

Masterarbeit

im Masterstudiengang für das Lehramt an integrierten Sekundarschulen und Gymnasien
im Fachbereich Didaktik der Mathematik
an der Freien Universität Berlin

Wer nicht (mit-) diskutiert, bleibt dumm.

**Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben und ihre Förderung des
Begriffsverständnisses im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I**

Erstgutachter: Herr Dr. Benedikt Weygandt

Zweitgutachterin: Frau Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal

Vorgelegt von Marielena Menzel

Berlin, den 26.01.2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	4
2 Peer Instruction	6
2.1 Motivation oder Die Ebenen des Verständnisses im Mathematiklernen	6
2.2 Peer Instruction als Methode	8
2.3 Rahmenbedingungen und Voraussetzungen	10
2.4 Forschungsstand	13
3 Peer Instruction und Schule	18
3.1 Anforderungen in der Schule	19
3.2 Eignung von Peer Instruction im schulischen Kontext	21
3.2.1 Prozessbezogene Kompetenzen	22
3.2.2 Begriffslernen – Weil Definitionen nicht ausreichen	25
3.2.3 Grundvorstellungen und eine Methodische Perspektive auf Peer Instruction	28
4 Die Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben	30
4.1 Kriterien	31
4.2 Entwurfsmuster: Fragen und Antworten	34
4.3 Ein Leitfaden zur Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben	38
5 Diskussion und Reflexion	40
5.1 Methode	40
5.2 Durchführung	42
5.3 Peer Instruction-Aufgaben	45
6 Fazit und Ausblick	54
Anhang	57
Literaturverzeichnis	57
Handreichung für Lehrkräfte: How to „Peer Instruction“	59
Eine Aufstellung möglicher Peer Instruction-Aufgaben	60

1 Einleitung

Eine Aufgabe der Mathematikdidaktik besteht darin, fortlaufend Methoden für eine Verbesserung des Lernens zu entwickeln und diese zu überprüfen.¹ Im Fokus dieser Arbeit steht eine vergleichsweise junge Methode, welche bisher Anwendung in Modulen der Hochschullehre fand: Peer Instruction. Entwickelt und erstmals erprobt von Eric Mazur im Jahr 1991² im Bereich der universitären Lehre der Physik zielt Peer Instruction auf die Aktivierung von Studierenden in den Lehrveranstaltungen und ein nachhaltiges Verständnis der behandelten Inhalte ab. Der Hauptbestandteil dieser Methode besteht in der gegenseitigen Erklärung und begründeten Argumentation eines fachspezifischen Begriffs von Lernenden für- und miteinander. Diese werden durch spezielle Fragen mit besonderen Anforderungen angeregt, welche im Laufe der vorliegenden Arbeit vorgestellt und erörtert werden. Ein tiefgreifendes Verständnis der angesprochenen Begriffe und Aussagen ist das Ziel dieser Methode. Die Erklärung eines Kernbegriffes scheint außerdem von Lernenden besser verstanden zu werden, wenn sie durch ihre „Peers“ erfolgt³ und fördert zugleich die Verbalisierung fachspezifischer Phänomene. Mazur stellt die Vermutung auf, dass Lernende, die ein Prinzip erst kürzlich verstanden haben, „sich noch besser daran erinnern können, welche Schwierigkeiten sie selbst hatten, den Sachverhalt zu verstehen. Folglich wissen sie genau, was in der Erklärung zur Lösung besonders hervorgehoben werden muss.“⁴ Dozierende, welche die Inhalte bereits länger unterrichten, beschäftigen sich in der Regel tiefgreifender mit den Sachverhalten und erkennen daher immer weniger die Schwierigkeiten, welche das Thema zu Beginn aufwirft. Diese werden somit unter Umständen nicht gezielt adressiert.⁵ Peer Instruction macht sich die Nähe der Lernenden zu Hürden zu Beginn einer Lerneinheit zunutze, indem Diskussionen und Erklärungsansätze innerhalb der Lerngruppe anregt und Schwierigkeiten offenbart werden, auch nachdem das Thema bereits als Lerngegenstand eingeführt wurde. Thomas Bauer hat sich dieser Methode bedient und etwas verändert in seinem Feld der Hochschulmathematiklehre eingesetzt. Die konkreten Anpassungen werden im Verlauf der Arbeit vorgestellt. Mit der Methode Peer Instruction sah er drei zentrale Probleme gelöst:

- Wie lässt sich erreichen, dass Studierende in der Übung über zentrale Konzepte und Prinzipien eines Lerngegenstands nachdenken, sich ihrer Vorstellungen dazu bewusst werden und gegebenenfalls Fehlvorstellungen aufdecken?
- Wie lässt sich erreichen, dass Studierende über Verständnisprobleme sprechen?
- Wie lässt sich erreichen, dass Diskussionen in der Übung zu vertieftem Verständnis führen?⁶

¹ Vgl. Leuders. Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch. 2011. S. 12.

² Vgl. Mazur. Interaktive Lehre. 2017. S. 15.

³ Vgl. Ebd. S. 14.

⁴ Ebd. S. 14.

⁵ Vgl. Ebd. S. 14.

⁶ Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 3.

Peer Instruction wird von Bauer daher in den Tutorien platziert, um die Gefahr abzuwenden, dass die Lernenden dort nicht in eine Diskussion kommen, keine Fragen stellen und weder Probleme ansprechen noch klären können – sich also passiv in eine weitere Vorlesungssituation begeben.⁷ Lernen in der Mathematik kann nicht nur durch passives Zuhören im Vorlesungssaal geschehen, sondern wird erst durch eigenständige Bearbeitung der Inhalte aktiviert.⁸ Diese Selbsttätigkeit wird trotz der Betonung ihrer Wichtigkeit durch Dozierende zumeist jedoch vernachlässigt. Stattdessen beschränkt sich das Lernen von Mathematik zu oft auf das Memorieren von Sätzen und Definitionen.⁹ Dies gilt nicht nur für das Lernen in der höheren Mathematik, sondern beginnt bereits in der Schule. In diesem Fall werden zwar eher Merksätze und Rechenalgorithmen („Kochrezepte“) auswendiggelernt, allerdings ändert dies nichts daran, dass der Schwerpunkt in diesem Fall nicht auf dem Begriffsverständnis liegt.

Bisher wurde die Methode Peer Instruction vornehmlich im Rahmen des universitären Lernens angewandt. Ein Konzept, durch welches Studierende aktiviert und zum (intensiven) Nachdenken angeregt werden, sollte auch in der Schule sinnvoll sein, da die Fachdidaktiken die Aktivierung der Schüler:innen für einen Schlüssel zum nachhaltigen Lernen befinden.¹⁰ In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, inwiefern diese spezielle Methode tatsächlich für den Mathematikunterricht in der Schule geeignet sei. Hierfür werden Kompetenzen und Lernziele der Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) und des Berliner Rahmenlehrplans einbezogen. Dabei liegt der Fokus auf der Anwendbarkeit und Qualifikation vom Einsatz der Peer Instruction in der Jahrgangsstufe 10 einer Integrierten Sekundarschule. Die 10. Klasse eignet sich besonders zur Untersuchung, da hier auf den Mittelstufenabschluss (MSA) als ein bundesweiter Abschlusstyp vorbereitet wird und mathematische Begriffe und deren Zusammenhänge durch das Spiralcurriculum bis zu einer gewissen Tiefe durchdrungen wurden.

Für die vorliegende Untersuchung der Eignung im schulischen Kontext, wird Peer Instruction zunächst detailliert vorgestellt, wobei die Relevanz der Methode, ihr konkreter Ablauf und die Ziele fokussiert werden. Es folgt darauf die Präsentation des Forschungsstandes und der verwendeten Literatur. In einem weiteren Schritt wird untersucht, ob Peer Instruction und die schulische Bildung miteinander harmonieren und eine eventuell notwendige Anpassung (von der Hochschule zur weiterführenden Schule) erörtert. Demzufolge werden unter Berücksichtigung der Literatur Kriterien für gute Peer Instruction-Aufgaben erarbeitet und ein Leitfaden zur eigenständigen Entwicklung von

⁷ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 3.

⁸ Vgl. Fonseca. Chi. Instruction based on self-explanation. 2011. S. 296 – 321.

⁹ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 1f.

¹⁰ Vgl. Kempen. A report from the field. 2021. S. 236.

geeigneten Aufgaben vorgestellt. Ferner werden im darauffolgenden Kapitel antizipierte Schwierigkeiten diskutiert. Einige Aufgaben aus der parallel zu dieser Arbeit entstandenen Aufgabensammlung werden anschließend anhand der erarbeiteten Kriterien reflektiert. Schließlich wird ein Ausblick auf weitere Schritte gegeben.

2 Peer Instruction

2.1 Motivation oder Die Ebenen des Verständnisses im Mathematiklernen

Lernen im Rahmen der Mathematik bedeutet insbesondere im Bereich der Hochschulbildung nicht nur eine vorgestellte Lösung nachvollziehen zu können, sondern darüber hinaus u.a. aktiv Fragen zu stellen, zugrundeliegende Begriffe zu verstehen und (Satz-)Aussagen begründet erklären zu können. Hierfür halten im Studium die Tutorien beziehungsweise Übungen her – wöchentliche Veranstaltungen, in denen der Fokus auf (tutor:innengeleiteter) aktivierter studentischer Arbeit liegt. Die Tutor:innen geben Gelegenheit zur Diskussion und gehen auf „[...] individuelle oder inter-individuelle Schwierigkeiten [ein]. Damit dies gelingt, ist es notwendig, Studierende so weit zu aktivieren, dass sie tatsächlich Fragen stellen und ihre Probleme zur Sprache bringen.“¹¹ Die Notwendigkeit der aktiven Teilnahme der Studierenden ist somit unerlässlich. Bauer differenziert den Begriff der Aktivierung: Von aktivem Tun über aktive Informationsverarbeitung zur fokussierten Informationsverarbeitung stellt die einzig lernförderliche – und demnach besonders erstrebenswerte Aktivierung – die letztgenannte Form dar. „Aktivität ist demnach nicht an und für sich bereits lernförderlich, sondern es kommt darauf an, in welchem Maße sie sich auf den konzeptuellen Kern des Lerngegenstands richtet.“¹² Außerdem wird auf den Unterschied der äußeren und der kognitiven Aktivierung verwiesen, wobei der Unterschied im Denken und Handeln der Lernenden liegt. Eine äußere Aktivierung bewirkt nicht zwingend konstruktives Arbeiten oder kritisches Denken, sondern beschränkt sich unter Umständen auf eine gedankenlose Ausführung. Das bedeutet kompakt, die Lernenden dürfen nicht nur zu jedweder Aktivität außer Zuhören gebracht werden, sondern sollten eine intensive Auseinandersetzung mit den Aussagen und Inhalten mathematischer Begriffe erfahren, um nachhaltiges Lernen zu ermöglichen.¹³

Nachfolgend wird beschrieben, warum außerdem bloßes Memorieren und algorithmisches Vorgehen bei bekannten Problemen nicht ausreicht, sondern ein tiefgreifendes Verständnis überhaupt von Bedeutung ist. Für die Erläuterung wird das von Bauer und Hefendehl-Hebeker an Mathematik angepasste, vierstufige Literacy-Modell angeführt. Die Stufen dieses aus den Sprachwissenschaften

¹¹ Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 2.

¹² Ebd. S. 3.

¹³ Vgl. Ebd. S. 3f.

stammenden Modells bauen aufeinander auf: Die Basis bildet die *Everyday Literacy*, worauf die *Applied Literacy* folgt. Stufe drei bildet die *Theoretical Literacy* und die höchste Stufe stellt die *Reflexive Literacy* dar. Die erste Stufe beinhaltet das Alltagswissen von Bruch- und Prozentrechnung über logisches Schließen sowie ein Verständnis für Wahrscheinlichkeiten.¹⁴ Die zweite Stufe der *Applied Literacy* ergänzt dies um Berechnungen und Anwendung gängiger Algorithmen also dem Lösungsverfahren mit Werkzeugen und entsprechendem Know-How. Bekannte Aufgabenformate, wie bspw. die Berechnung von Ableitungen bestimmter Funktionen oder das Lösen eines linearen Gleichungssystems können auf dieser Stufe bearbeitet werden. Die dritte Stufe der *Theoretical Literacy* stellt das disziplinäre Wissen dar, wozu u.a. die Abgrenzung mathematischer, ähnlicher Begriffe voneinander oder das Wissen um die Eigenschaften bestimmter Begriffe gehören. Um die Stufen zwei *Applied Literacy* und drei *Theoretical Literacy* besser zu trennen, lassen sich zwei Ebenen des Verständnisses nach Winter heranziehen: das *operativ-instrumentelle* Verständnis entspricht in diesem Modell der zweiten Stufe und das *systematisch-theoretische* Verständnis der dritten Stufe. Die Literatur von Bauer und Hefendehl-Hebeker führt zur Verdeutlichung ein Beispiel zum Thema Flächeninhalt an: Während die zweite Stufe der *Applied Literacy* auf Ebene des *operativ-instrumentellen* Verständnisses die Fertigkeit anspricht, den Flächeninhalt einer konkreten Figur berechnen zu können, verlangt die dritte Stufe der *Theoretical Literacy* auf *systematisch-theoretischer* Ebene eine Betrachtung der Definition, wie sich der Flächeninhalt einer Figur definieren lässt und inwiefern dies für beliebige Figuren sinnvoll möglich ist.¹⁵ Die finale vierte Stufe der *Reflexive Literacy* stellt eine Metaebene dar, auf welcher das Räderwerk der Disziplin verstanden wurde: Wie funktioniert Mathematik, wie arbeiten Mathematiker:innen? Hierzu zählen ebenfalls, genuine Fragestellungen des Fachs beantworten zu können, über mathematische Resultate zu urteilen, eine fachbezogene Intuition entwickelt zu haben, Werte und Ästhetik des Faches zu erkennen sowie über heuristische Fähigkeiten zu verfügen.¹⁶

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die ersten beiden Stufen für die Absolvierung eines Mathematikstudiums nicht ausreichen können. Außerdem argumentieren Bauer und Hefendehl-Hebeker, dass gerade Studierende der Mathematik-Lehramtsausbildung bis zur vierten Stufe gefördert werden sollten, da sie in ihrem Berufsfeld ihre Disziplin auf der Metaebene verstanden haben müssen, um die „[...] Denkweisen des Fachs im Unterricht adressatengerecht zur Geltung zu bringen“¹⁷. Mit dieser fundierten Erklärung ist nun die Relevanz für weitreichendes Verständnis seitens der Studierenden verdeutlicht.

¹⁴ Vgl. Bauer, Hefendehl-Hebeker. Mathematikstudium. Anforderungen und Ansätze. 2019. S. 9.

¹⁵ Vgl. Ebd. S. 11f.

¹⁶ Vgl. Ebd. S. 14.

¹⁷Ebd. S. 14.

2.2 Peer Instruction als Methode

Um das Ziel des vertieften Verständnisses zu erreichen, wurde die Methode der Peer Instruction entwickelt und auf die universitäre, mathematische Lehre übertragen. Die antizipierten Wirkungen von Peer Instruction lassen sich auf drei Felder zusammenfassen: die Aktivierung der Lernenden, ein besseres Verständnis der angesprochenen Begriffe und ein Verständnis seitens der Lehrenden, welche Inhalte leicht / schwierig sind respektive was dafür sorgt, dass die Inhalte als schwierig empfunden werden.¹⁸ Nach Mazur liegt das Ziel von Peer Instruction darin, die Studierenden zur aktiven Mitarbeit zu motivieren und den Fokus dabei auf die zugrundeliegenden Konstrukte beziehungsweise Objekte zu bringen.¹⁹ Es sollen in der Vorlesung keine Details aus Lehrbüchern wiederholt, sondern Kernbegriffe vorgestellt werden. Dabei gehört zu jedem Kernbegriff ein von Mazur so genannter ConcepTest²⁰: Diese meist nach dem Single-Choice-Muster aufgebauten Fragen dienen dem Verständnis des Kernbegriffs sowie der Kompetenz diese begründet erklären zu können. Diese Single-Choice-Fragen, in den Physikvorlesungen genannt ConcepTests, als Frage allein machen noch keine Peer Instruction aus. Die Methode bedarf eines bestimmten phasenstrukturierten Ablaufs: Zunächst wird die Frage mit ihren Antwortoptionen präsentiert. Die Lernenden bekommen von Mazur ca. zwei Minuten Zeit zum Lesen und sich Gedanken zu der Frage zu machen.²¹ In einer ersten (bspw. anonymen, technikbasierten) Votingrunde sind sie aufgefordert, sich individuell auf eine Antwort festzulegen. „Die Festlegung auf eine Antwortoption (*Commitment*) ist insofern von Bedeutung, als die Studierenden in der nächsten Phase aufgefordert werden, andere Studierende in Kleingruppen von ihrer Wahl zu überzeugen – bzw. sich von anderen überzeugen zu lassen.“²² Sie diskutieren nun über ihre individuellen Antworten, wobei sie ihre Wahl begründen und argumentieren müssen. Mazur gibt an dieser Stelle etwa zwei Minuten für die Diskussion.²³ Daraufhin können die Lernenden ihre Antwort in einem zweiten Voting revidieren und ändern oder bei ihrer jeweiligen ersten Wahl bleiben. In der anschließenden Expert:innenphase erfolgt eine Erläuterung zur richtigen Antwort durch die Lehrperson sowie eine Erklärung, warum die Distraktoren nicht die richtige Antwortoption darstellen. Je nach Verteilung der Antworten geht die Lehrperson inhaltlich weiter zum nächsten Kernbegriff oder wiederholt bei geringer Anzahl korrekter Antworten (<30 %) den Sachverhalt in gedrosseltem Tempo

¹⁸ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 33.

¹⁹ Vgl. Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 10.

²⁰ Der Begriff „ConcepTest“ wird in der vorliegenden Arbeit nur im Rahmen von Mazurs Peer Instruction in der Physik so genannt. „Konzeptionelles Verständnis“ ist im Bereich des mathematischen Lernens mit dem „Begriffslernen“ abgedeckt, wodurch „ConcepTest“ in der Mathematik weniger geeignet ist.

²¹ Vgl. Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 11.

²² Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 5.

²³ Vgl. Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 11.

und überprüft das Verständnis erneut mit einem weiteren ConcepTest.²⁴ Mazur plant für jeden Schlüsselbegriff ca. 15 min ein, wobei die Einführung sieben bis zehn Minuten ausmachen und die Durchführung des ConcepTests ca. fünf bis acht Minuten in Anspruch nehmen.²⁵

Die Durchführung von Peer Instruction nach Mazurs Art verändert die Rolle von Vorlesung und Lehrbuch. Nach seinem Aufbau bedient sich die Methode Peer Instruction am Modell des Flipped Classroom, bei dem die Lernenden den Lernstoff in selbständiger Arbeit mit einem Lehrwerk oder Skript vor der Vorlesung vorbereiten. „Im nächsten Schritt geht die Vorlesung auf die Lehrbuchinhalte ein, spricht mögliche Schwierigkeiten an, vertieft das Verständnis des Gelesenen, baut Selbstvertrauen auf und bespricht zusätzliche Beispiele. Das Lehrbuch dient dann als Nachschlagewerk und Studienführer.“²⁶ Etwa ein Drittel der Vorlesungszeit verwendet Mazur für die Peer Instruction ohne jedoch den Lehrstoffumfang zu reduzieren. Dies gelingt, indem er Beispielrechnungen und mathematische Herleitung aus der Vorlesung in die individuelle Vorbereitungszeit der Studierenden auslagert, welche die „rein mechanisch nachvollziehbaren“ Details den ausgehändigten Lehrwerken entnehmen können.²⁷ Mazur selbst erklärt: „Sicher ist es unmöglich, sämtliche tradierten Stoffinhalte in der gekürzten Vorlesungszeit zu behandeln. Meine Vorgehensweise bürdet den Studierenden eine größere Eigenverantwortung auf. Sie müssen die Lernmaterialien vor der zugehörigen Unterrichtsstunde als Pflichtlektüre bearbeiten, und ich stelle nur Teile davon in der Vorlesung vor.“²⁸

Während Mazur die Methode der Peer Instruction im Format eines Flipped Classrooms in den Vorlesungen anwendet, integriert Bauer diese als eigenstehenden Block in den Tutorien. Die Vorlesung bleibt bei Bauer also in traditioneller Form erhalten, nur die wöchentlichen Übungen ändern sich durch Peer Instruction. Die Tutor:innen erhalten eine Kurzschulung über die Methode, wobei Ziele und Motivation verdeutlicht, die Wirkung diskutiert und praktische Runden mit den Tutor:innen als Selbsterfahrung durchgeführt werden.²⁹ Bauers Pilotdurchführung zog sich über zwei Semester in den Modulen Analysis I und Analysis II.³⁰ Die Tutorien bieten sich für Peer Instruction besonders gut an, da der Aufwand der Umstellung des Systems recht gering bleibt. In den Tutorien soll in kleineren Lerngruppen das Verständnis der in der Vorlesung vermittelten Inhalte geschärft, Raum für Fragen geboten und Übungsaufgaben besprochen werden. Oftmals stellen die Tutor:innen (teilweise durch die Studierenden) die Aufgaben der wöchentlichen Übungsblätter vor. Allerdings trägt die Form der

²⁴ Vgl. Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 11.

²⁵ Vgl. Ebd. S. 27.

²⁶ Ebd. S. 10.

²⁷ Vgl. Ebd. S. 14.

²⁸ Ebd. S. 41.

²⁹ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 7.

³⁰ Vgl. Ebd. S. 1.

