Über Zugänge von Hua und Pan Chengdong zum Primzahlzwillingsproblem

von

Stephan Baier

Dissertation am Fachbereich Mathematik/Informatik der FU Berlin,
eingereicht am 5.5.2000

Gutachter: Prof. Dr. Volker Schulze (Freie Universität Berlin),
Prof. Dr. Dieter Wolke (Albert-Ludwigs-Universität Freiburg),
Prof. Dr. Wolfgang Schwarz (Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt/Main)

Die Disputation wurde am 30.11.00 abgehalten.

Danksagung

Der Autor der vorliegenden Arbeit denkt in Dankbarkeit an Herrn Prof. Dr. Volker Schulze (FU Berlin) und Herrn Prof. Dr. Dieter Wolke (Albert-Ludwigs-Universität Freiburg), die durch ihre hervorragende Betreuung ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.

Standardnotationen

Es werden durchgehend die in der analytischen Zahlentheorie üblichen Notationen benutzt. Darüber hinaus gelten folgende Konventionen:

Die Menge $I\!N$ der natürlichen Zahlen enthält nicht die 0, es wird $I\!N_0 = I\!N \cup \{0\}$ geschrieben.
Die Menge der Primzahlen wird mit $I\!P$ abgekürzt.
Das Symbol p ist ausschließlich für Primzahlen reserviert.
Mit dem Symbol ϵ ist stets eine beliebig wählbare, aber feste positive Zahl gemeint.
Für eine natürlichen Zahl n gibt $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler, $\omega(n)$ die der verschiedenen Primfaktoren und $\Omega(n)$ die aller Primfaktoren von n an.
Für eine reelle Zahl r bezeichnet $||r||$ den Abstand von r zur nächsten ganzen Zahl und $\{r\}$ den Abstand von r zur nächstkleineren ganzen Zahl, also
$||r|| := \min\{r - [r],\ [r] + 1 - r\}$ und $\{r\} := r - [r]$.

Einleitung

Es sei d eine fest vorgegebene natürliche Zahl, und $\pi_{2d}(x)$ bezeichne für $x > 2d$ die Anzahl aller Paare („Zwillinge") $(p, p+2d)$ von Primzahlen mit $p + 2d \leq x$, also

$$\pi_{2d}(x) := \sum_{\substack{2d < p \leq x, \\ p-2d \in I\!P}} 1 \; .$$

Hardy und Littlewood erhielten 1923 mit ihrer Kreismethode (s. [HLi]) die Vermutung

$$\pi_{2d}(x) \sim \sigma(2d) \cdot \frac{x}{\log^2 x} \tag{1}$$

für $x \to \infty$, wobei die Zwillingskonstante $\sigma(2d)$ definiert ist durch

$$\sigma(2d) := 2 \cdot \prod_{\substack{p \,|\, d, \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \; . \tag{2}$$

Schon um 1920 zeigte Brun mit der von ihm entwickelten Siebmethode (s. [Sch]) die obere Abschätzung

$$\pi_{2d}(x) \leq c \cdot \frac{x}{\log^2 x}$$

für genügend großes x, wobei c eine von d abhängige Konstante sei. Eine nichttriviale untere Abschätzung für $\pi_{2d}(x)$ ist bisher nicht bekannt. Insbesondere weiß man nicht, ob für vorgegebenes d unendlich viele Paare $(p, p+2d)$ von Primzahlen existieren. Das bisher beste Ergebnis in dieser Richtung erzielte Chen 1973 (s. [Che]). Er bewies mit Hilfe einer Verbesserung der Selbergschen Siebmethode, daß es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die $p + 2d$ höchstens zwei nicht notwendig verschiedene Primfaktoren hat.

In der vorliegenden Arbeit sollen natürliche Zugänge zum Zwillingsproblem von Hua und Pan Chengdong weiterverfolgt werden, die sich grundsätzlich von der klassischen Kreismethode und von Siebmethoden unterscheiden. Hua und Pan Chengdong formulierten ihre Ansätze zwar für das Goldbachproblem (s. [Hua], [Pan]), aber eine Übertragung auf das Zwillingsproblem ist nicht schwer und erfolgt in den Abschnitten 1.2 und 3.1 dieser Arbeit. Grob gesprochen bestehen die Ansätze jeweils darin, daß $\pi_{2d}(x)$ als eine geeignete Summe dargestellt wird, von der dann auf naheliegende Weise ein Hauptterm abgespalten wird. Für diesen wird gezeigt, daß er die von Hardy und Littlewood für $\pi_{2d}(x)$ vermutete Größenordnung besitzt.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird das nach Pan Chengdong erzielte Resultat dahingehend verbessert, daß von dem übriggebliebenen Restterm weitere Teilterme abgespalten werden, für die bewiesen wird, daß sie von kleinerer Größenordnung als der Hauptterm sind.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit einer Herleitung von Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge auf Grundlage des Ansatzes von Pan Chengdong. Es wird also gezeigt, daß die für $\pi_{2d}(x)$ vermutete Asymptotik für ,,fast alle" d in einem bestimmten, von x abhängigen Bereich zutrifft.

