Kapitel 2

Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge

2.1 Problemstellung

Während ein Beweis der Vermutung von Hardy-Littlewood beim gegenwärtigen Wissensstand in weiter Ferne ist, läßt sich zeigen, daß die vermutete Asymptotik
$\pi_{2d}(y) \sim \sigma(2d) \cdot \int\limits_{2d+2}^{y} \frac{dt}{\log t \log(t-2d)}$ b.z.w. $\psi_2(2d, y) \sim \sigma(2d)(y - 2d)$ für „fast alle" $d \leq x$ zutrifft, wenn y geeignet in Abhängigkeit von x gewählt wird. Konkret ist mir als bestes Ergebnis in dieser Richtung bekannt

Satz 2.1: (Mikawa, siehe [Mik], S. 19)

Sei $x \in IR^+$ und $2x \leq y \leq x^{3-\epsilon}$. Dann kann für beliebige $A_1, A_2 \in IR^+$ die Anzahl der $d \leq x$, für die

$$|\psi_2(y, 2d) - \sigma(2d)(y - 2d)| \neq O\left(y(\log y)^{-A_1}\right)$$

ist, durch $O\left(x(\log x)^{-A_2}\right)$ abgeschätzt werden.
Anders ausgedrückt: Unter obigen Voraussetzungen gilt

$$\sum_{d \leq x} |\psi_2(y, 2d) - \sigma(2d)(y - 2d)| = O\left(xy(\log y)^{-A}\right)$$

für beliebiges $A \in IR^+$.

Wegen Lemma 1.1 ist Satz 2.1 äquivalent mit

Satz 2.1':

Sei $x \in I\!R^+$ und $2x+2 \le y \le x^{3-\epsilon}$. Dann kann für beliebige $A_1, A_2 \in I\!R^+$ die Anzahl der $d \le x$, für die

$$\left| \pi_{2d}(y) - \sigma(2d) \cdot \int\limits_{2d+2}^{y} \frac{dt}{\log t \log(t-2d)} \right| \neq O\left(y(\log y)^{-(2+A_1)} \right)$$

ist, durch $O\left(x(\log x)^{-A_2}\right)$ abgeschätzt werden.

D. Wolke hatte obigen Satz 2.1 im Jahre 1989 unter der stärkeren Voraussetzung $2x \le y \le x^{\frac{8}{5}-\epsilon}$ erhalten (siehe [Wol], S.529). Für den Beweis verwandte er die Kreismethode und Dichtesätze für die Nullstellen der Dirichletschen L-Reihen. Durch eine Verfeinerung der von D. Wolke benutzten Methode gelang H. Mikawa 1991 der Beweis des Satzes 2.1.
Im folgenden Abschnitt wird mit einer grundsätzlich anderen Methode eine etwas schwächere Fast-Alle-Aussage für Primzahlzwillinge hergeleitet. Diese Methode basiert hauptsächlich auf dem Ansatz von Pan Chengdong und dem Satz von Barban-Davenport-Halberstam, der eine Aussage über die ,,Varianz" der Mangoldt-Funktion Λ über arithmetische Progressionen trifft. Desweiteren werden zum Beweis die Vaughan-Identität für die Mangoldt-Funktion und Analoga der Sätze von Siegel-Walfisz und Barban-Davenport-Halberstam für die Funktion $f(n) := \mu(n) \log n$ benutzt.

2.2 Formulierung und Beweis des Hauptergebnisses

Für das Hauptergebnis und fast alle Lemmata dieses Abschnitts wird sowohl eine hypothesenfreie, als auch eine verschärfte Version unter der Verallgemeinerten Riemann-Hypothese **(VRH)** für Dirichletsche L-Reihen bewiesen. Diese Hypothese besagt:

Für jeden Dirichlet-Charakter χ liegen alle nichttrivialen Nullstellen von $L(s,\chi)$ auf der Geraden Re $s = \frac{1}{2}$.

Als Hauptergebnis wird bewiesen

Satz 2.2:

(i) Seien A, B beliebige positive reelle Konstanten, $x \in I\!R^+$ und $(2+\epsilon_0)x \le y \le x \log^B x$. Dann gilt die Abschätzung

$$\sum_{d \le x} |\psi_2(y, 2d) - \sigma(2d)(y - 2d)| = O\left(xy(\log y)^{-A}\right) \ . \tag{2.1}$$

(ii) Unter VRH (Verallgemeinerte Riemann-Hypothese) gilt die Abschätzung (2.1) für alle $x, y \in I\!R^+$ mit $(2+\epsilon_0)x \le y \le x^{\frac{17}{15}-\epsilon}$.

Natürlich ist Satz 2.2 in Satz 2.1 enthalten. Wie aber bereits im vorigen Abschnitt gesagt wurde, unterscheidet sich die hier benutzte Beweismethode grundsätzlich von der, die D. Wolke und H. Mikawa verwandten. Man kommt hier ohne die Kreimethode aus und benutzt lediglich Aussagen über die Verteilung von $\Lambda(n)$ und $f(n)$ in arithmetischen Progressionen.
Mit Hilfe der späteren Lemmata 2.2 und 2.11 erfolgt nun der

Beweis von Satz 2.2:

Wegen (1.12) und der Defintion von $T_{2d}(y, u_1, v_1, u_2, v_2)$ in (1.13) kann $\psi_2(y, 2d)$ für beliebiges $M \in I\!N$ aufgespalten werden in

$$\psi_2(y, 2d) = T_{2d}\left(y, 0, \frac{y-2d}{M}, 0, y\right) + T_{2d}\left(y, \frac{y-2d}{M}, y-2d, 0, y\right) \ .$$

Daher läßt sich die linke Seite von (2.1) abschätzen durch

$$\sum_{d \le x} |\psi_2(y, 2d) - \sigma(2d)(y - 2d)| \le R_1(x, y, M) + R_2(x, y, M) \tag{2.2}$$

mit

$$R_1(x, y, M) := \sum_{d \le x} \left| T_{2d}\left(y, 0, \frac{y-2d}{M}, 0, y\right) - \sigma(2d)(y-2d) \right| \tag{2.3}$$

und

$$R_2(x, y, M) := \sum_{d \le x} \left| T_{2d}\left(y, \frac{y-2d}{M}, y-2d, 0, y\right) \right| \ . \tag{2.4}$$

Setzt man nun $M := \left[1 + (\log y)^{B_0}\right]$, schätzt die Summen $R_1(x, y, M)$ und $R_2(x, y, M)$ mit den später bewiesenen Lemmata 2.2(i) und 2.11(i) ab und wählt die Konstanten δ_1, δ_2, B_0, B_1, B_5 geeignet, so erhält man wegen (2.2)

$$\sum_{d \le x} |\psi_2(y, 2d) - \sigma(2d)(y - 2d)| = O\left(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} (\log y)^{-C}\right)$$

für beliebiges $C > 0$, woraus sich die Behauptung von Teil (i) ergibt. Analog bekommt man unter VRH

$$\sum_{d \le x} |\psi_2(y, 2d) - \sigma(2d)(y - 2d)| = O\left(x^{\frac{25}{42}} y^{\frac{19}{14}+\epsilon} + xy(\log y)^{-C}\right) \ ,$$

wenn man $M := \left[1 + x^{-\frac{2}{21}} y^{\frac{1}{7}}\right]$ wählt und die Summen $R_i(x, y, M)$ $(i = 1, 2)$ mit den Lemmata 2.2(ii) und 2.11(ii) abschätzt. Hieraus folgt die Behauptung von Teil (ii). $\square$

2.3 Abschätzung von $R_1(x, y, M)$

Zur Abschätzung der in (2.3) definierten Summe $R_1(x, y, M)$ wird benötigt

Lemma 2.1: (Barban-Davenport-Halberstam)

(i) Für beliebiges, aber festes $A > 0$ und beliebige $Q, y \in I\!R^+$ mit $Q \leq y$ gilt

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|^2 = O\left(Qy \log y + y^2 (\log y)^{-A}\right) .$$

(ii) Unter VRH gilt für beliebige $Q, y \in I\!R^+$ mit $Q \leq y$

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|^2 = O\left(Qy \log y + y^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right) .$$

Beweis:

Teil (i) gilt nach [Brü], Satz 5.6.2, S. 189. In den Beweis dieser Aussage fließt der Satz von Siegel-Walfisz ein, der besagt, daß für $q \leq (\log y)^A$ und alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, q) = 1$ die Abschätzung

$$\psi(y; q, a) = O\left(y e^{-C\sqrt{\log y}}\right) \tag{2.5}$$

gilt, wobei $A > 0$ beliebig, aber fest sei und C eine von A abhängige Konstante bezeichne (siehe [Brü], Satz 3.3.3, S. 114). Unter VRH gilt in dem deutlich größeren Bereich $q \leq y$ die weitaus bessere Abschätzung

$$\psi(y; q, a) = O\left(y^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \tag{2.6}$$

(siehe [Brü], S. 116). Ersetzt man nun im Beweis von Teil (i) die Abschätzung (2.5) durch (2.6), so gelangt man zur Behauptung von Teil (ii). $\square$

Mit Hilfe der Lemmata 1.3(ii), 1.6 und 2.1 wird nun gezeigt

Lemma 2.2:

(i) Sei $B_1 > 0$, $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$. Dann gilt für beliebige $x, y, M \in I\!R^+$ mit $y^{\delta_1} < x \leq \frac{y}{2}$ und $y^{\delta_2} < \frac{y-2x}{M}$

$$R_1(x,y,M) = O\left(xyM^{-\frac{1}{2}}(\log y)^{B_1+5} + xy(\log y)^{-B_1} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}M^{-1}\log^2 y + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}M^{-\frac{1}{2}}(\log y)^{-B_1}\right) .$$

(ii) Falls VRH zutrifft, so gilt unter den Voraussetzungen von Teil (i)

$$R_1(x,y,M) = O\left(xy^{1+\epsilon}M^{-\frac{1}{2}} + xy(\log y)^{-B_1} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}+\epsilon}M^{-1} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{4}+\epsilon}M^{-\frac{1}{2}}\right) .$$

Beweis:

Wegen der Voraussetzung $y^{\delta_2} < \frac{y-2x}{M}$ folgt aus den Lemmata 1.3(ii) und 1.6

$$\begin{aligned} R_1(x,y,M) \leq & \sum_{d\leq x}\left|\sum_{\substack{q\leq\frac{y-2d}{M}\\(q,2d)=1}}\mu(q)\log(q)\left(\psi(y;q,2d)-\psi(2d;q,2d)-\frac{y-2d}{\varphi(q)}\right)\right| \\ & +O\left(xye^{-c_1\sqrt{\log y}}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

für eine geeignete Konstante $c_1 > 0$. Die rechte Seite läßt sich trivialerweise abschätzen durch

$$\sum_{d\leq x}\left|\sum_{\substack{q\leq\frac{y-2d}{M}\\(q,2d)=1}}\mu(q)\log(q)\left(\psi(y;q,2d)-\psi(2d;q,2d)-\frac{y-2d}{\varphi(q)}\right)\right| \leq (A_1+A_2)\log y+A_3 \tag{2.8}$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= \sum_{d\leq x}\sum_{\substack{q\leq\frac{y-2d}{M}\\(q,2d)=1}}\left|\psi(y;q,2d)-\frac{y}{\varphi(q)}\right| , \\ A_2 &:= \sum_{d\leq x}\sum_{\substack{q<\min\left\{2d,\frac{y-2d}{M}\right\}\\(q,2d)=1}}\left|\psi(2d;q,2d)-\frac{2d}{\varphi(q)}\right| , \\ A_3 &:= \sum_{d\leq\min\left\{x,\frac{y}{2(M+1)}\right\}}\left|\sum_{\substack{2d\leq q\leq\frac{y-2d}{M}\\(q,2d)=1}}\mu(q)\log(q)\left(\psi(2d;q,2d)-\frac{2d}{\varphi(q)}\right)\right| . \end{aligned}$$