Lösungspräsentation nicht zum Verständnis oder Lernzuwachs bei, wenn dabei der Prozess der Lösung und Problemlösestrategien auf der Strecke bleiben.³¹ In den begleitenden Übungen zur Vorlesung Bauers soll jeweils die erste halbe Stunde von insgesamt 90 Minuten für Peer Instruction verwendet werden.³² Zudem schlägt Bauer mehr Zeit für die Bearbeitung der einzelnen Phasen von Peer Instruction vor. So haben Studierende für die Einzelarbeit (Lesen, Nachdenken, Abstimmen) ca. 2 – 5 Minuten Zeit und in der Gruppenarbeit für die Diskussion unter dem Motto „Überzeuge Deinen Nachbarn“ ca. 5 – 10 Minuten Zeit. Bei beiden beansprucht eine Durchführung ca. 15 Minuten, weil Mazur im Vorfeld der Kernbegriff in der Vorlesung kurz einführt und dies in den Übungen bei Bauer nicht praktiziert wird. Bauer erklärt, dass den Studierenden pro Phase mehr Zeit gegeben wird, um mehr zum Nachdenken als zum Raten einzuladen und in der Peer Discussion „tiefergehende Diskussionen zu ermöglichen.“³³

2.3 Rahmenbedingungen und Voraussetzungen

Aus diesem Ablauf und den zuvor vorgestellten Zielen lassen sich spezifische Rahmenbedingungen für die Anwendung von Peer Instruction ableiten. Die Mitarbeit der Studierenden bei dieser Methode ist für den Erfolg derselben unerlässlich. Daher spielt die Motivation der Lernenden von Beginn an eine große Rolle. Bereits in der ersten Vorlesung wird der (Un-)Sinn diskutiert, welchen das Vorlesen eines Skripts mit sich bringt und wie wenig durch passives Zuhören in einer Vorlesung tatsächlich gelernt werden kann.³⁴ Analog funktioniert die Erklärung im Tutorium, durch passives Zuhören, kein tiefgreifendes Verständnis zu erlangen. Zur Vorbereitung wird ein Ablaufschema empfohlen, welches in Abhängigkeit der Anzahl richtiger Antworten erstellt wurde:

³¹ Vgl. Bauer. Entwurfsprinzipien und Akzeptanz. 2019. S 85.

³² Vgl. Bauer. Design von Aufgaben. 2019. S. 69.

³³ Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 7.

³⁴ Vgl. Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 21.

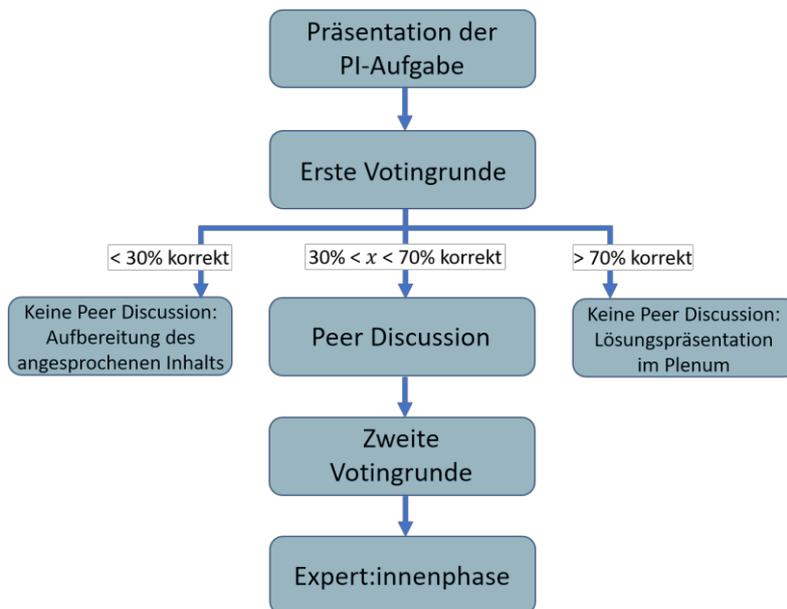


Abbildung 1: Darstellung der Durchführung (in Anlehnung an Kempen, 2021. S. 242)

Dieser Ablauf basiert auf der Empfehlung Mazurs, je nach Resonanz und Schwierigkeitsgrad der Frage entsprechend anders vorzugehen. Hat ein zu geringer Anteil der Lernenden die Frage richtig beantworten können, droht gemeinsames Raten oder die Verbreitung von Fehlvorstellungen³⁵ in der Diskussionsphase. Daher sollte in diesem Fall direkt eine Expert:innenphase folgen und die Peer Discussion zu einem späteren Zeitpunkt durchgeführt werden. Mazur schätzt die Peer Instruction Runden, bei welchen die richtigen Antworten bei 40 % – 80 % liegen, als optimal ein.³⁶ Wenn der eindeutige Großteil der Lernenden bereits in der ersten Votingrunde korrekt geantwortet hat, erübrigt sich die Diskussion unter dem Motto: „Überzeuge deine Nachbar:innen“ – da es kaum zu überzeugende Personen in der Lerngruppe gibt. In diesem Fall sollte nach Mazur ebenfalls direkt zur Expert:innenphase übergegangen werden, bei welcher prägnant für beziehungsweise gegen die jeweiligen Antwortmöglichkeiten argumentiert wird.

Des Weiteren ist die richtige Lernsituation entscheidend. Dafür braucht es eine nach Kooperation ausgerichtete und klar nicht konkurrenzbetonte Arbeitsatmosphäre. Eine Differenzierung von Lernsituationen (Beantworten der Peer Instruction-Aufgaben) und von Leistungssituationen (bspw. Klausur oder Endnote) ist unbedingt vonnöten.³⁷ Eine tolerante Fehlerkultur zu entwickeln, ist hierbei

³⁵ In der Fachdidaktik wird auch der Begriff Präkonzept statt Fehlvorstellung verwendet, um die negative Konnotation von Fehlern beim Lernen zu umgehen. In dieser Arbeit wird mit dem Begriff der Fehlvorstellung gearbeitet, um bewusst Fehler als Lernoption zu begreifen und steht somit synonym zu dem Begriff Präkonzept.

³⁶ Vgl. Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 13.

³⁷ Vgl. Ebd. S. 23.

entscheidend. Verspüren Lernende Angst, eine falsche Antwort zu geben, sind sie in den Votingrunden und in der Diskussion gehemmt, erkennen zu geben, die Antwort nicht zu wissen, statt anregend über den Fall zu diskutieren. Wenn das Voting in der Individualphase anonym abläuft, wird der Sorge vor einer Blamage entgegengewirkt.³⁸ Die Lehrperson sollte in keinem Fall die Zeiten der einzelnen Phasen kürzen. Damit ist nicht nur gemeint, ganze Phasen zu übergehen, sondern die Zeiten in der Individualphase sowie der Peer Discussion gesteuert kurz zu halten. Wenn eine Abstimmung über das technikbasierte Votingtool Clicker erfolgt, ist es leicht zu erkennen, ob die Studierenden mehr Zeit benötigen beziehungsweise schneller fortgeschritten werden kann, als ursprünglich geplant.³⁹ Es bietet sich an, bei einem analogen Voting-Verfahren eine Art Signal auszumachen, wodurch erkennbar ist, dass die Lernenden bereit sind eine Antwort zu geben. „Antwortzeiten können durchaus im Bereich einer Minute liegen. Dies ist deutlich länger als die Zeit, die Lehrende sonst auf die Antwort warten – bevor sie die gestellte Frage schließlich selbst beantworten. Diese Wartezeit liegt üblicherweise im Bereich einer Sekunde“.⁴⁰ Für eine erfolgreiche Lernsituation ist des Weiteren von Vorteil, dass Peer Instruction von der Lerngruppe zu einem routinierten Arbeitsmodul wird, welches die Lernenden gut kennen und verstehen. „Ein nur gelegentlicher Einsatz kommuniziert Studierenden dagegen, dass *Peer Instruction* nicht wirklich wichtig ist, und läuft Gefahr, dass es als Bespaßung missverstanden wird.“⁴¹ Zudem empfiehlt der Autor, Peer Instruction prüfungsrelevant zu machen. Das wird damit begründet, dass studentisches Lernen immer auch ein prüfungsorientiertes ist. Daher sollten in den Klausuren nicht (nur) die algorithmischen Rechenaufgaben gefragt werden, sondern (ebenfalls) Fragen zum Begriffsverständnis.⁴² Das ist jedoch keinesfalls gleichzusetzen mit der Idee, eine normale Durchführung der Methode Peer Instruction als Leistungserhebung und Prüfungsersatz zu nutzen. In dem Fall würde die Bedingung der Trennung von Lernsituation und Leistungssituation verletzt werden. Gemeint ist damit lediglich in der Klausur Aufgaben zu stellen, die auf das Begriffsverständnis in der Art von Peer Instruction-Aufgaben abzielen.

Eine weitere Stellschraube für die Umsetzung von Peer Instruction stellt die technische Komponente dar. Clicker, Plickers und ARSnova sind nur einige der möglichen Tools, die eine digitale Abstimmung umsetzen. Auch kann H5P genutzt werden, um die Peer Instruction-Aufgaben zu präsentieren und die Antworten einzuholen. Diese jeweiligen Vor- und Nachteile sowie Grenzen der Abstimmungsvarianten werden ihrem Umfang geschuldet in der vorliegenden Arbeit nicht diskutiert. Kempen stellt in seinem „Report from the field“ detailliert einige Tools mit ihren Vor- und Nachteilen vor und auch Riegler

³⁸ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 45.

³⁹ Vgl. Ebd. S. 44.

⁴⁰ Ebd. S. 45.

⁴¹ Ebd. S. 42.

⁴² Vgl. Ebd. S. 42.

widmet sich ausführlich den verschiedenen Technologien. Kempfen warnt davor, dass eine parallele Nutzung von zwei oder mehr Tools zu Verwirrungen führen kann, wenn nicht ebenso viele Darstellungsflächen wie Programme zur Verfügung stehen.⁴³ Unabhängig jedoch von der Wahl des Tools gilt nach Mazur: „der Erfolg von Peer Instruction hängt nicht von der Abstimmungsmethode ab.“⁴⁴

Als weitere Bedingung werden die Qualität und der Inhalt der Peer Instruction-Aufgaben thematisiert. Peter Riegler erklärt, dass Fragen besonders für Peer Instruction geeignet sind, wenn ein fachliches Prinzip auf eine bestimmte Situation angewandt werden muss. Dies hat zur Folge, dass es nicht reicht, einen bekannten (numerischen, algorithmischen) Prozess abzuspielen.⁴⁵ Ein weiteres Argument für diese Aufgabenart besteht im Diagnosepotential der Methode: „Wenn Studierende diese Frage [eine Rechenfrage] falsch beantworten, kann nicht darauf geschlossen werden, ob es daran liegt, dass sie einen oder mehrere der notwendigen Berechnungsschritte nicht korrekt ausgeführt haben, oder ob sie das Konzept der Differentialgleichung noch nicht verstehen.“⁴⁶ Das Argumentationspotential muss jeder Peer Instruction-Aufgabe innewohnen. Dabei darf die Diskussion jedoch nicht um Äußerlichkeiten (wie bspw. Formulierungsmöglichkeiten) gehen, sondern muss auf den Inhalt zielen.⁴⁷ Dies kann ebenfalls gelingen, indem in der Aufgabe ein konkretes Beispiel gegeben wird, worin ein fiktiver Charakter einen Widerspruch sieht. (z.B. nach einer bestimmten Fehlvorstellung): Es ist notwendig, „Wissenselemente auf das konkrete Beispiel zu beziehen und zueinander in Beziehung zu setzen, um den durch die Frage provozierten kognitiven Konflikt zu beseitigen“.⁴⁸ Dies soll an dieser Stelle eine kleine Vorschau auf die Bandbreite von Aufgabenformaten liefern. Eine konkretere, umfassendere Aufstellung dazu befindet sich im Kapitel 4 *Die Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben*.

2.4 Forschungsstand

Die Notwendigkeit eines tiefgreifenden Verständnisses der Inhalte bildet die Grundlage für die Argumentation, Peer Instruction in dieser Hinsicht als sinnstiftende Methode anzuwenden. Darüber, warum diese Art des Verständnisses eine zentrale Rolle im Mathematiklernen einnimmt, schreibt in Übereinstimmung ein Groß der Mathematikdidaktiker:innen. Für die vorliegende Arbeit wurde für diese Thematik die Literatur von Zech, Tall und Vinner sowie Bauer und Hefendehl-Hebeker herangezogen,

⁴³ Vgl. Kempfen. A report from the field. 2021. S. 246.

⁴⁴ Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 18.

⁴⁵ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 43.

⁴⁶ Ebd. S. 74.

⁴⁷ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 13.

⁴⁸ Ebd. S. 14.

da die in den Werken angesprochenen Modelle eine Perspektive auf Peer Instruction bieten, die im Laufe der Arbeit vernetzt werden.

Friedrich Zech beleuchtet in dem Artikel „Das Lernen mathematischer Begriffe“ aus dem Jahr 2002 das Begriffslernen aus verschiedenen Perspektiven und geht dabei unter anderem auf die lernpsychologischen Aspekte, den Faktor Sprache sowie die Rolle von Beispielen und Gegenbeispielen zu einem Begriff. David Tall und Shlomo Vinner erarbeiten in ihrem Artikel „Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular reference to limits and continuity“ aus dem Jahr 1981 ein stufenbasiertes Modell zur Begriffsbildung. In „Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien – Anforderungen und Ansätze zur Gestaltung“ von Thomas Bauer und Lisa Hefendehl-Hebeker wird das Mathematikstudium für werdende Lehrpersonen beleuchtet und hinterfragt. Indem sie die Verständnisebenen der Mathematik in das den Sprachwissenschaften entnommene Literacy-Modell übersetzen, gelingt eine Argumentation, warum tiefgreifendes Verständnis gerade für Lehramtsstudierende vonnöten ist. Dabei argumentieren sie für die Einführung von Modulen, welche den Übergang von schulischer Mathematik zu universitärer Lehre erleichtern soll.⁴⁹ Sie schlagen im Laufe des Buchs die Brücke zur sinnvollen Anwendung durch Peer Instruction, welche auf ein begriffliches Verständnis abzielt und somit ein zentrales Lernziel erfüllt.

Die inzwischen durch die verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen verbreitende Methode der Peer Instruction wird seit der ersten dokumentierten Anwendung 1991 entsprechend beforscht. Die Basis des gesamten Forschungsstandes bildet das Buch „Peer Instruktion“ von Mazur, von dem in der vorliegenden Arbeit die deutsche Übersetzung verwendet wird – herausgegeben im Jahr 2017 von Ulrich Harten und Günther Kurz. Darin wird die Methode erstmals beschrieben. Mazur erklärt im ersten Teil seine eigene Motivation, die Durchführung der Methode sowie ihre Begründung und leitet den Aufbau einer Vorlesung nach seinem Modell an. Im zweiten Teil werden die bei seiner eigenen Durchführung verwendeten Materialien veröffentlicht. Da er als Physikprofessor, keine Vorlesungen in der Mathematik hält, dient er als Vorbild für die vorliegende Arbeit eher auf methodischer, als auf fachlicher Ebene.

Diese Methode in der Hochschullehre der Mathematik zu implementieren, wurde vor allem durch Thomas Bauer angestrengt. Im Rahmen der Erprobung von Peer Instruction veröffentlicht Thomas Bauer mehrere Artikel mit verschiedenen Schwerpunkten. In seinem Beitrag „Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen“ von 2018 blickt Bauer auf die Tutorien neben der Vorlesung und das Verhalten der Studierenden. Er berichtet davon, dass Studierende in einer herkömmlichen Übung eher passiv lernen und dass die wenigen Ausnahmen

⁴⁹ Vgl. Bauer, Hefendehl-Hebeker. Mathematikstudium. Anforderungen und Ansätze. 2019. S. 17ff.

auf ein besonderes Geschick der Übungsleitenden zurückzuführen sind. Bauer bietet mit seiner Variante der Peer Instruction eine Methode zur Aktivierung der Studierenden in den Tutorien zur Vorlesung. In diesem Artikel werden die konzeptionellen Grundlagen vorgestellt und seine Pilotdurchführung in Analysis I und II vorgestellt und diskutiert. Ein konkretes Ergebnis (aus den wöchentlichen Feedbacks zur Produktivität und Schwierigkeitseinschätzung) beschreibt Bauer wie folgt: „Zum einen geben sie kontinuierlich Auskunft über den Leistungsstand der Studierenden und ermöglichen eine generelle Einschätzung des bei den ConcepTests günstigen Anspruchsniveaus. Zum anderen – und dies war die entscheidende Beobachtung – wurde deutlich, dass es kein für alle Übungsgruppen einheitliches optimales Anspruchsniveau gibt, da sich bei den Leistungsniveaus der Gruppen erstaunlich große Unterschiede zeigten“.⁵⁰ Eine Erklärung ist eine eigenständig studentische Gruppierung von Lerngruppen im Vorfeld (auch nach Niveau). „Immer wieder wurde rückgemeldet, dass es äußerst nützlich sei, dass die ConcepTests auf typische Fehler aufmerksam machen und die Peer Discussion zutage bringt, worin der Fehler genau besteht und welche Fehlvorstellung zugrunde liegt.“⁵¹ Die Studierenden bewerten Peer Instruction als sinnvoll, wertvoll im Sinne der Steigerung der Produktivität und wünschen sich eine erneute Anwendung in kommenden Semestern. Lediglich eine Anregung zu späteren Diskussionen beziehungsweise zum Nachdenken zu einem späteren Zeitpunkt nach der Peer Instruction wird nicht angeregt.⁵² Dies ist allerdings auch nicht der Anspruch der Methode. Die (mit ca. 12%⁵³ nur wenigen) sonstigen negativen Einschätzungen der Studierenden kommentiert Bauer folgendermaßen: „Neben einem Missverstehen der Methode an sich könnte ein Grund für negative Einschätzungen auch darin liegen, dass introvertierte Studierende die Unterrichtsmethode als eher unangenehm empfinden, weil sie stark auf Diskurs ausgelegt ist: Insbesondere die leistungsschwachen Studierenden in dieser Gruppe mögen es als unangenehm empfinden, dass in der Peer Discussion ihr Leistungsstand für die Kommilitonen sichtbar wird.“⁵⁴ Die Tutor:innen schätzen Peer Instruction als hilfreich und gewinnbringend ein. „Dies ist ein wichtiges Ergebnis, da viele Tutoren berichten, dass es für sie in traditionellen Übungen oft mühsam und frustrierend sein kann, Diskussionen in Gang zu bringen. Es ist daher durchaus von Bedeutung, Methoden zu finden, die den Tutoren ein befriedigendes Lehrerlebnis geben können und so dazu beitragen, dass diese sich auch weiterhin kraftvoll engagieren.“⁵⁵

⁵⁰ Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 17.

⁵¹ Ebd. S. 18.

⁵² Vgl. Ebd. S. 18f.

⁵³ Grundlage dafür stellt die studentische Einschätzung verschiedener Aspekte – von Aktivierung über Produktivität zum Spaß und dem Wunsch nach Fortsetzung des Einsatzes – via Likertskala dar.

⁵⁴ Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 20.

⁵⁵ Bauer. Ebd. S. 20.

Zu einem späteren Zeitpunkt bearbeitet Bauer in dem Beitrag „Peer Instruction in mathematische Übungsgruppen – Entwurfsprinzipien und Akzeptanz“ aus dem Jahr 2019 die Fragen, wie Aufgabe für Peer Instruction entworfen und eingesetzt werden können, welchen Nutzen die Methode aus Sicht der Studierenden bringt und ob die Methode von den Tutor:innen angenommen und sicher eingesetzt wird. Er geht dabei genauer auf das Vorgehen in seinem Projekt, Peer Instruction in den Analysis-Modulen zu integrieren, ein.⁵⁶ Ein Schwerpunkt liegt bei dieser Veröffentlichung auf den Zwischenstand und Ausblick, welche sich bei der Projektbegleitung im Laufe des Prozesses offenbaren. Bauer kategorisiert in seinem Ergebnis die noch offenen Fragen in drei Themenkomplexen: der Schwierigkeitsgrad bei der Erstellung geeigneter Aufgaben; der genaue Einsatzzeitpunkt (vor oder nach der Abgabe der Übungen) sowie die Wirkung: „Die positive Akzeptanz, die wir im Projekt auf Seiten der Studierenden zeigen konnten, ist noch kein Beleg dafür, dass der Einsatz von Peer Instruction zu besserem Lernerfolg führt. Eine diesbezügliche Wirkungsbeforschung wird derzeit im Rahmen des khdm-Projekts WiGeMath durchgeführt.“⁵⁷

In dem dritten Artikel zu seinem Projekt wird der Designprozess der Aufgaben für Peer Instruction in den Fokus gerückt. Dies ist das zweite Ziel neben der Untersuchung der Anwendbarkeit: der theoretische Ertrag aus seinem Projekt. Es sollen damit Peer Instruction-Aufgaben entwickelt werden können, wofür in diesem Beitrag die Anforderungen und Kriterien erstellt wurden.⁵⁸ Das entwickelte Modell zum Designprozess hat sich „als sehr gut brauchbar erwiesen, da es konkrete Leitlinien dafür angibt, auf welche Aspekte eines Begriffs oder Satzes die Fragestellung eines ConcepTests gerichtet wird.“ Es wird zudem darauf verwiesen, dass eine Lernwirksamkeit mit seinem Werk noch nicht nachgewiesen wurde. Trotzdem werden nach seinem Modell die betrachteten Begriffe und Sätze derart tief bearbeitet, dass der Sinn und Bedeutung von der Arbeit mit Peer Instruction aufgezeigt wird.⁵⁹

Die notwendigen Rahmendbedingungen für eine Umsetzung von Peer Instruction, die erst bei genauerem Betrachten in den Fokus rücken, werden in „Peer Instruction in der Mathematik – Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen praxisnah erläutert“ von Peter Riegler umfangreich beleuchtet. Neben den Gelingensbedingungen, den didaktischen Hintergründen und der Wirksamkeit widmet er sich den Fragen von Peer Instruction und geht dabei auf formale Fragenformate, -quellen und -muster sowie deren Anforderungen und Stabilität ein.

