Kapitel 3

Verallgemeinerung eines Ansatzes von Hua

3.1 Der Ansatz von Hua

Im folgenden bezeichne d stets eine fest vorgegebene natürliche Zahl.
Zunächst soll der in [Hua] beschrittene Weg - umformuliert für Primzahlzwillinge - kurz dargestellt werden.
Grundlage bildet die Beziehung

$$\pi_{2d}(x) = \sum_{\substack{a \leq x-2d \\ (a,Q(x))=1, \\ (a+2d,Q(x))=1}} 1 \;+\; O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.1}$$

mit

$$Q(x) := \prod_{p \leq x^{\frac{1}{2}}} p \, .$$

Beachtet man die Definition der μ-Funktion, so bekommt weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{a \leq x-2d \\ (a,Q(x))=1, \\ (a+2d,Q(x))=1}} 1 &= \sum_{a \leq x-2d} \sum_{q_1 | (a,Q(x))} \mu(q_1) \sum_{q_2 | (a+2d,Q(x))} \mu(q_2) \\
&= \sum_{\substack{q_1 \mid Q(x) \\ q_1 \leq x}} \sum_{\substack{q_2 \mid Q(x) \\ q_2 \leq x}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \sharp \left\{ m \leq \frac{x-2d}{q_1} \mid mq_1 \equiv -2d \bmod q_2 \right\} \\
&= \sum_{k | (2d,Q(x))} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_2 \leq \frac{x}{k}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_1 \leq \frac{x}{k} \\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \sharp \left\{ m \leq \frac{x-2d}{kq_1} \mid mq_1 \equiv -\frac{2d}{k} \bmod q_2 \right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k|(2d,Q(x))} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_2 \le \frac{x}{k}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_1 \le \frac{x}{k} \\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \left(\left[\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right] - \left[\frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right] \right) , \tag{3.2}$$

wobei $\bar{q}_1 \in \mathbb{Z}$ wieder beliebig mit $\bar{q}_1 q_1 \equiv 1 \bmod q_2$ sei. Der innere Term $\left(\left[\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right] - \left[\frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right] \right)$ in der letzten Gleichungszeile kann wie in Abschnitt 1.4 approximiert werden durch $\frac{x-2d}{kq_1q_2}$ bis auf den beschränkt bleibenden Fehler $\left(-\left\{ \frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right\} + \left\{ \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right\} \right)$. Daher liegt es nahe, den gesamten Ausdruck in der letzten Zeile von (3.2) aufzuspalten in

$$\begin{aligned} &\sum_{k|(2d,Q(x))} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_2 \le \frac{x}{k}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_1 \le \frac{x}{k} \\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \left(\left[\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right] - \left[\frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right] \right) \\ = \; &\Phi_1(2d,x) + \Phi_2(2d,x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit dem Hauptglied

$$\Phi_1(2d,x) \; := \; (x-2d) \sum_{k|(2d,Q(x))} \frac{1}{k} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_2 \le \frac{x}{k}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_1 \le \frac{x}{k} \\ (q_1,q_2)=1}} \frac{\mu(q_1)\mu(q_2)}{q_1q_2}$$

und dem Restglied

$$\Phi_2(2d,x) \; := \sum_{k|(2d,Q(x))} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_2 \le \frac{x}{k}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{Q(x)}{k} \\ q_1 \le \frac{x}{k} \\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \left(\left\{ \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right\} - \left\{ \frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right\} \right) .$$

Als Abschätzung für das Hauptglied wird in [Hua]

$$\Phi_1(2d,x) \; = \; \sigma(2d) \cdot \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x \log\log x}{\log^{\frac{5}{2}} x} \right) \tag{3.4}$$

gezeigt. Dafür werden keine tiefliegenden Resultate der analytischen Zahlentheorie verwendet, wie etwa der Satz von Siegel-Walfisz, sondern lediglich der Primzahlsatz. Wegen (3.1), (3.2), (3.3) und (3.4) ist die Vermutung (1) von Hardy- Littlewood aus der Einleitung äquivalent mit

$$\Phi_2(2d,x) = o\left(\frac{x}{\log^2 x} \right) . \tag{3.5}$$

Das Restglied ist also genau dann von kleinerer Größenordnung, als das Hauptglied, wenn die Vermutung (1) zutrifft.

Es liegt nun nahe, die Vermutung (1) von Hardy-Littlewood mit Hilfe des Satzes 2.1' zu verfeinern. Wegen Satz 2.1' gilt

$$\left|\pi_{2d}(x) - \sigma(2d) \cdot \int_{2d+2}^{x} \frac{dt}{\log t \log(t-2d)}\right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^{2+\alpha}}\right) \tag{3.6}$$

für **„fast alle"** $d \leq \frac{x}{2} - 1$, wobei die O-Konstante nicht von d abhängt und α eine beliebige positive reelle Konstante ist. Dies legt die Annahme nahe, daß (3.6) sogar **für alle** $d \leq \frac{x}{2} - 1$ und eine geeignete Konstante $\alpha > 0$ zutrifft. Da offenbar

$$\int_{2d+2}^{x} \frac{dt}{\log t \log(t-2d)} = \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

ist mit einer von d abhängigen O-Konstante, folgt dann aus (3.6) **für beliebiges, aber festes** $d \in IN$ und eine geeignete Konstante $\alpha \in (0,1]$

$$\pi_{2d}(x) = \sigma(2d) \cdot \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2+\alpha}}\right) \tag{3.7}$$

für $x \longrightarrow \infty$, wobei die O-Konstante von d abhängt. Hierdurch wird die Vermutung von Hardy-Littlewood verfeinert. Entsprechend (3.5) ist nun (3.7) äquivalent mit

$$\Phi_2(2d, x) = O\left(\frac{x}{(\log x)^{2+\alpha}}\right) \tag{3.8}$$

für eine geeignete Konstante $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

3.2 Das $[P_M, P_N]$-Problem

Es läge nahe, den Huaschen Ansatz für Primzahl-n-Tupel zu verallgemeinern. Das ist auch ohne weiteres machbar, aber es existieren bereits seit längerer Zeit Vermutungen über die Anzahl gewisser Primzahl-n-Tupel $\leq x$ (siehe z.B. [HRi]). Interessanter scheint eine Verallgemeinerung des Huaschen Ansatzes für Paare $(a, a+2d)$ natürlicher Zahlen mit beschränkten Anzahlen von Primfaktoren zu sein, da genaue Vermutungen über die asymptotische Größenordnung der Anzahl solcher Paare $\leq x$ in der einschlägigen Literatur nicht zu finden sind. Die Frage nach der Größenordnung der Anzahl

$$\pi^*_{2d}(M,N,x) := \sharp\{a \in I\!N \mid 1 < a \leq x-2d,\ \Omega(a) \leq M,\ \Omega(a+2d) \leq N\}$$

aller Paare $(a, a+2d)$ mit $1 < a \leq x-2d$, für die a höchstens M und $a+2d$ höchstens N Primfaktoren besitzt, wird auch als „$[P_M, P_N]$-Problem" bezeichnet.
Während die Frage, ob es für vorgegebenes d unendlich viele Primzahlpaare der Form $(p, p+2d)$ gibt, bisher nicht beantwortet werden konnte, gelang es, $\pi^*_{2d}(1,2,x)$ nichttrivial von unten abzuschätzen. Mit Hilfe einer Verfeinerung der Selbergschen Siebmethode und durch Anwendung des Satzes von Bombieri-Vinogradov bewies Chen 1973 (s. [Che]) für genügend großes x die Abschätzung

$$\pi^*_{2d}(1,2,x) > 0.67 \cdot \sigma(2d) \cdot \frac{x}{\log^2 x}\ .$$

Später wurde dieses Ergebnis von Kan Jiahai verbessert und für beliebiges $N \in I\!N$ mit $N \geq 2$ verallgemeinert zu

$$\pi^*_{2d}(1,N,x) - \pi^*_{2d}(1,N-2,x) > \frac{(0.965-\epsilon)\sigma(2d)}{(N-2)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{N-2}}{\log^2 x}$$

für $x \geq x_0$, wobei x_0 von ϵ und N abhängt (s. [Kan]). Als obere Abschätzung fand Kan (s. [Kan]) für alle $N \in I\!N$

$$\pi^*_{2d}(1,N,x) = O\left(\frac{x(\log\log x)^{N-1}}{\log^2 x}\right)\ .$$

Statt $\pi^*_{2d}(M,N,x)$ soll in diesem Kapitel die Anzahl

$$\pi_{2d}(M,N,x) := \sharp\{a \in I\!N \mid (a,2d)=1,\ 1 < a \leq x-2d,\ \Omega(a) \leq M,\ \Omega(a+2d) \leq N\}$$

näher untersucht werden. Daß die zusätzliche Forderung $(a,2d)=1$ keine **wesentliche** Einschränkung bedeutet, zeigt die Beziehung