Da für $q \geq 2d$ stets $\psi(2d; q, 2d) = \Lambda(2d)$ gilt und $\Lambda(2d)$ nur dann ungleich 0 ist, wenn d eine Zweierpotenz ist, erhält man für die Summe A_3

$$A_3 \leq \sum_{d \leq \min\left\{x, \frac{y}{2(M+1)}\right\}} 2d \cdot \left| \sum_{\substack{2d \leq q \leq \frac{y-2d}{M} \\ (q, 2d) = 1}} \frac{\mu(q) \log(q)}{\varphi(q)} \right| + O\left(yM^{-1} \log^2 y\right) ,$$

woraus sich wegen Lemma 1.6 und der Voraussetzung $y^{\delta_1} < x$

$$A_3 \ll yM^{-1} \log^2 y + \sum_{d \leq \min\left\{x, \frac{y}{2(M+1)}\right\}} 2d \cdot e^{-c_2\sqrt{\log 2d}} \ll yM^{-1} \log^2 y + x^2 \cdot e^{-c_3\sqrt{\log y}} \quad (2.9)$$

für geeignete Konstanten $c_2, c_3 > 0$ ergibt.
Als nächstes soll die Summe A_1 in einen Ausdruck umgeformt werden, der mit Hilfe von Lemma 2.1 abgeschätzt werden kann. Durch Umsummieren bekommt man

$$A_1 \leq \sum_{q \leq \frac{y}{M}} \sum_{\substack{a \leq 2x \\ (a, q) = 1}} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| .$$

Hieraus erhält man durch doppelte Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |A_1|^2 &\leq \left(\sum_{q \leq \frac{y}{M}} \frac{1}{q} \right) \cdot \sum_{q \leq \frac{y}{M}} q \left(\sum_{\substack{a \leq 2x \\ (a, q) = 1}} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| \right)^2 \\ &\leq 2x(1 + \log y) \cdot \sum_{q \leq \frac{y}{M}} q \sum_{\substack{a \leq 2x \\ (a, q) = 1}} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|^2 . \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Offenbar läßt sich die Doppelsumme in der letzten Zeile weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq \frac{y}{M}} q \sum_{\substack{a \leq 2x \\ (a, q) = 1}} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|^2 &\leq \sum_{q \leq \frac{y}{M}} q \left(1 + \frac{2x}{q}\right) \sum_{\substack{a = 1 \\ (a, q) = 1}}^{q} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{y}{M} + 2x\right) \sum_{q \leq \frac{y}{M}} \sum_{\substack{a = 1 \\ (a, q) = 1}}^{q} \left| \psi(y; q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|^2 . \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Nun liefern (2.10), (2.11) und Lemma 2.1(i) zusammen die Abschätzung

$$A_1 = O\left(xyM^{-\frac{1}{2}} \log y + xy(\log y)^{\frac{1-A}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}M^{-1} \log y + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}M^{-\frac{1}{2}}(\log y)^{\frac{1-A}{2}}\right) . \qquad (2.12)$$

Unter VRH ergibt sich aus (2.10), (2.11) und Lemma 2.1(ii)

$$A_1 = O\left(xyM^{-\frac{1}{2}}\log y + xy^{\frac{3}{4}+\epsilon} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}M^{-1}\log y + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{4}+\epsilon}M^{-\frac{1}{2}}\right)\ . \tag{2.13}$$

Die Summe A_2 kann nun auf ähnliche Weise wie A_1 abgeschätzt werden. Allerdings werden die Einzelheiten etwas komplizierter, da hier nicht über Ausdrücke der Form $\psi(y;q,2d) - \frac{y}{\varphi(q)}$ mit festem y summiert wird, sondern über die Terme $\psi(2d;q,2d) - \frac{2d}{\varphi(q)}$ mit variablem d.
Es sei nun $z \in I\!N$ ein freier Parameter mit $z \le 2x$, der später noch geeignet gewählt wird, und x_n werde definiert durch

$$x_n := n \cdot \frac{2x}{z}\ .$$

Dann gilt offenbar

$$A_2 \le \sum_{n=1}^{z} \sum_{x_{n-1}<a\le x_n} \sum_{\substack{q < \min\left\{a,\, \frac{y-a}{M}\right\} \\ (q,a)=1}} \left|\psi(a;q,a) - \frac{a}{\varphi(q)}\right|\ . \tag{2.14}$$

Wegen der Definition von $\psi(a;q,a)$, der schon früher verwendeten Abschätzung $\frac{q}{\varphi(q)} = O(\log\log q)$ und der Wahl von x_{n-1}, x_n kann der innere Term auf der rechten Seite für $x_{n-1} < a \le x_n$ approximiert werden durch

$$\psi(a;q,a) - \frac{a}{\varphi(q)} = \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} + O\left(\log y \cdot \frac{2x}{qz}\right). \tag{2.15}$$

Aus (2.14) und (2.15) folgt

$$A_2 \le \sum_{n=1}^{z} \sum_{x_{n-1}<a\le x_n} \sum_{\substack{q < \min\left\{a,\, \frac{y-a}{M}\right\} \\ (q,a)=1}} \left|\psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)}\right| \ +\ O\left(\frac{x^2\log^2 y}{z}\right)\ . \tag{2.16}$$

Für die innere Doppelsumme auf der rechten Seite bekommt man durch Umsummieren

$$\begin{aligned} &\sum_{x_{n-1}<a\le x_n} \sum_{\substack{q < \min\left\{a,\, \frac{y-a}{M}\right\} \\ (q,a)=1}} \left|\psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)}\right| \\ \le &\sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} \sum_{\substack{x_{n-1} < a \le x_n \\ (a,q)=1}} \left|\psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)}\right|\ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Eine doppelte Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung liefert unter Beachtung der Wahl von x_{n-1}, x_n für die rechte Seite

$$
\left(\sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} \quad \sum_{\substack{x_{n-1} < a \le x_n \\ (a,q)=1}} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right| \right)^2
$$

$$
\le \left(\sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} \frac{1}{q} \right) \cdot \sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} q \left(\sum_{\substack{x_{n-1} < a \le x_n \\ (a,q)=1}} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right| \right)^2
$$

$$
\le (1+\log y) \cdot \left(1+\frac{2x}{z}\right) \cdot \sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} q \sum_{\substack{x_{n-1} < a \le x_n \\ (a,q)=1}} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right|^2 . \tag{2.18}
$$

Wegen der Wahl von x_{n-1}, x_n läßt sich die Doppelsumme in der letzten Zeile weiter abschätzen durch

$$
\sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} q \sum_{\substack{x_{n-1} < a \le x_n \\ (a,q)=1}} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right|^2
$$

$$
\le \sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} q \left(1+\frac{2x}{qz}\right) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right|^2
$$

$$
\le \left(x_n+\frac{2x}{z}\right) \cdot \sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right|^2 . \tag{2.19}
$$

Für die Doppelsumme in der letzten Zeile ergibt sich aus Lemma 2.1(i)

$$
\sum_{q<\min\left\{x_n,\frac{y}{M}\right\}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \psi(x_n;q,a) - \frac{x_n}{\varphi(q)} \right|^2 = O\left(x_n y M^{-1} \log y + x_n^2 (\log x_n)^{-A}\right) . \tag{2.20}
$$

Wählt man $z := \left[1+(\log y)^{\frac{A}{4}}\right]$, so ist die im Beweis an z gestellte Forderung $z \le 2x$ wegen der Voraussetzung $y^{\delta_1} < x$ des Lemmas für genügend großes y erfüllt, und man erhält aus (2.20), (2.19), (2.18), (2.17) und (2.16) nach kurzer Rechnung

$$
A_2 = O\left(x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} (\log y)^{1+\frac{A}{4}} + x^2 (\log y)^{2-\frac{A}{4}}\right) . \tag{2.21}
$$

Die Behauptung von Teil (i) folgt nun bei geeigneter Wahl von A aus (2.7), (2.8), (2.9), (2.12) und (2.21). Ersetzt man (2.12) durch (2.13), so bekommt man die Behauptung von Teil (ii). $\square$

2.4 Aufspaltung von $R_2(x,y,M)$ in Teilterme

Die in (2.4) definierte Summe $R_2(x,y,M)$ wird nun in ähnlicher Weise abgeschätzt, wie der in [Hea] betrachtete Ausdruck $\sum\limits_{2x<m\leq 3x}\left(\sum\limits_{n\leq x}\Delta_Q(n)\Lambda(m-n)\right)$. Allerdings ist die Abschätzung von $R_2(x,y,M)$ mit größeren technischen Schwierigkeiten verbunden, als die des obigen Ausdrucks in [Hea].
Eine geeignete Aufspaltung von $R_2(x,y,M)$ geschieht in

Lemma 2.3:

Sei $f(q) := \mu(q)\log(q)$. Dann gilt für beliebige $x,y \in IR^+$, $M \in IN$ mit $2x \leq y$

$$R_2(x,y,M) \leq \sum_{a\leq 2x}\ \sum_{m\leq M-1}\ \sum_{i=1}^{4}\Big(|T_i(a,m)| + |\tilde{T}_i(a,m)|\Big)\ ,$$

wobei

$$\begin{aligned}
T_1(a,m) &:= \sum_{\substack{n\equiv a \bmod m\\ n\leq V_m}} \Lambda(n)\cdot f\left(\frac{n-a}{m}\right)\ ,\\
\tilde{T}_1(a,m) &:= \sum_{\substack{n\equiv a \bmod m\\ n\leq \tilde{V}_m}} \Lambda(n)\cdot f\left(\frac{n-a}{m}\right)\ ,\\
T_2(a,m) &:= \sum_{k\leq U_m}\mu(k) \sum_{\substack{t\equiv a \bmod m\\ k|t,\ t\leq y}} \log\frac{t}{k}\cdot f\left(\frac{t-a}{m}\right)\ ,\\
\tilde{T}_2(a,m) &:= \sum_{k\leq \tilde{U}_m}\mu(k) \sum_{\substack{t\equiv a \bmod m\\ k|t,\ t\leq \frac{m(y-a)}{M}+a}} \log\frac{t}{k}\cdot f\left(\frac{t-a}{m}\right)\ ,\\
T_3(a,m) &:= \sum_{k\leq U_mV_m}\alpha_m(k) \sum_{\substack{t\equiv a \bmod m\\ k|t,\ t\leq y}} f\left(\frac{t-a}{m}\right)\ ,\\
\tilde{T}_3(a,m) &:= \sum_{k\leq \tilde{U}_m\tilde{V}_m}\tilde{\alpha}_m(k) \sum_{\substack{t\equiv a \bmod m\\ k|t,\ t\leq \frac{m(y-a)}{M}+a}} f\left(\frac{t-a}{m}\right)\ ,\\
T_4(a,m) &:= \sum_{k>U_m}\ \sum_{\substack{l>V_m,\ kl\leq y\\ kl\equiv a \bmod m}} \beta_m(k)\Lambda(l)f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\ ,\\
\tilde{T}_4(a,m) &:= \sum_{k>\tilde{U}_m}\ \sum_{\substack{l>\tilde{V}_m,\ kl\leq \frac{m(y-a)}{M}+a\\ kl\equiv a \bmod m}} \tilde{\beta}_m(k)\Lambda(l)f\left(\frac{kl-a}{m}\right)
\end{aligned}$$

sei. Hierbei sollen U_m, V_m, $\tilde{U}_m$, $\tilde{V}_m$ reelle Parameter mit $U_m, V_m \in [1, y]$ und $\tilde{U}_m, \tilde{V}_m \in \left[1, \frac{my}{M}\right]$ f.a. $m \in I\!N$ bezeichnen, und die Funktionen α_m, $\tilde{\alpha}_m$, β_m, $\tilde{\beta}_m$ seien definiert durch

$$\alpha_m(k) := \sum_{\substack{c|k \\ \frac{k}{V_m} \le c \le U_m}} \mu(c)\Lambda\left(\frac{k}{c}\right) , \quad \tilde{\alpha}_m(k) := \sum_{\substack{c|k \\ \frac{k}{\tilde{V}_m} \le c \le \tilde{U}_m}} \mu(c)\Lambda\left(\frac{k}{c}\right) ,$$

$$\beta_m(k) := \sum_{\substack{c|k \\ c \le U_m}} \mu(c) , \quad \tilde{\beta}_m(k) := \sum_{\substack{c|k \\ c \le \tilde{U}_m}} \mu(c) .$$