⁵⁶ Vgl. Bauer. Entwurfsprinzipien und Akzeptanz. 2019. S. 86.

⁵⁷ Ebd. S. 87.

⁵⁸ Vgl. Bauer. Design von Aufgaben. 2019. S. 64.

⁵⁹ Vgl. Ebd. 2019. S. 72.

Leander Kempen beschäftigt sich in seinem Beitrag mit der technischen Seite von Peer Instruction, indem er verschiedene Votingprogramme und -tools vorstellt und von seinen persönlichen Erfahrungen mit Peer Instruction in einer Analysisvorlesung berichtet. Kempen schließt mit einem Feedback und einer Evaluation seiner Durchführung, wobei der positive Einfluss der Methode auf die Lernatmosphäre besonders gelobt und die Möglichkeit der Diskussion positiv betont werden.⁶⁰ Ein Teil des Fazits widmet er einigen Faktoren, welche weiterhin zu überdenken seien: „Using two programs at the same time (PowerPoint and the webpage for peer instruction) brings confusion and some other disadvantages, too. It seems to be easier to write the questions on the blackboard and use the beamer only to display the results of the corresponding votes. This way, the questions and results can be shown at the same time and discussed more easily.“⁶¹

Gemeinsam mit Rolf Biehler und Elisa Lankeit hat Thomas Bauer die Theorie aufgestellt, dass die Peer Discussion Phase entscheidend für die Wirksamkeit von Peer Instruction sei und diese überprüft. Die bis zum Zeitpunkt der Durchführung dieser Studie veröffentlichten Untersuchungen wurden von den Autor:innen in zwei Kategorien geteilt: „a) Why Peer Instruction may work“ und „b) Learning Outcomes and Learning Gains in Peer Instruction“.⁶² Erstere beinhaltet bspw. Studien über die viel untersuchte Aktivierung der Lernenden, welche bei Peer Instruction während der Peer Discussion stattfindet. Die Studien erkennen unter anderem eine Steigerung in den Kompetenzen Problemlösen, metakognitives Begründen und Argumentieren sowie dem Begriffslernen. Studien der zweiten Kategorie fokussieren den Vergleich von traditioneller Lehre und jener mit Peer Instruction – sowohl qualitativ, als auch quantitativ. Die Bauer, Biehler und Lankeit durchgeführte Studie lässt sich in die zweitgenannte Kategorie der „Learning Outcomes and Learning Gains in Peer Instruction“ sortieren. Für die Untersuchung der Peer Discussion innerhalb der Methode Peer Instruction wurden in dieser Studie parallel zwei Gruppen von Studierenden des Moduls Analysis jeweils über zwei Semester begleitet. Dabei wurde eine Gruppe mit dem Einsatz von Peer Instruction nach Bauers Modell unterrichtet und die andere Gruppe erhielt statt der Peer Discussion eine tutor:ingeleitete Instruktion. Bewertet wurden am Ende der Zeit lediglich die „learning outcomes“. Diese vorliegende Studie untersucht somit die Bedeutung der Peer Discussion innerhalb der Methode mittels der Leistung am Ende der Semester. „Interestingly, we found no significant difference between the two conditions. Additionally, we had positive evaluations of the use of Peer Instruction in both variants, with no significant differences

⁶⁰ Vgl. Kempen. A report from the field. 2021. S. 244f.

⁶¹ Ebd. S. 246.

⁶² Bauer, Biehler, Lankeit. Comparing Peer Discussion and Instructional Explanation Settings. 2022. S. 3f.

between the groups either.“⁶³ Die Autor:innen kommen zu dem Schluss, entgegen ihrer Annahme nicht die Phase der Peer Discussion für die positiven Effekte der Methode als Ganzes verantwortlich ist.

Nuri Balta, Serkan Kaymak, Abdullah Almas und Omarbek Nurbavliyev untersuchen in ihrer Studie aus dem Jahr 2021 den Lerneffekt von Peer Instruction bei Schüler:innen von zwei 9. Klassen in Kasachstan zum Thema Trigonometrie.⁶⁴ Bei einer der Klassen fand Peer Instruction Anwendung und die Kontrollklasse wurde herkömmlich unterrichtet. „The outcomes of this study do not support other research which finds that PI improves student performance and learning. [...] The different finding from this study is that the PI did not improve student achievement on trigonometry. While PI clearly increases students’ use of reasoning and discussion skills [...], it does not consistently raise students’ course scores“.⁶⁵ In ihrer Studie diskutieren die Autoren eines der in ihren Augen Hauptprobleme von Peer Instruction. Dabei führen sie an, dass während der Peer Discussion einige wenige Lernende die Argumentation dominieren und somit die anderen Lernenden inaktiv bleiben. Außerdem wird angemerkt, dass öffentliche Abstimmungen die ganze Lerngruppe in ihrem zweiten Voting beeinflussen.⁶⁶ Dieses Argument führen die Autoren dieser Studie bei der Diskussion ihrer Ergebnisse als möglichen Grund für den hier nicht nachgewiesenen positiven Effekt auf den Lernzuwachs an. Es bleibt offen, ob für den Test des Lernzuwachses auch auf Verständnis abzielende Aufgaben nach dem Peer Instruction Schema verwendet wurden. Dies würde das Ergebnis der Untersuchung beeinflussen. Um das Ergebnis ihrer durchgeführten Studie einzuordnen, verweisen die Autoren auf eine Metastudie von 2017 zu dem Effekt von Peer Instruction auf den Lernerfolg. Von 35 untersuchten Studien, wiesen 34 einen positiven Effekt von Peer Instruction auf den Lernzuwachs nach.⁶⁷

Anscheinend kann Peer Instruction als Methode sehr wertvoll für ein vertieftes Verständnis und mathematisches Lernen sein. Gerade wegen der Ergebnisse aus der Studie von Balta et al. 2021 ist ein Blick auf den schulischen Kontext also besonders interessant.

3 Peer Instruction und Schule

Zunächst lässt sich die Frage stellen, ob Peer Instruction überhaupt für den Einsatz in der Schule geeignet ist. Um herauszuarbeiten, inwiefern Peer Instruction diese Aufgabe erfüllen kann, müssen unter anderem die Kompetenzen und Lernziele der KMK-Bildungsstandards betrachtet werden. Daher werden in diesem Kapitel zunächst die Lernziele und die zu vermittelnden Kompetenzen vorgestellt, um die schulischen Anforderungen abzubilden. In einem nächsten Schritt wird das Potential von Peer

⁶³ Bauer, Biehler, Lankeit. Comparing Peer Discussion and Instructional Explanation Settings. 2022. S. 1.

⁶⁴ Vgl. Balta et al. The Impact of Peer Instructions. 2021. S. 206 – 222.

⁶⁵ Ebd. S. 217.

⁶⁶ Vgl. Ebd. S. 208.

⁶⁷ Vgl. Ebd. S. 218.

Instruction als Methode nach den prozessbezogenen Kompetenzen und didaktischen Prinzipien des Mathematikunterrichts aufgeschlüsselt. Darauf aufbauend können Kriterien für Peer Instruction-Aufgaben und Entwurfsmuster für deren Erstellung im schulischen Kontext erarbeitet werden.

3.1 Anforderungen in der Schule

Die KMK-Bildungsstandards legen bundesweit geltende fachspezifische Kompetenzen fest, welche die Schüler:innen in bestimmten Jahrgangsstufen erreicht haben sollten. „Unter einer Kompetenz wird dabei die Fähigkeit verstanden, Wissen und Können in den jeweiligen Fächern zur Lösung von Problemen anzuwenden.“⁶⁸ Diese Standards wurden jüngst erweitert und an den gesellschaftlichen Wandel angepasst. Auf dieser Basis sollen die einzelnen Bundesländer „Strategien entwickeln und umsetzen, die darauf abzielen, die Erreichung der vereinbarten Zielvorgaben zu gewährleisten.“⁶⁹ Das Unterrichtsfach Mathematik ist nach einem spiralförmigen Curriculum aufgebaut, wodurch die Lerngruppen die Inhalte orientiert an „Leitideen“ in sich steigenden Niveaus immer wieder durchlaufen: Zahl und Operation; Größen und Messen; Strukturen und funktionaler Zusammenhang; Raum und Form sowie Daten und Zufall. Dazu wurden prozessbezogene und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen festgelegt, die Schüler:innen während der Schullaufbahn erwerben sollen. Die prozessbezogenen Kompetenzen gliedern sich in sieben Bereiche, die im Folgenden näher beleuchtet werden, wobei die Reihenfolge der Nennung keine Bedeutung für die Gewichtung darstellt. Im Unterrichtsgeschehen „manifestieren [sie] sich in mathematischen Inhalten“⁷⁰ – den Leitideen und werden im Folgenden einzeln präsentiert.

Im Rahmen des *mathematischen Argumentierens* sollen Schüler:innen eigenständig angemessen begründen respektive beweisen, Lösungswege erläutern, begründen und prüfen sowie Vermutungen begründet äußern können. In den drei Anforderungsbereichen soll eine Bandbreite von einfachen Plausibilitätsargumenten bis hin zum Erläutern komplexer Argumentationsketten abgedeckt werden.

Darlegungen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen sowie das Erfassen von Informationen aus Aussagen und Texten oder einer strukturierten Präsentation eigener Überlegungen machen die prozessbezogene Kompetenz *mathematischen Kommunizierens* aus.

Die prozessbezogene Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* umfasst das Entwickeln und Ausführen eigener Lösungswege, das Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme sowie die Wahl geeigneter Heuristiken für bestimmte Probleme.

⁶⁸ KMK. Bildungsstandards für Mathematik. 2022. S. 2.

⁶⁹ Ebd. S. 5.

⁷⁰ Ebd. S. 7.

Hinter *mathematisch modellieren* verbirgt sich die Fähigkeit, reale Probleme in mathematische Begriffe zu übersetzen, dabei geeignete Methoden und Vereinfachungen zu verwenden und die Ergebnisse bezüglich der Realsituation zu interpretieren und überprüfen.

Mathematisch darstellen vereint die Kompetenzen des Erstellens, Vernetzens und Umgangs mit mathematischen Darstellungen auf der grafisch-visuellen, algebraisch-formalen, numerisch-tabellarischen und verbal-sprachlichen Ebene. Dabei soll mit steigendem Niveau zwischen diesen Darstellungen gewechselt werden und geeignete Formen gewählt werden können.

Die Kompetenz *Mit mathematischen Objekten umgehen* bezieht sich auf die Fähigkeit, mit bspw. Zahlen, Größen, Symbolen, Variablen, Formeln, Termen, geometrischen Objekten, Gleichungen und Funktionen – sowohl in Routineverfahren umzugehen als auch diese zu bewerten. Dabei wird ebenfalls die systematische und regelbewusste Bearbeitung von Aufgaben eingeschlossen.

Diese bereits bekannten prozessbezogenen Kompetenzen wurden im Juni 2022 dem gesellschaftlichen Leben – worauf Schule vorbereiten soll – angepasst und um eine Kompetenz erweitert: *Mit Medien mathematisch arbeiten*. Hierzu zählt der Umgang mit analogen Medien, wie einer Formelsammlung oder Werkzeugen, gemeinsam mit digitalen Medien. Darunter fallen nicht nur spezifische Mathematikwerkzeuge, wie dynamische Geometriesoftware, sondern ebenfalls mathemathikhaltige (Lern-)Apps oder allgemeine Präsentationsmedien wie Videos oder Texte, da sie mathematische Inhalte veranschaulichen und zusammenführen. Dies erfordert zudem eine Beurteilung nach mathematischen Kriterien. Dabei reicht die Bandbreite der geforderten Kompetenzen von der Nutzung analoger Medien über eine kritische Prüfung der digitalen Darstellungen nach mathematischen Aspekten sowie der Verwendung digitaler Werkzeuge bis hin zur Ausgestaltung eigener allgemeiner Medien mit mathematischem Inhalt.⁷¹

In einer weiteren Dimension werden neben diesen Kompetenzen und den Leitideen drei Anforderungsbereiche festgelegt, welche aufeinander aufbauen und im Anspruch und der kognitiven Komplexität von Stufe I bis Stufe III zunehmen. Der Anforderungsbereich der Stufe I trägt den Titel „Reproduzieren“ und „umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren“⁷². Auf der nächsthöheren Stufe des Anforderungsbereichs II betitelt mit „Zusammenhänge herstellen“ wird mehr Verantwortung auf die Lernenden übertragen, sodass bei der Arbeit mit bekannten Sachverhalten selbständig wählen, anordnen und darstellen können sollen. Dies erfordert die Verknüpfung von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus verschiedenen mathematischen Gebieten. Im dritten und höchsten Anforderungsbereich III „Verallgemeinern und

⁷¹ KMK. Bildungsstandards für Mathematik. 2022. S. 9 – 14.

⁷² Ebd. S. 9.

Reflektieren“ wird der eigenständige Umgang mit unbekanntem mathematischem Sachverhalten abgebildet. Die geeigneten Arbeitstechniken müssen erkannt und ausgewählt werden, damit Schüler:innen schließlich „zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.“⁷³ Das Zusammenspiel von Kompetenzen, Leitideen und Anforderungsbereichen lässt sich in einem dreidimensionalen Modell veranschaulichen, wobei sie durch drei Dimensionsachsen dargestellt werden. Die jeweiligen Unterrichtsinhalte sind an den entsprechenden Koordinaten der Achsen einzuordnen.

3.2 Eignung von Peer Instruction im schulischen Kontext

Peer Instruction „ist ein unterrichtsmethodisch einfaches Konzept und ist daher potenziell geeignet zum Einsatz durch studentische Tutoren“⁷⁴. Wegen der vergleichsweise geringen Komplexität in der Durchführung ist die Methode in dieser Hinsicht geeignet für den schulischen Kontext. An dieser Stelle ist der Einsatz und die Durchführung nach Bauers Modell gemeint, welches Peer Instruction als modular und unabhängig von sonstig verwendeten Methoden nutzt. Mazurs Durchführung verlangt die grundsätzliche Umstrukturierung der Lehre nach dem Konzept des Flipped Classrooms. Aus diesem Grund wird die Implementierung in der Schule nach Bauers Vorgehen untersucht. Wenn auch die Vorbereitung vorerst sehr umfangreich und anspruchsvoll sein kann, ist jedoch die Umsetzung umso leichter. Obgleich also die Erarbeitung der Peer Instruction-Aufgaben herausfordernd ist, stellt Peer Instruction nach Bauer „einen erfreulich niedrigschwelligen Ansatz dar, da der Einsatz keinerlei Reformanstrengungen auf Studiengangsebene erfordert.“⁷⁵ Dies ist für die Schule anwendbar, da die einzelnen Komponenten von Peer Instruction als Methoden bereits Anwendung in der Schule finden, wie später im Kapitel gezeigt wird. Diese Eignung organisatorischer und praktischer Natur genügt selbstverständlich nicht für die Argumentation, Peer Instruction als Lernwerkzeug in der Schule einzusetzen. Die an dieser Stelle relevante Komponente ist, ob ein solcher Einsatz auch sinnstiftend für das Lernen im Mathematikunterricht ist; Werden Lernziele gefördert und der Aufbau von Kompetenzen unterstützt? Nachdem im vorigen Kapitel die Bildungsstandards der KMK vorgestellt wurden, wird im Folgenden geprüft, ob und inwiefern Peer Instruction diesen Anforderungen im Zusammenwirken gerecht werden kann. Des Weiteren steht das Begriffslernen durch Peer Instruction-Aufgaben im Fokus der Untersuchung sowie die Möglichkeit, Grundvorstellungen mit dieser Methode zu adressieren. An den entsprechenden Stellen werden passende Peer Instruction-Aufgaben zur

⁷³ KMK. Bildungsstandards für Mathematik. 2022. S. 9.

⁷⁴ Bauer, Hefendehl-Hebeker. Mathematikstudium. Anforderungen und Ansätze. 2019. S. 29.

⁷⁵ Ebd. S. 33.

Untermauerung angeführt. Diese stammen aus einer Aufstellung von Peer Instruction-Aufgaben für 10. Klassen, welcher parallel zu der vorliegenden Arbeit entwickelt wurde.

3.2.1 Prozessbezogene Kompetenzen

Um zielführend zu erörtern, ob der Einsatz von Peer Instruction sinnvoll für die Sekundarstufe I ist, wird die entsprechende Analyse nach den prozessbezogenen Kompetenzen und der Bedeutung in den jeweiligen Anforderungsbereichen aufgezoen. Dabei steht die folgende Frage im Vordergrund: Welche der im vorigen Kapitel beschriebenen prozessbezogenen Kompetenzen, die in allen Leitideen stattfinden, ließen sich mit Peer Instruction in welchem Anforderungsbereich fördern?

Vom Aufbau der Peer Instruction und dem Fokus auf die Phase der Diskussion und gegenseitiger Erklärung fallen zwei prozessbezogene Kompetenzen sofort auf: *Mathematisch argumentieren* und *mathematisch kommunizieren*. Auf dem Niveau des Anforderungsbereichs II „Zusammenhänge herstellen“ in ersterer Kompetenz spricht Peer Instruction alle genannten Aspekte an: Die Schüler:innen erläutern überschaubare mehrschrittige Argumentationen bei der Begründung ihrer Antwort der ersten Votingrunde. Zudem können sie je nach Fragestellung Lösungswege erläutern und auf Konsistenz prüfen. Auf dem höheren Niveau des Anforderungsbereichs „Verallgemeinern und Reflektieren“ sollen verschiedene Argumentationen bewertet werden können, welche beispielsweise mit der Peer Instruction-Aufgabe [L2.1](#) Anwendung finden.

Außerdem bewerten die Schüler:innen die vorgeschlagenen Aussagen bzgl. ihres Anwendungskontextes. Ferner müssen mathematische Zusammenhänge beziehungsweise logische Strukturen erläutert werden, wie beispielsweise bei der Aufgabe [L3.2](#). Auf Ebene des höheren Anforderungsbereichs „Verallgemeinern und Reflektieren“ deckt Peer Instruction wie im Beispiel der Aufgabe [L3.1](#) gezeigt, die Erläuterung von komplexen Argumentationen seitens der Schüler:innen ab. Des Weiteren können für die Peer Instruction-Aufgaben Darstellungen in Texten oder digitalen Medien verwendet werden, welche es zu bewerten gilt.

Betrachtet man die Facetten „Zusammenhänge herzustellen“ (AFB II) des *mathematischen Kommunizierens*, finden sich folgende Ansätze durch Peer Instruction: Bei der Wahl ihrer Antwort vor der ersten Votingrunde, müssen die Lernenden komplexere mathemathikhaltige Abbildungen erfassen, interpretieren und deuten sowie gegebene Informationen strukturieren. Schüler:innen sind aufgefordert, während der Diskussionsphase „Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse und Verfahren verständlich“⁷⁶ darzustellen. Außerdem gehen sie „fachbezogen auf Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten ein (z.B. konstruktiver Umgang mit Fehlern, Weiterführen

⁷⁶ KMK. Bildungsstandards für Mathematik. 2022. S. 10.

mathematischer Ideen)⁷⁷. Im nächsthöheren Anforderungsbereich dieser Kompetenz entlockt Peer Instruction den Lernenden je nach Aufgabe eine mündliche sachgerechte Präsentation komplexer Sachverhalte. In jedem Fall „vergleichen und bewerten [sie] Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten sachlich und fachlich angemessen“⁷⁸, wenn sie über ihre Wahl der Antwortmöglichkeit diskutieren.

Im Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ bei der Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* sollen Lernende in der Lage sein, für ein vorgegebenes Problem geeignete Verfahren und bekannte Heuristiken zur Lösung dieses Problems zu verwenden. Dazu gehört ebenfalls Problemstellungen zu formulieren. Diese Kompetenz wird besonders anschaulich in den Peer Instruction-Aufgaben [L4.7](#) gefördert. Diese behandelt das Problem, welche Objekte zur Aufstellung der Gleichung einer quadratischen Funktion bekannt sein müssen. Während in diesem Kontext die zur Auswahl stehenden notwendigen Eigenschaften gegeneinander abgewogen und bestimmt werden, muss bei der Lösung der Peer Instruction-Aufgabe [L5.3](#) selbst ein geeignetes Lösungsverfahren gefunden werden, um die entsprechenden Glücksräder dem vorgegebenen Baumdiagramm zuzuordnen. Auf der Ebene des Anforderungsbereichs „Verallgemeinern und Reflektieren“ zur Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* sollen Lösungsideen reflektiert und verschiedene Lösungswege verglichen und beurteilt werden. Dies geschieht etwa dann, wenn die Frage für ein Problem verschiedene Vorgehen zur Auswahl stellt. Die Diskussionen der Optionen bei den Aufgaben [L4.2](#) (LGS Additionsverfahren) sowie [L4.4](#) (Parallelogramm) sind Beispiele dafür.

Untersucht man die Charakterisierungen der drei Anforderungsbereiche der prozessbezogenen Kompetenz *mathematisch modellieren* fallen folgende durch Peer Instruction geförderte Aspekte auf. Die Wahl eines geeigneten mathematischen Modells zur Lösung eines Problems aus der Realität, wird bei der Peer Instruction-Aufgabe [L4.6](#) (Schildkrötengehege) verlangt, womit diese das mathematische Modellieren als Kompetenz im Bereich „Zusammenhänge herstellen“ fördert. Auf der Ebene „Zusammenhänge herstellen“ kann ebenfalls eine Interpretation von dem Ergebnis einer Modellierung erfolgen, wenn z.B. das korrekte Weg-Zeit-Diagramm zu einer textlich dargestellten Geschichte gewählt oder auf Plausibilität geprüft werden soll, wie bspw. bei der Aufgabe [L4.5](#) verwendet. Für eine Peer Instruction-Aufgabe würde sich eine kritische Beurteilung mathematischer Modelle (bzgl. der Realsituation) eignen, da diese hervorragend Stoff zur Diskussion bietet. Die Aufgabe [L4.10](#) stellt dies anschaulich dar.

