Strategien* schlussfolgern lässt. Argumentationsstrukturekonstruktionsmodelle lassen eine Betrachtung der *Strategien* als kettenartige Struktur zu. Aus diesen Betrachtungen entsteht eine Strategiekollektion von potenziell möglichen *Strategien*. Durch den empirischen Teil der Arbeit entsteht eine Erweiterung und eine Anwendung dieser Kollektion auf eine Stichprobe von Studierenden des Bachelorstudiengangs Grundschulpädagogik an der FU Berlin. Es zeigte sich, dass die Studierenden *Strategien* nutzten, die auf einen explorativen und nicht-zirkulären Prozess schließen lassen. Außerdem führten sie die Begründung höchstens bis hin zu einer *Beweisskizze*, überarbeiten jedoch diese nicht, um mit der mathematischen Community oder der Lerngruppe in Kontakt zu treten. Aus den Daten lässt sich außerdem schlussfolgern, dass die Auswahl der jeweiligen *Strategie* abhängig von Inhalt und Struktur der gestellten Aufgabe und gelehrten Vorgehensweisen in der Lehrveranstaltung zu sein scheint. Die Studierenden imitierten häufig Komponenten und Strukturen aus der Lehrveranstaltung und entwickelten kein eigenes reflektiertes Vorgehen beim mathematischen *Begründen*. Des Weiteren ist das Aufstellen von generischen Beispielen und das ‚Sehen‘ von Strukturen ist als herausfordernde Aktivität zu betrachten. Es ist zu beobachten, dass durch irrelevante und komplementäre Beispiele der Kontext der mathematischen Aussage erweitert wird. Das Betrachten von Zusammenhängen unter Verwendung verschiedener Repräsentationsebenen scheint von den Studierenden intuitiv als zielführend im explorativen Prozess des mathematischen Argumentierens bewertet zu werden.