Für den Beweis von Lemma 2.3 wird gebraucht

Lemma 2.4: (Vaughan-Identität für die Mangoldt-Funktion, siehe [Hea], S. 53)

Sei $g : I\!N \to \mathbb{C}$ eine beliebige arithmetische Funktion. Dann gilt für beliebige $U, V, w \in I\!R$ mit $1 \le U \le w$, $1 \le V \le w$

$$\sum_{n \le w} \Lambda(n)g(n) = S_0 + S_1 - S_2 - S_3 ,$$

wobei

$$S_0 := \sum_{n \le V} \Lambda(n)g(n) , \quad S_1 := \sum_{k \le U} \mu(k) \sum_{\substack{k|t \\ t \le y}} \log \frac{t}{k} \cdot g(t) ,$$

$$S_2 := \sum_{k \le UV} \alpha(k) \sum_{\substack{k|t \\ t \le y}} g(t) , \quad S_3 := \sum_{k > U} \sum_{\substack{l > V \\ kl \le y}} \beta(k)\Lambda(l)g(kl)$$

sei. Die Funktionen α und β seien hierbei definiert durch

$$\alpha(k) := \sum_{\substack{c|k \\ \frac{k}{V} \le c \le U}} \mu(c)\Lambda\left(\frac{k}{c}\right) , \quad \beta(k) := \sum_{\substack{c|k \\ c \le U}} \mu(c) .$$

Mit Hilfe von Lemma 2.4 kann geführt werden der

Beweis von Lemma 2.3:

Die Defintion von $T_{2d}(y, u_1, v_1, u_2, v_2)$ in (1.13) liefert

$$\begin{aligned} T_{2d}\left(y, \frac{y-2d}{M}, y-2d, 0, y\right) &= \sum_{n \le y-2d} \sum_{\substack{q|n \\ \frac{y-2d}{M} < q \le y-2d}} f(q)\Lambda(n+2d) \\ &= \sum_{n \le y-2d} \sum_{\substack{m \le M-1,\ m|n \\ \frac{y-2d}{M} < \frac{n}{m} \le \frac{y-2d}{m}}} f\left(\frac{n}{m}\right)\Lambda(n+2d) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m \le M-1} \sum_{\substack{t \equiv 2d \bmod m \\ \frac{m(y-2d)}{M} + 2d < t \le y}} \Lambda(t) f\left(\frac{t-2d}{m}\right)$$

$$= \sum_{m \le M-1} \sum_{\substack{n \equiv 2d \bmod m \\ n \le y}} \Lambda(n) f\left(\frac{n-2d}{m}\right)$$

$$- \sum_{m \le M-1} \sum_{\substack{n \equiv 2d \bmod m \\ n \le \frac{m(y-2d)}{M} + 2d}} \Lambda(n) f\left(\frac{n-2d}{m}\right)$$

mit $f(q) := \mu(q)\log(q)$. Hieraus folgt sofort

$$\sum_{d \le x} \left| T_{2d}\left(y, \frac{y-2d}{M}, y-2d, 0, y\right) \right| \le \sum_{a \le 2x} \sum_{m \le M-1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \le y}} \Lambda(n) f\left(\frac{n-a}{m}\right) \right|$$

$$+ \sum_{a \le 2x} \sum_{m \le M-1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \le \frac{m(y-a)}{M} + a}} \Lambda(n) f\left(\frac{n-a}{m}\right) \right| . \tag{2.22}$$

Wendet man Lemma 2.4 mit

$$g(n) := \begin{cases} f\left(\frac{n-a}{m}\right), & \text{falls } n \equiv a \bmod m \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

auf die inneren Summen auf der rechten Seite von (2.22) an, so bekommt man

$$\sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \le y}} \Lambda(n) f\left(\frac{n-a}{m}\right) = T_1(a,m) + T_2(a,m) + T_3(a,m) + T_4(a,m) \tag{2.23}$$

und

$$\sum_{\substack{n \equiv a \bmod m \\ n \le \frac{m(y-a)}{M} + a}} \Lambda(n) f\left(\frac{n-a}{m}\right) = \tilde{T}_1(a,m) + \tilde{T}_2(a,m) + \tilde{T}_3(a,m) + \tilde{T}_4(a,m) \ , \tag{2.24}$$

wobei die Ausdrücke $T_i(a,m)$, $\tilde{T}_i(a,m)$ mit $i = 1, .., 4$ definiert seien wie im Lemma. Aus (2.22), (2.23) und (2.24) ergibt sich die Behauptung. $\square$

2.5 Abschätzung der Teilterme

Im folgenden werden die Summen $\sum\limits_{a\leq 2x}\ \sum\limits_{m\leq M-1} T_i(a,m)$ aus Lemma 2.3 ausgewertet. Völlig analog können dann die Summen $\sum\limits_{a\leq 2x}\ \sum\limits_{m\leq M-1} \tilde{T}_i(a,m)$ behandelt werden.
Eine triviale Abschätzung der Summe $T_1(a,m)$ liefert sofort

Lemma 2.5:

Für beliebige $x, y, M \in I\!R^+$ mit $2x \leq y$ gilt

$$\sum_{a\leq 2x}\ \sum_{m\leq M-1} |T_1(a,m)| = O\left(x\log^2 y \sum_{m\leq M-1} V_m\right) .$$

Zur Abschätzung der Summen $\sum\limits_{a\leq 2x}\ \sum\limits_{m\leq M-1} T_i(a,m)$ mit $i = 2,3,4$ aus Lemma 2.3 werden die folgenden Aussagen über die Verteilung von $f(n) = \mu(n)\log n$ in arithmetischen Progressionen gebraucht.

Lemma 2.6: (Satz von Siegel-Walfisz für $f(n)$)

(i) Sei $A > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Konstante $C = C(A) > 0$, so daß für alle $q \leq (\log y)^A$, $a \in Z\!\!\!Z$ gilt

$$\sum_{\substack{n\,\equiv\, a \bmod q\\ n\leq y}} f(n) = O\left(ye^{-C\sqrt{\log y}}\right) .$$

(ii) Für beliebiges, aber festes $A > 0$ und alle $q \leq y$, $a \in Z\!\!\!Z$ gilt

$$\sum_{\substack{n\,\equiv\, a \bmod q\\ n\leq y}} f(n) = O\left(y(\log y)^{-A}\right) ,$$

wobei die O-Konstante von A abhängt.

(iii) Unter VRH gilt für alle $q \leq y$, $a \in Z\!\!\!Z$

$$\sum_{\substack{n\,\equiv\, a \bmod q\\ n\leq y}} f(n) = O\left(y^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) .$$

Lemma 2.7: (Satz von Barban-Davenport-Halberstam für $f(n)$)

(i) Für beliebiges, aber festes $A > 0$ und beliebige $Q, y \in I\!R^+$ mit $Q \leq y$ gilt

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{a=1}^{q} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ n \leq y}} f(n) \right|^2 = O\left(Qy \log y + y^2 (\log y)^{-A}\right) .$$

(ii) Unter (VRH) gilt für beliebige $Q, y \in I\!R^+$ mit $Q \leq y$

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{a=1}^{q} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ n \leq y}} f(n) \right|^2 = O\left(Qy \log y + y^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right) .$$

Beweis der Lemmata 2.6 und 2.7:

Die Lemmata 2.6$(i), (iii)$ und 2.7 können analog bewiesen werden, wie die entsprechenden Sätze für die Mangoldt-Funktion Λ. Teil (ii) des Lemmas 2.6 folgt sofort aus Teil (i) des selben Lemmas, wenn man die triviale Abschätzung

$$\sum_{\substack{n \equiv a \bmod q \\ n \leq y}} f(n) = O\left(\left(\frac{y}{q} + 1\right) \log y\right)$$

beachtet.
Damit sind die Lemmata 2.6 und 2.7 bewiesen. $\square$

Nun stehen alle Mittel für eine Abschätzung der in Lemma 2.3 definierten Summen $\sum\limits_{a \leq 2x} \sum\limits_{m \leq M-1} |T_i(a,m)|$ mit $i = 2, 3, 4$ bereit. Aus Lemma 2.6 erhält man

Lemma 2.8:

(i) Seien $B_2 > 0$, $\delta \in (0,1)$ gegeben. Dann gilt für beliebige $x, y, M \in R^+$ mit $2x \leq y$, $M \leq y^{1-\delta}$

$$\sum_{a \leq 2x} \sum_{m \leq M-1} |T_2(a,m)| = O\left(xy(\log y)^{-B_2} \sum_{m \leq M-1} m^{-1} U_m\right) .$$

(ii) Unter VRH gilt für beliebige $x, y, M \in R^+$ mit $2x \leq y$, $M \leq y$

$$\sum_{a \leq 2x} \sum_{m \leq M-1} |T_2(a,m)| = O\left(xy^{\frac{1}{2}+\epsilon} \sum_{m \leq M-1} m^{-\frac{1}{2}} U_m\right) .$$

Beweis:

Durch partielle Summation über t bekommt man zunächst

$$T_2(a,m) \ll \log y \cdot \sum_{k \le U_m} \max_{a<w\le y} \left| \sum_{\substack{t \equiv a \bmod m \\ k|t,\, t \le w}} f\left(\frac{t-a}{m}\right) \right| . \tag{2.25}$$