⁷⁷ KMK. Bildungsstandards für Mathematik. 2022. S. 10.

⁷⁸ Ebd. S. 11,

In dem Bereich der *mathematischen Darstellungen* finden sich unter „Zusammenhänge herstellen“ folgende Förderungsmöglichkeiten durch Peer Instruction: Die Schüler:innen könnten gefragt sein, eine zu einem vorgegebenen Problem passende Darstellung zu wählen und diese in der Diskussion zu begründen beziehungsweise eine Übersetzung von einer Darstellung in eine andere zu erklären. Dabei ist automatisch eine Erläuterung gefordert, wie diese vernetzt sind. Etwas anspruchsvoller fällt unter den Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ eine Beurteilung „verschiedener Formen der Darstellung entsprechend ihres Zwecks“⁷⁹. Dazu kann bspw. Aufgabe [L5.2](#) einladen.

Die Förderung der Kompetenz *mit mathematischen Objekten umgehen* scheint unter dem Aspekt der effizienten zielgerichteten Lösung von Aufgabenstellungen (also der Anwendung von Routineverfahren) auf den ersten Blick weniger durch Peer Instruction zu gelingen. Allerdings müssen mit dieser Methode in der Regel die inneren Strukturen mathematischer Objekte (bspw. Funktionen) beschrieben werden können und Peer Instruction-Aufgaben fördern, sicher und flexibel mit ihnen umzugehen. Somit ermöglicht Peer Instruction auch die Förderung dieser prozessbezogenen Kompetenz mit jeder Aufgabe.

Offensichtlich fördert der Einsatz von Peer Instruction insofern den *mathematischen Umgang mit Medien*, als dass die Methode allgemein-medialen Einsatz benötigt – je nach Wahl des Votingverfahrens und der Präsentation der Peer Instruction-Aufgaben. Erklärvideos und Lernapps stehen im Ansatz eher parallel zu der Methode Peer Instruction und lassen sich somit nicht per se elegant verbinden. Dennoch kann Peer Instruction auch innermathematisch den Umgang mit Medien fördern. So könnte eine Peer Instruction-Aufgabe auf dem Niveau „Zusammenhänge herstellen“ arbeiten und „analoge und digitale Medien kriteriengeleitet je nach Zielsetzung bewusst“⁸⁰ auswählen und in Abhängigkeit der Qualität der Diskussion auf dem nächst höheren Anspruchsniveau beurteilen lassen.

Es fällt auf, dass der Anforderungsbereich I „Reproduzieren“ über alle Kompetenzbereiche hinweg durch Peer Instruction kaum angesprochen wird. Dies liegt in der Natur der Methode, da es bei den Peer Instruction-Aufgaben genau darum geht, nicht nachschlagbares Wissen abzufragen, sondern tiefer in der Materie zu arbeiten. Ferner können einige Unterkategorien der Kompetenzen auf höherem Niveau nicht durch Peer Instruction gefördert werden. Konkret gemeint sind damit u.a. diese Kompetenzen: Lernende „entwickeln eigene Darstellungen“⁸¹ oder „lösen [...] offen formulierte Probleme“⁸². Die hier geforderte Offenheit und das Wesen von Peer Instruction schließen sich wegen

⁷⁹ KMK. Bildungsstandards für Mathematik. 2022. S. 12.

⁸⁰ Ebd. S. 14.

⁸¹ Ebd. S. 12.

⁸² Ebd. S. 11.

der vorgegebenen Antwortoptionen gegenseitig aus. Nicht jede Aufgabe kann alle prozessbezogenen Kompetenzen abdecken und alle gleichzeitig fördern. Das ist allerdings auch nicht notwendig. So kann die Lehrperson je nach Förderschwerpunkt des Unterrichts geeignete Fragen erstellen beziehungsweise auswählen und sich entsprechend gezielt Bereichen mit Förderbedarf widmen. Welche Kompetenz in welchem Anforderungsbereich gefördert wird, hängt also vom Inhalt und Aufbau der jeweiligen Peer Instruction-Aufgabe ab. Dass Peer Instruction aber grundsätzlich geeignet ist, um zur Förderung dieser Kompetenzen beizutragen, wurde gezeigt.

Im Anhang findet sich die parallel zu dieser Arbeit entstandene Handreichung von Peer Instruction-Aufgaben, ausgerichtet auf die Inhalte und das Anspruchsniveau der 10. Klasse zum Mittleren Schulabschluss (MSA). Diese wird anhand von Beispielen im Kapitel 5.3 *Peer Instruction-Aufgaben* nach den im Folgenden aufgestellten Gütekriterien reflektiert und bzgl. prozessbezogener Kompetenz und Anforderungsbereiche eingestuft und kategorisiert.

3.2.2 Begriffslernen – Weil Definitionen nicht ausreichen

Neben der Förderung dieser prozessbezogenen Kompetenzen spricht Peer Instruction weitere didaktische Felder an: Für den Prozess der Begriffsbildung und die Bedeutung von Begriffslernen steht die Ausbildung einer Vorstellung über den Begriff neben dem Erwerb neuer Kenntnisse und Fähigkeiten an zentraler Position.⁸³ Zum Begriffsverständnis gehört für Lernende, „Vorstellungen über Merkmale oder Eigenschaften eines Begriffs und deren Beziehungen untereinander entwickeln, also Vorstellungen über den *Begriffsinhalt*“⁸⁴ aufzubauen. Außerdem sollen Lernende den *Begriffsumfang* fassen können, also die Gesamtheit aller unter dem Begriff stehenden mathematischer Objekte greifen können. Zudem werden verschiedene Begriffe zueinander in Beziehung gesetzt und somit ein *Begriffsnetz* aufgebaut.⁸⁵ Über das Begriffslernen gelingt der Aufbau mentaler Modelle, also ganz individueller interner Sinnbilder, welche bei einer Übersetzung von der realen Welt in den systematischen Raum mathematischer Objekte entstehen. Idealisierungsprozesse spielen hierbei eine ebenso große Rolle.⁸⁶ Peer Instruction unterstützt diesen Aufbau mit der Verwendung von Prototypen⁸⁷ oder klassischen Beispielen von Fehlvorstellungen bspw. im Bereich der Vernetzung von Begriffen. Je vertiefter das Verständnis eines Begriffs, umso stärker muss auch das mentale Modell sein und umso detailreicher die drei Komponenten (Inhalt, Umfang, Netz) des Begriffslernens besetzt.

⁸³ Vgl. Weigand. Didaktik der Geometrie. 2014. S. 99.

⁸⁴ Ebd. S. 99.

⁸⁵ Vgl. Ebd. S. 99.

⁸⁶ Vgl. Ebd. S. 101.

⁸⁷ Als Prototyp werden in diesem Zusammenhang typische Vertreter eines Begriffs gesehen, welche sich flexibel auf andere Ausführungen des Begriffs transferieren lassen.

An dieser Stelle muss außerdem erwähnt werden, dass es notwendig ist, die Fähigkeit zu entwickeln, (nahe) Begriffe voneinander abgrenzen zu können. Es genügt also nicht nur, die Eigenschaften, Merkmale und alle zu diesem Begriff gehörenden mathematischen Objekte zu verinnerlichen und den Begriff mit anderen Begriffen des Themenfeldes in Beziehung zu setzen. Ein Begriff ist erst dann durchdrungen, wenn darüber hinaus der konkrete Unterschied innerhalb der Begriffe, die nah beieinander liegen, erklärt werden kann. Eine entscheidende Rolle bei dem Begriffserwerb nimmt neben den Verbalisierungen und Erläuterung der Eigenschaften vor allem die Vorstellung guter Beispiele und Gegenbeispiele ein. Ein dadurch gestützter Begriffserwerb hängt unmittelbar von der Qualität dieser ab. Zech formuliert eine allgemeine Regel dazu folgendermaßen: „Beispiele und Gegenbeispiele sind dann am effektivsten, wenn sich die Beispiele möglichst stark in den irrelevanten Merkmalen unterscheiden und die Gegenbeispiele in möglichst wenigen relevanten Merkmalen.“⁸⁸ Dieser Hinweis kann mit Peer Instruction im Rahmen der Distraktoren aufgegriffen werden. Liegen die inkorrekten Antworten besonders nah an einer korrekten Antwortoption, ähnlich der Regel für Gegenbeispiele, stellen sie besonders gute Distraktoren dar. Somit tragen Peer Instruction-Aufgaben, die diese Regel beachten, zum Ausbau und oder Erwerb vom Begriffsverständnis bei.

Tall und Vinner hingegen beschreiben zum Begriffslernen eine zwar sehr ähnliche, doch aber etwas anders ausgearbeitete Anschauung: Sie nähern sich dem Begriffslernen über den Irrtum, dass Mathematik ein äußerst präzises Fach sei, welches auf eindeutig definierten Begriffen, Satzaussagen und klaren Definitionen basiert. Jedoch weicht die Realität durch den menschlich-individuellen Faktor davon ab.⁸⁹ Zentral ist in diesem Zusammenhang die Ausbildung des von ihnen so genannten „Concept Image“. Dies umfasst die gesamte mentale Struktur, die für den jeweiligen Begriff assoziiert wird, inklusive deren Eigenschaften und Prozessen.⁹⁰ Ferner wird die Definition mathematischer Begriffe in diesem Blickwinkel erweitert. Sie beschreiben die „Concept Definition“ als wörtliche Form im Ausdruck des zu beschreibenden Begriffes: „It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time.“⁹¹ Damit geht ein sehr persönlicher Zugang, eine individuelle Definition, einher, welche sich entsprechend von einer formalen Definition unterscheiden kann. Wenn eine Lehrperson hauptsächlich die rein formale Definition durcharbeitet und alle Beispiele aus dieser entspringen und das Thema nur kurz behandelt wurde, besteht das folgende Risiko: „[...] the concept image may develop into a more restricted notion, only involving

⁸⁸ Zech. Lernen mathematischer Begriffe. 2002. S. 261.

⁸⁹ Tall, Vinner. Concept Image and Concept Definition. 1981. S. 151.

⁹⁰ Vgl. Ebd. S. 152.

⁹¹ Ebd. S. 152.

formulae, whilst the concept definition is largely inactive in the cognitive structure.“⁹² Es ist (dann) möglich, dass Lernende richtig mit der formalen Definition arbeiten, diese also anwenden können, auch wenn sie ein lückenhaftes oder gar fehlerhaftes „Concept Image“ haben. Thomas Bauer verwendet dies als Argument für die Notwendigkeit, ein nachhaltiges Verständnis zu sichern und schlägt schließlich den Bogen zu dem Einsatz von Peer Instruction: Es zählt nicht nur die formale Definition eines Begriffes (hier wird die Cauchy-Folge als Beispiel angeführt) zu kennen, sondern echtes Verständnis darzulegen:

- Was besagt diese Definition inhaltlich?
- Wie kann man dies (z.B. mit Hilfe einer Zeichnung) erläutern?
- Worin liegt der Unterschied zum Konvergenzbegriff?
- Welche Verwendungen hat der Begriff? Wo wird er im Theorieaufbau der Analysis eingesetzt und wie geschieht dies dort konkret?⁹³

Betrachtet man dies durch die Brille der Peer-Instruction, lassen sich die Ziele der Methode ziemlich genau aus der Beschreibung eines umfassenden Verständnisses lesen. In diesem Zusammenhang erweitert Bauer die Arbeit von Tall und Vinner um die Thematik des Satzlernens. Es wird das „Theorem Image“ mit dem dazugehörigen „Theorem Statement“ hinzugefügt. Dabei ist nicht die Wiedergabe des Wortlautes eines mathematischen Satzes gefragt, sondern:

- Was besagt der Satz inhaltlich?
- Wie kann man die Aussage (z.B. mit Hilfe einer Zeichnung) erläutern?
- Wird die Aussage falsch, wenn der Definitionsbereich kein kompaktes Intervall ist oder die Funktion nicht stetig ist? Welche Beispiele zeigen dies?
- Wie gehen diese Voraussetzungen in den Beweis ein?
- Welche typischen Verwendungen hat der Satz (im systematischen Aufbau der Analysis, in Anwendungen)?⁹⁴

Analog zum „Concept Image“ soll damit die gedankliche Struktur, das mentale Modell und Verständnis zu einem Satz im „Theorem Image“ eingefasst sein. Was die „Concept Definition“ für das „Concept Image“ ist, stellt das „Theorem Statement“ für das „Theorem Image“ dar. Bauer hat zur Orientierung bei der Erstellung von Aufgaben für Peer Instruction eine stufenbasierte Tabelle erstellt. Nach diesem Schema müssten die Peer Instruction-Aufgaben die Stufen zwei und drei ansprechen, damit die Anwendung von dieser Methode sinnvoll im Sinne ihres Ziels sein kann. Die Aufgabe [L4.8](#) fördert mit der Thematisierung der Satzaussage von Satz von Vieta das Theorem Image. Das Concept Image hingegen wird bspw. mit der Aufgabe [L1.1](#), welche die Vorstellung von Zahlenmengen aufgreift, gefördert.

⁹² Tall, Vinner. Concept Image and Concept Definition. 1981. S. 153.

⁹³ Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 9.

⁹⁴ Ebd. S. 10.

Tabelle 1: Begriffs- und Satzlernen (nach Bauer, 2018, S. 11)

Concept Definition	Individuelles Formulieren einer Definition eines Begriffs Abgrenzen des Begriffs gegen andere (ähnliche)	Stufe 1	Präzise Formulierung eines Satzes inklusive Voraussetzungen und Folgerung	Theorem Statement
Concept Image	Verständnis von Sinn und Bedeutung eines Begriffs: Begriffsinhalt, Begriffsumfang, Begriffsnetz	Stufe 2	Verständnis von Sinn und Bedeutung eines Satzes: Satzaussage inhaltlich, auch graphisch oder als Diagramm, alternative Formulierung(en) finden	Theorem Image
	Verwendung des Begriffs: Innerhalb des Theoriezusammenhangs, in Standardbeispielen und -anwendungen	Stufe 3	Verwendung des Satzes: Innerhalb des Theoriezusammenhangs, in Standardbeispielen und -anwendungen	

3.2.3 Grundvorstellungen und eine Methodische Perspektive auf Peer Instruction

Die Argumentation, warum Peer Instruction ein sinnvolles Instrument für das schulische Mathematiklernen ist, greift ebenfalls in didaktischen Punkten methodischer Art. Daher werden im Folgenden kurz die in der Peer Instruction integrierten, „bewährte[n] didaktische[n] Grundmuster und -prinzipien“⁹⁵ vorgestellt werden, auf denen die „neue“ Methode basiert. Dies soll anschaulich verdeutlichen, dass die methodischen Komponenten von Peer Instruction für die Lernenden bekannte Muster sind. Obwohl Peer Instruction als eigene Methode neu erlernt und geübt werden muss, sprechen die systemischen Gegebenheiten und die Erfahrung der Lernenden mit den zugrundeliegenden Methoden für eine weitgehend unkomplizierte Einführung.

Think-Pair-Share:

Bei dieser Methode arbeiten die Lernenden in drei Phasen in sich steigender Interaktivität an einem Problem. Zunächst sollen individuelle Gedanken gefasst werden („Think“), bevor sich jeweils zwei Personen der Lerngruppe über ihre jeweiligen Überlegungen austauschen („Pair“). In der dritten Phase findet eine Fusion mehrerer Paare (aus der zweiten Phase) statt, bei der eine gemeinsame Lösung für das Startproblem erarbeitet wird („Share“). Mit jedem Schritt wird die Aufgabenstellung zusätzlich etwas erweitert. Peer Instruction ist hinsichtlich des Aufbau nah an den Phasen angelegt; zu Beginn denkt (und entscheidet) jede:r über die Antwortmöglichkeiten der Peer Instruction-Aufgabe individuell

⁹⁵ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 49.

für sich. Die erste Phase der Peer Instruction entspricht in dem Modell also der Think-Phase. Darauf folgt der Austausch in einer Kleingruppe oder in Paaren – Pair –, wobei über das Problem diskutiert wird. In einem nächsten Schritt – Share bzw. Expert:innenphase – findet der bearbeitete Aspekt einen Abschluss und das „Problem“ eine Lösung. „Think–Pair–Share und Peer Instruction haben also ein didaktisches Grundmuster gemeinsam: Der Grad der Zusammenarbeit mit anderen wächst im Laufe der Aufgabenbearbeitung.“⁹⁶ Ebenfalls wird in beiden Methoden mit jeder Phase die Aufgabenstellung erweitert. Mit der Peer-Phase kommen die Kommunikation und kritische Auseinandersetzung mit den Aussagen der Mitschüler:innen hinzu. Im letzten Schritt können typische Fehler identifiziert und analysiert werden.⁹⁷

Elicit-Confront-Resolve:

Mithilfe von Peer Instruction können fehlerhafte Vorstellungen und typische Fehler der Lernenden offengelegt und daraufhin korrigiert werden, wenn durch die Aufgabe häufige Schwierigkeiten der Lernenden anvisiert werden. Das hier passende bekannte didaktische Grundmuster nennt sich Elicit-Confront-Resolve und stellt ebendiesen Ablauf nach: Zunächst eröffnet es den Blick auf problematische Vorstellungen und bestimmte typische Fehler (elicit). Bei Peer Instruction passiert dies in der ersten (Individual-) Phase. „Im zweiten Schritt werden Denkweisen bzw. Vorstellungen mit denen anderer Personen konfrontiert (*confront*). Das Ziel besteht darin, dass im dritten Schritt aus dieser Konfrontation eine Lösung erwächst (*resolve*).“⁹⁸ Sollten Lernende letzteres nicht eigenständig erreichen, stellt die Expert:innenphase von Peer Instruction ein Sicherheitsnetz dar, um diejenigen aufzufangen und die entstandene Neugier beziehungsweise kognitive Dissonanz zu befrieden. Eine so ausgelöste Irritation stellt insbesondere eine günstige Lernsituation dar.⁹⁹

Nach dieser methodischen Perspektive fehlt die Betrachtung eines letzten, in keinem Fall weniger wichtigen didaktischen Aspekt des schulischen Mathematikunterrichts: Grundvorstellungen und ihre Relevanz für das Lernen. „Grundvorstellungen verknüpfen mathematische Begriffe mit bekannten Sach- oder Handlungszusammenhängen und geben diesen Begriffen dadurch inhaltliche Bedeutung und Sinn. Die Entwicklung von Grundvorstellungen ist somit zentraler Bestandteil von verständnisvollem Lernen in der Mathematik.“¹⁰⁰ Die Peer Instruction-Aufgaben müssen auf die individuellen Grundvorstellungen der Schüler:innen mit dem Ziel der jeweiligen universellen Grundvorstellung ausgerichtet sein, damit mathematische Begriffe für die individuellen Lernenden

⁹⁶ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 50.

⁹⁷ Vgl. Ebd. S. 51.

⁹⁸ Ebd. S. 51.

⁹⁹ Vgl. Ebd.. S. 51.

¹⁰⁰ Greefarth et al. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. 2016. S.19.

Sinn erhalten. „Durch Grundvorstellungen können fachliche Aspekte eines mathematischen Begriffs erfasst und in Bezug zu sinnhaltigen Kontexten mit Bedeutung versehen werden. Dies ist eine wesentliche Voraussetzung für einen verständnisvollen Umgang mit einem Begriff.“¹⁰¹ Dabei wird zwischen den universellen und individuellen Grundvorstellungen unterschieden, wobei erstere eine Art Soll-Zustand darstellen und letztere sich aus dem persönlichen Lernprozess ergeben, was Individuen sich also konkret vorstellen.¹⁰² Einen Zugang zu den individuellen Grundvorstellungen kann die Lehrperson mittels Beobachtung der Lernenden beim Arbeiten erhalten oder durch deren mündliche (auch schriftliche) Äußerungen darauf schließen.¹⁰³ Die Peer Instruction-Aufgaben können und sollen angesprochene Grundvorstellungen ganz individuell fördern: „Ohne die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen besteht die Gefahr, dass lediglich formales, rezeptives Wissen erworben wird, das in heuristischen Prozessen nicht adäquat genutzt werden kann und weniger transferfähig ist.“¹⁰⁴ Daher ist eine Abstimmung von Peer Instruction-Aufgaben auf die Grundvorstellungen von hoher Priorität. Die verschiedenen Antwortoptionen bieten dafür Platz, auch verschiedene Grundvorstellungen desselben Begriffs synchron anzuzeigen und somit eine Vernetzung innerhalb von verschiedenen, scheinbar getrennten mathematischen Themenfeldern zu ermöglichen. So können beispielsweise Potenzen sowohl als verkürzte Multiplikation ($a \cdot a = a^2$), als dimensionale beziehungsweise räumliche Auffassung (Fläche m^2 oder Raum m^3), als kombinatorische Vorstellung (n^k ; k aus n Objekten auswählen) als auch als funktionale Vorstellung ($f(x) = x^2$, oder $f(x) = 2^x$ als Funktionen) wahrgenommen werden.

Als Methode kann Peer Instruction demnach die Anforderungen der Grundvorstellungen, des Begriffslernens sowie der prozessbezogenen Kompetenzförderung erfüllen. Zu den jeweils betrachteten Komponenten wurden bereits Beispiele angeführt. Diese einzelnen Bausteine des Lernens gilt es zusammenzuführen und daraus entsprechende Kriterien für Peer Instruction-Aufgaben abzuleiten, sodass ein sinnvolles Lernen nach den Bildungsstandards mit Peer Instruction generell möglich ist.

4 Die Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben

Während seiner Forschung an Peer Instruction hat Bauer einen Artikel dem Designprozess von Aufgaben gewidmet. Er beschreibt sein Vorgehen nach einem Iterationszyklus aus Analyse – Design – Test – Evaluation.¹⁰⁵ Für die vorliegende Arbeit werden die daraus resultierten Schlüsse verwendet und

¹⁰¹ Greefarth et al. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. 2016. S. 17.