$$\begin{aligned}\pi^*_{2d}(M,N,x) &= \sum_{t|2d} \sharp\{a \in I\!N \mid (a,2d)=t,\ 1 < a \leq x-2d,\ \Omega(a) \leq M,\ \Omega(a+2d) \leq N\}\\ &= \sum_{\substack{t \mid 2d\\ \Omega(t) \leq \min\{M-1,N-1\}}} \pi_{2d}\left(M-\Omega(t), N-\Omega(t), \frac{x}{t}\right) + O(2d)\ ,\end{aligned}$$

durch die $\pi^*_{2d}(M,N,x)$ auf $\pi_{2d}(M,N,x)$ zurückgeführt werden kann.
Im folgenden soll der Huasche Ansatz (s. [Hua]) zur Herleitung der Vermutung (1) von Hardy-Littlewood in der Weise verallgemeinert werden, daß man analoge Vermutungen für $\pi_{2d}(M,N,x)$ erhält. Der Huasche Ansatz scheint besser für eine solche Verallgemeinerung geeignet zu sein, als der von Pan Chengdong oder die klassische Kreismethode nach Hardy-Littlewood, da man hierbei nicht auf die Mangoldt-Funktion Λ

zurückzugreifen braucht. Es wird sich zeigen, daß man man auf heuristischem Wege die Vermutung

$$\pi_{2d}(M,N,x) \sim \frac{\sigma(2d)}{(M-1)!(N-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^2 x} \tag{3.9}$$

bekommt, die für $\pi_{2d}(2,1,x)$ noch verschärft werden kann.

3.3 Aufspaltung von $\pi_{2d}(M,N,x)$

In Verallgemeinerung des Huaschen Ansatzes soll $\pi_{2d}(M,N,x)$ zunächst in ein Hauptglied und zwei Restglieder aufgespalten werden.
Offenbar kann $\pi_{2d}(M,N,x)$ in der Form

$$\pi_{2d}(M,N,x) = \sum_{\substack{(r,2d)=1\\ \lambda(r)\le \frac{x}{r}\\ \Omega(r)\le M-1}} \sum_{\substack{(s,2dr)=1\\ \lambda(s)\le \frac{x}{s}\\ \Omega(s)\le N-1}} \sum_{\substack{a\le x-2d,\ (a,2d)=1\\ r\mid a,\ s\mid (a+2d)\\ \frac{a}{r},\frac{a+2d}{s}\in IP\\ \lambda(r)\le\frac{a}{r},\ \lambda(s)\le\frac{a+2d}{s}}} 1 \tag{3.10}$$

ausgedrückt werden, wobei $\lambda(n)$ für $n \in IN$ den größten Primfaktor von n angibt.
In den folgenden Betrachtungen wird stets vorausgesetzt, daß die obigen Summationsbedingungen für r und s zutreffen. Insbesondere wird also

$$(r,2d)=1,\ (s,2dr)=1 \tag{3.11}$$

angenommen, und wegen $\lambda(r) \ge r^{\frac{1}{\Omega(r)}}$ und $\lambda(s) \ge s^{\frac{1}{\Omega(s)}}$ folgen aus den Summationsbedingungen $\lambda(r)\le\frac{x}{r}$, $\Omega(r)\le M-1$ und $\lambda(s)\le\frac{x}{s}$, $\Omega(s)\le N-1$ die Ungleichungen

$$r \le x^{1-\frac{1}{M}},\quad s\le x^{1-\frac{1}{N}}\ . \tag{3.12}$$

Nun soll die innere Summe auf der rechten Seite von (3.10) weiter umgeformt werden. Es gilt

$$\sum_{\substack{a\le x-2d,\ (a,2d)=1\\ r\mid a,\ s\mid (a+2d)\\ \frac{a}{r},\frac{a+2d}{s}\in IP\\ \lambda(r)\le\frac{a}{r},\ \lambda(s)\le\frac{a+2d}{s}}} 1 = \sum_{\substack{K(r,s)<a\le x-2d\\ (a,2d)=1\\ a\equiv 0 \bmod r,\ a\equiv -2d \bmod s\\ \frac{a}{r},\frac{a+2d}{s}\in IP}} 1\ , \tag{3.13}$$

wobei

$$K(r,s) := \max\{r\lambda(r) - 1,\ s\lambda(s) - 2d - 1\} \tag{3.14}$$

sei. Weiter ist

$$\sum_{\substack{K(r,s) < a \le x-2d \\ (a,2d)=1 \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s \\ \frac{a}{r},\ \frac{a+2d}{s} \in IP}} 1 = \sum_{\substack{K(r,s) < a \le x-2d \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s \\ \left(\frac{a}{r}, Q\left(\frac{x}{r}\right)\right) = 1,\ \left(\frac{a+2d}{s}, Q\left(\frac{x}{s}\right)\right) = 1}} 1 + O\left(\sum_{\substack{a \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s \\ \frac{a}{r} \le \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ oder } \frac{a+2d}{s} \le \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}}}} 1 \right), \tag{3.15}$$

wobei wieder

$$Q(y) := \prod_{p \le y^{\frac{1}{2}}} p \tag{3.16}$$

gesetzt werde für beliebiges $y \in IR^+$. Die Summationsbedingung $(a, 2d) = 1$ kann unter der ersten Summe auf der rechten Seite von (3.15) weggelassen werden, da diese für genügend großes x wegen (3.11) und (3.12) aus $\left(\frac{a}{r}, Q\left(\frac{x}{r}\right)\right) = 1$ folgt.
Die Summe im O-Term auf der rechten Seite von (3.15) kann offensichtlich umgeschrieben werden in

$$\sum_{\substack{a \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s \\ \frac{a}{r} \le \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ oder } \frac{a+2d}{s} \le \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}}}} 1 = \sum_{\substack{a \le \max\left\{(rx)^{\frac{1}{2}},\ (sx)^{\frac{1}{2}} - 2d\right\} \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s}} 1 . \tag{3.17}$$

Beachtet man die Definition der μ-Funktion, so bekommt man für die erste Summe auf der rechten Seite von (3.15)

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{K(r,s) < a \le x-2d \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s \\ \left(\frac{a}{r}, Q\left(\frac{x}{r}\right)\right) = 1,\ \left(\frac{a+2d}{s}, Q\left(\frac{x}{s}\right)\right) = 1}} 1 \\ = &\sum_{\substack{K(r,s) < a \le x-2d \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s}} \ \sum_{q_1 | \left(\frac{a}{r}, Q\left(\frac{x}{r}\right)\right)} \mu(q_1) \sum_{q_2 | \left(\frac{a+2d}{s}, Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \mu(q_2) \\ = &\sum_{\substack{q_1 \mid Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \le \frac{x}{r}}} \ \sum_{\substack{q_2 \mid Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \le \frac{x}{s}}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \sharp \left\{ \frac{K(r,s)}{rq_1} < m \le \frac{x-2d}{rq_1} \mid mq_1 r \equiv -2d \bmod q_2 s \right\} . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Wegen (3.11) folgt weiter

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{q_1 \mid Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{r}}} \sum_{\substack{q_2 \mid Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{s}}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \sharp\left\{\frac{K(r,s)}{rq_1} < m \leq \frac{x-2d}{rq_1} \mid mq_1 r \equiv -2d \bmod q_2 s\right\} \\
= &\sum_{k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{ks}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{kr} \\ (q_1 r, q_2 s) = 1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \\
&\sharp\left\{\frac{K(r,s)}{krq_1} < m \leq \frac{x-2d}{krq_1} \mid mq_1 r \equiv -\frac{2d}{k} \bmod q_2 s\right\} \\
= &\sum_{k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{ks}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{kr} \\ (q_1 r, q_2 s) = 1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \\
&\left(\left[\frac{x-2d}{krsq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{r}}{q_2 s}\right] - \left[\frac{K(r,s)}{krsq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{r}}{q_2 s}\right]\right) .
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Es liegt nahe, den Ausdruck in der letzten Gleichungszeile nun völlig analog wie in Abschnitt 3.1 in einen Haupt- und einen Restterm aufzuspalten. Man erhält auf diese Weise

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{ks}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{kr} \\ (q_1 r, q_2 s) = 1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot \\
&\left(\left[\frac{x-2d}{krsq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{r}}{q_2 s}\right] - \left[\frac{K(r,s)}{krsq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{r}}{q_2 s}\right]\right) \\
= \; & \Phi_1(2d, x, r, s) + \Phi_2(2d, x, r, s)
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

mit dem Hauptterm

$$
\Phi_1(2d, x, r, s) := \frac{x - 2d - K(r,s)}{rs} \sum_{k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \frac{1}{k} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{ks}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k} Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{kr} \\ (q_1 r, q_2 s) = 1}} \frac{\mu(q_1)\mu(q_2)}{q_1 q_2} \tag{3.21}
$$

und dem Restterm

$$\Phi_2(2d,x,r,s) \quad := \sum_{k|\left(2d,Q\left(\frac{x}{r}\right),Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \quad \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k}Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{ks}}} \quad \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k}Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{kr} \\ (q_1 r, q_2 s)=1}} \mu(q_1)\mu(q_2) \cdot$$

$$\left(\left\{\frac{K(r,s)}{krsq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{r}}{q_2 s}\right\} - \left\{\frac{x-2d}{krsq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{r}}{q_2 s}\right\}\right) . \tag{3.22}$$