Im Falle $(k,m)\dagger a$ ist die innere Summe auf der rechten Seite leer, da die Summationsbedingung $t \equiv a \bmod m$, $k|t$ dann für kein $t \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Falls hingegen $(k,m)|a$ ist, so gibt es offenbar einen Modul q und ein $b \in \mathbb{Z}$, so daß

$$\sum_{\substack{t \equiv a \bmod m \\ k|t,\, t \le w}} f\left(\frac{t-a}{m}\right) = \sum_{\substack{n \equiv b \bmod q \\ n \le \frac{w-a}{m}}} f(n) \tag{2.26}$$

gilt. Weiter folgt aus Lemma 2.6(ii) für $a < w \le y$ und $m \le y^{1-\delta}$

$$\sum_{\substack{n \equiv b \bmod q \\ n \le \frac{w-a}{m}}} f(n) = O\left(\frac{y}{m}(\log y)^{-A}\right) , \tag{2.27}$$

wobei die O-Konstante nur von A und δ abhängt. Unter VRH liefert Lemma 2.6(iii) für $a < w \le y$ und $m \le y$ sogar

$$\sum_{\substack{n \equiv b \bmod q \\ n \le \frac{w-a}{m}}} f(n) = O\left(\left(\frac{y}{m}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) . \tag{2.28}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus (2.25), (2.26), (2.27) und (2.28). $\square$

Mit Hilfe von Lemma 2.7 wird gezeigt

Lemma 2.9:

(i) Seien $B_3 > 0$, $\delta_1, \delta \in (0,1)$ gegeben. Dann gilt für beliebige $x, y, M \in I\!R^+$ mit $y^{\delta_1} < x \le \frac{y}{2}$, $M \le y^{1-\delta}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \le 2x} \sum_{m \le M-1} |T_3(a,m)| \\
\ll\ & xy^{\frac{1}{2}}(\log y)^{\frac{7}{2}} \sum_{m \le M-1} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \tau(m) + xy(\log y)^{-B_3} \sum_{m \le M-1} m^{-1}\tau(m) + \\
& x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} (\log y)^{\frac{13}{2}+B_3} \sum_{m \le M-1} U_m V_m m^{-\frac{1}{2}} \tau(m) + x^{\frac{1}{2}} y (\log y)^3 \sum_{m \le M-1} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-1}\tau(m) + \\
& x^2 (\log y)^{-B_3} \sum_{m \le M-1} m^{-1}\tau(m) + x(\log y)^3 \sum_{m \le M-1} U_m V_m \tau(m) .
\end{aligned}$$

(ii) Sei $B_3 > 0$ gegeben. Dann gilt unter VRH gilt für beliebige $x, y, M \in I\!R^+$ mit $y^{\delta_1} < x \le \frac{y}{2}$, $M \le y$

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \le 2x} \sum_{m \le M-1} |T_3(a,m)| \\
\ll\ & xy^{\frac{1}{2}+\epsilon} \sum_{m \le M-1} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \tau(m) + xy^{\frac{3}{4}+\epsilon} \sum_{m \le M-1} m^{-\frac{3}{4}} \tau(m) + \\
& x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}+\epsilon} \sum_{m \le M-1} U_m V_m m^{-\frac{1}{2}} \tau(m) + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}+\epsilon} \sum_{m \le M-1} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{3}{4}} \tau(m) + \\
& x^2 (\log y)^{-B_3} \sum_{m \le M-1} m^{-1} \tau(m) + xy^{\epsilon} \sum_{m \le M-1} U_m V_m \tau(m) \ .
\end{aligned}$$

Beweis:

Offenbar läßt sich $T_3(a,m)$ aufspalten in

$$T_3(a,m) = \sum_{l|m} T_3(a,m,l) \tag{2.29}$$

mit

$$T_3(a,m,l) := \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=l}} \alpha_m(k) \sum_{\substack{t \equiv a \bmod m \\ k|t,\, t \le y}} f\left(\frac{t-a}{m}\right) \ . \tag{2.30}$$

Im ersten Teil des Beweises wird $\sum_{a \le 2x} T_3(a,m,l)$ für den Spezialfall $l = 1$ durch eine Rückführung auf Lemma 2.7 abgeschätzt, im zweiten Teil erfolgt eine Verallgemeinerung dieser Abschätzung für beliebiges $l|m$.
Offenbar läßt sich $T_3(a,m,1)$ in der Form

$$\begin{aligned}
T_3(a,m,1) &= \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} \alpha_m(k) \sum_{\substack{mq \equiv -a \bmod k \\ q \le \frac{y-a}{m}}} f(q) \\
&= \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} \alpha_m(k) \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-a}{m}}} f(q)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

schreiben, wobei $\bar{m}m \equiv 1 \bmod k$ sei. Im folgenden bezeichne $z \in I\!N$ einen freien Parameter mit $z \le 2x$, der später noch geeignet gewählt wird, und x_n werde wie im Beweis von Lemma 2.2 definiert durch

$$x_n := n \cdot \frac{2x}{z} \ .$$

Dann folgt aus (2.31) offenbar

$$\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,1)| \le \sum_{n=1}^{z} \sum_{x_{n-1} < a \le x_n} \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} |\alpha_m(k)| \cdot \left| \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-a}{m}}} f(q) \right| \ . \tag{2.32}$$

Die innere Summe auf der rechten Seite läßt sich für $x_{n-1} < a \le x_n$ wegen $|f(q)| \le \log q$ und der Wahl von x_n approximieren durch

$$\sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-a}{m}}} f(q) = \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \;+\; O\left(\log y \cdot \left(\frac{x}{zmk} + 1\right)\right) \;. \qquad (2.33)$$

Zusammen ergeben (2.32) und (2.33)

$$\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,1)| \le \sum_{n=1}^{z} \sum_{x_{n-1} < a \le x_n} \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} |\alpha_m(k)| \cdot \left| \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|$$
$$+O\left(x^2 (\log y) z^{-1} m^{-1} \cdot \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} \frac{|\alpha_m(k)|}{k} \;+\; x(\log y) \cdot \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} |\alpha_m(k)| \right) \;. \qquad (2.34)$$

Aus $|\alpha_m(k)| \le \tau(k) \log k$ und der nach Satz 1.2.2. auf S.12 in [Brü] geltenden Abschätzung

$$\sum_{k \le N} \tau(k) = O\left(N \log N\right) \qquad (2.35)$$

folgt

$$\sum_{k \le U_m V_m} |\alpha_m(k)| = O\left(U_m V_m \log^2 y\right)$$

und mit partieller Summation wegen der Voraussetzung $U_m \le y$, $V_m \le y$ von Lemma 2.3

$$\sum_{k \le U_m V_m} \frac{|\alpha_m(k)|}{k} = O\left(\log^3 y\right) \;.$$

Somit bekommt man aus (2.34)

$$\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,1)| \;\le\; \sum_{n=1}^{z} \sum_{x_{n-1} < a \le x_n} \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} |\alpha_m(k)| \cdot \left| \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|$$
$$+O\left(x^2 (\log y)^4 z^{-1} m^{-1} + x (\log y)^3 U_m V_m\right) \;. \qquad (2.36)$$

Beachtet man die Wahl von x_{n-1}, x_n, so liefert eine doppelte Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung weiter

$$\left(\sum_{x_{n-1}<a\le x_n} \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} |\alpha_m(k)| \cdot \left| \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right| \right)^2$$

$$\le \left(\frac{2x}{z}+1\right) \cdot \left(\sum_{k \le U_m V_m} \frac{|\alpha_m(k)|^2}{k} \right) \cdot \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} k \sum_{x_{n-1}<a\le x_n} \left| \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|^2 . \tag{2.37}$$

Aus der wegen $|\alpha_m(k)| \le \tau(k)\log k$ und Ungleichung (6.18) in [Brü] geltenden Abschätzung

$$\sum_{k \le N} \alpha_m(k)^2 = O\left(N \log^5 N\right)$$

folgt für den zweiten Faktor auf der rechten Seite von (2.37) mit partieller Summation

$$\sum_{k \le U_m V_m} \frac{|\alpha_m(k)|^2}{k} = O\left(\log^6 y\right) . \tag{2.38}$$

Der dritte Faktor auf der rechten Seite von (2.37) kann wegen der Wahl von x_{n-1}, x_n weiter abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m)=1}} k \sum_{x_{n-1}<a\le x_n} \left| \sum_{\substack{q \equiv -a\bar{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|^2 \\ \le\ & \sum_{k \le U_m V_m} k \left(\frac{2x}{zk}+1\right) \sum_{a=1}^{k} \left| \sum_{\substack{q \equiv a \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|^2 \\ \le\ & \left(\frac{2x}{z}+U_m V_m\right) \cdot \sum_{k \le U_m V_m} \sum_{a=1}^{k} \left| \sum_{\substack{q \equiv a \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|^2 . \end{aligned} \tag{2.39}$$

Schätzt man die Doppelsumme in der letzten Zeile mit Lemma 2.7(i) ab, so erhält man für $m \le y^{1-\delta}$

$$\sum_{k \le U_m V_m} \sum_{a=1}^{k} \left| \sum_{\substack{q \equiv a \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|^2 = O\left(y(\log y)U_m V_m m^{-1} + y^2(\log y)^{-A} m^{-2}\right) . \tag{2.40}$$

Unter VRH folgt aus Lemma 2.7(ii) für $m \le y$ sogar

$$\sum_{k \le U_m V_m} \sum_{a=1}^{k} \left| \sum_{\substack{q \equiv a \bmod k \\ q \le \frac{y-x_n}{m}}} f(q) \right|^2 = O\left(y(\log y) U_m V_m m^{-1} + y^{\frac{3}{2}+\epsilon} m^{-\frac{3}{2}} \right) . \qquad (2.41)$$

Wählt man $z := \left[1 + (\log y)^A \right]$, so ist die im Beweis an z gestellte Forderung $z \le 2x$ wegen der Voraussetzung $y^{\delta_1} < x$ des Lemmas für genügend großes y erfüllt, und man gewinnt aus den Ungleichungen (2.36) bis (2.40) nach kurzer Rechnung die Abschätzung

$$\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,1)| = O\left(r_1(x,y,m,U_m,V_m) \right)$$

mit

$$\begin{aligned} & r_1(x,y,m,U_m,V_m) \\ := \; & x y^{\frac{1}{2}} (\log y)^{\frac{7}{2}} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} + xy(\log y)^{3-\frac{A}{2}} m^{-1} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} (\log y)^{\frac{7}{2}+\frac{A}{2}} U_m V_m m^{-\frac{1}{2}} \\ & + x^{\frac{1}{2}} y (\log y)^3 U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-1} + x^2 (\log y)^{4-A} m^{-1} + x(\log y)^3 U_m V_m \, . \qquad (2.42) \end{aligned}$$

Durch Ersetzung von (2.40) durch (2.41) erhält man unter VRH sogar

$$\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,1)| = O\left(r_2(x,y,m,U_m,V_m) \right)$$

mit

$$\begin{aligned} & r_2(x,y,m,U_m,V_m) \\ := \; & x y^{\frac{1}{2}} (\log y)^{\frac{7}{2}} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} + x y^{\frac{3}{4}+\epsilon} m^{-\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} (\log y)^{\frac{7}{2}+\frac{A}{2}} U_m V_m m^{-\frac{1}{2}} + \\ & x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}+\epsilon} U_m^{\frac{1}{2}} V_m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{3}{4}} + x^2 (\log y)^{4-A} m^{-1} + x(\log y)^3 U_m V_m \, . \qquad (2.43) \end{aligned}$$