¹⁰² Vgl. Ebd. S. 18.

¹⁰³ Vgl. Ebd. S. 19.

¹⁰⁴ Ebd. S. 20.

¹⁰⁵ Vgl. Bauer. Design von Aufgaben. 2019. S. 66.

mit weiterer Literatur in Verbindung gebracht, mit dem Ziel, einen Leitfaden zur Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben für die Sekundarstufe I zu erstellen. Dazu wird zunächst die inhaltliche Ausführung – die Aufgaben als Inputgeber und Diskussionsanreger – in den Fokus gerückt und entsprechende Kriterien herausgearbeitet. In einem zweiten Teil werden daraufhin unterschiedliche Fragenformate und Antwortoptionen vorgestellt. Aus diesen Aspekten entsteht im dritten Teil dieses Kapitels ein Leitfaden zur Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben, die für Schule geeignet sind.

4.1 Kriterien

Die Qualität der Fragen ist hinsichtlich des Inhaltes die ausschlaggebendste Gelingensbedingung. Peer Instruction funktioniert nicht mit Fragen nach Wissen beziehungsweise Sachverhalten, welche mehr oder weniger schnell nachzuschlagen sind. „Peer Instruction lebt von der Interaktion Studierender, der Kontroverse und der gemeinsamen Auseinandersetzung mit dem Frageninhalt.“¹⁰⁶ Findet dies nicht statt, erübrigt sich die Notwendigkeit der Diskussion und die Motivation der Lernenden lässt stark nach, wodurch sie im Zweifelsfall bereits in der ersten Votingrunde gar nicht erst eine Antwort abgeben.¹⁰⁷ Die Fragen dürfen inhaltlich also nicht schnell nachschlagbar sein. Ferner wird argumentiert, die Aufgaben anspruchsvoll zu gestalten mit dem Verweis auf Untersuchungen, welche ergaben, dass die Wirksamkeit von Peer Instruction bei „anspruchsvollere[n] Aufgaben höher ist als für weniger anspruchsvolle“¹⁰⁸. Es ist also einleuchtend, dass sie bestimmten Regeln folgen müssen, um damit eine Peer Instruction gelungen durchführen zu können.

In der Literatur werden von u.a. Mazur, Bauer und Riegler bereits notwendige Bedingungen für die Peer Instruction-Aufgaben aus dem Wesen und den Zielen von Peer Instruction abgeleitet. Schon bei der Vorstellung von Peer Instruction gibt Mazur einige Grundregeln für die Aufgaben an, was die Relevanz dieser für ein Gelingen unterstreicht. Es ist also nicht verwunderlich, dass Bauer und einige andere (u.a. Kempen und Riegler) ebenfalls hilfreiche und ähnliche Kriterien entwickelt beziehungsweise zusammengefasst haben.¹⁰⁹ Diese in der Literatur bereits vertretenen Kriterien für Peer Instruction-Aufgaben sollen die Basis für die hier aufgeführten und an den Kontext Schule angepassten Kriterien bilden.

¹⁰⁶ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 43.

¹⁰⁷ Vgl. Ebd. S. 43.

¹⁰⁸ Ebd. S. 44.

¹⁰⁹ Siehe hierzu Mazur. Peer Instruction. Interaktive Lehre. 2017. S. 28; Bauer. Peer Instruction in Übungsgruppen. 2018. S. 7f; Kempen. A report from the field. 2021. S. 240; Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 57.

- K1. Die Aufgabe muss zum Nachdenken anregen und darf kein Wissen abfragen.
- K2. Die Aufgabe zielt auf einen einzelnen Begriff ab, nicht mehrere gleichzeitig.
- K3. Die Antworten sollen Fehlkonzepte und plausible inkorrekte Antwortmöglichkeiten beinhalten.
- K4. Die Aufgabe muss eindeutig formuliert sein.
- K5. Grundvorstellungen müssen in die Aufgabe einbezogen werden.
- K6. Der Schwierigkeitsgrad muss für die Lerngruppe angemessen sein.

Die Reihenfolge der gelisteten Kriterien muss nicht als Priorisierung und Wertung gelesen werden, da dies für jede Aufgabe einzeln anders aussehen kann. Nur ein Zusammenspiel dieser Kriterien kann eine erfolgreiche Durchführung bewirken.

Wie eingangs in diesem Kapitel bereits aufgegriffen wurde, müssen die Aufgabenstellungen zum Nachdenken anregen. Es dürfen keine Fragen gestellt werden, welche durch bloßes Nachschlagen einer Formel beantwortet werden können. Worüber sollte dabei diskutiert werden? Das Verständnis eines Begriffs bliebe in diesem Fall unberührt. Auch dürfen die Fragen nicht auf blankes Ausrechnen abzielen. Lernende können automatisiert haben, was konkret bei bestimmten Fragetypen zu rechnen ist, und dies einwandfrei ausführen ohne mathematisches Verständnis für die zugrundeliegenden Prinzipien zu haben. Andersherum könnten Lernende einen Begriff auch verstanden haben, durch einen einfachen Rechenfehler allerdings kann darauf in der Auswertung der Peer Instruction nicht geschlossen werden. Mit inhaltlicher Auseinandersetzung und der damit einhergehenden Arbeit am Begriffsverständnis hat dies also nichts zu tun. Es würde das Risiko eingegangen, fälschlicherweise ein mangelndes Verständnis zu diagnostizieren, wo nur ein Rechenfehler vorläge oder umgekehrt.

Das zweite Kriterium (Fokus auf einen Begriff) erklärt sich durch die Diagnoseleistung, welche Peer Instruction aufbringen können soll. Im Idealfall geben die erste und zweite Votingrunde ein Feedback an die Lehrenden, inwiefern Begriffe verstanden wurden und an welchen Stellen das Verständnis mangelt. Werden allerdings in einer Peer Instruction-Aufgabe mehrere Begriffe angesprochen, wäre diese nicht trennscharf gestaltet. Eine Diagnose, wo die Stolpersteine und Hürden liegen und worauf in der Expert:innenphase am Ende der Peer Instruction seitens der Lehrenden besonders eingegangen werden muss, könnte nicht gestellt werden. Außerdem könnte die Peer Discussion dann nicht gezielt stattfinden, da der entsprechende Input durch die Frage zu breit aufgestellt wäre und der Austausch aufgeschwemmt wäre. Pro Aufgabe darf also nur ein Begriff thematisiert werden.

Dass die Antwortmöglichkeiten plausible Distraktoren und typische Fehlkonzepte beinhalten sollten (K3), dient in erster Linie der tiefgreifenden, inhaltlich abgrenzenden Auseinandersetzung mit einem bestimmten Begriff. Durch die Eröffnung einer Kontroverse mittels entsprechender

Antwortmöglichkeiten wird eine diskussionsfähige Grundlage für einen angeregten Austausch und die Förderung mathematischen Kommunizierens geschaffen. Es soll eine kognitive Dissonanz (Irritation) ausgelöst werden, die zum intensiven Nachdenken und dem Wunsch nach Aufklärung anregt. Darin liegt der Kern von Peer Instruction, ein bedeutungsvolles Begriffsverständnis zu ermöglichen. Die Peer Instruction-Aufgabe sollte derart aufgebaut sein, dass es unmöglich wird, die Frage trotz einer Fehlvorstellung richtig (mit dieser) zu beantworten.¹¹⁰ Geben genügend Lernende die Antwort einer klassischen Fehlvorstellung, wird diese innerhalb der Lerngruppe aufgedeckt und somit diagnostizierbar. Die Lehrperson kann entsprechend gezielt in der Expert:innenphase darauf eingehen und mit einer etwaigen Folgefrage zum selben Thema eine Diskussion zur Sicherung ermöglichen. Kempen setzt in seinen Kriterien unter anderem die Bedingung an eine Peer Instruction-Aufgabe: „You should learn something from each incorrect response without the student needing to explain.“¹¹¹

Das etwas formale Kriterium der eindeutigen Formulierung (K4) sollte selbstverständlich sein und ist bereits aus den Richtlinien für Multiple- und Single-Choice-Fragen bekannt. Trotzdem beziehungsweise gerade deswegen darf es als Kriterium für Peer Instruction-Aufgaben nicht fehlen, da die Kriterien den Rahmen und gedankliche Stütze beim Erstellen eigener Aufgaben bilden.

Die Einbeziehung von Grundvorstellungen (K5) darf im Einsatz von Peer Instruction in der Sekundarstufe I nicht fehlen. Die Aufgaben sollen den Ist-Stand der individuellen Grundvorstellungen aufgreifen und die Brücke zu den universellen Grundvorstellungen bilden. Hieran ist auch automatisch der Fokus auf ein bestimmtes Lernziel in der jeweiligen Peer Instruction-Aufgabe geknüpft.

Ist eine Aufgabe für eine bestimmte Lerngruppe zu leicht oder zu schwer (K6), wirkt sich das auf die Motivation und die erfolgreiche Durchführung von Peer Instruction aus. Wie bereits bei der Vorstellung von Peer Instruction als Methode im Kapitel 2.3 *Rahmenbedingungen und Voraussetzungen* erwähnt, wird empfohlen, die Peer Discussion nur einzuleiten, wenn über 30 % und unter 70 % der Lerngruppe die richtige Antwort in der ersten Votingrunde gewählt haben.¹¹² Für die Schule ließe sich dieser Bereich jedoch (immer in Abhängigkeit der Lerngruppe) erweitern: So können zu leichte Peer Instruction-Aufgaben (mehr als 70 % der Lerngruppe wählen richtig) zu einer Erhöhung der Motivation durch das eigene Kompetenzerleben beitragen. Außerdem fördert es die verbale Ausformulierung des eigenen Verständnisses und die Fachsprache. Es besteht darüber hinaus die Möglichkeit, dass nicht alle korrekt Antwortenden ihre Wahl durch Verständnis begründet abgegeben haben. Tritt der Fall ein, dass einige Lernende die richtige Antwort aus den falschen Gründen gewählt haben, kann die

¹¹⁰ Vgl. Kempen. A report from the field. 2021. S. 240.

¹¹¹ Ebd. S. 240.

¹¹² Vgl. Ebd. S. 242.

Diskussion ebenso angeregt ablaufen, wie solch eine, bei der im Vorfeld die Anzahl der richtigen Antworten im „gewünschten“ Bereich liegen. Ein zu hoher Anspruch könnte auf der anderen Seite entweder zu Resignation, Raten oder einer hitzigen Diskussion führen. Da nur letzteres im Ansatz wünschenswert ist, muss die Lehrperson in Abhängigkeit der Lerngruppe entscheiden, ob die Phase der Peer Discussion eingeleitet wird und ggf. Impulse als Diskussionsaufhänger setzen.

4.2 Entwurfsmuster: Fragen und Antworten

Nachdem die Gütefaktoren für Peer Instruction-Aufgaben nun erarbeitet sind, bleibt offen, nach welchem Muster die Fragen aufgebaut sein und anhand welcher Schritte sie entwickelt werden können. Im Allgemeinen sollen die Aufgaben den Lernenden helfen, ein weitreichendes Verständnis zu generieren, die eigenen Schwierigkeiten bestimmter Zusammenhänge zu überwinden und „sie typische mathematische Denkmuster praktizieren zu lassen“¹¹³. Zu diesem Zweck zählt Riegler einige gängige Optionen für die Fragenformate auf. Fragestellungen, bei denen von einer Lösung auf bestimmte Eigenschaften des angesprochenen Begriffs geschlossen wird, nennt er „Inverse Fragestellungen“. Dabei kann auf das Verständnis der Lernenden geschlossen werden, da es eine Art „rückwärts denken“ erfordert. Bei der Aufgabe [L5.3](#) wird gefordert, die zu einem unvollständigen Baudiagramm gegebenen Glücksräder anzugeben. Es könnte für eine Aufgabenstellung zu Linearen Gleichungssystemen beispielsweise eine konkrete Lösung präsentiert werden, aus der geschlossen werden soll, welche Eigenschaften das zugehörige Gleichungssystem erfüllen muss.¹¹⁴ Fragen zu Definitionen sind ebenfalls möglich, wenn sie nicht nach der konkreten Definition gestellt werden: Ein mathematisches Objekt könnte vorgestellt werden und die Lernenden wären bei der Beantwortung aufgefordert, zu entscheiden, ob alle Eigenschaften für die entsprechende Definition erfüllt sind.¹¹⁵ Dies wird in der Aufgabe [L3.2](#) umgesetzt. Auch Aufgaben zum Vergleichen und Unterscheiden eignen sich gut für Peer Instruction. Riegler nennt diese „Klassifizieren und Abgrenzen“. Dabei werden mathematische Begriffe, die sich ähnlich sind und von Lernenden gern synonym verwendet werden, wie bspw. Variable, Parameter und Unbekannte betrachtet.¹¹⁶ Im Schulkontext schärft es so das Bewusstsein für Fachsprache. Ein dem naheliegendes Entwurfsmuster widmet sich Grenzfällen. Diese zu betrachten, ist im mathematischen Denken ein Standardmuster und hat somit seine Daseinsberechtigung im Rahmen von Peer Instruction-Fragen.¹¹⁷ Ebenfalls ein zentrales Element der Mathematik stellen Beweise dar. Dementsprechend sollte versucht werden, auch die Tätigkeiten des

¹¹³ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 85.

¹¹⁴ Vgl. Ebd. S. 85 und 67.

¹¹⁵ Vgl. Ebd. S. 85 und 70.

¹¹⁶ Vgl. Ebd. S. 86 und 59, 61, 71.

¹¹⁷ Ebd. S. 87.

Argumentierens und Begründens in der Methode der Peer Instruction umzusetzen. Meist fällt es Lernenden schwer, (kompakt präsentierte) Beweise nachzuvollziehen und die Formalsprache zu übersetzen. „Peer Instruction kann eingesetzt werden, um diese Schwierigkeiten zu überwinden, indem der Fokus der Frage auf eine für [Lernende] schwierige Stelle im Beweis gerichtet wird.“¹¹⁸ Im schulischen Kontext werden Beweise in der 10. Klasse sprachlich bereits heruntergebrochen und an das Niveau angepasst. So könnte eine Peer Instruction-Aufgabe im Schulkontext auch die Argumentation und Begründung von „Regeln“ fokussieren. Riegler listet als weiteres Entwurfsmuster „Argumentationen oder Berechnungen fortführen“. Dabei wird eine solche in der Frage begonnen und reißt unvollendet ab. Die Lernenden sind aufgefordert, mit der Beantwortung den nächsten sinnvollen Schritt anzugeben. Dies wird bspw. beim Satz des Thales in der Aufgabe [L3.1](#) aufgegriffen. Dazu müssen Argumentationsketten verstanden werden, wobei nach Riegler Berechnungsschritte ebenfalls dazuzählen. Unter diesem Aspekt kann die Aufgabe [L4.4](#) als Beispiel herhalten, wobei nach der Lösungsstrategie für die Berechnung der kleinstmöglichen Fläche eines Parallelogramms in einem Rechteck gefragt wird. Dabei müssen diese Fragen allerdings sorgfältig entworfen und ganz bewusst auf das Kriterium K1 (zum Nachdenken anregen; kein Wissen abfragen) geachtet werden, damit nicht bloßes Ausrechnen gefragt ist. Dies kann zum Beispiel gelingen, indem nach dem für den nächsten Schritt zugrundeliegenden Prinzip gefragt wird.¹¹⁹ Des Weiteren gibt es Fragen nach dem Entwurfsmuster „Fehler finden“, welche für sich sprechen. Es handelt sich um eine spezielle Form, Fehlkonzepte offenzulegen.¹²⁰ Die genannten Entwurfsmuster sind nicht immer klar gegeneinander abzugrenzen, durch die fließenden Überschneidungen können einzelne Peer Instruction-Fragen mehrere der genannten Entwurfsmuster einschließen. Darüber hinaus können auch Peer Instruction-Fragen entstehen, die keinem der in diesem Kapitel vorgestellten Arten entsprechen. An dieser Stelle sollte lediglich ein Einblick in den Variantenreichtum gegeben werden. Es wäre vermessen, zu behaupten, die Fragen dürften nur wie in der vorliegenden Arbeit dargestellt und nicht anders aussehen.

Da nun einige Fragenmuster vorgestellt wurden, eröffnet sich der Blick auf die Antwortmuster. Zunächst das offensichtliche: Fragen mit zwei Antwortmöglichkeiten der Art Ja/Nein laden zum Raten ein und eignen sich außerdem nicht besonders, um tiefgreifende Diskussionen anzuregen. Wie viele Antwortmöglichkeiten welcher Art sind also geeignet und sollte es mehr als eine korrekte Antwort geben? Die Forschungsgruppe um Bauer hat sich dieser Frage angenommen und kommt zu dem

¹¹⁸ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 87.

¹¹⁹ Vgl. Ebd. S. 87f.

¹²⁰ Vgl. Ebd. S. 87.

Ergebnis, drei bis vier Antwortmöglichkeiten seien ideal.¹²¹ Dabei haben Auswahlaufgaben mit genau einer korrekten Antwort technische Vorteile, erfordern allerdings Sorgfalt bei der Formulierung. Es wird in diesem Zusammenhang vor ungewollten Abhängigkeiten gewarnt. Solche Abhängigkeitsüberlegungen, „falls (A) wahr ist, müsse auch (C) wahr sein“ können dazu führen, dass Lernende die verbleibende Antwort (B) ohne inhaltlichen Bezug wählen. Dies kann jedoch durch eine weitere Option „mehr als eine der genannten Optionen ist korrekt“ gelöst werden.¹²² Damit werden Lernende zudem nicht darauf getrimmt, es könne bei jeglichen Fragen immer nur eine korrekte Antwort geben. Die Variante der zusätzlichen Antwort „Mehrere Antworten stimmen“ sollte sehr bewusst und gezielt eingesetzt werden, da Lernende bei der Wahl dieser Antwortoption eine konkrete Entscheidung meiden und unter Umständen gedanklich nicht in das Thema eintauchen. Anstelle der Erweiterung um eine zusätzliche Antwort, können als Multiple-Choice statt Single Choice auch mehrere Antwortoptionen gleichzeitig als korrekt markiert werden. Diese Optionen werden bei den Aufgaben [L5.2](#) sowie [L4.5](#) verwendet. Die Voraussetzung dafür ist, dass das verwendete (technische) Tool dies im Votingverfahren zulassen muss. Der Vollständigkeit halber sind im Folgenden knapp die Anforderungen an Multiple-Choice-Fragen nach Riegler aufgeführt: Die Antworten müssen unabhängig voneinander sein, die gleiche Länge und grammatikalische Struktur aufweisen, gleichermaßen präzise formuliert sein (um die Richtige nicht versehentlich zu betonen); an jeder Antwortposition sollte die richtige Antwort vertreten sein und die Distraktoren auf typischen Fehlern basieren.¹²³

In der Nennung verschiedener Antwortformate dürfen die Auswahlaufgaben, bei denen keine Antwortoption korrekt ist, nicht fehlen. Hierbei hat die Frage zumeist das Ziel Feedback auf einer Metaebene an die Lehrperson zu geben, zum Beispiel wie bei Aufgabe [A.2](#), welcher Wert Fehlern seitens der Lernenden beigemessen wird. Es kann keine korrekte Antwort geben, spiegelt aber ein Stimmungsbild und kann die Basis für eine Diskussion bieten.¹²⁴ Eine weitere Option stellen Aufgaben mit Bereichsauswahl dar. Dabei geht es darum, keinen konkreten Antwortwert, sondern einen Bereich anzugeben, in dem dieser liegen soll. Dies bietet sich beispielsweise an, wenn bestimmte Eigenschaften an einer skizzierten Funktion erkannt werden sollen.¹²⁵ Die Aufgabe [L5.1](#) bedient sich dieser Option.

Auch wenn die Lernenden die richtige Antwort geben, bedeutet dies nicht immer automatisch, dass der thematisierte Begriff verstanden wurde. Es besteht die Möglichkeit, dass abgesehen von einer zufälligen Wahl der korrekten Antwort, die richtige aus den falschen Gründen gewählt wurde. Um

¹²¹ Vgl. Bauer. Design von Aufgaben. 2019. S. 67.

¹²² Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 88.

¹²³ Vgl. Ebd. S. 91.

¹²⁴ Vgl. Ebd. S. 89.

¹²⁵ Vgl. Ebd. S. 90 und 72.

diesem Umstand zu entgehen, beschreibt Bauer als wirkungsvolles Mittel, die Argumentation in die Antwortmöglichkeiten mitaufzunehmen.¹²⁶ Diese Antwortart kann ebenfalls durch eine „weil – obwohl“ Formulierung erweitert werden.¹²⁷ Die Aufgabe [L4.10](#) nutzt bspw. diese Antwortart.

Neben den unterschiedlichen Fragen- und Antwortarten wird das Festsetzen von Zielen der einzelnen Peer Instruction-Aufgaben von u.a. Riegler als wichtiger Schritt in der Entwicklung vorgeschlagen. Dies scheint insofern ein sinnvoller Ansatz zu sein, als dass ohne ein inhaltliches Lernziel keine zielgerichteten Aufgaben entstehen. Allerdings werden von Riegler auch Ziele genannt, die durch das Wesen von Peer Instruction automatisch berücksichtigt werden müssen und nicht nur bei konkreten Fragen Anwendung finden. Dazu zählen die Verwendung von geeigneten Distraktoren zur Aufdeckung von Fehlkonzepten der Lernenden oder durch Vergleichen und Kontrastieren das Begriffsverständnis auszubauen.¹²⁸ Da diese Ziele durch die Kriterien für „gute“ Peer Instruction-Aufgaben bereits abgedeckt sind und in jeder Aufgabe stattfinden sollen, werden diese aus der Literatur vorgeschlagenen Ziele in der vorliegenden Arbeit an dieser Stelle nicht als solche berücksichtigt, finden sich aber in anderer Form bspw. in den Kriterien wieder.

