

**ZUR STUNDENPLANSETZUNG AN
ALLGEMEINBILDENDEN SCHULEN**

**Neue Möglichkeiten der Gemischt-ganzzahligen
Programmierung**

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
Wirtschaftswissenschaft des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft der Freien
Universität Berlin

vorgelegt von

Diplom-Kaufmann Heinrich Hilbert-Siekmann

aus

Kiel

Berlin, 2001

Dekan: Univ.-Prof. Dr. Alfred Kuß

Erstgutachter: Univ.-Prof. Dr. Christoph Haehling von Lanzenauer

Zweitgutachter: Univ.-Prof. Dr. Uwe H. Suhl

Tag der Disputation: 28. Mai 2001

Zusammenfassung

Diese Arbeit untersucht das Problem der Stundenplansetzung an allgemeinbildenden Schulen, definiert als Zuordnungsproblem von Unterrichtseinheiten (Kombinationen von Lehrern, Klassen, Fächern und Raumgruppen) zu Perioden und Räumen. Dabei werden zunächst, gestützt auf eine empirische Untersuchung, Restriktionen und Zielsetzungen des Problems identifiziert und eine Abgrenzung von verwandten Stundenplanerstellungproblemen vorgenommen. Anschließend werden bisherige Lösungsansätze, die sowohl der Praxis als auch der Wissenschaft im Bereich der Stundenplanung entstammen, hinsichtlich ihres Potenzials für die Lösung des o.g. speziellen Setzungsproblems untersucht. Darüber hinaus werden drei neue Ansätze auf Basis der Gemischt-ganzzahligen Programmierung vorgestellt, die den Kern der Arbeit bilden. Von diesen beinhaltet der erste, ToMIP, die Abbildung des Problems in Form eines gemischt-ganzzahligen Totalmodells. Der zweite Ansatz, HiMIP, bedient sich einer Aufteilung des Gesamtproblems in ein Wochen- und mehrere Tagesprobleme. Sie werden jeweils in einem eigenen gemischt-ganzzahligen Modell dargestellt, wobei die Lösung des Wochenmodells die Basis für die einzelnen Tagesmodelle bildet. Im dritten Ansatz, SeMIP, wird die Menge aller Unterrichtseinheiten nach Prioritätskriterien und nach Schulklassen in mehrere Teilmengen aufgeteilt und für jede dieser Teilmengen ein eigenes gemischt-ganzzahliges Teilmodell formuliert. Die Lösung der Teilmodelle erfolgt sequenziell, wobei die Ergebnisse der bereits gelösten Modelle als Randbedingungen in das jeweils nachfolgend zu lösende Modell eingehen. Die Ansätze HiMIP und SeMIP beinhalten zufallsgesteuerte Komponenten, welche bei wiederholtem Durchlauf unterschiedliche Lösungspfade garantieren. Im Anschluss an ihre Formulierung werden für die drei Ansätze Testergebnisse präsentiert, die mit Hilfe von Praxisdaten erzielt wurden. Sie zeigen, dass ToMIP und HiMIP kein, SeMIP hingegen ein signifikantes Potenzial für die adäquate Setzung von Stundenplänen allgemeinbildender Schulen beinhaltet.

Abstract

This thesis examines the problem of setting timetables at primary and secondary schools, which is defined as the problem of assigning teaching units (combinations of teachers, classes, subjects and room groups) to time slots and rooms. The analysis starts with an identification, based on an empirical survey, of constraints and objectives relevant to this problem also pointing out differences from related timetabling problems. The thesis continues with an analysis of solution approaches which have formerly been developed by practitioners as well as scientists in the timetabling field in order to identify their potential to adequately solve the special problem regarded here. Moreover, three new approaches based on Mixed Integer Programming are presented forming the main focus of the thesis. The first one, ToMIP, transforms the problem into a single mixed integer model. The second approach, HiMIP, divides the overall problem into one weekly and several daily problems. Each of these problems is depicted in a separate mixed integer model with the solution of the weekly model rendering the basic data for each daily model. The third approach, SeMIP, divides the set of all teaching units into a number of subsets using calculated priorities as well as school classes as separation criteria. Each of these subsets is represented by its own mixed integer sub-model. The sub-models are solved sequentially with each model containing the results of its predecessors as side constraints. Approaches HiMIP and SeMIP also contain randomized components in order to guarantee varying solution paths when the solution process is iterated. Having formulated the three new solution approaches test results based on real life data are presented. They show that ToMIP and HiMIP have no potential, whereas SeMIP has a significant potential of properly setting primary and secondary school timetables.