Zusammen liefern (3.10) bis (3.20)

$$\pi_{2d}(M,N,x) = H_{2d}(M,N,x) + R_{2d}(M,N,x) + O\left(S_{2d}(M,N,x)\right) , \tag{3.23}$$

wobei

$$H_{2d}(M,N,x) := \sum_{\substack{(r,2d)=1 \\ \lambda(r) \leq \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \leq M-1}} \quad \sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ \lambda(s) \leq \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \leq N-1}} \Phi_1(2d,x,r,s) \tag{3.24}$$

das Hauptglied,

$$R_{2d}(M,N,x) := \sum_{\substack{(r,2d)=1 \\ \lambda(r) \leq \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \leq M-1}} \quad \sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ \lambda(s) \leq \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \leq N-1}} \Phi_2(2d,x,r,s) \tag{3.25}$$

das erste Restglied und

$$S_{2d}(M,N,x) := \sum_{\substack{(r,2d)=1 \\ \lambda(r) \leq \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \leq M-1}} \quad \sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ \lambda(s) \leq \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \leq N-1}} \quad \sum_{\substack{a \leq \max\left\{(rx)^{\frac{1}{2}},\ (sx)^{\frac{1}{2}}-2d\right\} \\ a \equiv 0 \bmod r,\ a \equiv -2d \bmod s}} 1$$

das zweite Restglied ist. Das Restglied $S_{2d}(M,N,x)$ läßt sich wegen (3.12) abschätzen durch

$$S_{2d}(M,N,x) \leq \sum_{a \leq \max\left\{x^{1-\frac{1}{2M}},\, x^{1-\frac{1}{2N}}\right\}} \quad \sum_{r|a} \quad \sum_{s|(a+2d)} 1 \;=\; \sum_{a \leq \max\left\{x^{1-\frac{1}{2M}},\, x^{1-\frac{1}{2N}}\right\}} \tau(a)\tau(a+2d) ,$$

woraus wegen der in dieser Arbeit schon mehrfach benutzten Abschätzung $\tau(n) = O\left(n^{\epsilon}\right)$

$$S_{2d}(M,N,x) = O\left(x^{1-\delta}\right) \tag{3.26}$$

folgt für jedes $\delta < \min\left\{\frac{1}{2M},\ \frac{1}{2N}\right\}$.

3.4 Vermutung für das $[P_M, P_N]$-Problem

In diesem Abschnitt wird die Vermutung (3.9) über $\pi_{2d}(M,N,x)$ heuristisch hergeleitet. Dazu wird als asymptotische Abschätzung für das in (3.24) definierte Hauptglied $H_{2d}(M,N,x)$ gezeigt

Satz 3.1:

Es gilt

$$H_{2d}(M,N,x) \sim \frac{\sigma(2d)}{(M-1)!(N-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^2 x} \ .$$

Zum Beweis muß zuerst der in (3.21) definierte Term $\Phi_1(2d,x,r,s)$ abgeschätzt werden. Dazu braucht man folgendes

Lemma 3.1: (Verbesserung von Lemma 3, S.6 in [Hua])

Für $f \in I\!N$, $y, z \in I\!R^+$ werde $U^f(y,z)$ definiert durch

$$U^f(y,z) := \sum_{\substack{q \,|\, Q(y) \\ q \leq z \\ (q,f)=1}} \frac{\mu(q)}{q} \ .$$

Sei nun $c > 0$ beliebig, aber fest. Dann gilt für $f \leq y^c$ und $y^{\frac{2}{3}} \leq z \leq y$ die Abschätzung

$$U^f(y,z) = \frac{f}{\varphi(f)} \cdot \frac{1}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) \ ,$$

wobei die O-Konstante nur von c abhängt.

Dieses Lemma wird in Abschnitt 3.6 bewiesen.

Eine Abschätzung für $\Phi_1(2d,x,r,s)$ geschieht nun in

Lemma 3.2:

Falls (3.11) und (3.12) gelten, so ist

$$\Phi_1(2d,x,r,s) = \sigma(2d) \cdot \frac{f(r)f(s)\,(x-2d-K(r,s))}{r\log\frac{x}{r}\ s\log\frac{x}{s}} + O\left(\frac{x}{rs\log^{\frac{8}{3}} x}\right) \ ,$$

wobei $f(a)$ für jedes $a \in I\!N$ definiert werde durch $f(a) := \prod_{\substack{p \,|\, a \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2}$.

Beweis:

Beachtet man (3.11) und die Definition der μ-Funktion, so kann die Summationsbedingung $(q_1 r, q_2 s) = 1$ in der inneren Doppelsumme auf der rechten Seite von (3.21) beseitigt werden durch die Umformung

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k}Q\left(\frac{x}{s}\right)\\ q_2 \le \frac{x}{ks}}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k}Q\left(\frac{x}{r}\right)\\ q_1 \le \frac{x}{kr}\\ (q_1 r, q_2 s)=1}} \frac{\mu(q_1)\mu(q_2)}{q_1 q_2}\\
=\ &\sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{k}Q\left(\frac{x}{s}\right)\\ q_2 \le \frac{x}{ks}\\ (q_2,r)=1}} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{k}Q\left(\frac{x}{r}\right)\\ q_1 \le \frac{x}{kr}\\ (q_1,s)=1}} \frac{\mu(q_1)\mu(q_2)}{q_1 q_2} \sum_{n \mid (q_1,q_2)} \mu(n)\\
=\ &\sum_{\substack{n \mid \frac{1}{k}\left(Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)\\ n \le \min\left(\frac{x}{kr}, \frac{x}{ks}\right)\\ (n,rs)=1}} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{r}\right)\\ q_1 \le \frac{x}{nkr}\\ (q_1,s)=1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{s}\right)\\ q_2 \le \frac{x}{nks}\\ (q_2,r)=1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2}\,.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Wegen (3.12) und der Definition von $Q(y)$ in (3.16) läßt sich der Term in der letzten Gleichungszeile für jedes $k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)$ aufspalten in

$$\sum_{\substack{n \mid \frac{1}{k}\left(Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)\\ n \le \min\left(\frac{x}{kr}, \frac{x}{ks}\right)\\ (n,rs)=1}} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{r}\right)\\ q_1 \le \frac{x}{nkr}\\ (q_1,s)=1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{s}\right)\\ q_2 \le \frac{x}{nks}\\ (q_2,r)=1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2} = S_1 + S_2 \tag{3.28}$$

mit

$$S_1 := \sum_{\substack{n \le \frac{1}{2d}\cdot x^{\delta}\\ (n,krs)=1}} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{r}\right)\\ q_1 \le \frac{x}{nkr}\\ (q_1,s)=1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{s}\right)\\ q_2 \le \frac{x}{nks}\\ (q_2,r)=1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2} \tag{3.29}$$

und

$$S_2 := \sum_{\substack{n \mid \frac{1}{k}\left(Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)\\ \frac{1}{2d}\cdot x^{\delta} < n \le \min\left(\frac{x}{kr}, \frac{x}{ks}\right)\\ (n,rs)=1}} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{r}\right)\\ q_1 \le \frac{x}{nkr}\\ (q_1,s)=1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{s}\right)\\ q_2 \le \frac{x}{nks}\\ (q_2,r)=1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2}\,, \tag{3.30}$$

wobei $\delta := \min\left\{\frac{1}{3M},\ \frac{1}{3N}\right\}$ sei. Nun sollen die Summen S_1 und S_2 einzeln untersucht werden.
Die inneren Summen auf der rechten Seite von (3.29) können wegen Lemma 3.1 und (3.12) für $n \leq \frac{1}{2d} \cdot x^\delta$ abgeschätzt werden durch

$$\sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{nkr} \\ (q_1, s) = 1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} = \sum_{\substack{q_1 \mid Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{nkr} \\ (q_1, nks) = 1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} = U^{nks}\left(\frac{x}{r},\ \frac{x}{nkr}\right) = \frac{nks}{\varphi(nks)} \cdot \frac{1}{\log \frac{x}{nkr}} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} x}\right) \tag{3.31}$$

b.z.w.

$$\sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{nks} \\ (q_2, r) = 1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2} = \sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk}Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{nks} \\ (q_2, nkr) = 1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2} = U^{nkr}\left(\frac{x}{s},\ \frac{x}{nks}\right) = \frac{nkr}{\varphi(nkr)} \cdot \frac{1}{\log \frac{x}{nks}} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} x}\right). \tag{3.32}$$