Nun soll $\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,l)|$ für beliebiges $l|m$ in analoger Weise abgeschätzt werden, wobei $T_3(a,m,l)$ definiert sei wie in (2.30). Zunächst sieht man leicht, daß $T_3(a,m,l) = 0$ gilt, falls $l \dagger a$ ist. Für $l|a$ kann $T_3(a,m,l)$ analog wie $T_3(a,m,1)$ in (2.31) geschrieben werden in der Form

$$\begin{aligned} T_3(a,m,l) &= \sum_{\substack{k \le U_m V_m \\ (k,m) = l}} \alpha_m(k) \sum_{\substack{mq \equiv -a \bmod k \\ q \le \frac{y-a}{m}}} f(q) \\ &= \sum_{\substack{k \le \frac{U_m V_m}{l} \\ (k,m) = 1}} \alpha_m(kl) \sum_{\substack{q \equiv -\frac{a}{l} \cdot \hat{m} \bmod k \\ q \le \frac{y-a}{m}}} f(q) \, , \end{aligned}$$

wobei $\hat{m} \cdot \frac{m}{l} \equiv 1 \bmod k$ sei. Schätzt man nun $\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,l)|$ auf analoge Weise ab, wie $\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,1)|$ im ersten Teil des Beweises, so gelangt man ebenfalls zu der Abschätzung

$$\sum_{a \le 2x} |T_3(a,m,l)| = O\left(r_1(x,y,m,U_m,V_m) \right) \qquad (2.44)$$

und unter VRH sogar zu

$$\sum_{a\le 2x} |T_3(a,m,l)| = O\left(r_2(x,y,m,U_m,V_m)\right)\ , \tag{2.45}$$

wobei $r_i(x,y,m,U_m,V_m)$ für $i=1,2$ definiert sei wie in (2.42) und (2.43). Aus (2.29), (2.44) und (2.45) ergibt sich bei geeigneter Wahl von A die Behauptung. $\square$

Schließlich läßt sich aus Lemma 2.6 herleiten

Lemma 2.10:

(i) Seien $B_4>0$, $\delta\in(0,1)$ gegeben. Dann gilt für beliebige $x,y,M\in R^+$ mit $2x\le y$, $M\le\min\left\{x,y^{1-\delta}\right\}$

$$\begin{aligned}&\sum_{a\le 2x}\ \sum_{m\le M-1} |T_4(a,m)|\\ =\ & O\left(xy(\log y)^5 M^{\frac12}\sum_{m\le M-1} m^{-\frac12}U_m^{-\frac12} + x^{\frac12}y^{\frac52}(\log y)^{-B_4}M^{\frac12}\sum_{m\le M-1} m^{-1}U_m^{-\frac12}V_m^{-1}\right)\ .\end{aligned}$$

(ii) Unter VRH gilt für beliebige $x,y,M\in R^+$ mit $2x\le y$, $M\le x$

$$\begin{aligned}&\sum_{a\le 2x}\ \sum_{m\le M-1} |T_4(a,m)|\\ =\ & O\left(xy^{1+\epsilon}M^{\frac12}\sum_{m\le M-1} m^{-\frac12}U_m^{-\frac12} + x^{\frac12}y^{\frac94+\epsilon}M^{\frac12}\sum_{m\le M-1} m^{-\frac34}U_m^{-\frac12}V_m^{-1}\right)\ .\end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst folgt aus der Defintion von $T_4(a,m)$ in Lemma 2.3

$$T_4(a,m) = \sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \Lambda(l) \sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \beta_m(k) f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\ ,$$

woraus man durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|T_4(a,m)|^2 \le \left(\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \Lambda(l)^2\right)\cdot \sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}}\left|\sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \beta_m(k) f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\right|^2 \tag{2.46}$$

erhält. Der erste Faktor auf der rechten Seite läßt sich trivial abschätzen durch

$$\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \Lambda(l)^2 \le \frac{y\log^2 y}{U_m}\ , \tag{2.47}$$

und eine einfache Umformung des zweiten Faktors ergibt

$$\begin{aligned}
&\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \left| \sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \beta_m(k) f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\right|^2 \\
= &\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \left(\beta_m(k) f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\right)^2 \\
&+2 \sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \sum_{\substack{U_m<k_1<k_2\le\frac{y}{l}\\ k_1l\equiv k_2l\equiv a \bmod m}} \beta_m(k_1)\beta_m(k_2) f\left(\frac{k_1l-a}{m}\right) f\left(\frac{k_2l-a}{m}\right) .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Summiert man die erste Doppelsumme auf der rechten Seite von (2.48) über alle $a \le 2x$ auf und schätzt weiter ab, so bekommt man wegen $|f(q)| \le \log q$ und $|\beta_m(k)| \le \tau(k)$ für alle $m \in I\!N$

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\le 2x} \sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \left(\beta_m(k) f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\right)^2 \\
\le\ & \log^2 y \cdot \sum_{a\le 2x} \sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \tau(k)^2 \\
\le\ & \log^2 y \cdot \sum_{a\le 2x} \sum_{\substack{n\le y\\ n\equiv a \bmod m}} \tau(n)^3 \\
\le\ & \log^2 y \cdot \sum_{n\le y} \tau(n)^3 \left(1+\frac{2x}{m}\right) ,
\end{aligned}$$

woraus wegen der ähnlich wie (2.35) beweisbaren Aussage

$$\sum_{n\le y} \tau(n)^3 = O\left(y\log^6 y\right)$$

für $m \le x$ die Abschätzung

$$\sum_{a\le 2x} \sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}} \sum_{\substack{U_m<k\le\frac{y}{l}\\ kl\equiv a \bmod m}} \left(\beta_m(k) f\left(\frac{kl-a}{m}\right)\right)^2 = O\left(y\log^8 y\cdot\frac{x}{m}\right) \tag{2.49}$$

folgt. Nach Aufsummieren der zweiten Doppelsumme auf der rechten Seite von (2.48) über alle $a \le 2x$ erhält man durch geeignetes Umordnen

$$\sum_{a\le 2x}\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}}\sum_{\substack{U_m<k_1<k_2\le\frac{y}{l}\\ k_1l\equiv k_2l\equiv a \bmod m}}\beta_m(k_1)\beta_m(k_2)f\left(\frac{k_1l-a}{m}\right)f\left(\frac{k_2l-a}{m}\right)$$

$$= \sum_{U_m<k_1<k_2<\frac{y}{V_m}}\beta_m(k_1)\beta_m(k_2)\sum_{a\le 2x}\sum_{\substack{V_m<l<\frac{y}{k_2}\\ k_1l\equiv k_2l\equiv a \bmod m}} f\left(\frac{k_1l-a}{m}\right)f\left(\frac{k_2l-a}{m}\right)$$

$$= \sum_{U_m<k_1<k_2<\frac{y}{V_m}}\beta_m(k_1)\beta_m(k_2)\sum_{\frac{k_1V_m-2x}{m}<j\le\frac{k_1y}{k_2m}} f(j)\sum_{\substack{\max\left\{V_m,\frac{jm}{k_1}\right\}<l\le\min\left\{\frac{y}{k_2},\frac{jm+2x}{k_1}\right\}\\ m|(k_2-k_1)l}}$$

$$f\left(j+\frac{(k_2-k_1)l}{m}\right)\ . \tag{2.50}$$

Es soll nun die innere Summe in der letzten Zeile von (2.50) abgeschätzt werden. Offenbar gibt es $w_1, w_2 \in I\!R^+$ mit $w_1 < w_2 \le \frac{y}{m}$ und einen Modul q, so daß

$$\sum_{\substack{\max\left\{V_m,\frac{jm}{k_1}\right\}<l\le\min\left\{\frac{y}{k_2},\frac{jm+2x}{k_1}\right\}\\ m|(k_2-k_1)l}} f\left(j+\frac{(k_2-k_1)l}{m}\right) = \sum_{\substack{n\equiv j \bmod q\\ w_1<n\le w_2}} f(n) \tag{2.51}$$

ist. Hieraus folgt wegen Lemma 2.6(ii) für alle $m \le y^{1-\delta}$

$$\sum_{\substack{\max\left\{V_m,\frac{jm}{k_1}\right\}<l\le\min\left\{\frac{y}{k_2},\frac{jm+2x}{k_1}\right\}\\ m|(k_2-k_1)l}} f\left(j+\frac{(k_2-k_1)l}{m}\right) = O\left(\frac{y}{m}(\log y)^{-A}\right)\ , \tag{2.52}$$

wobei die O-Konstante nur von A und δ abhängt. Unter VRH ergibt sich aus (2.51) wegen Lemma 2.6(iii) für alle $m \le y$ sogar

$$\sum_{\substack{\max\left\{V_m,\frac{jm}{k_1}\right\}<l\le\min\left\{\frac{y}{k_2},\frac{jm+2x}{k_1}\right\}\\ m|(k_2-k_1)l}} f\left(j+\frac{(k_2-k_1)l}{m}\right) = O\left(\left(\frac{y}{m}\right)^{\frac12+\epsilon}\right)\ . \tag{2.53}$$

Beachtet man $|f(j)| \le \log j$, $|\beta_m(k)| \le \tau(k)$ und (2.35), so erhält man aus (2.50) und (2.52) die Abschätzung

$$\sum_{a\le 2x}\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}}\sum_{\substack{U_m<k_1<k_2\le\frac{y}{l}\\ k_1l\equiv k_2l\equiv a \bmod m}}\beta_m(k_1)\beta_m(k_2)f\left(\frac{k_1l-a}{m}\right)f\left(\frac{k_2l-a}{m}\right)$$

$$= O\left(y^4(\log y)^{3-A}m^{-2}V_m^{-2}\right) \tag{2.54}$$

und unter VRH aus (2.50) und (2.53) sogar

$$\sum_{a\le 2x}\sum_{V_m<l<\frac{y}{U_m}}\sum_{\substack{U_m<k_1<k_2\le\frac{y}{l}\\ k_1l\equiv k_2l\equiv a \bmod m}}\beta_m(k_1)\beta_m(k_2)f\left(\frac{k_1l-a}{m}\right)f\left(\frac{k_2l-a}{m}\right) = O\left(y^{\frac72+\epsilon}m^{-\frac32}V_m^{-2}\right)\ . \tag{2.55}$$

Zusammen liefern (2.46), (2.47), (2.48), (2.49), (2.54) die Abschätzung

$$\sum_{a\le 2x} |T_4(a,m)|^2 = O\left(xy^2(\log y)^{10}m^{-1}U_m^{-1} + y^5(\log y)^{5-A}m^{-2}U_m^{-1}V_m^{-2}\right) . \qquad (2.56)$$

Ersetzt man (2.54) durch (2.55), so bekommt man unter VRH sogar

$$\sum_{a\le 2x} |T_4(a,m)|^2 = O\left(xy^2(\log y)^{10}m^{-1}U_m^{-1} + y^{\frac{9}{2}+\epsilon}m^{-\frac{3}{2}}U_m^{-1}V_m^{-2}\right) . \qquad (2.57)$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und den Abschätzungen (2.56) und (2.57). □

2.6 Abschätzung von $R_2(x,y,M)$

Für die in (2.4) definierte Summe $R_2(x,y,M)$ erhält man nun aus Lemma 2.3, den Abschätzungen für die Summen $\sum_{a\le 2x}\ \sum_{m\le M-1} |T_i(a,m)|$ in den Lemmata 2.4, 2.5, 2.8, 2.9, 2.10 und analogen Abschätzungen für die Summen $\sum_{a\le 2x}\ \sum_{m\le M-1} |\tilde{T}_i(a,m)|$ folgendes

Lemma 2.11:

(i) Seien $B_5 > 0$, $\delta_1, \delta \in (0,1)$ gegeben. Dann gilt für beliebige $x, y \in I\!R^+$, $M \in I\!N$ mit $y^{\delta_1} < x \le \frac{y}{2}$ und $M \le \min\left\{x, y^{1-\delta}\right\}$

$$R_2(x,y,M) = O\left(xy(\log y)^{-B_5}M + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}(\log y)^{-B_5}M^{\frac{1}{2}}\right) .$$

(ii) Sei $B_5 > 0$ gegeben. Dann gilt unter VRH für beliebige $x, y \in I\!R^+$, $M \in I\!N$ mit $y^{\frac{3}{4}} < x \le \frac{y}{2}$ und $M \le \min\left\{x, y^{\frac{1}{4}}\right\}$

$$R_2(x,y,M) = O\left(x^{\frac{13}{12}}y^{\frac{7}{8}+\epsilon}M^{\frac{5}{8}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{4}+\epsilon}M^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{3}{4}}M^{\frac{5}{4}} + x^2(\log y)^{-B_5}\right) .$$

Beweis von Teil (i)**:**

Setzt man $U_m := (\log y)^{B_6}$ und $V_m := y(\log y)^{-2B_6}$ für alle $m \le M-1$, so folgt aus den Lemmata 2.5, 2.8(i), 2.9(i), 2.10(i) bei geeigneter Wahl der Konstanten B_2, B_3, B_4, B_6 die Abschätzung

$$\sum_{a\leq 2x} \sum_{m\leq M-1} \sum_{i=1}^{4} |T_i(a,m)| = O\left(xy(\log y)^{-B_5}M + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}(\log y)^{-B_5}M^{\frac{1}{2}}\right) .$$

Auf analogem Wege kann bei passender Wahl der Parameter $\tilde{U}_m, \tilde{V}_m \in \left[1, \frac{my}{M}\right]$ die gleiche Abschätzung für $\sum\limits_{a\leq 2x} \sum\limits_{m\leq M-1} \sum\limits_{i=1}^{4} |\tilde{T}_i(a,m)|$ hergeleitet werden.
Wendet man nun Lemma 2.3 an, so ergibt sich die Behauptung von Teil (i). □

Beweis von Teil (ii)**:**

Setzt man $U_m := x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{6}}$ und $V_m := x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{4}}m^{-\frac{1}{4}}$, so ist $U_m, V_m \in [1, y]$ für alle $m \leq M-1$ wegen der Voraussetzung des Teiles (ii), und aus den Lemmata 2.5, 2.8(ii), 2.9(ii), 2.10(ii) folgt unter VRH nach längerer Rechnung die Abschätzung

$$\sum_{a\leq 2x} \sum_{m\leq M-1} \sum_{i=1}^{4} |T_i(a,m)| = O\left(x^{\frac{13}{12}}y^{\frac{7}{8}+\epsilon}M^{\frac{5}{8}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{4}+\epsilon}M^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{3}{4}}M^{\frac{5}{4}} + x^2(\log y)^{-B_5}\right) ,$$

wenn man die Voraussetzung von Teil (ii) beachtet.
Auf analogem Wege kann unter VRH bei passender Wahl der Parameter $\tilde{U}_m, \tilde{V}_m \in \left[1, \frac{my}{M}\right]$ die gleiche Abschätzung für $\sum\limits_{a\leq 2x} \sum\limits_{m\leq M-1} \sum\limits_{i=1}^{4} |\tilde{T}_i(a,m)|$ hergeleitet werden.
Wendet man wieder Lemma 2.3 an, so ergibt sich die Behauptung von Teil (ii). □

2.7 Übertragung auf das Goldbachproblem

In diesem Abschnitt werden die Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge aus Satz 2.2 in analoger Weise für das Goldbachproblem formuliert. Aus dem so gewonnenen späteren Satz 2.2' läßt sich dann der berühmte Dreiprimzahlsatz von Hardy-Littlewood-Vinogradov folgern, der besagt, daß sich jede genügend große ungerade Zahl als Summe dreier Primzahlen darstellen läßt (siehe [HLi] und [Vin]).

Zunächst bezeichne $G_2(2N)$ für $N \in IN$ die Anzahl aller Primzahlpaare (p_1, p_2) mit $p_1 + p_2 = 2N$, also

$$G_2(2N) := \sharp \left\{ (p_1, p_2) \in IP^2 \mid p_1 + p_2 = 2N \right\} .$$

Mit ihrer Kreimethode gelangten Hardy und Littlewood für $N \to \infty$ zu der Vermutung

$$G_2(2N) \sim 2\sigma(2N) \cdot \frac{N}{\log^2 N} ,$$

welche äquivalent ist mit

$$\sum_{n+n'=2N} \Lambda(n)\Lambda(n') \;\sim\; 2\sigma(2N)N$$

(siehe [HLi]). Die Methode von Hardy und Littlewood führt sogar auf die schärfere Vermutung

$$\psi_2^*(y, 2N) = \sigma(2N)y + o(y)$$

für $\frac{y}{2} \leq N \leq cy$ und $y \to \infty$, wobei

$$\psi_2^*(y, 2N) := \sum_{\substack{n + n' = 2N, \\ n \leq y}} \Lambda(n)\Lambda(n')$$

und $c > \frac{1}{2}$ eine beliebige Konstante sei.
Die Methoden, die in den vorangegangenen Abschnitten zur Herleitung von Fast-Alle-Aussagen für $\psi_2(y, 2N)$ benutzt wurden, lassen sich nun in einfacher Weise so modifizieren, daß auch Fast-Alle-Aussagen für $\psi_2^*(y, 2N)$ gewonnen werden können. Als Analogon zu Satz 2.2 erhält man so

Satz 2.2':

(i) Seien A, B, C beliebige positive reelle Konstanten. Dann gilt für alle $x, y, z \in IR^+$ mit $z \geq y$, $z + x \leq (C+1)y$ und $x \geq \frac{y}{\log^B y}$ die Abschätzung

$$\sum_{z<N\leq z+x} |\psi_2^*(y, 2N) - \sigma(2N)y| = O\left(xy(\log y)^{-A}\right) .$$

(ii) Unter VRH (Verallgemeinerte Riemann-Hypothese) läßt sich die Voraussetzung $x \geq \frac{y}{\log^B y}$ in (i) ersetzen durch $x \geq y^{\frac{15}{17}+\epsilon}$.

Wählt man $z := y$ und $x := \frac{y}{2}$, so ergibt sich aus Satz 2.2'(i) für beliebiges $A > 0$ die bereits in [Hea] bewiesene Abschätzung

$$\sum_{y<N\leq\frac{3}{2}\cdot y} |\psi_2^*(y, 2N) - \sigma(2N)y| = O\left(y^2(\log y)^{-A}\right) ,$$

aus der nach [Hea], S.46 folgt

Korollar 2.1: Jede genügend große ungerade Zahl läßt sich als Summe dreier Primzahlen darstellen.

Dies ist der berühmte Dreiprimzahlsatz von Hardy-Littlewood-Vinogradov.

2.8 Herleitung von Fast-Alle-Aussagen durch Rückführung auf Exponentialsummen

Im letzten Teil dieses Kapitels sollen Fast-Alle-Aussagen für Teilterme $T_{2d}(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2})$ von $\psi_2(2d,x)$ durch Rückführung auf geeignete Exponentialsummen und anschließender Abschätzung dieser mit Hilfe des großen Siebes gewonnen werden. Die Rückführung auf Exponentialsummen geschieht dabei analog wie in Kapitel 1. Leider gelangt man mit der hier angewandten Methode nicht zu Fast-Alle-Aussagen für $\psi_2(2d,x)$. Die Gründe hierfür werden in einer Schlußbemerkung (Abschnitt 2.10) erörtert.
Als Hauptergebnis wird gezeigt

Satz 2.3:

Sei $a > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt

$$\sum_{x<d\leq x+N} \left| T_{2d}(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2}) - \sigma(2d)(y-2d) \right| = O\left(Nye^{-c_1\sqrt{\log y}} \right) \quad ,$$

für alle $x, y \in I\!R^+$, $N \in I\!N$ mit $x + N \leq \frac{y}{2} \leq N^a$ und für beliebige, aber feste $b_1, b_2 > 0$ mit $b_1 + b_2 < 1 + (2a)^{-1}$.

Dieser Satz wird in der Abbildung 2 auf S. 79 graphisch veranschaulicht.
Nun erfolgt der

Beweis von Satz 2.3:

Für den Beweis genügt es wegen (1.24) und Satz 1.4,

$$\sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^{\nu}\left(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2}\right) \right| = O\left(Nye^{-c_1\sqrt{\log y}} \right)$$

zu zeigen für $\nu = 1, 2$. Diese Abschätzung folgt aus den später bewiesenen Sätzen 2.4 und 2.5. Damit ist Satz 2.3 bewiesen. $\square$

Zur Abschätzung der Summen $\sum\limits_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^{\nu}\left(y, 0, y^{b_1}, 0, y^{b_2}\right)\right|$ über die Beträge der Restglieder wird zuerst gezeigt

Lemma 2.12:

Sei $a > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt für alle $x, y,\ N \in I\!N$ mit $x + N \leq \frac{y}{2} \leq N^a$ und für beliebige, aber feste $b_1, b_2 > 0$ mit $\max\Big(b_1 + b_2, \frac{1}{2} \cdot (b_1 + 3b_2)\Big) < 1 + (2a)^{-1}$ die Abschätzung

$$\sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^{2}\left(y, 0, y^{b_1}, 0, y^{b_2}\right)\right| = O\left(Ny^{1-\delta}\right) \tag{2.58}$$

für eine geeignete Konstante $\delta > 0$, wobei die O-Konstante nur von b_1, b_2 und δ abhängt.