Danksagung

Diese Studie wäre in der vorliegenden Form ohne die tatkräftige Unterstützung zahlreicher Menschen undenkbar gewesen. Den Berliner Stundenplanerinnen und Stundenplanern, die sich an meiner schriftlichen Befragung zur Stundenplanerstellung im Winter 1997/98 beteiligt und dadurch das empirische Fundament meiner Arbeit gelegt haben, möchte ich an dieser Stelle herzlich für ihren wichtigen Beitrag danken.

Einen persönlichen und herzlichen Dank möchte ich denjenigen Schulleitern, stellvertretenden Schulleitern und Lehrern aussprechen, die sich durch ihre Bereitschaft zu Interviews, aber auch durch das Überlassen von Testdaten und die Beurteilung der mit Hilfe meines Ansatzes erzeugten Stundenpläne besonders für den Erfolg dieser Studie engagiert haben: Herrn Leimbach, Herrn Wandelt, Herrn Jacobs, Herrn Battenberg, Frau Schmidt-Supplie, Frau Noortwyck, Herrn Hildmann, Herrn Sack, Frau Kolodziej, Frau König, Frau Möckel, Herrn Winkler, Herrn Freyberg, Frau Petri, Frau Nierich, Frau Nöthe, Herrn Sander, Herrn Zippan, Herrn Flemming, Herrn Kluge, Herrn Müller und Herrn Baumgarten.

Danken möchte ich auch Frau Pape und Herrn Kuschela vom Landesschulamt Berlin und Herrn Briese von der Berliner Senatsverwaltung für Jugend, Schule und Sport für ihre Unterstützung der schriftlichen Befragung und der Kontaktaufnahme mit den Schulen.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem akademischen Lehrer und Betreuer dieser Studie, Herrn Univ.-Prof. Dr. Christoph Haehling von Lanzener, der über Jahre hinweg nicht müde wurde, durch kritisches Hinterfragen jedes meiner Schritte, vor allem aber durch seine Ideen und durch seinen großen Erfahrungsschatz meiner Arbeit wichtige Impulse zu geben. Ebenfalls einen hohen Anteil am Erfolg dieser Studie hat mein langjähriger akademischer Lehrer, Herr Univ.-Prof. Dr. Uwe H. Suhl, der bereits in frühen Studienjahren meine Begeisterung für die Gemischt-ganzzahlige Programmierung förderte und mir auch bei Konzeption und Ausführung dieser Studie stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Deshalb und für die freundliche Überlassung einer Forschungslizenz der Optimierungssoftware MOPS möchte ich ihm an dieser Stelle einen großen Dank aussprechen.

Mein größter Dank aber gebührt meiner Frau, Tanja. Sie hat mich gestützt und motiviert und war mir stets eine kompetente Gesprächspartnerin, der ich viele wertvolle Anregungen zu verdanken habe.