Dennoch ist die Frage der Zielsetzung bei der Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben durchaus eine sinnvolle. Nach der inhaltlichen Beschränkung spielt der Lernstand der Schüler:innen zum Zeitpunkt des Einsatzes von Peer Instruction innerhalb der Unterrichtsreihe eine ausschlaggebende Rolle. Leuders unterscheidet Leistungsaufgaben von Lernaufgaben und kategorisiert letztere im Mathematikunterricht nach den Phasen des Lernens: Erkunden; Systematisieren und Üben. Dabei betont er allerdings, dass „Prozesse des Entdeckens und Erfindens und solche des Sammeln und Sicherns [weder] tatsächlich strikt voneinander getrennt [sind], noch sollten sie es sein.“¹²⁹ Dennoch haben diese einzelnen Phasen unterschiedliche Anforderungen, sodass eine derartige Zielsetzung zu Beginn der Erstellung einer Peer Instruction-Aufgabe sinnvoll erscheint. Auch Kempen nähert sich dem Aspekt der Zielsetzung auf ähnliche Weise, indem er nach dem Zeitpunkt des Einsatzes innerhalb der Lektion clustert. Peer Instruction kann zu Beginn einer Lerneinheit sowohl die *Motivation* und oder *Hervorhebung bestimmter Phänomene* des Themas ansprechen als auch das nötige *Vorwissen aktivieren*.¹³⁰ Im Laufe der Lerneinheit kann Peer Instruction dem „*Constructing Knowledge*“ dienen. Neue Begriffe müssen dabei an das bereits vorhandene Wissen angeknüpft werden, um somit das Begriffsnetz auszubauen. Außerdem eignen sich in dieser Lernphase Peer Instruction-Aufgaben mit dem Ziel „*Processing Knowledge*“, wobei besonders das Begriffsverständnis weitergebildet werden soll

¹²⁶ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S.14f.

¹²⁷ Vgl. Ebd. S. 16.

¹²⁸ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 78 und 82.

¹²⁹ Leuders, Büchter. Mathematikaufgaben selbst entwickeln. 2005. S. 114.

¹³⁰ Vgl. Kempen. A report from the field. 2021. S. 239.

und etwaige Fehlvorstellungen ermittelt werden.¹³¹ Zum Ende einer Lerneinheit können die Ziele einer Peer-Instruction-Frage nach Kempen „*Evaluating Knowledge*“ oder auch „*Reflecting on One’s Learning Process*“ lauten. Erstere untersuchen das Begriffsverständnis und erfragen bspw. Eigenschaften vorgegebener Objekte. Letztere stellt eher eine Metaebene dar, bei der die Peer Discussion nicht unbedingt erfolgen muss.¹³²

Bei der Entwicklung von Fragen können mehr als die genannten Muster genutzt werden, solange die Kriterien eingehalten werden. Die Vorgeschlagenen sind als Inspiration und Ideen zu verstehen, nicht als Vorstellung endgültiger allumfassender Optionen. Der Vollständigkeit halber sollte erwähnt werden, dass sich manche Fragenformate und die zugehörigen Antwortarten gegenseitig bedingen und das Ziel ebenfalls vorschreiben. Eine solche Wechselwirkung findet sich, betrachtet man beispielsweise eine Frage aus der Kategorie „Klassifizieren und Abgrenzen“. Die Antwortart „Bereichsauswahl“ kann allgemein nicht als geeignete Form für diese Fragenart infrage kommen.

4.3 Ein Leitfaden zur Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben

Aus diesen verschieden gebündelten Inspirationen, Bedingungen und Vorschlägen sind die Möglichkeiten für Peer Instruction-Aufgaben in ihrer Bandbreite verdeutlicht. Es stellt sich nun die Frage, welche Schritte konkret für die Entwicklung von Fragen für Peer Instruction im schulischen Kontext notwendig sind. Für den folgenden Entwicklungsplan wurden die verschiedenen, in der Literatur beschriebenen Prozesse zur Erstellung sowie der Kontext Schule und die erarbeiteten Kriterien berücksichtigt¹³³:

1. Thema eingrenzen; Begriff wählen
2. Den gewünschten Anforderungsbereich festlegen
3. Soll / Ist der Grundvorstellungen benennen
4. A) Ziel der Aufgabe festlegen
B) Fragenart wählen (in Abhängigkeit von Schritt 4A)
C) Antwortart wählen (in Abhängigkeit von Schritt 4A und 4B)
5. Peer Instruction-Aufgabe ausformulieren
6. Einhaltung Kriterien überprüfen
7. Peer Instruction in der Praxis ausführen
8. Aufgabe auswerten; wiederverwenden (in Sammlung aufnehmen), ändern oder löschen

Zur Vorbereitung muss in einem ersten Schritt das Thema eingegrenzt und ein Begriff gewählt werden. Hierfür empfiehlt sich der Blick in den Rahmenlehrplan respektive die klassenstufenweise

¹³¹ Vgl. Kempen. A report from the field. 2021. S. 239.

¹³² Vgl. Ebd. S. 239f.

¹³³ Insbesondere wurden hier die Prozesse aus der für die vorliegende Arbeit verwendeten Literatur von Kempen, Riegler und Bauer herangezogen.

festgesetzten Lernziele (ggf. des schulinternen Curriculums). Im nächsten Schritt kann dann der Anforderungsbereich der Aufgabe festgesetzt werden. Daraufhin, und als letzter Schritt im Bereich Vorbereitung, muss eine Soll- / Ist-Aufstellung der Grundvorstellung für die konkrete Lerngruppe erfolgen. Für die Erstellung einer Peer Instruction-Aufgabe werden die unter Kapitel 4.2 vorgestellten elementaren Bausteine benötigt: das Ziel, die Wahl der Fragenart sowie die der Antwortart. Die unter Schritt 4 im Prozess der Entwicklung angesetzten Unterstrukturen A) – C) stellen keine empfohlene Reihenfolge dar, bedingen sich aber teilweise gegenseitig. Mit der Festlegung des Aufgabenziels wurde bereits eine Vorauswahl der Fragen- und Antwortart getroffen. Nicht jedes Fragenformat lässt sich auf jedes Lernziel ansetzen. Gleiches gilt für die Beziehung von Fragenart und Antwortmöglichkeiten. Unter Umständen schränkt die Wahl des Fragenformats die sinnvollen Antwortarten ein.

Darauffolgend wird die Peer Instruction-Aufgabe ausformuliert. Nach den Kriterien sollte die Eindeutigkeit im Fokus stehen und beachtet werden, dass die Antwortmöglichkeiten sich nicht großartig in Länge oder grammatikalischer Struktur unterscheiden. Im schulischen Kontext müssen hinsichtlich der Formulierung die Operatoren und Arbeitsanweisungen näher betrachtet werden. Dem Aufbau der Methode geschuldet werden bei Peer Instruction vier Arbeitsschritte von den Schüler:innen verlangt. Zur Präsentation der Peer Instruction-Aufgabe werden die Lernenden mit dem Operator „Lies ... durch“ abgeholt. Sie werden „Wähle ... Antwort“ weiter aufgefordert für eine Antwort zu stimmen. Die Diskussion wird mit der Aufforderung „Überzeuge deine:n Nachbar:in von deiner Wahl“ beziehungsweise „Überzeuge dein Team von deiner Wahl“ eingeleitet. Zuletzt werden sie aufgerufen mit „Wähle ... erneut“ ein zweites Mal abzustimmen. Die einzelnen Peer Instruction-Aufgaben werden traditionell durch Fragen bestimmt. Da sie durch den Ablauf der Methode in Operatoren eingefasst werden, können sie als Fragen bestehen bleiben.

In einem reflektierenden Schritt sollte die entwickelte Peer Instruction-Aufgabe auf die Kriterien und grundsätzliche Tauglichkeit geprüft werden. Letzteres kann durch eine Diskussion mit Kolleg:innen stattfinden. Hierzu sei außerdem gesagt, dass es „u. U. sinnvoll sein [kann], von dem einen oder anderen Kriterium abzuweichen, besonders dann, wenn das Ziel der Aufgabe es erfordert.“¹³⁴ Damit ist die theoretische Entwicklung der Aufgabe abgeschlossen und diese kann nun in der Praxis erprobt werden. Zuletzt wird der Einsatz der einzelnen Aufgabe ausgewertet und kann je nach Erfolg in der Durchführung angepasst, verworfen oder beibehalten werden. Es kann beispielweise sinnvoll sein, die Distraktoren auszutauschen, wenn sie von den Lernenden nicht gewählt werden oder die Formulierung der Frage oder des Einführungstextes abzuändern.

¹³⁴ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 58.

5 Diskussion und Reflexion

Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Methode der Peer Instruction kann als relativ junge Praktik des Mathematiklernens von vielen Seiten beleuchtet und diskutiert werden. Für eine schlüssige Struktur wird zunächst die Wirkung und der Sinn von Peer Instruction als Methode für die Schule betrachtet. Dass Peer Instruction die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen und andere zentrale mathematikdidaktische Prinzipien unterstützen kann, wurde bereits im Kapitel 3 *Peer Instruction und Schule* ausführlich besprochen. An dieser Stelle werden die eventuellen Stolpersteine und Risiken der Methode diskutiert. Im zweiten Teil wird die Durchführung betrachtet und alternative Vorgehensweisen diskutiert. Zuletzt werden die parallel zu dieser Arbeit entstandenen Peer Instruction-Aufgaben reflektiert und deren Genese anhand von Beispielen beschrieben.

5.1 Methode

Für Riegler besteht eine naheliegende Sorge bezüglich der Wirksamkeit der Methode in der Unsicherheit, nicht zu wissen, ob Lernende bei der zweiten Votingrunde die richtige Antwort wählen, weil sie es tatsächlich verstanden haben oder aber ohne sinnstiftendes Verständnis „nachplappern“.¹³⁵ Bauer kontert dieser Gefahr, indem er Begründungen an die Antwortmöglichkeiten knüpft, sodass zumindest nicht die richtige Antwort mit/wegen einer falschen Begründung gegeben werden kann.¹³⁶ Peer Instruction bietet außerdem durch das Zuhören während der Peer Discussion und mit der Expertenphase „ein Sicherheitsnetz, solche falschen Erklärungen wahrzunehmen und noch in der Lehrveranstaltung zu korrigieren.“¹³⁷ Riegler erklärt, das Phänomen des „Nachplapperns“ ist in Lehr-Lern-Situation grundsätzlich gegeben, ob mit oder ohne Peer Instruction. Dabei gibt die Qualität der Peer Instruction-Aufgabe den ausschlaggebenden Punkt. Da es aber nicht die perfekte Aufgabe geben kann, lässt sich die Sorge des „Nachplapperns“ recht unkompliziert mit einer weiteren „isomorphen“ Frage auflösen: „Isomorphe Fragen erfordern das Anwenden derselben Konzepte, beziehen sich aber auf andere Situationen oder Anwendungsfälle.“¹³⁸ Wenn sich nach der ersten Aufgabe das Verständnis der Lernenden verbessert hat, müsste dies im ersten Voting der zweiten Aufgabe ersichtlich werden. In einer von Smith et al. 2009 veröffentlichten Studie konnte ein Zuwachs richtiger Antworten bei der zweiten Aufgabe verbucht und ein „Nachplappern“ somit ausgeschlossen werden.¹³⁹ Sollte ein solcher Zuwachs nicht erfolgen, kann zumindest diagnostiziert werden, dass ein Begriff nicht in Gänze

¹³⁵ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 34.

¹³⁶ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 14.

¹³⁷ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 34.

¹³⁸ Ebd. S. 34.

¹³⁹ Vgl. Smith et al. Why Peer Discussion improves student performance. 2009. S. 122 und Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 35.

verstanden wurde und ggf. ermittelt werden, wo die Stolpersteine liegen. Die Gefahr des „Nachplapperns“ kann zwar nicht vollständig gebannt, wohl aber auf ein arbeitsfähiges Minimum reduziert werden.

Die sprachliche Anforderung, die Peer Instruction an alle Lernenden stellt, ist die womöglich größte Schwäche der Methode. Die Schüler:innen müssen sowohl die Fachsprache als auch die Formalsprache aus den Aufgaben lesen, übersetzen und verstehen müssen, um den Peer Instruction Durchlauf überhaupt bestreiten zu können. Als nächstes ist die Verwendung für den Austausch mindestens Alltagssprache mit Einflüssen von Fachsprache, also Bildungssprache, gefordert. Lernende mit einem Förderschwerpunkt in Sprache stehen damit neben der innermathematischen Aufgabe vor einer sehr großen zusätzlichen Herausforderung. In dieser Hinsicht wird eine Diagnose von dem Verständnis des behandelten Begriffs eventuell verfälscht. Wenn die Frage oder Antwort aus sprachlicher Sicht falsch verstanden und somit falsch beantwortet wird, kann der behandelte Begriff trotzdem verstanden worden sein. Eine dahingehend sensible Anpassung der Sprache zwar möglich, trotzdem bleibt die Methode sehr sprachlastig.

Ein zweiter grundlegender Aspekt, der für Peer Instruction diskutiert werden muss, liegt in den durch die Methode angesprochenen Persönlichkeitseigenschaften. Peer Instruction ist insbesondere auf den Diskurs der Lernenden untereinander ausgerichtet und legt den individuellen Leistungsstand allerseits schonungslos offen. Introvertierte oder in dem angesprochenen Thema fachlich unsichere Lernende können sich dadurch bloßgestellt fühlen. Darunter würde die Motivation leiden und freies Denken gehemmt werden, wenn die Methode als unangenehm empfunden wird.¹⁴⁰ Die praktische Auswirkung dessen wäre, dass sich die Lernenden nicht mitteilen und keine Diskussion zustande kommt. Die Basis für diese negative Auswirkung der Methode auf die Lernenden besteht allerdings in dem Denken, dass Fehler als etwas Schlechtes, zu Vermeidendes aufgefasst werden. Diese Lernatmosphäre sollte so oder so unbedingt aufgebrochen und durch ein fehlerfreundliches Lernumfeld ersetzt werden. Die Peer Discussion bietet zugleich das Potential, zu offenbaren, dass Zweifel, Neudenken und Infragenstellen bei allen Personen zum Lernprozess gehören. Zu erkennen, dass dies übliche Verfahren sind, wenn ein Begriff durchdacht und dann verstanden wird, kann die Scheu vor der offenen Kommunikation nehmen. Im Grunde bietet Peer Instruction somit eine Herangehensweise, Fehlerkultur im Unterricht zu etablieren. Mithilfe von Peer Instruction kann expliziert werden, dass nicht alle anderen abgesehen von einem selbst einen Begriff tiefgreifend verstanden haben und dass gemeinsames diskutieren zum Verständnis beitragen kann – ohne negative Auswirkung. Dies passiert allerdings nicht durch die

¹⁴⁰ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 20.

Methode allein, sondern bedarf einer entsprechenden Einführung durch die Lehrperson und die besonders betonte Lernsituation statt Leistungssituation.

Ein letzter Aspekt, der zur Debatte steht, betrifft die zentrale Rolle der Peer Discussion. Da nicht alle Lernenden auch gute Erklärende sind, geht das Vorhaben des gegenseitigen Überzeugens durch Erklärung womöglich verloren. Dies wurde bereits in der Auswertung der Studie von Balta et al. 2021 thematisiert. Dort heißt es: „Another possible reason for the ineffectiveness of PI in our study is the fact that we cannot assume that every student peer is also a good teacher.”¹⁴¹ Dass die Schüler:innen während des Lernprozesses in der Begriffsbildung nicht zwingend gute Lehrende sind, ist anzunehmen. Es ist an dieser Stelle entscheidend, auf das Ziel der Diskussionsphase erneut einzugehen: Die Diskussion soll keine Gleichsetzung mit einer Erläuterung bestimmter Sachverhalte durch Peers sein. Zunächst müssen die Sinnzusammenhänge und Bedingungen des präsentierten Begriffs individuell durchdacht werden. In der Diskussionsphase geht es dann vielmehr um das Training, die eigenen Gedanken zu verbalisieren und mathematische Begriffe individuell zu formulieren. Dabei fachbezogen aufeinander einzugehen und somit tieferes Verständnis zu generieren ist das eigentliche Ziel der Peer Discussion. Daher ist die Sorge, dass Lernende keine guten Lehrenden sind, für Peer Instruction zweitrangig. Mittels Peer Instruction werden die Lernenden durch die Förderung mathematischen Kommunizierens besser im Erklären. Dies ist aber keine Voraussetzung für die erste Durchführung der Methode. Zweifelsfrei bedeutet eine präzise Verbalisierung der individuellen Gedanken eine förderlichere Kommunikation und eine entsprechend bessere Situation für das Verständnis. Dies muss trainiert werden und Peer Instruction bietet durch seinen Aufbau eine gute Grundlage dafür. Eine dahingehend sinnvolle Überlegung seitens der Lehrperson könnte eine Anpassung der Zeiten für die einzelnen Phasen sein.

5.2 Durchführung

Mazurs Empfehlung, die Peer Discussion nur dann durchzuführen, wenn zwischen 35 % und 70 % der Lerngruppe die korrekte Antwort abgegeben haben, schließen sich unter anderem Bauer und Kempen mit geringen Abweichungen in den Prozentangaben an.¹⁴² Dies ist allerdings ein streitbarer Punkt. Beachtet man die Argumentation für den sinnvollen Einsatz von Peer Instruction, fällt für die obere Grenze von etwa 70 % korrekt Antwortenden folgende Unstimmigkeit auf: Wenn mehr als 70 % der Lernenden die richtige Antwort in der ersten Votingrunde abgegeben haben, können zwar weniger Personen von der falschen zur richtigen Antwort umgestimmt werden. Dennoch kann eine Diskussion

¹⁴¹ Balta et al. The Impact of Peer Instruction. 2021. S. 218.

¹⁴² Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in mathematische Übungsgruppen. 2018. S. 6; Kempen. A report from the field. 2021. S. 242.

über die Argumentation sinnvoll erfolgen und oder die Formulierung eines Begriffs in eigenen Worten (Concept Definition bzw. Theorem Statement) verbessert werden. Die Peer Discussion ausfallen zu lassen, weil das Wachstum von richtigen Antworten vom ersten zum zweiten Voting nicht besonders stark sein kann, ist zu kritisieren. Im schulischen Kontext wird mit der Diskussion auch das Ziel der Förderung des mathematischen Kommunizierens verfolgt. Es besteht bei hoher Anzahl korrekter Antworten zudem die Option, die Lernenden zu beauftragen, andere Begründungen (als etwaige genannte) zu finden und in eigene Worte zu fassen. Außerdem sollten 30 % der Lernenden mit einer Fehlvorstellung oder mit fehlendem Verständnis zu einem Begriff nicht ignoriert werden. Alle Lernenden, auch wenn es nur eine Person betrifft, die durch die Diskussionsphase ein vertieftes Verständnis entwickeln, sind ein Gewinn und sollten nicht vernachlässigt werden. Bei der Auswertung des Tutor:innenfeedbacks in Bauers Artikel zum Design von Peer Instruction-Aufgaben, stellte sich heraus, dass auch Aufgaben außerhalb des Bereichs von 30 % bis 70 % eine fruchtbare Diskussion hervorbringen können. Waren die Aufgaben zu leicht, hatte dies eine motivierende Wirkung auf die Studierenden. Zu schwierige Aufgaben¹⁴³ hatten mitunter interessante Diskussionen zur Folge, welche dann in der Expert:innenphase aufgegriffen wurden.¹⁴⁴ Eine Möglichkeit mit dem Aspekt des Schwierigkeitsgrads umzugehen, stellt die Überlegung Bauers dar, zu einem Begriff kleine Serien mit steigendem Anforderungsniveau zu entwickeln. Diese sollen bis zur gewünschten Stufe ohne Peer Discussion durchgegangen werden und erst ab einer gewissen Anzahl falscher Votings den vollständigen Ablauf der Methode vollziehen.¹⁴⁵ Je nach Lerngruppe und Förderungsschwerpunkt der Unterrichtsstunde, kann ein derartiger Einsatz sinnvoll sein. Dabei muss der entsprechende Zeitaufwand sowohl in der Vorbereitung als auch in der Umsetzung mitbedacht werden.

Mit dem folgenden Vorschlag bringt Riegler einen weiteren Gedanken zu diesem Thema in die Debatte. Bei Fragen mit einem hohen Anteil richtiger Antworten in der ersten Votingrunde eignet sich eine Anschlussfrage, bei der die Sicherheit mit der die jeweilige Antwort gegeben wurde, erfragt wird. Die Lehrperson kann dann eine fundierte Entscheidung treffen, ob die Phase der Peer Discussion sinnvoll ist oder diese übersprungen werden kann. Dies „[...] funktioniert bei *Peer Instruction* jedoch nicht sauber, denn es ist nicht klar, wie sich die Konfidenz der [Lernenden] in ihre Antworten auf die einzelnen Antwortoptionen verteilt.“¹⁴⁶ Unter der Voraussetzung, dass Abstimmssysteme verwendet werden, welche zulassen, dass die Lernenden direkt ihre Sicherheit bei der Antwortabgabe angeben können, kann diese Unklarheit ausgeschlossen werden.

¹⁴³ „zu leicht/schwierig“ bedeutet hier außerhalb der gesetzten Spanne von 30 % – 70 % korrekter Antworten.

¹⁴⁴ Vgl. Bauer. Design von Aufgaben. 2019. S. 70.

¹⁴⁵ Vgl. Bauer. Peer Instruction als Instrument in Übungsgruppen. 2018. S. 21.

¹⁴⁶ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 90.