Beweis:

Wegen (1.37) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^{2}(y, u_1, v_1, u_2, v_2)\right| \ &\leq \ \sum_{x<d\leq x+N} \ \sum_{k|2d} \left| U_{2d}\left(k, y, \frac{u_1}{k}, \frac{v_1}{k}, \frac{u_2}{k}, \frac{v_2}{k}\right)\right| \\ = \ \sum_{\substack{k \leq x+N \\ 2\nmid k}} \ \sum_{\frac{x}{k}<n\leq\frac{x+N}{k}} &\left| U_{2nk}\left(k, y, \frac{u_1}{k}, \frac{v_1}{k}, \frac{u_2}{k}, \frac{v_2}{k}\right)\right| \ + \\ \sum_{\substack{k \leq 2(x+N) \\ 2 \mid k}} \ \sum_{\frac{2x}{k}<n\leq\frac{2(x+N)}{k}} &\left| U_{nk}\left(k, y, \frac{u_1}{k}, \frac{v_1}{k}, \frac{u_2}{k}, \frac{v_2}{k}\right)\right| \ .\end{aligned} \tag{2.59}$$

Zunächst soll die innere Summe der zweiten Doppelsumme in der letzten Zeile von (2.59) abgeschätzt werden.
Wegen (1.38) bekommt man für beliebige $z, M \in I\!R^+$

$$\begin{aligned}&\sum_{z<n\leq z+M} \left| U_{nk}\left(k, y, s_1, t_1, s_2, t_2\right)\right| \leq \\ &\log(t_1k)\log(t_2k) \sum_{z<n\leq z+M} \left| S_{nk}\left(k, y, s_1, t_1, s_2, t_2\right)\right| \ + \ \log(t_1k) \cdot \int_{s_2}^{t_2} \sum_{z<n\leq z+M} \left| S_{nk}\left(k, y, s_1, t_1, s_2, \tau_2\right)\right| \frac{d\tau_2}{\tau_2} \ + \\ &\log(t_2k) \cdot \int_{s_1}^{t_1} \sum_{z<n\leq z+M} \left| S_{nk}\left(k, y, s_1, \tau_1, s_2, t_2\right)\right| \frac{d\tau_1}{\tau_1} \ + \ \int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2} \sum_{z<n\leq z+M} \left| S_{nk}(k, y, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2)\right| \frac{d\tau_2}{\tau_2}\frac{d\tau_1}{\tau_1} \ .\end{aligned} \tag{2.60}$$

Weiter kann $\sum\limits_{n\leq z} \left| S_{nk}(k, y, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2)\right|$ wegen (1.39) abgeschätzt werden durch

$$\sum_{z<n\le z+M} |S_{nk}(k,y,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)| \;\le\; \sum_{z<n\le z+M} \left|S^1_{nk}(k,y,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| + \sum_{z<n\le z+M} \left|S^{-1}_{nk}(k,y,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| . \qquad (2.61)$$

Für $j=\pm 1$ und beliebiges $H\in IN_0$ folgt nun aus (1.40)

$$\sum_{z<n\le z+M} \left|S^j_{nk}(k,y,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| \;\le\; \frac{10\tau_1\tau_2 z}{H+1} + \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{h=1}^{H}\frac{1}{h}\cdot\sum_{z<n\le z+M}\left|E^j_{nk}(h,k,y,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| . \qquad (2.62)$$

Analog zu (1.42) bekommt man durch doppelte Anwendung von partieller Integration

$$\sum_{z<n\le z+M}\left|E^j_{nk}(h,k,y,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| \;\le\; \sum_{z<n\le z+M}\left|F^j(nkh,k,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| +$$
$$\frac{2\pi hy}{k\tau_2}\int_{s_1}^{\tau_1}\sum_{z<n\le z+M}\left|F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,\tau_2)\right|\frac{dw_1}{w_1^2} + \frac{2\pi hy}{k\tau_1}\int_{s_2}^{\tau_2}\sum_{z<n\le z+M}\left|F^j(nkh,k,s_1,\tau_1,s_2,w_2)\right|\frac{dw_2}{w_2^2} \cdot$$
$$\frac{2\pi hy}{k}\int_{s_1}^{\tau_1}\int_{s_2}^{\tau_2}\sum_{z<n\le z+M}\left|F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)\right|\frac{dw_2}{w_2^2}\frac{dw_1}{w_1^2} +$$
$$\left(\frac{2\pi hy}{k}\right)^2\int_{s_1}^{\tau_1}\int_{s_2}^{\tau_2}\sum_{z<n\le z+M}\left|F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)\right|\frac{dw_2}{w_2^3}\frac{dw_1}{w_1^3} . \qquad (2.6$$

Wendet man nun nacheinander das später bewiesene Lemma 2.15 und die Ungleichungen (2.63), (2.62), (2.61), (2.60) an und setzt in (2.62) dabei

$$H := \left[(M+1)^{\frac16} s_1^{\frac56} s_2 (s_1+s_2)^{-\frac16}\left((M+1)^{\frac12}+s_2\right)^{-\frac13} y^{-\frac23}k^{\frac23}\right] ,$$

so bekommt man für $s_1<t_1\le 2s_1$, $s_2<t_2\le 2s_2$ nach längerer Rechnung

$$\sum_{z<n\le z+M}|U_{nk}(k,y,s_1,t_1,s_2,t_2)| = O\left(f(M,k,y,s_1,t_1,s_2,t_2)((M+1)kys_1s_2)^\epsilon\right) \qquad (2.64)$$

mit

$$f(M,k,y,s_1,t_1,s_2,t_2) \;=\;$$
$$(M+1)^{\frac12}s_1^{\frac12}(s_1+s_2)^{\frac12}\left((M+1)^{\frac12}+s_2\right) + (M+1)^{\frac23}s_1^{\frac13}(s_1+s_2)^{\frac13}\left((M+1)^{\frac12}+s_2\right)^{\frac23}y^{\frac13}k^{-\frac13} +$$
$$(M+1)^{\frac56}s_1^{\frac16}(s_1+s_2)^{\frac16}\left((M+1)^{\frac12}+s_2\right)^{\frac13}y^{\frac23}k^{-\frac23} . \qquad (2.65)$$

Völlig analog kann

$$\sum_{\frac{z}{2}n\le\frac{z+M}{2}}|U_{2nk}(k,y,s_1,t_1,s_2,t_2)| = O\left(f(M,k,y,s_1,t_1,s_2,t_2)((M+1)kys_1s_2)^\epsilon\right) \qquad (2.66)$$

gezeigt werden. Beachtet man

$$\left((M+1)^{\frac{1}{2}} + s_2\right)^c \leq (M+1)^{\frac{c}{2}} + s_2^c$$

für $c < 1$, so kann der in (2.65) definierte Ausdruck noch abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} f(M,k,y,s_1,t_1,s_2,t_2) \;\leq\; & (M+1)^{\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} s_2 (s_1+s_2)^{\frac{1}{2}} \;+\; (M+1)^{\frac{2}{3}} s_1^{\frac{1}{3}} s_2^{\frac{2}{3}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{1}{3}} \;+ \\ & (M+1)^{\frac{5}{6}} s_1^{\frac{1}{6}} s_2^{\frac{1}{3}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{6}} y^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \;+\; (M+1) s_1^{\frac{1}{2}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{2}} \;+ \\ & (M+1) s_1^{\frac{1}{3}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{1}{3}} \;+\; (M+1) s_1^{\frac{1}{6}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{6}} y^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \;. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Aus (2.59), (2.64), (2.66) und (2.67) folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^2(y,u_1,v_1,u_2,v_2) \right| \\ \leq \;& O\Bigg(\Bigg(N^{\frac{1}{2}} u_1^{\frac{1}{2}} u_2 (u_1+u_2)^{\frac{1}{2}} \;+\; N^{\frac{2}{3}} u_1^{\frac{1}{3}} u_2^{\frac{2}{3}} (u_1+u_2)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \;+\; N^{\frac{5}{6}} u_1^{\frac{1}{6}} u_2^{\frac{1}{3}} (u_1+u_2)^{\frac{1}{6}} y^{\frac{2}{3}} \;+ \\ & N u_1^{\frac{1}{2}} (u_1+u_2)^{\frac{1}{2}} \;+\; N u_1^{\frac{1}{3}} (u_1+u_2)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \;+\; N u_1^{\frac{1}{6}} (u_1+u_2)^{\frac{1}{6}} y^{\frac{2}{3}} \Bigg) (N u_1 u_2 y)^{\epsilon} \Bigg) \end{aligned} \tag{2.68}$$

für $u_1 < v_1 \leq 2u_1$, $u_2 < v_2 \leq 2u_2$. Nun liefern

$$\sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^2(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2}) \right| \;\leq\; \sum_{i_1=1}^{\lceil \log_2 y^{b_1} \rceil} \; \sum_{i_2=1}^{\lceil \log_2 y^{b_2} \rceil} \; \sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^2\left(y, \frac{y^{b_1}}{2^{i_1+1}}, \frac{y^{b_1}}{2^{i_1}}, \frac{y^{b_2}}{2^{i_2+1}}, \frac{y^{b_2}}{2^{i_2}}\right) \right|$$

und (2.68) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^2(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2}) \right| \\ = \;& O\Big(\Big(N^{\frac{1}{2}} y^{b_1+b_2} + N^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{2}b_2} + N^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}b_1+\frac{2}{3}b_2+\frac{1}{3}} + N^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}b_1+b_2+\frac{1}{3}} + N^{\frac{5}{6}} y^{\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2+\frac{2}{3}} + \\ & N^{\frac{5}{6}} y^{\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{2}{3}} + N y^{b_1} + N y^{\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2} + N y^{\frac{2}{3}b_1+\frac{1}{3}} + x y^{\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}} + N y^{\frac{1}{3}b_1+\frac{2}{3}} + \\ & N y^{\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{6}b_2+\frac{2}{3}}\Big) (Ny)^{\epsilon}\Big) \;, \end{aligned}$$

aus der man die Behauptung erhält. $\square$

Als nächstes soll die Voraussetzung $\max\Big(b_1+b_2, \frac{1}{2}\cdot(b_1+3b_2)\Big) < 1 + (2a)^{-1}$ aus Lemma 2.12 noch abgeschwächt werden zu $b_1 + b_2 < 1 + (2a)^{-1}$. Es wird also gezeigt

Satz 2.4:

Sei $a > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt für alle $x, y,\ N \in I\!N$ mit $x + N \leq \frac{y}{2} \leq N^a$ und für beliebige, aber feste $b_1, b_2 > 0$ mit $b_1 + b_2 < 1 + (2a)^{-1}$ die Abschätzung

$$\sum_{x<d\leq x+N} \left| R_{2d}^2\left(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2}\right) \right| = O\left(N y^{1-\delta}\right)$$

für eine geeignete Konstante $\delta > 0$, wobei die O-Konstante nur von b_1, b_2 und δ abhängt.

Beweis:

Wegen der Definition des Ausdruckes $R_{2d}^2(y, u_1, v_1, u_2, v_2)$ in (1.27) und der für beliebiges $\lambda \in \mathbb{Z}$ geltenden Beziehung

$$\lambda \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \equiv \left(\frac{\lambda}{q_1 q_2} - \lambda \cdot \frac{\bar{q}_2}{q_1}\right) \mod 1$$

läßt sich $R_{2d}^2(y, u_1, v_1, u_2, v_2)$ auch in der Form

$$R_{2d}^2(x, u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum_{k|2d} \sum_{\substack{\frac{u_1}{k} < q_1 \leq \frac{v_1}{k}, \\ \frac{u_2}{k} < q_2 \leq \frac{v_2}{k}, \\ (q_1, q_2) = 1}} \mu(q_1 k) \log(q_1 k) \mu(q_2 k) \log(q_2 k) \cdot \left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x}{k q_1 q_2} - \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_2}{q_1}\right\}\right)$$

schreiben. Nutzt man diese Vertauschung der Parameter q_1 und q_2 aus, so kann man völlig analog wie Lemma 2.12 beweisen, daß die Abschätzung (2.58) auch unter der Voraussetzung $\max\left(b_1 + b_2, \frac{1}{2} \cdot (3b_1 + b_2)\right) < 1 + (2a)^{-1}$ gilt. Dies liefert zusammen mit Lemma 2.12 die Behauptung des Satzes, wenn man die Implikation

$$b_1 + b_2 < 1 + (2a)^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(b_1 + 3b_2) < 1 + (2a)^{-1} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(3b_1 + b_2) < 1 + (2a)^{-1}\right)$$

beachtet. $\square$

Auf analoge Weise wie Satz 2.4 läßt sich beweisen

Satz 2.5:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 gilt

$$\sum_{x+d \leq x+N} \left|R_{2d}^1\left(y, 0, y^{b_1}, 0, y^{b_2}\right)\right| = O\left(N y^{1-\delta}\right)$$

für eine geeignete Konstante $\delta > 0$, wobei die O-Konstante nur von b_1, b_2 und δ abhängt.
$\square$