Beachtet man (3.11), $k \mid 2d$ und die bekannte Abschätzung $\frac{f}{\varphi(f)} = O\left(\log\log f\right)$, so ergibt sich aus (3.31) und (3.32)

$$S_1 = \frac{k^2 rs}{\varphi(k)^2 \varphi(rs)} \cdot \sum_{\substack{n \leq x^\delta \\ (n, krs) = 1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)^2} \cdot \frac{1}{\log \frac{x}{nkr}\ \log \frac{x}{nks}} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right). \tag{3.33}$$

Wegen

$$\frac{1}{\log \frac{x}{nkr}} = \frac{1}{\log \frac{x}{r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\log(nk)}{\log \frac{x}{r}}} = \frac{1}{\log \frac{x}{r}} + O\left(\frac{\log(nk)}{\log^2 \frac{x}{r}}\right),$$

$$\frac{1}{\log \frac{x}{nks}} = \frac{1}{\log \frac{x}{s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\log(nk)}{\log \frac{x}{s}}} = \frac{1}{\log \frac{x}{s}} + O\left(\frac{\log(nk)}{\log^2 \frac{x}{s}}\right),$$

der Abschätzung $\frac{f}{\varphi(f)} = O\left(\log\log f\right)$ und (3.12) folgt aus (3.33) weiter

$$S_1 = \frac{k^2 rs}{\varphi(k)^2 \varphi(rs)} \cdot \sum_{\substack{n \leq x^\delta \\ (n, krs) = 1}} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)^2} \cdot \frac{1}{\log \frac{x}{r}\ \log \frac{x}{s}} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right).$$

Beachtet man wieder $\frac{f}{\varphi(f)} = O\left(\log\log f\right)$, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{k^2 rs}{\varphi(k)^2 \varphi(rs)} \cdot \frac{1}{\log \frac{x}{r}\ \log \frac{x}{s}} \cdot \sum_{\substack{n = 1 \\ (n, krs) = 1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)^2} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right) \\ &= \frac{k^2 rs}{\varphi(k)^2 \varphi(rs)} \cdot \frac{1}{\log \frac{x}{r}\ \log \frac{x}{s}} \cdot \prod_{p \nmid krs}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Als nächstes erfolgt eine Abschätzung der Summe S_2. Da für die inneren Summen auf der rechten Seite von (3.30) trivialerweise

$$\sum_{\substack{q_1 \mid \frac{1}{nk} Q\left(\frac{x}{r}\right) \\ q_1 \leq \frac{x}{nkr} \\ (q_1, s) = 1}} \frac{\mu(q_1)}{q_1} = O(1 + \log x)$$

und

$$\sum_{\substack{q_2 \mid \frac{1}{nk} Q\left(\frac{x}{s}\right) \\ q_2 \leq \frac{x}{nks} \\ (q_2, r) = 1}} \frac{\mu(q_2)}{q_2} = O(1 + \log x)$$

gilt, bekommt man unter Beachtung von $\frac{f}{\varphi(f)} = O(\log\log f)$

$$S_2 = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right) . \tag{3.35}$$

Nun liefern (3.21), (3.27), (3.28), (3.34) und (3.35) zusammen

$$\Phi_1(2d, x, r, s) = \frac{x - 2d - K(r,s)}{\varphi(rs) \log \frac{x}{r} \ \log \frac{x}{s}} \cdot \sum_{k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)} \frac{k}{\varphi(k)^2} \cdot \prod_{p \nmid krs} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right) . \tag{3.36}$$

Beachtet man wieder (3.12) und die Definition von $Q(y)$ in (3.16), so sieht man, daß für genügend großes x jedes quadratfreie k, welches $2d$ teilt, auch $Q\left(\frac{x}{r}\right)$ und $Q\left(\frac{x}{s}\right)$ teilt. Somit kann die Summationsbedingung $k \mid \left(2d, Q\left(\frac{x}{r}\right), Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)$ unter der Summe auf der rechten Seite von (3.36) ersetzt werden durch $k \mid 2d$. Wegen (3.11) läßt sich diese Summe nun weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
\sum_{k \mid 2d} \mu^2(k) \cdot \frac{k}{\varphi(k)^2} \cdot \prod_{p \nmid krs} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) &= \sum_{\substack{k \mid 2d \\ 2 \mid k}} \mu^2(k) \cdot \frac{k}{\varphi(k)^2} \cdot \prod_{p \nmid krs} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \\
&= 2 \sum_{\substack{k \mid d \\ (k,2)=1}} \mu^2(k) \cdot \frac{k}{\varphi(k)^2} \cdot \prod_{\substack{p \nmid krs \\ p > 2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \\
&= 2 \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \mid rs} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \sum_{\substack{k \mid d \\ (k,2)=1}} \frac{\mu^2(k)}{k-2} \\
&= 2 \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \frac{\varphi(rs)}{rs} \cdot \prod_{p \mid rs} \frac{p-1}{p-2} \prod_{\substack{p \mid d \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \\
&= \sigma(2d) \cdot \frac{\varphi(rs)}{rs} \cdot \prod_{p \mid rs} \frac{p-1}{p-2} ,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

wobei $\sigma(2d)$ die in (2) definierte Zwillingskonstante ist.
Aus (3.36) und (3.37) ergibt sich die Behauptung, wenn man (3.11) beachtet. $\square$

Für den Beweis des Satzes 3.1 wird noch benötigt

Lemma 3.3:

Sei $K \in I\!N$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(i) \qquad \sum_{\substack{a \le x \\ \Omega(a) \le K}} \frac{1}{a} = \frac{1}{K!} \cdot (\log\log x)^K + o\left((\log\log x)^K\right) ,$$

$$(ii) \qquad \sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)\log x}{a \log \frac{x}{a}} = \frac{1}{K!} \cdot (\log\log x)^K + o\left((\log\log x)^K\right) ,$$

wobei $f(a)$ definiert sei wie in Lemma 3.2.

Beweis:

Nach [Lan], S.211 läßt sich der Primzahlsatz verallgemeinern zu

$$\sum_{\substack{a \le y \\ \Omega(a) \le K}} 1 \sim \frac{1}{(K-1)!} \cdot \frac{y(\log\log y)^{K-1}}{\log y} .$$

Hieraus kann leicht mit Hilfe von partieller Summation Teil (i) gefolgert werden. Für die in Teil (ii) abzuschätzende Summe bekommt man

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)\log x}{a \log \frac{x}{a}} &= \sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)}{a\left(1 - \frac{\log a}{\log x}\right)} \\ &= \sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)}{a} + O\left(\frac{1}{\log x} \cdot \sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)\log a}{a} \right) . \end{aligned} \tag{3.38}$$

Beachtet man $f(a) \le 2^{\Omega(a)}$ f.a. $a \in I\!N$ und führt wiederum eine partielle Summation durch, so erhält man aus Teil (i) für die Summe im O-Term

$$\sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)\log a}{a} \le 2^K \sum_{\substack{a \le x \\ \Omega(a) \le K}} \frac{\log a}{a} = o\left(\log x (\log\log x)^K\right) . \tag{3.39}$$

Nun wird noch eine Abschätzung für die erste Summe in der letzten Zeile von (3.38) gebraucht. Diese läßt sich offenbar aufspalten in

$$\sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)}{a} = \sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)-1}{a} + \sum_{\substack{a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{1}{a} - \sum_{\substack{a \le \frac{1}{2} \cdot x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K-1}} \frac{1}{2a} \,. \tag{3.40}$$

Die Summen auf der rechten Seite sollen nun einzeln abgeschätzt werden. Für die dritte Summe ergibt sich aus Teil (i) des Lemmas

$$\sum_{\substack{a \le \frac{1}{2} \cdot x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K-1}} \frac{1}{2a} = O\Big((\log\log x)^{K-1}\Big) \,. \tag{3.41}$$

Ebenfalls Teil (i) liefert für die zweite Summe

$$\sum_{\substack{a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{1}{a} = \frac{1}{K!} \cdot \Big(\log\log x^{1-\frac{1}{K+1}}\Big)^K + o\Big((\log\log x)^K\Big) \,,$$

woraus wegen

$$\Big(\log\log x^{1-\frac{1}{K+1}}\Big)^K = \left(\log\log x + \log\left(1 - \frac{1}{K+1}\right)\right)^K = (\log\log x)^K + O\Big((\log\log x)^{K-1}\Big)$$

weiter

$$\sum_{\substack{a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{1}{a} = \frac{1}{K!} \cdot (\log\log x)^K + o\Big((\log\log x)^K\Big) \tag{3.42}$$

folgt. Die erste Summe auf der rechten Seite von (3.40) kann in der Form

$$\sum_{\substack{(a,2)=1 \\ a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K}} \frac{f(a)-1}{a} = \sum_{2<p\le x^{1-\frac{1}{K+1}}} \sum_{\substack{a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K \\ \eta(a)=p}} \frac{f(a)-1}{a} \tag{3.43}$$

geschrieben werden, wobei $\eta(a)$ den kleinesten Primfaktor von a angibt. Da für $\eta(a) = p > 2$ und $\Omega(a) \le K$ wegen der Definition von $f(a)$

$$f(a) - 1 \le \left(\frac{p-1}{p-2}\right)^K - 1 \le \frac{2^K}{p-2}$$

ist, hat man

$$\begin{aligned} \sum_{2<p\le x^{1-\frac{1}{K+1}}} \sum_{\substack{a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K \\ \eta(a)=p}} \frac{f(a)-1}{a} &\le 2^K \sum_{2<p\le x^{1-\frac{1}{K+1}}} \frac{1}{p-2} \cdot \sum_{\substack{a \le x^{1-\frac{1}{K+1}} \\ \Omega(a) \le K \\ \eta(a)=p}} \frac{1}{a} \\ &\le 2^K \sum_{p>2} \frac{1}{p(p-2)} \cdot \sum_{\substack{a \le x \\ \Omega(a) \le K-1}} \frac{1}{a} \,. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Der Term in der letzten Ungleichungszeile läßt sich wegen Teil (i) des Lemmas noch abschätzen durch

$$2^K \sum_{p>2} \frac{1}{p(p-2)} \cdot \sum_{\substack{a \le x \\ \Omega(a) \le K-1}} \frac{1}{a} \quad = \quad O\left((\log\log x)^{K-1}\right) \; . \tag{3.45}$$