Berlin, im Mai 2001

Heinrich Hilbert-Siekman

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
2	Problem der Stundenplansetzung an allgemeinbildenden Schulen	14
2.1	Einordnung und Abgrenzung	14
2.1.1	Generelles Problem der Stundenplanerstellung	14
2.1.2	Stundenplanerstellung an allgemeinbildenden Schulen	16
2.1.2.1	Charakteristika allgemeinbildender Schulen	16
2.1.2.2	Gesamtproblem der Stundenplanerstellung	18
2.1.2.3	Teilproblem 1: Erstellung einer Unterrichtsverteilung	21
2.1.2.4	Teilproblem 2: Setzung	24
2.2	Restriktionen und Zielsetzungen	25
2.2.1	Restriktionen	26
2.2.2	Zielsetzungen	29
2.3	Komplexität und Lösbarkeit	35
2.4	Kriterien für die Beurteilung von Lösungsansätzen	40
2.5	Verwandtschaft zu anderen Stundenplanstellungsproblemen	43
2.5.1	Veranstaltungspläne für Universitäten	43
2.5.2	Examenspläne	46
2.5.3	Vergleich mit der Stundenplansetzung an Schulen	48
2.6	Zusammenfassung	50
3	Bisherige Lösungsansätze	52
3.1	Lösung in der schulischen Praxis Berlins	52
3.1.1	Planungsmethoden	52
3.1.1.1	Handsetzung mit Hilfe von Steck- und Magnetafeln	53
3.1.1.2	Setzung mit Hilfe von PC-Programmen	56
3.1.2	Arbeitsaufwand	59
3.1.3	Beurteilung	61
3.2	Lösungsansätze der Wissenschaft	63
3.2.1	Kategorisierung	63
3.2.1.1	Modelltypologie	63
3.2.1.1.1	Logische Modelle	64
3.2.1.1.2	Graphische Modelle	65
3.2.1.1.3	Mathematische Modelle	67
3.2.1.1.4	Naturwissenschaftliche Modelle	69
3.2.1.2	Verfahrenstypologie	69
3.2.1.2.1	Konstruktive Verfahren	72
3.2.1.2.2	Iterative Verfahren	76
3.2.1.3	Übersicht	79
3.2.2	Ansätze auf Basis exakter konstruktiver Verfahrenstypen	82
3.2.2.1	Exakte Graphenfärbung	82
3.2.2.2	Lineare, Ganzzahlige und Gemischt-ganzzahlige Programmierung	83
3.2.2.3	Goal Programming	90
3.2.2.4	Lagrange-Relaxation	91
3.2.2.5	Nicht-lineare Optimierung	93
3.2.2.6	Implizite Enumeration mit Logischer Programmierung	94
3.2.2.7	Beurteilung	97

3.2.3	Ansätze auf Basis heuristischer konstruktiver Verfahrenstypen	100
3.2.3.1	Engpassorientierte Zuordnung auf Basis einfacher logischer Modelle	101
3.2.3.2	Engpassorientierte Zuordnung auf Basis graphischer Modelle	104
3.2.3.3	Heuristische Ansätze der Logischen Programmierung	106
3.2.3.4	Andere heuristische konstruktive Ansätze	108
3.2.3.5	Beurteilung	109
3.2.4	Ansätze auf Basis heuristischer iterativer Verfahrenstypen	111
3.2.4.1	Hillclimbing	111
3.2.4.2	Tabu Search	114
3.2.4.3	Simulated Annealing	117
3.2.4.4	Genetische Algorithmen	120
3.2.4.5	Neuronale Netze	125
3.2.4.6	Beurteilung	127
3.3	Zusammenfassung und kritische Würdigung	130
4	Neue Lösungsansätze auf Basis Gemischt-ganzzahliger Programmierung	134
4.1	Einführung	134
4.1.1	Motivation	134
4.1.2	Dekompositions- und Relaxationsstrategien	136
4.1.3	Trennung von Zeit- und Raumzuordnung	138
4.2	Ansatz 1: ToMIP - Einstufige Setzung im Totalmodell	140
4.2.1	Vorgehensweise	140
4.2.2	Modellformulierung	141
4.2.2.1	Vorbemerkungen	141
4.2.2.2	Mengen und Parameter	142
4.2.2.3	Variablen	145
4.2.2.4	Abbildung der Problemrestriktionen	146
4.2.2.5	Abbildung der Zielsetzungen	152
4.2.2.6	Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Relaxationen	155
4.2.2.7	Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Kernzeiten	161
4.3	Ansatz 2: HiMIP - Hierarchische Setzung in einem Wochen- und mehreren Tagesmodellen	165
4.3.1	Vorgehensweise	165
4.3.2	Formulierung des Wochenmodells	167
4.3.2.1	Vorbemerkungen	167
4.3.2.2	Mengen und Parameter	168
4.3.2.3	Variablen	170
4.3.2.4	Abbildung der Problemrestriktionen	170
4.3.2.5	Abbildung der Zielsetzungen	173
4.3.2.6	Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Relaxationen	175
4.3.3	Formulierung der Tagesmodelle	179
4.3.3.1	Vorbemerkungen	179
4.3.3.2	Mengen und Parameter	179
4.3.3.3	Variablen	181
4.3.3.4	Abbildung der Problemrestriktionen	182
4.3.3.5	Abbildung der Zielsetzungen	186
4.3.3.6	Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Relaxationen	188
4.3.3.7	Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Kernzeiten	192
4.4	Ansatz 3: SeMIP - Sequenzielle Setzung nach Klassen mit vorgeschalteter Prioritätsphase	195
4.4.1	Vorgehensweise	195
4.4.2	Modellformulierung	198
4.4.2.1	Vorbemerkungen	198
4.4.2.2	Modellreduktion durch Teilung der Unterrichtseinheitseinheitenmenge	198
4.4.2.3	Alternative Zielfunktion	199