2.9 Abschätzung einer Exponentialsumme mit Hilfe des Großen Siebes

Zur Vervollständigung des Beweises von Lemma 2.12 wird noch eine Abschätzung für die Exponentialsumme $\sum\limits_{z<n\leq z+M} |F^j(nkh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)|$ benötigt, wobei der Term $F^j(nkh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ mit $nk = 2d$ definiert sei wie in (1.33). Dazu soll das große Sieb benutzt werden, welches formuliert wird in

Lemma 2.13: (Großes Sieb, siehe Satz 5.2.2 auf S. 159 in [Brü])

Sei $z, M \in I\!R^+$, (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, $R \in I\!N$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_R \in I\!R$, $\delta := \min_{i\neq j} ||\alpha_i - \alpha_j||$, $\delta \neq 0$. Ferner werde $S(\alpha)$ definiert durch

$$S(\alpha) := \sum_{z<n\leq z+M} a_n e(n\alpha) \ .$$

Dann gilt

$$\sum_{r\leq R} |S(\alpha_r)|^2 \leq \left(M + \delta^{-1}\right) \sum_{z<n\leq z+M} |a_n|^2 \ .$$

Dieses Lemma kann recht einfach verallgemeinert werden zu folgendem

Lemma 2.14:

Sei wieder $z, M \in I\!R^+$, (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, $R \in I\!N$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_R \in I\!R$. Mit δ werde die kleinste positive reelle Zahl bezeichnet, für die es $i, j \in \{1, ..., R\}$ gibt mit $\delta = ||\alpha_i - \alpha_j||$, also

$$\delta := \min_{i,j} \{||\alpha_i - \alpha_j|| > 0\} \ .$$

Weiter setze man

$$J := \max_{0\leq\beta<1} \ \sharp \{i \in \{1, ..., R\} \mid ||\alpha_i - \beta|| = 0\} \ .$$

Dann gilt

$$\sum_{r\leq R} |S(\alpha_r)|^2 \leq J \left(M + \delta^{-1}\right) \sum_{z<n\leq z+M} |a_n|^2 \ ,$$

wobei $S(\alpha)$ definiert sei wie in Lemma 2.13.

Beweis:

Die Menge $\{1, ..., R\}$ läßt sich disjunkt zerlegen in Mengen $A_1, ..., A_J$, für die

$$(i, j \in A_\nu \wedge \ i \neq j) \Rightarrow ||\alpha_i - \alpha_j|| > 0$$

gilt für alle $\nu = 1, ..., R$. Wendet man Lemma 2.13 an, so erhält man

$$\sum_{r\in A_\nu} |S(\alpha_r)|^2 \leq \left(M + \delta^{-1}\right) \sum_{z<n\leq z+M} |a_n|^2 \ ,$$

woraus sich nach Aufsummieren über ν die Behauptung ergibt. $\square$

Eine Anwendung des Lemmas 2.14 führt auf folgendes

Lemma 2.15:

Sei $0 < s_1 < w_1 \le 2s_1$, $0 < s_2 < w_2 \le 2s_2$, $h, k \in I\!N$, $j = \pm 1$ und $z, M \in I\!R^+$. Dann gilt

$$\sum_{z<n\le z+M} \left| F^j(nkh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) \right| = O\left((M+1)^{\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{2}} \left((M+1)^{\frac{1}{2}} + s_2 \right) h^{\epsilon} \right) .$$

Beweis:

Aus der Definition von $F^j(nkh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ in (1.33) erhält man

$$\sum_{z<n\le z+M} \left| F^j(nkh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) \right| = \sum_{z<n\le z+M} \left| \sum_{\substack{s_1 < q_1 \le w_1 \\ s_2 < q_2 \le w_2 \\ (q_1,q_2)=1 \\ \mu(q_1 k)\mu(q_2 k) = j}} e\left(nh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right) \right|$$

$$\le \sum_{t|h} \sum_{z<n\le z+M} \left| \sum_{\substack{s_1 < q_1 \le w_1 \\ s_2 < q_2 \le w_2 \\ (q_1,q_2)=1 \\ \mu(q_1 k)\mu(q_2 k) = j \\ (q_2,h)=t}} e\left(nh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right) \right| . \tag{2.69}$$

Man definiere nun $\operatorname{sgn}(c)$ für eine beliebige komplexe Zahl c durch

$$\operatorname{sgn}(c) := \begin{cases} 0, & \text{falls } c = 0 \\ \frac{|c|}{c} & \text{sonst} \end{cases}$$

und setze

$$a_n := \operatorname{sgn}\left(\sum_{\substack{s_1 < q_1 \le w_1 \\ s_2 < q_2 \le w_2 \\ (q_1,q_2)=1 \\ \mu(q_1 k)\mu(q_2 k) = j \\ (q_2,h)=t}} e\left(nh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2} \right) \right) .$$

Dann folgt für die innere Summe in der letzten Zeile von (2.69)

$$\sum_{z<n\le z+M}\left|\sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}} e\left(nh\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right)\right| = \sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}}\ \sum_{z<n\le z+M} a_n e\left(nh\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right). \tag{2.70}$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung läßt sich die rechte Seite weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}}\ \sum_{z<n\le z+M} a_n e\left(nh\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right)\\ \le\ &\left(\sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}} 1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}}\left|\sum_{z<n\le z+M} a_n e\left(nh\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite kann abgeschätzt werden durch

$$\sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}} 1 \ \le\ \frac{4s_1s_2}{t}. \tag{2.72}$$

Schreibt man die Parameter $h\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}$ mit $s_1<q_1\le w_1$, $s_2<q_2\le w_2$, $(q_1,q_2)=1$, $\mu(q_1k)\mu(q_2k)=j$, $(q_2,h)=t$ als endliche Folge $\alpha_1,...,\alpha_R$, so ist sehr einfach zu sehen, daß unter den Bezeichnungen von Lemma 2.14 $\delta\ge w_2^{-2}\ge(2s_2)^{-2}$ und $J\le 1+\frac{tw_1}{s_2}\le t\left(1+\frac{2s_1}{s_2}\right)$ gilt. Also liefert Lemma 2.14 für die zweite Summe auf der rechten Seite von (2.71) die Abschätzung

$$\sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j\\ (q_2,h)=t}}\left|\sum_{z<n\le z+M} a_n e\left(nh\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right)\right|^2 \le t\left(1+\frac{2s_1}{s_2}\right)\left(M+(2s_2)^2\right)(M+1). \tag{2.73}$$

Aus (2.69), (2.70), (2.71), (2.72) und (2.73) ergibt sich

$$\sum_{n\leq z}\left|F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)\right| \leq \tau(h)\left(4s_1s_2\left(1+\frac{2s_1}{s_2}\right)\left(M+(2s_2)^2\right)(M+1)\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

woraus unter Beachtung von $\tau(h) = O\left(h^{\epsilon}\right)$ die Behauptung folgt. □

2.10 Schlußbemerkung

Es läge nahe zu versuchen, die Abschätzung der Exponentialsumme $\sum\limits_{z<n\leq z+M}|F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)|$ in Abschnitt 2.9 so weit zu verbessern, daß man Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge erhält. Empirische Untersuchungen lassen aber vermuten, daß die wahre Größenordnung dieses Ausdrucks mindestens bei $O\left((M+1)(s_1+s_2)\tau(h)\right)$ liegt, selbst wenn man M „groß" gegenüber s_1+s_2 wählt, und dies genügt nicht für die Gewinnung von Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge. Selbst wenn der o.g. O-Term tatsächlich die wahre Grössenordnung von $\sum\limits_{z<n\leq z+M}|F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)|$ angibt, so könnte mit der Methode aus den Abschnitten 2.8, 2.9 lediglich bewiesen werden, daß die Abschätzung

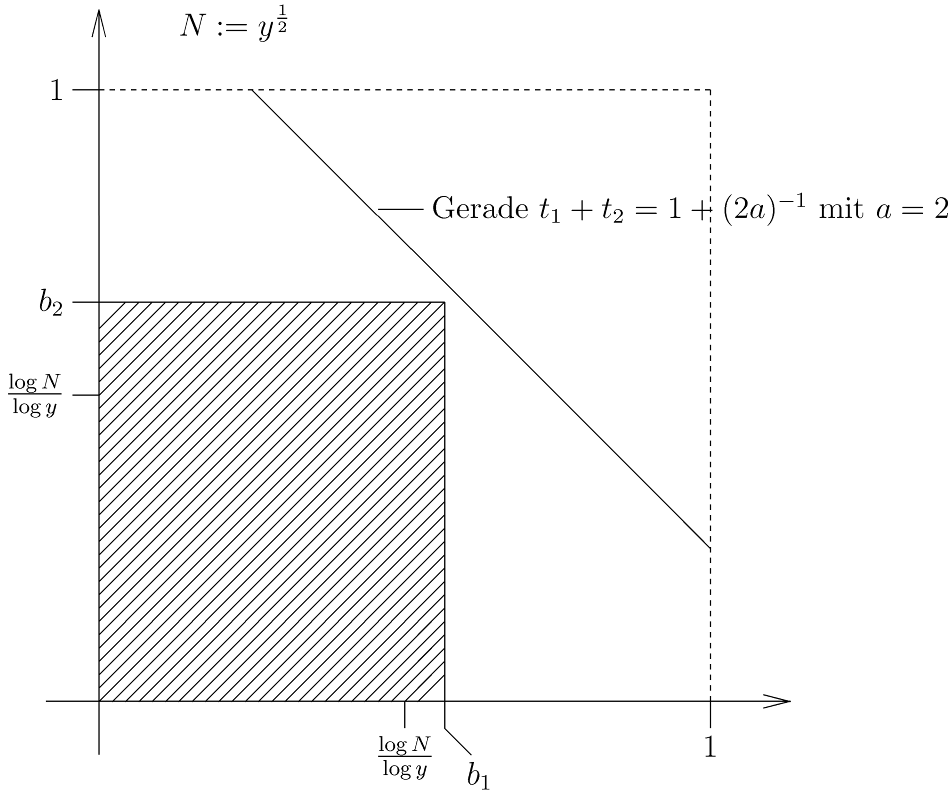
$$\sum_{x<d\leq x+N}\left|T_{2d}(y,0,y^{b_1},0,y^{b_2})-\sigma(2d)(y-2d)\right| = O\left(Nye^{-c_1\sqrt{\log y}}\right) ,$$

aus Satz 2.3 bei geeigneter Wahl von x, N, y für beliebige, aber feste $b_1, b_2 < 1$ gilt.

Damit scheint die Methode aus den Abschnitten 2.8, 2.9 nicht geeignet zu sein für eine Herleitung von Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge. Dies liegt anscheinend daran, daß die speziellen Eigenschaften der in der Definition von $F^j(nkh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)$ enthaltenen möbiusschen μ-Funktion, etwa ihr Verhalten in primen Restklassen, hierbei verlorengehen.

Zum Abschluß wird Satz 2.3 graphisch veranschaulicht in der folgenden

Abbildung 2:



Durch das schraffierte Rechteck ist ein Term der Form $\sum\limits_{x<d\leq x+N} \left| T_{2d}(y, 0, y^{b_1}, 0, y^{b_2}) - \sigma(2d)(y - 2d) \right|$ gekennzeichnet, der sich wegen Satz 2.3 abschätzen läßt durch $O\left(Nye^{-c_1\sqrt{\log y}}\right)$.