Faßt man (3.38) bis (3.45) zusammen, so erhält man die Behauptung des Teiles (ii). □

Mit Hilfe der Lemmata 3.2 und 3.3 kann nun geführt werden der

Beweis von Satz 3.1:

Aus der Definition des Hauptgliedes $H_{2d}(M,N,x)$ in (3.24) und Lemma 3.2 folgt

$$H_{2d}(M,N,x) := \sigma(2d)(S_1 - S_2) + O(S_3) \; , \tag{3.46}$$

wobei

$$S_1 := (x-2d) \cdot \sum_{\substack{(r,2d)=1 \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \frac{f(r)}{r \log \frac{x}{r}} \sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}} \; , \tag{3.47}$$

$$S_2 := \sum_{\substack{(r,2d)=1 \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{f(r)f(s)K(r,s)}{r \log \frac{x}{r} \; s \log \frac{x}{s}}$$

und

$$S_3 := \frac{x}{\log^{\frac{8}{3}} x} \cdot \sum_{\substack{r \le x \\ \Omega(r) \le M-1}} \frac{1}{r} \sum_{\substack{s \le x \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{1}{s}$$

sei. Die Summe S_3 kann wegen Lemma 3.3(i) abgeschätzt werden durch

$$S_3 := \quad O\left(\frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^{\frac{8}{3}} x}\right) \; . \tag{3.48}$$

Wegen (3.12) und $f(a) \le 2^{\Omega(a)}$ f.a. $a \in I\!N$ ergibt sich für die Summe S_2 zunächst

$$S_2 \le \quad \frac{MN \cdot 2^{M+N}}{\log^2 x} \cdot \sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \sum_{\substack{s \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{K(r,s)}{rs} \; . \tag{3.49}$$

Weiter erhält man wegen der Definition von $K(r,s)$ in (3.14) und Lemma 3.3(i)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \sum_{\substack{s \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{K(r,s)}{rs} \\
\le &\sum_{\substack{s \le x \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{1}{s} \sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \lambda(r) + \sum_{\substack{r \le x \\ \Omega(r) \le M-1}} \frac{1}{r} \sum_{\substack{s \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \lambda(s) \\
\ll &\ (\log\log x)^{N-1} \cdot \sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \lambda(r) + (\log\log x)^{M-1} \cdot \sum_{\substack{s \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \lambda(s) \ .
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Abgeschätzt werden soll nun die Summe $\sum\limits_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \lambda(r)$ in der letzten Ungleichungszeile.

Da für $M = 1$ der Wert dieser Summe gleich 1 ist, genügt es, den Fall $M \ge 2$ zu betrachten.

Für vorgegebenes r setze man $r_0 := \frac{r}{\lambda(r)}$. Dann ist $\lambda(r) \le \frac{x}{r}$ offenbar äquivalent mit $\lambda(r) \le \left(\frac{x}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, und aus $r \le x$ und $\Omega(r) \le M-1$ folgt $r_0 \le x^{1-\frac{1}{M-1}}$, da $\lambda(r) \ge r^{\frac{1}{\Omega(r)}}$ gilt. Damit hat man

$$\sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \lambda(r) \le \sum_{\substack{r_0 \le x^{1-\frac{1}{M-1}} \\ \Omega(r_0) \le M-2}} \sum_{p \le \left(\frac{x}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}} p \ . \tag{3.51}$$

Der Primzahlsatz liefert für die innere Summe auf der rechten Seite

$$\sum_{p \le \left(\frac{x}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}} p \le \left(\frac{x}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \pi\left(\left(\frac{x}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = O\left(\frac{\frac{x}{r_0}}{\log \frac{x}{r_0}}\right) . \tag{3.52}$$

Aus (3.51) und (3.52) ergibt sich

$$\sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \lambda(r) = O\left(\frac{x}{\log x} \cdot \sum_{\substack{r_0 \le x^{1-\frac{1}{M-1}} \\ \Omega(r_0) \le M-2}} \frac{1}{r_0}\right) ,$$

woraus man wegen Lemma 3.3(i)

$$\sum_{\substack{r \\ \lambda(r) \le \frac{x}{r} \\ \Omega(r) \le M-1}} \lambda(r) \quad = \quad O\left(\frac{x(\log\log x)^{M-2}}{\log x}\right) \tag{3.53}$$

erhält. Diese Abschätzung bleibt natürlich auch für den Fall $M = 1$ richtig. Analog bekommt man für die zweite Summe in der letzten Ungleichungszeile von (3.50)

$$\sum_{\substack{s \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \lambda(s) \quad = \quad O\left(\frac{x(\log\log x)^{N-2}}{\log x}\right) \tag{3.54}$$

f.a. $N \in I\!N$. Zusammen ergeben (3.49), (3.50), (3.53) und (3.54)

$$S_2 = O\left(\frac{x(\log\log x)^{M+N-3}}{\log^3 x}\right) . \tag{3.55}$$

Zum Schluß soll eine asymptotische Aussage für die Summe S_1 hergeleitet werden. Hierzu wird erst einmal eine Abschätzung für die innere Summe auf der rechten Seite von (3.47) gebraucht. Da für $N = 1$ der Wert dieser Summe gleich $\frac{1}{\log x}$ ist, genügt es wieder, den Fall $N \ge 2$ zu betrachten. Dann läßt sich die Summe wegen (3.12) aufspalten in

$$\sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ \lambda(s) \le \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}} \quad = \quad T_1 - T_2 - T_3 \tag{3.56}$$

mit

$$T_1 := \sum_{\substack{(s,2)=1 \\ s \le x^{1-\frac{1}{N}} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}} \, ,$$

$$T_2 := \sum_{\substack{(s,2)=1, \ (s,dr)>1 \\ s \le x^{1-\frac{1}{N}} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}}$$

und

$$T_3 := \sum_{\substack{(s,2dr)=1 \\ s \le x^{1-\frac{1}{N}} \\ \lambda(s) > \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \le N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}} \, .$$

Die Summe T_3 kann wieder wegen $f(a) \leq 2^{\Omega(a)}$ f.a. $a \in I\!N$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} T_3 &\leq \sum_{\substack{s \leq x^{1-\frac{1}{N}} \\ s > \frac{x}{s} \\ \Omega(s) \leq N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}} = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{2}} < s \leq x^{1-\frac{1}{N}} \\ \Omega(s) \leq N-1}} \frac{f(s)}{s \log \frac{x}{s}} \\ &\leq \frac{N \cdot 2^N}{\log x} \cdot \sum_{\substack{x^{\frac{1}{2}} < s \leq x \\ \Omega(s) \leq N-1}} \frac{1}{s} \ . \end{aligned} \tag{3.57}$$

Aus Lemma 3.3(i) folgt für die Summe in der letzten Ungleichungszeile

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{2}} < s \leq x \\ \Omega(s) \leq N-1}} \frac{1}{s} = \frac{1}{(N-1)!} \cdot \left((\log\log x)^{N-1} - \left(\log\log x^{\frac{1}{2}}\right)^{N-1} \right) + o\left((\log\log x)^{N-1} \right) \ . \tag{3.58}$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} (\log\log x)^{N-1} - \left(\log\log x^{\frac{1}{2}}\right)^{N-1} &= (\log\log x)^{N-1} - (\log\log x - \log 2)^{N-1} \\ &= O\left((\log\log x)^{N-2} \right) \ . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Aus (3.57), (3.58) und (3.59) erhält man

$$T_3 = o\left(\frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x} \right) \ . \tag{3.60}$$