5 Erprobung der neuen Lösungsansätze	202
5.1 Implementation eines prototypischen Softwaresystems	202
5.1.1 Mathematischer Kern: MOPS – Mathematical OPTimization System	203
5.1.2 Anwendungsprogramm „Stundenplanrechner“	207
5.1.3 Microsoft Excel97-Arbeitsmappe	209
5.2 Testfallkatalog	211
5.3 Testergebnisse	215
5.3.1 ToMIP	215
5.3.2 HiMIP	216
5.3.3 SeMIP	216
5.3.3.1 Vorbemerkungen	216
5.3.3.2 Frage 1: Beste erzielbare Ergebnisse	223
5.3.3.3 Frage 2: Effizienz- und Effektivitätssteigerung durch die Kernzeitvariante	228
5.3.3.4 Frage 3: Einfluss der für die Klassenphase gewählten Zielfunktion	230
5.3.3.5 Frage 4: Einfluss der Knotenwahlstrategie	232
5.3.3.6 Frage 5: Einfluss der Branching-Heuristik	235
5.3.3.7 Frage 6: Existenz einer befriedigenden globalen Parametereinstellung	237
5.4 Kritische Würdigung in Theorie und Praxis	239
6 Fazit	245
7 Verzeichnis der verwendeten Literatur	248
8 Anhang	260
8.1 Erläuterungen zur schriftlichen Befragung Berliner Stundenplaner vom Winter 1997/98	260
8.1.1 Teilnehmerkreis	260
8.1.2 Aussagekraft der Stichprobe	261
8.1.3 Wortlaut des Fragebogens	264
8.2 Modellstrukturen der neuen Lösungsansätze	271
8.2.1 ToMIP	271
8.2.2 HiMIP	279
8.2.3 SeMIP	289
8.3 Stundenplanbeispiele	297
8.3.1 Stundenplan für den Testfall R1.A	297
8.3.1.1 Klassenplan	297
8.3.1.2 Lehrerplan	298
8.3.1.3 Raumplan	300
8.3.2 Stundenplan für den Testfall G1.MS	302
8.3.2.1 Klassenplan	302
8.3.2.2 Lehrerplan	304
8.3.2.3 Raumplan	307
8.4 Fragebogen für die Beurteilung der SeMIP-Stundenpläne	309
8.5 Lebenslauf	311