Mit der Frage nach der Paarung der Lernenden in der Phase der Peer Discussion schneidet Bauer einen weiteren diskutierbaren Gesichtspunkt an. Er erklärt, dass die Gruppen nach Möglichkeit heterogen bzgl. ihrer Antwortwahl zusammengesetzt werden sollen. Der Ansatz ist durchaus nachvollziehbar und sinnvoll, denn angeregte Diskussionen durch mehr Input verstärkt werden. Allerdings stehen dem Nutzen zwei große Argumente gegenüber. Zum einen bedeutet eine Umplatzierung nach den jeweils passenden Personen im Unterrichtskontext Unruhe und einen nicht unerheblichen Zeitfaktor. Zum anderen wird die Anonymität vor der gesamten Lerngruppe nicht gewahrt. Letzteres spielt keine größere Rolle, wenn eine fehlertolerante Lernatmosphäre herrscht und sich die Schüler:innen frei äußern wollen, ohne die Meinung einer leistungsstarken Person zu kopieren. Vor der Durchführung von Peer Instruction muss die Lehrperson also zunächst entscheiden, wie viele Schüler:innen in einer Gruppe die Peer Discussion führen. Des Weiteren gilt es abzuwägen, ob die Paarung der Lernenden mit dem oder der Sitznachbar:in immer gleich bleibt oder ob bzgl. der Antwortwahl heterogene Paarungen / Gruppierungen geformt werden.

Peer Instruction ist wie jede Methode in der Anwendung nicht gefeit vor möglichen Problemen. Die Nutzung von Technik und Tools stellt dahingehend immer ein Risiko dar. Allerdings lässt sich dieses Problem durch gute Vorbereitung minimieren. Ein sicherer Umgang mit dem verwendeten Programm, die zusätzliche Konsultation einer erfahrenen Person sowie die Vorbereitung einer Alternative können hier Abhilfe schaffen.¹⁴⁷ Ein weiteres großes Problem tritt auf, wenn die Lerngruppe sich nicht an der Methode teilnimmt und der Peer Instruction Prozess nicht funktioniert. Die Lerngruppe muss entsprechend motiviert sein oder werden, was bereits unter Kapitel 2.3 *Rahmenbedingungen und Voraussetzungen* erläutert wurde. Eine Option stellt dabei die Verdeutlichung der Ziele und des damit verbundenen sinnvollen Einsatzes dar. Nach Riegler stellt bei einem grundsätzlichen Scheitern der Methode eine kritische Ursachenanalyse die notwendige Maßnahme dar. Dabei muss geprüft werden, ob die Aufgaben den Kriterien standhalten. Ebenfalls muss beachtet werden, dass Peer Instruction als neue Methode einiger Übung seitens der Lernenden bedarf, um verinnerlicht zu werden. Ist sie für eine Lerngruppe neu, reicht es eventuell aus, den Lernenden Zeit zu geben und das Ziel zu verdeutlichen. Nicht nur die Methode als solche muss trainiert, sondern auch die Rahmenbedingungen etabliert werden: „Das Schaffen einer fehlertoleranten Lehrveranstaltungsatmosphäre benötigt Zeit. Dies ist ein weiterer Grund, weshalb Peer Instruction regelmäßig durchgeführt werden sollte.“¹⁴⁸ Ferner kann es passieren, dass die Lernenden bereits in der ersten, individuellen Phase miteinander diskutieren wollen, wenn der Ablauf bekannt ist. Dies ist immer problematisch, insbesondere bei Aufgaben, denen das Muster Elicit – Confront – Resolve zugrunde liegt. Der so erzeugte kognitive

¹⁴⁷ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 135.

¹⁴⁸ Ebd. S. 46.

Konflikt würde bei einer Vorbesprechung mindestens verringert. In diesem Fall können Lernende an den Ablauf erinnert und die Einhaltung der Phasen ermahnt werden.¹⁴⁹

5.3 Peer Instruction-Aufgaben

Die Herausforderung des Erstellungsprozesses guter Peer Instruction-Aufgaben sollte nicht unterschätzt werden. Die Entwicklung der Aufgabensammlung im Zuge dieser Arbeit soll nachfolgend beschrieben und reflektiert werden – nicht zuletzt, da sich dieser Prozess als anspruchsvoller herausstellte, als ursprünglich erwartet.

Für die hier vorgestellten Aufgaben wurde zunächst der Rahmenlehrplan durchsucht, um geeignete mathematische Begriffe und Aussagen zu finden. Die in diesem ersten Schritt entstandenen Listen, die handschriftlichen Kopien des Rahmenlehrplans ähnelten, haben jedoch nur bedingt wenig zum Entwicklungsprozess beigetragen. Dies änderte sich auch durch den Fokus auf die Leitideen im nächsten Schritt noch nicht. Als ergiebige Quelle erwiesen sich Schulbücher, von denen dritten Schritt Exemplare aus verschiedenen Reihen zur Inspiration herangezogen wurden. Dadurch ließen sich erste „geeignete“ Begriffe und Themen identifizieren. Da eine Modifikation von etwas Vorhandenem in der Regel leichter fällt, als die eigentliche Erstellung, wurden in einem ersten Durchlauf mehrere Entwürfe von Peer Instruction-Aufgaben formuliert. Darauf aufbauend wurde für jede Aufgabe ein möglicher Anforderungsbereich festgelegt, entsprechende Grundvorstellungen recherchiert und die Fragen- sowie Antwortart in Abhängigkeit vom gewählten Anforderungsbereich angepasst. In einem zweiten Durchgang wurden diese überarbeiteten Entwürfe dann auf die erstellten Kriterien hin überprüft, bevor diese dann mit anderen fachlich versierten Personen diskutiert wurden. Die dabei extrahierten Ungenauigkeiten und Präzisierungsvorschlägen mussten schließlich in einem weiteren Schritt eingearbeitet werden. Um diese durchlaufenen Schritte greifbarer zu machen, folgt im nächsten Abschnitt eine exemplarische Vorstellung des Entwicklungsprozesses von drei erstellten Peer Instruction-Aufgaben einschließlich der zugehörigen Überlegungen und Reflexionen.

Genese von PI-Aufgabe L4.2

Das Thema dieser Aufgabe stellt das Lösen linearer Gleichungssysteme dar. Dabei sollte es konkret um den sinnvollen Einsatz der verschiedenen Verfahren gehen. Die Schüler:innen sollten idealerweise in der Aufgabe diskutieren, dass durch genaues Hinschauen bei der Wahl des Verfahrens die Lösungsfindung erleichtert werden kann. Der Vorteil durch die Wahl des „geeignetsten“ Verfahrens sollte dabei deutlich werden. Der erste Entwurf der Aufgabe lautete wie folgt:

¹⁴⁹ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 137f.

Gegeben ist folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$\text{I} \quad y = 2x + 7$$

$$\text{II} \quad y = 13 - 16x$$

Welches Verfahren bietet sich zur Lösung dieses Gleichungssystems am ehesten an (schnellster Rechenweg)?

- a) Additionsverfahren
- b) Gleichsetzungsverfahren
- c) Systematisches Probieren
- d) Einsetzungsverfahren

Bei der Betrachtung der Kriterien fallen bei dieser Aufgabe mehrere problematische Aspekte auf. Der relevanteste ist wohl die Tatsache, dass das Ziel der Peer Instruction nicht erreicht wird: Diese Aufgabe fördert in der vorliegenden Fassung weder tiefergehendes Verständnis, noch das Nachdenken über und Begründen der Antwortoptionen. Die Lernenden können leicht dazu verleitet werden, die Antwortoption mit dem Verfahren zu wählen, mit dem sie am besten vertraut sind, unabhängig vom Inhalt der Aufgabe. Letztlich führen alle Verfahren zu einer Lösung, und der schnellste Weg kann durchaus der individuell sicherste sein. Das bedeutet, dass auf individueller Ebene letztlich jede der Antwortmöglichkeiten „richtig“ sein kann. Aus diesem Grund eignet sich diese Fassung der Aufgabe noch nicht sonderlich gut für die Methode der Peer Instruction.

Durch die Hinzunahme einer Begründung in den Antwortoptionen könnte die Diskussion mehr in Richtung einer mathematischen Argumentation über die Eignung und weniger in Richtung einer Diskussion über den individuell bevorzugten Weg gelenkt werden. Da in den Antworten alle Verfahren genannt werden, kann diese Aufgabe erst eingesetzt werden, wenn die Verfahren entsprechend dem Niveau G des Rahmenlehrplans im Themenfeld *Gleichungen und Gleichungssysteme lösen* hinreichend bekannt sind. Es liegt zudem nahe, auf konkrete Zahlen zu verzichten, um die Allgemeingültigkeit zu betonen und ein gedankliches „Kochrezept“ zu vermitteln. Die Behandlung aller Verfahren in einer Aufgabe widerspräche jedoch dem zweiten entwickelten Kriterium, wonach sich die Aufgabe nur auf einen Begriff beziehen soll. Um die Komplexität der Aufgabe angemessen zu halten, sollte nun nur ein Verfahren thematisiert werden. Nach der Überarbeitung sah die Peer Instruction-Aufgabe wie folgt aus:

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen gibt es verschiedene Verfahren.
In welchem Fall eignet sich das Additionsverfahren am ehesten?

- a) Wenn zwei Koeffizienten der gleichen Variable denselben Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen haben, weil Addition sonst nicht zur gewünschten Eliminierung führt
- b) Wenn beide Gleichungen bereits nach derselben Variablen umgestellt sind
- c) Wenn zwei Koeffizienten denselben Wert haben
- d) Wenn die Aufgabe es vorschreibt
- e) Wenn bei der gleichen Variable die Koeffizienten gleich oder ein Vielfaches voneinander sind

Durch die Antwortoptionen wird nun eine argumentationsbasierte Diskussion angestoßen, die nur eines der Verfahren näher betrachtet und zudem in den Distraktoren plausible Gedankengänge repräsentiert, die die Grundlage für die Eignung anderer Verfahren bilden. Die letzte zu reflektierende Hürde stellt die Verwendung von Fachsprache dar. Sollte etwa der Begriff „Koeffizient“ noch nicht eingeführt sein, muss diese Aufgabe sprachlich angepasst werden. Als weitere Variationen dieser Aufgabe bieten sich entsprechende Peer Instruction-Aufgaben zur Eignung der übrigen Lösungsverfahren an.

Genese von PI-Aufgabe L1.1

Bei dieser Aufgabe sollten die Zahlenmengen \mathbb{Q} der rationalen Zahlen sowie \mathbb{R} der reellen Zahlen besprochen werden. Die Notwendigkeit, warum die reellen Zahlen eingeführt werden, stellt hierbei die zentrale Aussage dar. Bereits bevor ein erster Entwurf zur Formulierung erstellt wurde, hat sich ein tückischer Fehler im Entwicklungsprozess eingeschlichen. Es wurde nicht verschärft, ob mit dieser Aufgabe ein Einstieg ins Thema geleistet werden sollte, oder ob die Lernenden bereits von der Existenz der reellen Zahlen erfahren haben. Dadurch wurde bereits im Zuge der ersten Verschriftlichung die Formulierung angepasst:

~~Warum reicht die Zahlenmenge \mathbb{Q} nicht aus zur Darstellung aller Zahlen? Reicht die Zahlmenge \mathbb{Q} zur Darstellung aller Zahlen aus?~~

- a) Reicht aus, weil Brüche durch größeren Nenner unendlich klein werden können.
- b) Reicht nicht aus, weil es Zahlen gibt, die nicht durch einen Bruch (oder die entsprechende periodische / endende) Dezimalzahl dargestellt werden können.
- c) Reicht ~~aus~~ nicht aus, weil natürliche Zahlen und negative Zahlen fehlen würden
- d) Reicht aus, weil Zahlen als Dezimalzahl dargestellt werden können.

Mit dem Feedback im Fachbereich wurde zunächst der Einsatzzeitpunkt innerhalb der Lerneinheit „Erweiterung der Zahlenmengen um \mathbb{R} “ auf nach der Einführung festgelegt. Damit geht ebenfalls einher, dass die Antwortoptionen nicht zu gleichen Teilen in Zustimmung sowie Negierung der Frage fallen dürfen. Die Schüler:innen sollen nicht direkt 50 % der Antwortmöglichkeiten ausschließen können und demnach zwischen nur noch zwei Antwortoptionen geraten wird. Bei der Analyse der Aufgabe stellte sich heraus, dass eine Umkehrung von a) in „Reicht nicht aus“ mit derselben Begründung funktionieren kann. Dies ist abhängig von der individuellen Vorstellung, dass reelle Zahlen als Dezimalzahlen kleiner werden können als Brüche. Hiermit wird eine „bekannte Floskel“ aus dem Mathematikunterricht als Distraktor verwendet. Eine Antwortmöglichkeit sollte weiterhin „Reicht aus“ aufgreifen, da mit der Begründung eine weitverbreitete Hürde bedient wird. Die Reihenfolge der Antwortoptionen sollte noch geändert werden, um die blockartige Struktur von drei aufeinanderfolgenden „Reicht nicht aus“ und einem hinterhergeschobenen „Reicht aus“ aufzubrechen. Die grammatikalischen Strukturen der vier Antwortoptionen sollten ferner einander ähnlich sein, um keine Antwortoption versehentlich zu betonen. Die Formulierung „reicht aus“ kann durch „genügt“ ersetzt werden, um die Verbtrennung zu umgehen und die Aufgabe sprachmelodisch abzurunden. Schließlich ergab sich aus diesen gesammelten Aspekten die folgende Peer Instruction-Aufgabe:

Genügt die Zahlmenge \mathbb{Q} zur Darstellung aller Zahlen?

- a) Sie genügt nicht, weil Brüche durch größeren Nenner unendlich klein werden können.
- b) Sie genügt nicht, weil nicht alle Wurzeln dargestellt werden können.
- c) Sie genügt, weil alle Zahlen auch als Dezimalzahl dargestellt werden können.
- d) Sie genügt nicht, weil natürliche Zahlen und negative Zahlen fehlen würden.

Die Aufgabe könnte auch an einen Einsatz zum Beginn der Lerneinheit angepasst werden. Das Potential besteht in der Irritation, die bspw. durch die Auflösung von $\sqrt{2}$ ausgelöst wird. Dabei müssten die Antwortoptionen entsprechend adaptiert werden.

Genese von PI-Aufgabe 4.10

Das nun folgende dritte Beispiel veranschaulicht, inwiefern sich das Lernziel einer Aufgabe innerhalb desselben Themas vollständig verändern kann. Unter dem Schwerpunkt „Eigenschaften von Funktionen nutzen“ wurde in der Aufgabenerstellung zunächst die begründete Wahl eines Funktionstyps zur Darstellung eines gegebenen Datensatzes anvisiert. Die gedachte Frage bei der Formulierung des ersten Entwurfs lautete: „Welcher Funktionstyp ist zur Beschreibung der folgenden Situation angemessen?“.

Die folgende Tabelle stellt die Gewinne der Firma X von „Vanverkauf und Zubehör“ vor, während und nach der Pandemie dar:

2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
50.314	99.648	201.870	398.760	800.500	1.590.900	3.210.000

0,5 1 2 4 8 16 32

Welcher Funktionstyp kann diese Gewinntabelle am sinnvollsten darstellen?

- a) Quadratisch
- b) Exponentiell
- c) Linear
- d) Es sind nicht genug Daten vorhanden.

Ohne Einbezug der Realität, hätte die Frage unter Umständen eine Daseinsberechtigung gehabt. Allerdings enthält die Frage durch den Modellierungsbezug andere Anforderungen, sodass die Tabelle, der Realitätsbezug sowie die Frage nach einer Entscheidung für einen bestimmten Funktionstypen keinen sinnvollen Zusammenhang bilden. Es ist offensichtlich, dass die Lernenden bei der schrittweisen Verdopplung von Werten auf eine exponentielle Funktion zur Darstellung des Wachstums schließen sollten – nur wird das in diesem Beispiel weder gefragt noch wäre es hinsichtlich des Realitätsbezugs angebracht. Dies hinterfragend, entwickelte sich das Fragenziel weiter und fokussierte stärker auf Sinnstiftung und realistischen Anwendungsrahmen einer Funktion. Demzufolge entwickeln sich vermutlich anregende Diskussionen, ohne dass auf mathematischen Inhalt verzichtet werden muss. Zugleich ist es fraglich, ob der erste Entwurf überhaupt eine fundierte inhaltliche Diskussion auslöst. Als zweiter Kritikpunkt kommt hinzu, dass die Antwortoptionen keine Argumente beinhalten. Durch das Hinzufügen von Begründungen gewinnt die Aufgabe und die damit verbundene Diskussion an Tiefe. Mit der Verschiebung des Aufgabenziels entstanden wiederum neue Antwortmöglichkeiten, bei

denen auch dieser zweite Kritikpunkt aufgegriffen werden konnte. Schließlich fiel die Wahl auf die folgende Variante:

Die folgende Tabelle stellt die Umsätze der Firma „VANverkauf & Ausbauzubehör“ vor und während der Corona-Pandemie dar:

Jahr	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Umsatz in €	50.314	99.648	201.870	398.760	800.500	1.569.900	3.210.000

Welcher Funktionstyp kann die Umsatztablette des Unternehmens am sinnvollsten für eine Prognose darstellen?

- Eine lineare Funktion, weil der Umsatz streng monoton steigend ist.
- Eine quadratische Funktion, obwohl es bei 2020 und 2022 Ausreißer aus den Quadraten gibt.
- Eine exponentielle Funktion, obwohl die Zahlen annähernd um den Faktor 100.000 verschoben sind.
- Die Umsatztablette kann nicht sinnvoll dargestellt werden, weil es keine Auskunft über einen Trend im nächsten Jahr gibt.

Zwar entsprechen die Werte dieser Version noch immer annähernd dem Kurvenverlauf von $f(x) = 2^{x-1} \cdot 100.000$, aber diese Werte in ein Koordinatensystem einzutragen, ist nicht per se sinnvoll. Des Weiteren wurde der Begriff „Gewinne“ nach dem Feedback von Fachkundigen durch „Umsätze“ ersetzt. Bei einer erneuten Konsultation des Fachkollegiums zur Tauglichkeit dieses zweiten Entwurfs wurde diskutiert, dass der Realitätsbezug und die Grenzen der sinnvollen Darstellung durch Funktionen noch stärker betont werden sollten. In diesem Zusammenhang ist die letzte Antwortoption etwas ungenau, denn es ist durchaus möglich eine Wertetabelle sinnvoll darzustellen. Der kausale Zusammenhang der Prognose und einer Darstellung der Wertetabelle als Funktion ist an dieser Stelle allerdings nicht schlüssig. Daher wurde die Aufgabe ein weiteres Mal überarbeitet:

Die folgende Tabelle stellt die Umsätze der Firma „VANverkauf & Ausbauzubehör“ vor und während der Corona-Pandemie dar:

Jahr	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Umsatz in €	50.314	99.648	201.870	398.760	800.500	1.569.900	3.210.000

Die Firma möchte hieraus die zukünftige Entwicklung prognostizieren. Welche Art von Funktion lässt sich dazu sinnvoll einsetzen?

- a) Eine lineare Funktion, weil der Umsatz streng monoton steigend ist.
- b) Eine quadratische Funktion, obwohl es bei 2020 und 2022 Ausreißer aus den Quadraten gibt.
- c) Eine exponentielle Funktion, obwohl die Zahlen annähernd um den Faktor 100.000 verschoben sind.
- d) Kein Funktionstyp kann der Firma Auskunft über einen Trend im nächsten Jahr geben.

Mit der letzten Anpassung der Frage sowie der Umformulierung von der Antwortoption d) ist die Entwicklung abgeschlossen. Das Aufgabenziel wird durch das Zusammenspiel von der Frage und den zu diskutierenden Antwortoptionen verfolgt. Man hätte auch das ursprüngliche Ziel beibehalten können, aber müsste dafür den Realitätsbezug streichen oder ein für eine Prognose passendes Beispiel wählen.

Diese drei begleiteten Prozesse illustrieren die unabdingbare Notwendigkeit der Reflexion und Überarbeitung und dass die Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben geübt werden muss. Peer Instruction steht und fällt mit den erstellten Aufgaben, weshalb die Reflexion dieser ein zentraler Punkt für eine erfolgreich Durchführung ist. Bereits während der Entwicklung sollte die Einhaltung der Kriterien beachtet werden. Wenn die Aufgabe es erfordert, kann der Schwerpunkt auf ein bestimmtes Kriterium verlagert und andere somit etwas vernachlässigt werden.¹⁵⁰ Weiterhin schlägt Riegler zur Analyse von Peer Instruction-Aufgaben folgende reflektierenden Leitfragen vor:

- Welche Ziele werden mit der Frage verfolgt?
- Was macht für Sie die Frage inhaltlich wertvoll gestellt zu werden?
- Sehen Sie Gründe die Fragestellung zu verändern und welche sind das?

Da diese Fragen durch die an die Schule angepassten Kriterien redundant sind, soll die Reflexion der zu dieser Arbeit entwickelten Peer Instruction-Aufgaben im schulischen Kontext ebenfalls angepasst werden. Diese Leitfragen zur Reflexion ergeben sich aus dem Wesen und den Zielen der Methode, aus

¹⁵⁰ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 58.

den Anforderungen der kompetenzorientierten Schulbildung und basieren auf der Erfahrung, die durch die Entwicklung und Verbesserung der parallel zu dieser Arbeit entstandenen Peer Instruction-Aufgaben entstand.

- Werden die Kriterien K1 bis K6 eingehalten?
- Wird durch die Aufgabe eine fachliche Diskussion angestoßen?
- Welche prozessbezogene Kompetenz wird mit dieser PI-Aufgabe besonders gefördert?
- Wird im Modell des Theorem Image respektive Concept Image mindestens die zweite Stufe angesprochen?