Für die Summe T_2 bekommt man

$$\begin{aligned} T_2 &\leq \frac{N \cdot 2^N}{\log x} \cdot \sum_{\substack{(s,2)=1,\ (s,dr)>1 \\ s \leq x \\ \Omega(s) \leq N-1}} \frac{1}{s} \leq \frac{N \cdot 2^N}{\log x} \cdot \sum_{t \mid dr} \sum_{\substack{s_0 \leq \frac{x}{t} \\ \Omega(s_0) \leq N-2}} \frac{1}{s_0 t} \\ &\leq \frac{N \cdot 2^N}{\log x} \cdot \tau(dr) \cdot \sum_{\substack{s \leq x \\ \Omega(s) \leq N-2}} \frac{1}{s} \ . \end{aligned}$$

Schätzt man die Summe in der letzten Zeile wieder mit Hilfe von Lemma 3.3(i) ab und beachtet $\tau(dr) \leq \tau(d)\tau(r) \leq \tau(d) \cdot 2^{\Omega(r)} \leq \tau(d) \cdot 2^{M-1}$ für $\Omega(r) \leq M-1$, so ergibt sich hieraus

$$T_2 = O\left(\frac{(\log\log x)^{N-2}}{\log x} \right) \ , \tag{3.61}$$

wobei die O-Konstante natürlich von d und M abhängt. Schließlich liefert Lemma 3.3(ii) sofort

$$T_1 = \frac{1}{(N-1)!} \cdot \frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x} + o\left(\frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x} \right) \ . \tag{3.62}$$

Nun ergeben (3.56), (3.60), (3.61) und (3.62) zusammen

$$\sum_{\substack{(s,2dr)=1\\ \lambda(s)\le \frac{x}{s}\\ \Omega(s)\le N-1}} \frac{f(s)}{s\log\frac{x}{s}} = \frac{1}{(N-1)!}\cdot\frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x}+o\left(\frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x}\right) \ . \tag{3.63}$$

Diese Abschätzung bleibt natürlich auch im Fall $N=1$ richtig. Also folgt aus (3.47) und (3.63)

$$S_1=(x-2d)\cdot\left(\sum_{\substack{(r,2d)=1\\ \lambda(r)\le \frac{x}{r}\\ \Omega(r)\le M-1}} \frac{f(r)}{r\log\frac{x}{r}}\right)\cdot\left(\frac{1}{(N-1)!}\cdot\frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x}+o\left(\frac{(\log\log x)^{N-1}}{\log x}\right)\right) \ . \tag{3.64}$$

Völlig analog wie (3.63) läßt sich f.a. $M\in I\!N$

$$\sum_{\substack{(r,2d)=1\\ \lambda(r)\le \frac{x}{r}\\ \Omega(r)\le M-1}} \frac{f(r)}{r\log\frac{x}{r}} = \frac{1}{(M-1)!}\cdot\frac{(\log\log x)^{M-1}}{\log x}+o\left(\frac{(\log\log x)^{M-1}}{\log x}\right)$$

zeigen. Somit bekommt man aus (3.64)

$$S_1=\frac{1}{(M-1)!(N-1)!}\cdot\frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^2 x}+o\left(\frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^2 x}\right) \ . \tag{3.65}$$

Aus (3.46), (3.48), (3.55) und (3.65) erhält man die Behauptung. □

Für das in (3.25) definierte Restglied $R_{2d}(M,N,x)$, das, ausgeschrieben, eine Summe über gebrochene Anteile darstellt, kann analog wie für das Restglied $\Phi_2(2d,x)$ beim Huaschen Ansatz (siehe Abschnitt 3.1) vermutet werden, daß es von kleinerer Größenordnung ist, als das Hauptglied $H_{2d}(M,N,x)$, also von der Größenordnung

$$R_{2d}(M,N,x)=o\left(\frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^2 x}\right) \ . \tag{3.66}$$

Zusammen liefern die Aufspaltung (3.23), die Abschätzung (3.26), Satz 3.1 und (3.66) nun die in (3.9) angekündigte

Vermutung 3.1:

Für beliebige, aber feste $M,N\in I\!N$ ist

$$\pi_{2d}(M,N,x)\sim\frac{\sigma(2d)}{(M-1)!(N-1)!}\cdot\frac{x(\log\log x)^{M+N-2}}{\log^2 x} \ .$$

3.5 Verschärfte Vermutung für das $[P_2, P_1]$-Problem

Im folgenden wird die Vermutung 3.1 noch für $\pi_{2d}(2,1,x)$ verschärft. Dazu wird die Hauptgliedabschätzung aus Satz 3.1 für den Fall $(M,N) = (2,1)$ zu einer O-Abschätzung verfeinert und anschließend für den selben Fall auf heuristischem Wege eine Verschärfung der Vermutung (3.66) über das Restglied hergeleitet.

Als Abschätzung für das Hauptglied $H_{2d}(2,1,x)$ wird gezeigt

Satz 3.2:

Es gilt

$$H_{2d}(2,1,x) = \sigma(2d)\cdot\frac{x}{\log^2 x}\cdot\left(\log\log x + \frac{1}{2} + \gamma - B_1 + B_2 - \sum_{\substack{p \mid d \\ p>2}} \frac{p-1}{p(p-2)}\right) + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{5}{2}} x}\right) ,$$

wobei

$$B_1 := \sum_p \sum_{m\geq 2} \frac{1}{mp^m}, \quad B_2 := \sum_{p>2} \frac{1}{p(p-2)}$$

sei und γ die Euler-Mascheronische Konstante bezeichne.

Für den Beweis braucht man als Verschärfung des Lemmas 3.3 für den Fall $K=1$

Lemma 3.4:

Für beliebiges $x \geq 2$ und eine geeignete Konstante $c_1 > 0$ gelten die Abschätzungen

$$(i) \quad \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + \gamma - B_1 + O\left(e^{-c_1\sqrt{\log x}}\right) ,$$

$$(ii) \quad \sum_{2<p\leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{(p-1)\log x}{p(p-2)\log\frac{x}{p}} \quad = \quad \log\log x + \gamma - B_1 + B_2 - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) ,$$

wobei B_1, B_2 und γ definiert seien wie in Satz 3.2.

Beweis:

Teil (i) gilt nach [Pra], S. 80. Die in Teil (ii) abzuschätzende Summe kann zunächst umgeformt werden in

$$\begin{aligned}\sum_{2<p\leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{(p-1)\log x}{p(p-2)\log\frac{x}{p}} &= \sum_{2<p\leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{p-1}{p(p-2)\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)} \\ &= \sum_{2<p\leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)} + \sum_{2<p\leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p(p-2)\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)} . \quad (3.67)\end{aligned}$$

Für die zweite Summe in der letzten Gleichungszeile gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p(p-2)\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)} &= \sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p(p-2)} + O\left(\frac{1}{\log x}\cdot \sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{\log p}{p(p-2)}\right) \\
&= B_2 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) . \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Die erste Summe in der letzten Zeile von (3.67) läßt sich weiter umformen in

$$\sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)} = \sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\log^n x}\cdot \sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{\log^n p}{p} . \qquad (3.69)$$

Für $n>0$ kann aus Teil (i) mit Hilfe von partieller Summation leicht die Abschätzung

$$\sum_{p\le y} \frac{\log^n p}{p} = \frac{\log^n y}{n} + O\left(\log^{n-1} y\right) \qquad (3.70)$$

gefolgert werden, wobei die O-Konstante nicht von n abhängt. Aus (3.69), (3.70) und Teil (i) des Lemmas erhält man

$$\sum_{2<p\le x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)} = \log\log x^{\frac{1}{2}} + \gamma - B_1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) . \qquad (3.71)$$

Wegen der für $x\in[-1,1)$ gültigen Reihenentwicklung

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \log 2 . \qquad (3.72)$$

Aus (3.67), (3.68), (3.71) und (3.72) ergibt sich die Behauptung des Teiles (ii), womit Lemma 3.3 bewiesen ist. □

Nun erfolgt der

Beweis von Satz 3.2:

Aus der Definition von $H_{2d}(M,N,x)$ in (3.24) folgt

$$\begin{aligned}
H_{2d}(2,1,x) &= \sum_{\substack{(r,2d)=1\\ \lambda(r)\le \frac{x}{r}\\ \Omega(r)\le 1}} \Phi_1(2d,x,r,1) \\
&= \Phi_1(2d,x,1,1) + \sum_{\substack{p\le x^{\frac{1}{2}}\\ p\nmid 2d}} \Phi_1(2d,x,p,1) .
\end{aligned}$$

Wendet man Lemma 3.2 auf die rechte Seite an und beachtet die Definition von $K(r,s)$ in (3.14), so erhält man daraus

$$\begin{aligned} H_{2d}(2,1,x) &= \sigma(2d)\cdot\left(\frac{x-2d}{\log^2 x}+\sum_{\substack{p\le x^{\frac12}\\ p\nmid 2d}}\frac{(p-1)(x-2d-p^2+1)}{p(p-2)\log\frac{x}{p}\,\log x}\right)+\\ &\quad O\left(\frac{x}{\log^{\frac83}x}\cdot\left(1+\sum_{\substack{p\le x^{\frac12}\\ p\nmid 2d}}\frac1p\right)\right)\ . \end{aligned}$$