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1: Haupttypen allgemeinbildender Schulen in Deutschland _____	17
Tabelle 2.2: Allgemeinbildende Schulen in Deutschland 1997/98 nach Schultypen _____	18
Tabelle 2.3: Dimensionen des generellen und des Stundenplanproblems an allgemeinbildenden Schulen _____	19
Tabelle 2.4: Fragebogen-Rücklauf der Umfrage vom Winter 1997/98 nach Schultypen _____	25
Tabelle 2.5: Restriktionstypen der Stundenplansetzung im Spiegelbild der Literatur _____	26
Tabelle 2.6: Restriktionstypen und -untertypen, nach deren Relevanz in der Schulumfrage vom Winter 1997/98 gefragt wurde _____	27
Tabelle 2.7: Weitere Restriktionstypen der Stundenplansetzung lt. Umfrage vom Winter 1997/98 _____	29
Tabelle 2.8: Ziele der Stundenplansetzung im Spiegelbild der Literatur _____	30
Tabelle 2.9: Zusätzlich in die Befragung vom Winter 1997/98 aufgenommene Zielsetzungen _____	31
Tabelle 2.10: Weitere Ziele der Stundenplansetzung lt. Umfrage vom Winter 1997/98 _____	33
Tabelle 2.11: Kriterienkatalog für die Beurteilung von Lösungsansätzen _____	42
Tabelle 2.12: Setzungsprobleme im Vergleich _____	49
Tabelle 3.1: Für die Setzung verwendete PC-Programme _____	57
Tabelle 3.2: Kritik der für die Setzung verwendeten PC-Programme _____	58
Tabelle 3.3: Beurteilung des Lösungsansatzes Handsetzung _____	62
Tabelle 3.4: Verfahrenstypen für die automatisierte Lösung von Setzungsproblemen _____	80
Tabelle 3.5: Charakterisierung des exakten konstruktiven Verfahrenstyps Branch-and-Bound für die (Gemischt-)Ganzzahlige Programmierung _____	89
Tabelle 3.6: Charakterisierung des exakten konstruktiven Verfahrenstyps Implizite Enumeration mit Logischer Programmierung _____	94
Tabelle 3.7: Beurteilung exakter konstruktiver Lösungsansätze _____	98
Tabelle 3.8: Beurteilung heuristischer konstruktiver Lösungsansätze _____	110
Tabelle 3.9: Charakterisierung des iterativen Verfahrenstyps Hillclimbing _____	111
Tabelle 3.10: Charakterisierung des iterativen Verfahrenstyps Tabu Search _____	114
Tabelle 3.11: Charakterisierung des iterativen Verfahrenstyps Simulated Annealing _____	117
Tabelle 3.12: Charakterisierung des iterativen Verfahrenstyps Genetischer Algorithmus _____	120
Tabelle 3.13: Charakterisierung des iterativen Verfahrenstyps Neuronales Netzwerk _____	126
Tabelle 3.14: Beurteilung heuristischer iterativer Lösungsansätze _____	128
Tabelle 3.15: Einschätzung von Verfahrenstypen hinsichtlich ihres Erfolgspotenzials für die Stundenplansetzung an allgemeinbildenden Schulen _____	130
Tabelle 5.1: MOPS-Parameter für Knotenwahl und Branching-Heuristik innerhalb des Branch-and- Bound-Prozesses _____	204
Tabelle 5.2: Testfallkatalog _____	212
Tabelle 5.3: ToMIP-Testergebnisse für die LP-Relaxationen der Startknoten _____	216

Tabelle 5.4: Modell- und Verfahrensparameter für die SeMIP-Testserie	220
Tabelle 5.5: Qualitätsmerkmale für die Beurteilung der durch SeMIP erzeugten Stundenpläne	223
Tabelle 5.6: SeMIP-Testergebnisse bei jeweils erfolgreichster Parametereinstellung	224
Tabelle 5.7: Größen der Teilmodelle für die in Tabelle 5.6 dokumentierten Testläufe	227
Tabelle 5.8: SeMIP-Testergebnisse für Modellvarianten ohne und mit Kernzeit	229
Tabelle 5.9: SeMIP-Testergebnisse mit unterschiedlichen Zielfunktionen für die Klassenphase	231
Tabelle 5.10: SeMIP-Testergebnisse – Knotenwahlstrategie für Testfall R1.A	233
Tabelle 5.11: SeMIP-Testergebnisse – Knotenwahlstrategie für Testfall G1.MS	234
Tabelle 5.12: SeMIP-Testergebnisse mit unterschiedlichen Branching-Heuristiken	236
Tabelle 5.13: SeMIP-Testergebnisse mit globaler Parametereinstellung	238
Tabelle 5.14: Wichtigkeitseinstufung verschiedener Zielsetzungen und Bewertung verschickter Stundenpläne durch die Praktiker	240
Tabelle 5.15: Weitere aus Sicht der Praktiker wichtige Zielsetzungen und ihre Berücksichtigung durch die verschickten Stundenpläne	242
Tabelle 8.1: Zusammensetzung der Grundgesamtheit	260
Tabelle 8.2: Zusammensetzung der Stichprobe und Rücklauf	261
Tabelle 8.3: Erforderlicher Stichprobenumfang n für verschiedene Abweichungen d_p und Wahrscheinlichkeiten $1-\alpha$	262
Tabelle 8.4: Überblick der ToMIP-Modellstruktur	271
Tabelle 8.5: Überblick der HiMIP-Modellstruktur – WOCHENMODELL	279
Tabelle 8.6: Überblick der HiMIP-Modellstruktur – TAGESMODELL	283
Tabelle 8.7: Überblick der SeMIP-Modellstruktur	289