Eine Verallgemeinerung des Ansatzes von Hua für Paare natürlicher Zahlen $(a, a + 2d)$ mit beschränkten Anzahlen von Primfaktoren erfolgt im dritten Kapitel. Hierbei werden Vermutungen für die Anzahl solcher Paare $(a, a + 2d)$ mit $a + 2d \leq x$ hergeleitet.

Inhaltsverzeichnis

Anhang

Zusammenfassung der Ergebnisse

Hardy und Littlewood gelangten mit ihrer Kreismethode für festes $d \in IN$ und $x \to \infty$ zu der bis heute unbewiesenen Vermutung

$$\sum_{2d<n\leq x} \Lambda(n)\Lambda(n-2d) \;\sim\; \sigma(2d)(x-2d) \;,$$

wobei $\sigma(2d)$ eine gewisse von d abhängige Konstante ist.
Nach Pan Chengdong (1982) gilt für beliebiges $A > 0$ die Abschätzung

$$\sum_{2d<n\leq x} \Lambda(n)\Lambda(n-2d) = \sigma(2d)(x-2d) + L_{2d}(x) + O\left(x(\log)^{-A}\right) \;,$$

wobei

$$L_{2d}(x) := \sum_{n\leq x-2d} \left(\sum_{\substack{q_1 \mid n, \\ Q<q_1\leq x}} \mu(q_1)\log q_1 \sum_{\substack{q_2 \mid (n+2d), \\ Q<q_2\leq x}} \mu(q_2)\log q_2 \right)$$

sei mit $Q := x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-(A+7)}$. Die Vermutung von Hardy und Littlewood ist also äquivalent mit $L_{2d}(x) = o(x)$.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird das nach Pan Chengdong erzielte Resultat dahingehend verbessert, daß vom oben definierten Term $L_{2d}(x)$ noch nichttriviale Teilterme abgespalten werden, für die gezeigt wird, daß sie von der Größenordnung $o(x)$ sind.
Das zweite Kapitel befaßt sich mit einer Herleitung von Fast-Alle-Aussagen für Primzahlzwillinge auf Grundlage des Ansatzes von Pan Chengdong. Es wird ohne Benutzung der Kreismethode gezeigt, daß die von Hardy und Littlewood für $\psi_2(y, 2d)$ erwartete Asymptotik für fast alle $d \leq x$ zutrifft, wenn $(2+\epsilon_0)x < y \leq x\log^B x$ gewählt wird. Hierbei ist B eine beliebige positive reelle Konstante.
Eine Verallgemeinerung des Zugangs von Hua zum Primzahlzwillingsproblem für Paare natürlicher Zahlen $(a, a+2d)$ mit beschränkten Anzahlen von Primfaktoren erfolgt im dritten Kapitel. Hierbei werden Vermutungen für die Anzahl solcher Paare $(a, a+2d)$ mit $a + 2d \leq x$ hergeleitet.

Lebenslauf des Autors der vorliegenden Arbeit

Ich, Stephan Baier, wurde am 6.2.1973 in Rostock geboren. Im September 1979 wurde ich an der Max-Kreuziger-Oberschule in Berlin-Friedrichshain eingeschult. Zur 21. Oberschule in Berlin-Lichtenberg wechselte ich im Dezember 1981. Weitere Schulwechsel erfolgten im September 1983 zur Willi-Seng-Oberschule in Zepernick (Land Brandenburg) und im September 1987 zur Spezialschule mathematisch-technisch-naturwissenschaftlicher Richtung ,,Carl Friedrich Gauß" in Frankfurt/Oder. An der letztgenannten Schule legte ich im Juni 1991 mein Abitur ab. Im Oktober 1991 nahm ich ein Mathematikstudium an der FU Berlin auf, das ich vom Juli 1992 bis Oktober 1993 zur Ableistung des Zivildienstes unterbrechen mußte. Ab Oktober 1993 setzte ich das Mathematikstudium an der FU Berlin fort. Als Tutor im Fachbereich Mathematik/Informatik der selben Universität wurde ich im Oktober 1996 tätig. Am 28.10.97 legte ich die Diplomprüfung im Fach Mathematik an der FU Berlin ab. Meine bis jetzt ausgeübte Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Mathematik/Informatik der FU Berlin mit dem Schwerpunkt Algebra/Zahlentheorie nahm ich am 6.11.97 auf.