Dies liefert zusammen mit Lemma 3.4 für $x\ge(2d)^2$

$$\begin{aligned} H_{2d}(2,1,x) &= \sigma(2d)\cdot\left(\frac{x-2d+1}{\log^2 x}\cdot\left(\log\log x+\frac12+\gamma-B_1+B_2-\sum_{\substack{p\mid d,\\ p>2}}\frac{(p-1)\log x}{p(p-2)\log\frac{x}{p}}\right)-S\right)\\ &\quad +O\left(\frac{x}{\log^{\frac52}x}\right)\ , \end{aligned} \tag{3.73}$$

wobei

$$S:=\sum_{\substack{2<p\le x^{\frac12}\\ p\nmid d}}\frac{p(p-1)}{(p-2)\log\frac{x}{p}\,\log x}$$

sei. Die Summe $\sum\limits_{\substack{p\mid d,\\ p>2}}\frac{(p-1)\log x}{p(p-2)\log\frac{x}{p}}$ auf der rechten Seite von (3.73) läßt sich approximieren durch

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p\mid d,\\ p>2}}\frac{(p-1)\log x}{p(p-2)\log\frac{x}{p}} &= \sum_{\substack{p\mid d,\\ p>2}}\frac{p-1}{p(p-2)\left(1-\frac{\log p}{\log x}\right)}\\ &= \sum_{\substack{p\mid d,\\ p>2}}\frac{p-1}{p(p-2)}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\ , \end{aligned} \tag{3.74}$$

wobei die O-Konstante natürlich von d abhängt. Ferner kann die oben definierte Summe S mit Hilfe des Primzahlsatzes abgeschätzt werden durch

$$S\le\pi\left(x^{\frac12}\right)\cdot\frac{4x^{\frac12}}{\log^2 x}=O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\ . \tag{3.75}$$

Aus (3.73), (3.74) und (3.75) ergibt sich die Behauptung. □

Nun wird die Vermutung (3.66) über das Restglied $R_{2d}(M,N,x)$ für den Fall $(M,N)=(2,1)$ auf heuristischem Wege verschärft. Dazu soll zunächst die Vermutung (3.8) über $\Phi_2(2d,x)$ für die in (3.22) definierten Terme $\Phi_2(2d,x,r,1)$ mit $r \in I\!P \cup \{1\}$, $r \leq x^{\frac{1}{2}}$ verallgemeinert werden (wegen $\Phi_2(2d,x,1,1)=\Phi_2(2d,x)$ kann man tatsächlich von einer Verallgemeinerung sprechen).
Zuerst erfolgt eine grobe Abschätzung von $\Phi_2(2d,x,r,1)$. Für $s:=1$ erhält man für die Summe in der ersten Zeile von (3.18)

$$\sum_{\substack{K(r,s)<a\leq x-2d \\ a\equiv 0 \bmod r,\ a\equiv -2d \bmod s \\ \left(\frac{a}{r},Q\left(\frac{x}{r}\right)\right)=1,\ \left(\frac{a+2d}{s},Q\left(\frac{x}{s}\right)\right)=1}} 1 \quad = \quad \sum_{\substack{r^2<a\leq x-2d \\ a\equiv 0 \bmod r \\ \left(\frac{a}{r},Q\left(\frac{x}{r}\right)\right)=1}} 1 \quad \leq \quad \frac{x}{r}\ .$$

Also ist wegen (3.18), (3.19) und (3.20)

$$\Phi_1(2d,x,r,1)+\Phi_2(2d,x,r,1)=O\left(\frac{x}{r}\right)\ . \tag{3.76}$$

Aus Lemma 3.2 folgt für $r \in I\!P \cup \{1\}$, $r \leq x^{\frac{1}{2}}$ als Abschätzung für den Hauptterm $\Phi_1(2d,x,r,1)$

$$\Phi_1(2d,x,r,1)=O\left(\frac{x}{r\log^2 x}\right)\ . \tag{3.77}$$

Zusammen ergeben (3.76) und (3.77) die **grobe** Abschätzung

$$\Phi_2(2d,x,r,1)=O\left(\frac{x}{r}\right)\ . \tag{3.78}$$

Speziell ist also

$$\Phi_2(2d,x)=\Phi_2(2d,x,1,1)=O(x)\ . \tag{3.79}$$

Beachtet man (3.77), (3.78) und (3.79), so scheint es für den Fall $r \in I\!P \cup \{1\}$, $r \leq x^{\frac{1}{2}}$ plausibel zu sein, daß die Vermutung (3.8) verallgemeinert werden kann zu

$$\Phi_2(2d,x,r,1)=O\left(\frac{x}{r(\log x)^{2+\alpha}}\right)\ , \tag{3.80}$$

wobei α wieder eine geeignete positive reelle Konstante sei.
Wegen der Definition von $R_{2d}(M,N,x)$ in (3.25) folgt aus (3.80)

$$\begin{aligned} R_{2d}(2,1,x) &= \sum_{\substack{r\leq x^{\frac{1}{2}} \\ r\in I\!P\cup\{1\}}} \Phi_2(2d,x,r,1) \\ &= O\left(\frac{x}{(\log x)^{2+\alpha}}\cdot \sum_{\substack{r\leq x^{\frac{1}{2}} \\ r\in I\!P\cup\{1\}}} \frac{1}{r}\right)\ . \end{aligned}$$

Schätzt man die Summe in der letzten Zeile mit Hilfe von Lemma 3.4(i) ab, so erhält man hieraus weiter

$$R_{2d}(2,1,x) = O\left(\frac{x\log\log x}{(\log x)^{2+\alpha}}\right) \quad . \tag{3.81}$$

Geht man davon aus, daß (3.80) zutrifft, so läßt sich die Vermutung 3.1 also wegen der Aufspaltung (3.23), der Abschätzung (3.26), Satz 3.2 und (3.81) für den Fall $(M,N) = (2,1)$ verschärfen zu

Vermutung 3.2:

Für ein geeignetes $\alpha > 0$ ist

$$\pi_{2d}(2,1,x) = \sigma(2d)\cdot\frac{x}{\log^2 x}\cdot\left(\log\log x + \frac{1}{2} + \gamma - B_1 + B_2 - \sum_{\substack{p\,|\,d\\ p>2}} \frac{p-1}{p(p-2)}\right) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2+\alpha}}\right) \ .$$

Natürlich kann analog eine Vermutung der gleichen Gestalt über $\pi_{2d}(1,2,x)$ hergeleietet werden.

3.6 Abschätzung von $U_f(y,z)$

Es steht noch der Beweis des Lemmas 3.1 aus Abschnitt 3.4 aus. Eine entscheidende Rolle spielt in den folgenden Betrachtungen das

Lemma 3.5: (siehe Lemma 2 auf S. 556 in [Pan])

Sei $c > 0$ beliebig, aber fest. Dann gelten für alle $f \in I\!N$, $x \in I\!R^+$ mit $f \leq x^c$ und eine geeignete Konstante $c_2 > 0$ die Abschätzung

$$(i) \quad g_0^f(x) = O\left(e^{-c_2\sqrt{\log x}}\right) \ ,$$

$$(ii) \quad g_1^f(x) = -\frac{f}{\varphi(f)} + O\left(e^{-c_2\sqrt{\log x}}\right) \ ,$$

wobei $g_n^f(x)$ für $n = 0, 1$ definiert sei durch

$$g_n^f(x) := \sum_{\substack{q \leq x \\ (q,f)=1}} \frac{\mu(q)}{q} .$$

Zunächst wird bewiesen, daß Lemma 3.1 unter der Zusatzvoraussetzung $f \mid Q(y)$ gilt. Gezeigt wird also

Lemma 3.6:

Sei $c > 0$ beliebig, aber fest. Dann gilt für alle $f \in I\!N$, $y, z \in I\!R^+$ mit $f \mid Q(y)$, $f \leq y^c$ und $y^{\frac{2}{3}} \leq z \leq y$ die Abschätzung

$$U^f(y,z) = \frac{f}{\varphi(f)} \cdot \frac{1}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von c abhängt.