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Die fünf Dimensionen der Stundenplanerstellung _____	15
Abbildung 2.2: Kategorisierung von Scheduling-Problemen nach Wren [1996]. _____	16
Abbildung 2.3: Unterrichtsverteilung und Setzung - simultaner vs. sukzessiver Planungsansatz _____	21
Abbildung 2.4: Setzung einer Unterrichtseinheit (Beispiel) _____	24
Abbildung 2.5: Relevanz ausgewählter Restriktionstypen für die Stundenplansetzung _____	28
Abbildung 2.6: Zielrelevanz für die Stundenplansetzung _____	32
Abbildung 3.1: Verwendete Hilfsmittel für die Setzung _____	53
Abbildung 3.2: Schema einer Magnettafel _____	54
Abbildung 3.3: Typische Vorgehensweise der Handsetzung _____	55
Abbildung 3.4: Benotung für die Setzung verwendeter PC-Programme _____	57
Abbildung 3.5: Arbeitsaufwand für die Setzung eines neuen Stundenplans _____	59
Abbildung 3.6: Teamarbeit in der Planerstellung _____	60
Abbildung 3.7: Durchschnittlicher Zeitaufwand in Stunden für die Setzung mit und ohne PC _____	60
Abbildung 3.8: Modellierung der Stundenplansetzung an Schulen als Knotenfärbungsproblem eines Graphen _____	66
Abbildung 3.9: Beispiel eines dreistufigen Entscheidungsbaumes _____	70
Abbildung 3.10: Ablaufschema konstruktiver Lösungsverfahren _____	74
Abbildung 3.11: Ablaufschema iterativer Lösungsverfahren _____	78
Abbildung 3.12: Historische Entwicklung der Verfahrenstypen für die automatisierte Lösung von Setzungsproblemen _____	81
Abbildung 3.13: Netzwerk für die Setzung einer Periode (Darstellung in Anlehnung an deWerra [1971]) _____	105
Abbildung 3.14: Beispiele für Crossover und Mutation _____	121
Abbildung 4.1: Lösungsprozess auf Basis des ToMIP-Modells _____	140
Abbildung 4.2: Lösungsprozess auf Basis des HiMIP-Ansatzes _____	166
Abbildung 4.3: Ableitung einer SeMIP-Modellsequenz (Beispiel für eine dreizügige Oberschule mit Jahrgangsstufen 7 bis 10) _____	196
Abbildung 4.4: Lösungsprozess auf Basis des SeMIP-Ansatzes _____	197
Abbildung 5.1: Komponenten des Softwaresystems für die Erprobung der Lösungsansätze ToMIP, HiMIP und SeMIP _____	203
Abbildung 5.2: Laufende MOPS-Optimierung in der Windows95®-DOS-Box _____	207
Abbildung 5.3: Bildschirmmaske für die Bearbeitung von Lehrerdaten _____	208
Abbildung 5.4: Bildschirmmaske für die Bearbeitung der Unterrichtseinheiten _____	208
Abbildung 5.5: Bildschirmmaske für die Ansicht eines erzeugten Stundenplans _____	209