Beweis:

Der Term $U^f(y,z)$ läßt sich wegen der Definition von $Q(y)$ und der Voraussetzung $z \leq y$ darstellen in der Form

$$U^f(y,z) = g_0^f(z) + \sum_{y^{\frac{1}{2}} < p \leq z} \frac{1}{p} \cdot g_0^f\left(\frac{z}{p}\right) .$$

Es werde nun

$$u := z^{1-\log^{-\frac{11}{12}} z} \tag{3.82}$$

gesetzt. Dann gilt für genügend großes y wegen der Voraussetzung $y^{\frac{2}{3}} \leq z$ des Lemmas $u > y^{\frac{1}{2}}$. Also läßt sich $U^f(y,z)$ für genügend großes y aufspalten in

$$U^f(y,z) = H_1(y,z) + R_1(y,z) ,$$

wobei

$$\begin{aligned} H_1(y,z) &:= \sum_{u<p\leq z} \frac{1}{p} \cdot g_0^f\left(\frac{z}{p}\right) , \\ R_1(y,z) &:= g_0^f(z) + \sum_{y^{\frac{1}{2}}<p\leq u} \frac{1}{p} \cdot g_0^f\left(\frac{z}{p}\right) \end{aligned}$$

sei. Wegen Lemma 3.5(i) und der Voraussetzung $y^{\frac{2}{3}} \leq z$ ist

$$R_1(y,z) = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) .$$

Zum Beweis des Lemmas bleibt noch $H_1(y,z)$ abzuschätzen. Beachtet man $g_0^f\left(\frac{z}{p}\right) = g_0^f\left(\left[\frac{z}{p}\right]\right)$ und die Gleichwertigkeit von $\left[\frac{z}{p}\right] = n$ mit $\frac{z}{n+1} < p \leq \frac{z}{n}$, so erhält man

$$H_1(y,z) = H_2(y,z) - R_2(y,z) \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} H_2(y,z) &:= \sum_{n \leq \frac{z}{u}} g_0^f(n) \cdot \sum_{\frac{z}{n+1} < p \leq \frac{z}{n}} \frac{1}{p} \ , \\ R_2(y,z) &:= g_0^f\left(\frac{z}{u}\right) \cdot \sum_{\frac{z}{\left[\frac{z}{u}\right]+1} < p \leq u} \frac{1}{p} \end{aligned}$$

sei. Aus Lemma 3.5(i) und Lemma 3.4(i) ergibt sich

$$R_2(y,z) = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) \ .$$

Zu untersuchen bleibt also $H_2(x,y)$. Zunächst gilt

$$H_2(y,z) = \sum_{n \leq \frac{z}{u}} g_0^f(n) \cdot \left(R\left(\frac{z}{n}\right) - R\left(\frac{z}{n+1}\right)\right) \ ,$$

wobei $R(x)$ definiert sei durch

$$R(x) := \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \ .$$

Weiter erhält man mit partieller Summation

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq \frac{z}{u}} g_0^f(n) \cdot \left(R\left(\frac{z}{n}\right) - R\left(\frac{z}{n+1}\right)\right) \\ = \ & g_0^f(1) \cdot R(z) - g_0^f\left(\frac{z}{u}\right) \cdot R\left(\frac{z}{\left[\frac{z}{u}\right]+1}\right) + \sum_{2 \leq n \leq \frac{z}{u}} \left(g_0^f(n) - g_0^f(n-1)\right) \cdot R\left(\frac{z}{n}\right) \\ = \ & \sum_{\substack{n \leq \frac{z}{u} \\ (n,f)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \cdot R\left(\frac{z}{n}\right) \ - \ g_0^f\left(\frac{z}{u}\right) \cdot R\left(\frac{z}{\left[\frac{z}{u}\right]+1}\right) \ . \end{aligned}$$

Der Restterm $g_0^f\left(\frac{z}{u}\right) \cdot R\left(\frac{z}{\left[\frac{z}{u}\right]+1}\right)$ kann wiederum mit Hilfe von Lemma 3.5(i) und Lemma 3.4(i) abgeschätzt werden durch

$$g_0^f\left(\frac{y}{z}\right) \cdot R\left(\frac{y}{\left[\frac{y}{z}\right]+1}\right) = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} x}\right) \ .$$

Es bleibt nun $\sum\limits_{\substack{n \leq \frac{z}{u} \\ (n,f)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \cdot R\left(\frac{z}{n}\right)$ abzuschätzen. Dabei ist das nächste das Ziel, $R\left(\frac{z}{n}\right)$ zu ersetzen durch $\log\log\frac{z}{n}$. Lemma 3.4(i) und die Definition von g_0^f liefern

$$\left|\sum_{\substack{n \leq \frac{z}{u} \\ (n,f)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \cdot \left(R\left(\frac{z}{n}\right) - \log\log\frac{z}{n}\right)\right| \ll \sum_{n \leq \frac{z}{u}} \frac{1}{n} \cdot e^{-c_1\sqrt{\log\frac{z}{n}}} + \left|(\gamma - B_1) \cdot g_0^f\left(\frac{z}{u}\right)\right| .$$

Die rechte Seite kann wegen der Voraussetzungen des Lemmas, der Definition von u in (3.82) und Lemma 3.5(i) weiter abgeschätzt werden durch

$$\sum_{n \leq \frac{z}{u}} \frac{1}{n} \cdot e^{-c_1\sqrt{\log\frac{z}{n}}} + \left|(\gamma - B_1) \cdot g_0^f\left(\frac{z}{u}\right)\right| = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) .$$

Damit ist der Beweis des Lemmas 3.6 reduziert auf eine Abschätzung von

$$H_3(y,z) := \sum_{\substack{n \leq \frac{z}{u} \\ (n,f)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \cdot \log\log\frac{z}{n} .$$

Nun läßt sich $H_3(y,z)$ nach Definition der Abbildungen g_1^f und g_0^f aufspalten in

$$H_3(y,z) = -g_1^f\left(\frac{z}{u}\right) \cdot \frac{1}{\log z} + \log\log z \cdot g_0^f\left(\frac{z}{u}\right) + H_4(y,z) ,$$

wobei

$$H_4(y,z) := \sum_{\substack{n \leq \frac{z}{u} \\ (n,f)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \cdot \left(\log\log\frac{z}{n} - \log\log z + \frac{\log n}{\log z}\right)$$

sei. Aus Lemma 3.5(ii) und $y^{\frac{2}{3}} \leq z$ folgt

$$g_1^f\left(\frac{z}{u}\right) \cdot \frac{1}{\log z} + \frac{f}{\varphi(f)} \cdot \frac{1}{\log z} = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) .$$

Wegen Lemma 3.5(i) und $y^{\frac{2}{3}} \leq z$ gilt

$$\log\log y \cdot g_0^f\left(\frac{z}{u}\right) = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) .$$

Es bleibt also noch $H_4(y,z)$ abzuschätzen. Benutzt man für $n \leq \frac{z}{u} = z^{\log^{-\frac{11}{12}} z} < z$ die Reihenentwicklung des Logarithmus für

$$\log\log\frac{z}{n} - \log\log z = \log\left(1 - \frac{\log n}{\log z}\right) ,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\log\log\frac{z}{n}-\log\log z\right)+\frac{\log n}{\log z}\right| \\
= \;& \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\log n}{\log z}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\log n}{\log z}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\log n}{\log z}\right)^4+\ldots \\
\leq \;& \left(\frac{\log n}{\log z}\right)^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\log n}{\log z}\right)^k \leq \left(\frac{\log\frac{z}{u}}{\log z}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{\log\frac{z}{u}}{\log z}} \\
= \;& \log^{-\frac{11}{6}} z\cdot\frac{1}{1-\log^{-\frac{11}{12}} z}=O\left(\log^{-\frac{11}{6}} z\right)\;,
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
|H_4(y,z)| &= \left|\sum_{\substack{n\leq\frac{z}{u}\\(n,f)=1}}\frac{\mu(n)}{n}\cdot\left(\left(\log\log\frac{z}{n}-\log\log z\right)+\frac{\log n}{\log z}\right)\right| \\
&\ll \sum_{n\leq\frac{z}{u}}\frac{1}{n}\cdot\log^{-\frac{11}{6}} z \;\leq\; 2\log\frac{z}{u}\cdot\log^{-\frac{11}{6}} z \;=\; \frac{2}{\log^{\frac{7}{4}} z} \;\leq\; \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}\cdot\frac{2}{\log^{\frac{7}{4}} y}
\end{aligned}$$

folgt. Damit ist Lemma 3.6 bewiesen. □

Mit Hilfe von Lemma 3.6 kann nun sehr einfach geführt werden der

Beweis von Lemma 3.1:

Wegen der Definitionen von $U^f(y,z)$ und $Q(y)$ ist f.a. $f\in I\!N$

$$U^f(y,z)=U^{(f,Q(y))}(y,z)\;. \tag{3.83}$$

Weiter folgt aus Lemma 3.6

$$\begin{aligned}
U^{(f,Q(y))}(y,z) &= \frac{(f,Q(y))}{\varphi((f,Q(y)))}\cdot\frac{1}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right) \\
&= \prod_{\substack{p\,|\,f\\p>y^{\frac{1}{2}}}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{f}{\varphi(f)}\cdot\frac{1}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{7}{4}} y}\right)\;.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Aus der Voraussetzung $f\leq y^c$ des Lemmas 3.1 ergibt sich

$$1-\prod_{\substack{p\,|\,f\\p>y^{\frac{1}{2}}}}\left(1-\frac{1}{p}\right) \leq 1-\left(1-\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\right)^{2c} \leq \frac{2c}{y^{\frac{1}{2}}}\;. \tag{3.85}$$

Beachtet man wieder $\frac{f}{\varphi(f)}=O(\log\log f)$, so liefern (3.83), (3.84) und (3.85) zusammen die Behauptung. □