Zuerst muss demnach die Einhaltung der Kriterien überprüft werden, da sonst die Wirksamkeit der Methode gefährdet ist. Die zweite Leitfrage ist eine Absicherung beziehungsweise Präzisierung des dritten Kriteriums, Fehlkonzepte und plausible inkorrekte Antwortmöglichkeiten zu bieten. Es hat sich gezeigt, dass es zwar möglich ist, plausible inkorrekte Antwortoptionen zu geben, diese aber nicht unbedingt zu einer fruchtbaren Diskussion führen. Da dies aber einen zentralen Aspekt für ein aktiviertes Begriffslernen durch Peer Instruction darstellt, muss eine Aufgabe dahingehend reflektiert und gegebenenfalls überarbeitet werden. Inwiefern die schulischen Anforderungen durch die Aufgabe abgedeckt werden, sichern die dritte und vierte Leitfrage ab. Mithilfe dieses Schemas wird nun eine der entwickelten Peer Instruction-Aufgaben beispielgebend betrachtet:

PI-Aufgabe L2.1

Betrachte die beiden Kreiskegel.

Kreiskegel A Kreiskegel B

Welche Aussage stimmt:

- a) Das Volumen des Kreiskegels A muss größer sein, als das vom Kreiskegel B, weil der Öffnungswinkel in der Spitze bei A größer ist.
- b) Das Volumen des Kreiskegels B muss größer sein, als das vom Kreiskegel A, weil die Strecke \overline{MS} vom Mittelpunkt zur Spitze bei B länger ist.
- c) Das Volumen beider Kreiskegel muss gleich sein, weil die Grundfläche und die Höhe gleich sind.
- d) Das Volumen beider Kreiskegel muss gleich sein, weil es reicht, dass die Grundfläche gleich ist.

Die Kriterien werden eingehalten: Der einzig angesprochene Satz ist der Satz von Cavalieri in seiner Ursprungsform und typischem Anwendungsgebiet ohne jedoch die Formulierung des Satzes zu erfragen (K1 und K2). Die Antwortmöglichkeiten bieten durch ihre Begründung Anhaltspunkte für plausible inkorrekte Antworten und beziehen dabei die gewünschte algebraische Grundvorstellung ein, dass die Volumenformel von genau zwei Größen abhängt (K3 und K5). Eine geometrische Grundvorstellung der „Scheibchenverschiebung“ tritt zwar nicht auf, kann aber die richtige Antwortoption in einer Variante der Peer Instruction-Aufgabe sein. Eine weitere Option besteht darin, beide Grundvorstellungen parallel in einer Aufgabe zu verwenden und mehrere Antworten korrekt zu markieren. Dadurch würde die Existenz verschiedener Grundvorstellungen zu einem Begriff verdeutlicht und expliziert. Die Skizze wurde so präzise und knapp wie möglich beschriftet, sodass sie nicht überladen und trotzdem eindeutig erkennbar ist. Die Antwortoptionen zeigen deutlich an, welcher Kreiskegel jeweils gemeint ist und welches Detail die entscheidende Begründung zur Aussage liefert (K4). Die Schwierigkeit entspricht den Anforderungen für Lerngruppen, die den MSA anstreben laut Rahmenlehrplan. Dies erfüllt das Kriterium K6 auf theoretischer Ebene, muss aber in der Praxis immer an die Lerngruppe und deren Kompetenzstand angepasst werden oder im Zweifelsfall ausprobiert werden.

Eine Diskussion über die korrekte Lösung wird insofern angestoßen, als dass die Lernenden über ein Zutreffen der vorgegebenen Begründungen entscheiden müssen. Sie sind angehalten, ihr Gegenüber von der eigenen Wahl zu überzeugen. Da in der gewählten Antwort ein kausaler Zusammenhang inbegriffen ist, kann nicht keine Diskussion angestrebt werden. Sollten die Lernenden alle der gleichen Auffassung sein, fällt die Diskussion vermutlich kürzer oder weniger angeregt aus. Zusätzliche Arbeitsaufträge für Gruppen dieser Zusammensetzung können Abhilfe verschaffen – etwa indem die Lernenden aufgefordert werden, eigene (und andere als die genannten) Begründungen zu finden. Auf diese Art ließe sich das Ziel der Einübung von Kommunikation über Fachinhalte und der eigenständigen Verbalisierung selbiger verfolgen.

Daneben wird insbesondere die prozessbezogene Kompetenz *mit mathematischen Objekten umgehen* auf der zweiten Ebene „Zusammenhänge herstellen“ (AFB II) gefördert. Die Schüler:innen sollen die mathematische Struktur und Formel von Kreiskegelvolumina erkennen und die gegebenen Größen darauf überprüfen. Sie werden darin gefördert, mit dem Satz von Cavalieri auch dann sicher umzugehen, wenn dieser nicht explizit genannt wird. Der Lösungsprozess wird dadurch etwas komplexer und die Gefahr der blinden Anwendung eines gelernten Lösungsalgorithmus reduziert.

Bei dieser Peer Instruction-Aufgabe wird zum einen das Concept Image auf der zweiten Stufe zur Volumenformel von Kreiskegeln adressiert, indem die Basis für eine gedankliche Erforschung gebildet wird: Was besagt die Formel inhaltlich, welche Voraussetzungen sind fix und welche Größen

irrelevant? Zum anderen wird auch das Theorem Image bearbeitet, wenngleich der Satz von Cavalieri nicht konkret genannt wird. Die graphische Darstellung und die Bedeutung des Satzes werden – sozusagen rückwärts – auf der zweiten Stufe des Modells erarbeitet.

6 Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat es sich zur Aufgabe gemacht, eine derzeit hauptsächlich in der Hochschullehre angewandte Methode auf einen geeigneten Einsatz im Rahmen der schulischen Bildung zu prüfen. Dazu wurden die Anforderungen der Schule an den Unterrichtsinhalt sowie die Lern- und Kompetenzziele auf deren Förderungspotential durch die Methode Peer Instruction untersucht. Mit ihrem Aufbau zielt diese auf ein vertieftes Verständnis der behandelten Begriffe und Satzaussagen ab sowie darauf, begründete Diskussion im jeweils angesprochenen Thema zu führen. Darüber hinaus passt Peer Instruction in einen kompetenzorientierten Unterricht und ist somit für den sinnvollen Einsatz in der Schule geeignet. Peer Instruction bietet sich neben der Lernoption auch als ein Diagnoseinstrument für Lehrpersonen an, sodass der Unterricht entsprechend der Defizite und Hürden gezielt gestaltet werden kann. Sich jedoch ausschließlich der Methode Peer Instruction zu bedienen, wäre im schulischen Kontext zu eindimensional. In jedem Fall sollte Abwechslung geboten werden, um auf möglichst vielen Ebenen verschiedene Lerntypen anzusprechen. Neben einer geeigneten Lernatmosphäre und organisatorischen Gesichtspunkten sind für eine erfolgreiche Durchführung die Aufgaben ein entscheidender Faktor. Für eine qualitative Sicherung hinsichtlich der Fragen wurden in der vorliegenden Arbeit Kriterien für den Einsatz in der Schule erarbeitet. Peer Instruction ist ab dem ersten Einsatz in der Praxis wertvoll. Wenngleich kleine Fehler in den Peer Instruction-Aufgaben bei der erstmaligen Durchführung der Methode vermutlich unvermeidbar sind, kann die Lehrperson schon nützliche Erkenntnisse daraus ziehen, wenn die Kriterien nicht grundlegend verletzt werden. So stellt Riegler in seiner Untersuchung fest:

„*Peer Instruction* ist recht robust gegenüber kleinen Fehlern in der Fragestellung, solange Sie mit *Peer Instruction* wertvolle Lehrziele verfolgen. Die Fragen müssen daher nicht immer perfekt sein. Für die Wirksamkeit von *Peer Instruction* ist es wichtiger, studentische Schwierigkeiten identifizieren und den Studierenden bestmöglich bei der Überwindung dieser Schwierigkeiten helfen zu wollen als einen Perfektionismus bei der Entwicklung von Fragen zu entwickeln.“¹⁵¹

Gerade unter Berücksichtigung des Vorbereitungs- und Betreuungsaufwandes einer Klasse ist das letzte Argument eines, das hervorgehoben werden sollte. Bei dem Erstellen von Peer Instruction-Aufgaben verhält es sich wie bei der Entwicklung sonstigen Materials: Es ist ein „Handwerk“ und gelingt leichter, besser und schneller, je mehr Übung und Erfahrung die Lehrperson

¹⁵¹ Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlage. 2019. S. 96.

in der Aufgabenproduktion sowie Durchführung sammelt. Seitens der Lernenden gilt analog dieselbe Annahme: Die Qualität der Methode wird mit ausgeprägter Routine gesteigert, wenn die Schüler:innen die Abläufe beherrschen und den Sinn in der Durchführung erkennen. Für den Entwicklungsprozess von Aufgaben als Material ist es ratsam, sich an einen Vorgehensplan wie im Kapitel 4.3 *Ein Leitfaden zur Entwicklung von Peer Instruction-Aufgaben* entwickelt zu halten. Wie sich in der Reflexion allerdings gezeigt hat, sollte dieser Leitfaden eher als grobe Richtlinie denn als verbindliche Regelung betrachtet werden. Die Reflexion der Aufgaben ist jedoch keinesfalls analog zu behandeln, da sie der Qualitätssicherung dient. Die Kriterien stellen so gesehen die Mindeststandards für gute Aufgaben dar.

Die vorliegende Arbeit hat auf theoretischer Grundlage nachgewiesen, dass Peer Instruction Einzug in die Schule erhalten sollte und nach welchem Schema gute, geeignete Aufgaben von Lehrpersonen erstellt werden können. Peer Instruction kann prozessbezogene Kompetenzen fördern, mathematisches Denken trainieren und entspricht den didaktischen Zielen des Begriffslernens. Auf methodischer Ebene eignet sich Peer Instruction als kooperative Lernform für den Einsatz in Schulklassen. Eine Grenze, die im schulischen Rahmen herausgearbeitet wurde, besteht im sprachlichen Anspruch der Methode an die Schüler:innen. Während somit zusammenfassend die Eignung und theoretische Umsetzung aufgezeigt wurden, bleibt als nächster Schritt – zum Beispiel im Rahmen einer weiteren Masterarbeit – die empirische Untersuchung von Peer Instruction im Mathematikunterricht in der Praxis. Insbesondere bieten sich dabei die Themenfelder Zuwachs der Lernmotivation, Erfolg im Kompetenzerwerb oder auch die Art und Weise der Durchführung an, wobei verschiedene Varianten gegeneinander abzuwägen seien. Unter diesem Aspekt eignet sich die Beleuchtung der Frage, ob die Peer Instruction-Aufgaben digital oder analog präsentiert werden sollten beziehungsweise welche Argumente für oder wider die eine oder andere Art sprechen.

Der technischen Rahmen von Peer Instruction wurde seinem Umfang geschuldet in der vorliegenden Arbeit nicht in der nötigen Tiefe behandelt. Eine Aufgabe besteht darin, innerhalb dieser Kategorie ein geeignetes Abstimmungsverfahren zu finden. Auf Grund der Abhängigkeit von den technischen Gegebenheiten im Klassenzimmer, der Verfügbarkeit der jeweiligen Programme (Lizenzen / Open Source) sowie der Abwägung zwischen Anonymität oder offenem Voting sind die Voraussetzungen zu individuell, um an dieser Stelle eine universell optimale Nutzung vorzubringen. Als gängige Tools zur Abstimmung sind Clicker oder Abstimmkarten mit QR-Code (z.B. Plickers) sowie ARSnova zu nennen. Der Frage nach den Vor- und Nachteilen von passenden Abstimmssystemen haben sich unter anderen

Riegler und Kempen in den für die vorliegende Arbeit verwendeten Werken angenommen.¹⁵² Losgelöst von dem Abstimmungsverfahren ist an dieser Stelle auch der Ausblick auf eine Untersuchung für oder wider analoge oder digitale Präsentation der Peer Instruction-Aufgaben zu geben. Neben diesen Überlegungen gibt es einen weiteren sinnvollen, wenngleich vielleicht weniger offensichtlichen technischen Anhaltspunkt: Allen Lehrplänen liegen bundesweit dieselben Bildungsstandards der KMK zugrunde. Es wäre unsinnig, dass alle Mathematiklehrenden deutschlandweit (und darüber hinaus) eigene Peer Instruction-Aufgaben zu denselben Themen von Grund auf entwerfen müssten. Es braucht eine gemeinsame Datenbank, derer sich alle Lehrpersonen zur Anwendung von Peer Instruction bedienen können und die allseits mit solchen Aufgaben gespeist werden kann. H5P könnte sich beispielsweise als Plattform in Format und niedrigschwelliger Anwendbarkeit dafür eignen. Die Implementierung beziehungsweise Etablierung einer solchen Datenbank als Materialspeicher und -austausch kann Kern einer weiteren Ausarbeitung sein.

¹⁵² Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 107 – 120 und vgl. Kempen. A report from the field. 2021. S. 237f.

Anhang

- Literaturverzeichnis
- Handreichung für Lehrkräfte: How to „Peer Instruction“
- Eine Aufstellung möglicher Peer Instruction-Aufgaben

Literaturverzeichnis

Balta, Nuri. Kaymak, Serkan. Almas, Abdullah. Nurbavliyev, Omarbek. The Impact of Peer Instructions on Ninth Grade Students' Trigonometry Knowledge. In: *Bolema Boletim de Educação Matemática*. Vol. 35, No. 69. 2021. S. 206 – 222.

Bauer, Thomas. Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen. Springer. 2018.

Bauer, Thomas. Peer Instruction in mathematischen Übungsgruppen – Entwurfsprinzipien und Akzeptanz. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Frank, Krauss, Binder (Hgg.). WTM-Verlag. Münster, 2019. S. 85 – 88.

Bauer, Thomas. Design von Aufgaben für Peer Instruction zum Einsatz in Übungsgruppen zur Analysis. In: *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 09. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen*. Klinger, Schüler-Meyer, Wessel (Hgg.). WTM, Münster. 2019. S. 63 – 74.

Bauer, Thomas. Biehler, Rolf. Lankeit, Elisa. ConcepTests in Undergrade Real Analysis: Comparing Peer Discussion and Instructional Explanation Settings. In: *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. Gueudet, Lockwood, Nardi (Hgg.) Springer Spektrum. 2022.

Bauer, Thomas. Hefendehl-Hebeker, Lisa. *Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien. Anforderungen und Ansätze zur Gestaltung*. Springer Spektrum. 2019.

Fonseca, B. A., Chi, M. T. Instruction based on self-explanation. In: *Handbook of research in learning instruction*. Mayer; Alexander (Hrsg.) Routledge, New York, London, 2011. S. 296 – 321.

Greefarth et al. Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. In: *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Padberg, F; Büchter, A. (Hgg.). Springer Spektrum. 2016.

Kempen, Leander. Using peer instruction in an analysis course: a report from the field. In: *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*. Vol. 40. 2021. S. 234 – 248.

KMK – Ständige Konferenz der Kultusminister in der Bundesrepublik Deutschland. *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. Beschluss der Kultusministerkonferenz. 23.06.2022.

Leuders, Timo. *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. 6. Auflage. Cornelsen Scriptor. Berlin, 2011.

Leuders, Timo. Büchter, Andreas. *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Cornelsen Scriptor. Berlin, 2005.

Mazur, Eric. Peer Instruction. Interaktive Lehre praktisch umgesetzt. Aus dem Englischen übersetzt und herausgegeben von Ulrich Harten und Günther Kurz. Kurz, G.; Harten, U. (Hgg.). Springer Spektrum. 2017.

Riegler, Peter. Peer Instruction in der Mathematik. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen praxisnah erläutert. Springer Spektrum. 2019.

Smith, M. K., Wood, W. B., Adams, W. K., Wieman, C., Knight, J. K., Guild, N., Su, T. T. Why peer discussion improves student performance on in-class concept questions. In: Science, Vol. 323, No. 5910. 2009. S 122–124.

Tall, David. Vinner Shlomo. Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: Educational Studies in Mathematics. Vol. 12. Boston, 1981. S. 151 – 169.

Weigand, Hans-Georg et al. Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. In: Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Padberg, F. (Hrsg.). Springer Spektrum. 2. Auflage. 2014.

Zech, Friedrich. Das Lernen mathematischer Begriffe. In: Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. 10. Auflage. Weinheim: Beltz, 2002. S. 255 – 282.

Handreichung für Lehrkräfte: How to „Peer Instruction“

Ziel:

Peer Instruction ist eine Methode für den schulischen Mathematikunterricht, die auf aktives Nachdenken und tiefere inhaltliche Auseinandersetzung mit mathematischen Begriffen abzielt. Außerdem fungiert sie für die Lehrenden als Diagnoseinstrument für fachliche Herausforderungen und inhaltliche Schwierigkeiten.

Was:

Der Fokus liegt nicht auf dem Memorieren von Formeln oder der erlernten algorithmischen Anwendung von Rechenverfahren, sondern auf den zugrundeliegenden Begriffen und Sätzen. Mittels einer Diskussion sollen die Lernenden einen Begriff von vielen Perspektiven durchdenken und im Austausch gleichzeitig lernen, die eigenen Probleme mit einem Begriff zu verbalisieren.

Ablauf:

Peer Instruction besteht aus fünf Phasen, die auf einer Peer Instruction-Aufgabe im Single-Choice-Format (teilweise auch Multiple-Choice-Format) basieren.

1. Frage präsentieren; nachdenken lassen (ca. 2 min)
2. Erste Votingrunde: individuelle Antwort (anonym) abgeben (ca. 1 min)
3. Peer Discussion: „Überzeuge dein Gegenüber von deiner Antwortwahl“ (ca. 8 min)
4. Zweite Votingrunde: individuelle (geänderte) Antwort (anonym) abgeben (ca. 1 min)
5. Expertenphase: Auflösung, warum welche Antwort korrekt ist und insbesondere, warum die Distraktoren nicht stimmen (und warum man das trotzdem hätte vermuten können)

Worauf dabei zu achten ist:

Um das Ziel des Begriffslernens zu erreichen und eine vertiefte Auseinandersetzung mit mathematischen Begriffen und Satzaussagen zu ermöglichen, müssen die Peer Instruction-Aufgaben folgende Kriterien erfüllen:

Peer Instruction-Aufgaben sollen

- K1. zum Nachdenken anregen und kein Wissen abfragen
- K2. auf einen einzelnen Begriff abzielen
- K3. Fehlkonzepte als plausible inkorrekte Antwortmöglichkeiten bieten
- K4. eindeutig formuliert sein
- K5. Grundvorstellungen einbeziehen
- K6. Über einen angemessenen Schwierigkeitsgrad verfügen

Bei der Umsetzung spielt zudem die Art der Durchführung eine wichtige Rolle: Der Schwerpunkt dieser Methode liegt auf der Diskussion der Lernenden miteinander. Die Lehrperson sollte diese Phase lediglich lauschend verbringen und in keine Diskussion eingreifen. Die Lernatmosphäre muss unbedingt fehlertolerant sein und Lernende zum eigenständigen Nachdenken (auch auf Irrwegen) anregen. Warum die Distraktoren (bspw. häufige Fehlvorstellungen) nicht korrekt sind, sollte bei der Auflösung thematisiert werden. In dem Kapitel 5.3 *Peer Instruction-Aufgaben* finden sich drei Beispiele, wie eine solche Aufgabe entstehen kann, welche Hürden typischerweise auftreten und anhand welcher Fragen die entwickelten Aufgaben reflektiert werden können.

Eine Aufstellung möglicher Peer Instruction-Aufgaben

Die Peer Instruction-Aufgaben (PI-Aufgaben) in dieser Handreichung sind nach den fünf Leitideen des KMK geordnet und entsprechend nummeriert. Nach einer kurzen thematischen Verortung im Rahmenlehrplan, wird die Aufgabe vorgestellt. Neben der korrekten Lösung befindet sich unter jeder Aufgabe ein kurzer didaktischer Kommentar, in den Varianten, Überlegungen zu Distraktoren etc. einfließen. Diese Aufstellung stellt eine Anregung und erste Basis für die Einführung von Peer Instruction in MSA-Klassen dar und soll keinesfalls ein fertiges Produkt bilden. Diese Sammlung ist ebenso wenig unveränderbar wie auf die hier vorgestellten Fragen beschränkt. Selbstverständlich müssen die Aufgaben ggf. an die Lerngruppe angepasst werden. und diese Sammlung als solche um viele Aufgaben zu weiteren Begriffen und anderen Grundvorstellungen (auch um Begriffe und Niveaus anderer Klassenstufen) erweitert werden. Mitunter kann es vorkommen, dass Begriffe regional unterschiedlich benannt werden oder als solche zum Zeitpunkt des Einsatzes von Peer Instruction (noch) nicht eingeführt wurden. Die Aufgaben müssen ggf. an den Kenntnisstand der Lerngruppe angepasst werden.

L1 Zahlen und Operationen

PI-Aufgabe L1.1

Diese Aufgabe widmet sich den Zahlenmengen. Damit verortet sich diese Frage inhaltlich im Themenfeld „Zahlvorstellungen“ im Rahmenlehrplan.¹⁵³ Sie kann eingesetzt werden, um die Vorstellung von Zahlenmengen zu vertiefen und Fehlkonzepte aufzudecken.

Genügt die Zahlmenge \mathbb{Q} zur Darstellung aller Zahlen aus?

- e) Sie genügt nicht, weil Brüche durch größeren Nenner unendlich klein werden können.
- f) Sie genügt nicht, weil nicht alle Wurzeln dargestellt werden können.
- g) Sie genügt, weil alle Zahlen auch als Dezimalzahl dargestellt werden können.
- h) Sie genügt nicht, weil natürliche Zahlen und negative Zahlen fehlen würden.

Die korrekte Antwort ist b). Antwortoption a) soll zum Nachdenken anregen und kann durch die „bekannte Floskel aus dem Matheunterricht“ plausibel klingen. Unter c) wird die Fehlvorstellung thematisiert, dass nur weil ein Bruch als Dezimalzahl geschrieben werden kann, nicht automatisch alle Dezimalzahlen in der Menge \mathbb{Q} enthalten sind. Die Antwortoption d) wählen diejenigen, welche \mathbb{N} und \mathbb{Z} nicht als Teilmenge von \mathbb{Q} erkennen.

¹⁵³ Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 38.

PI-Aufgabe L1.2

Die folgende Aufgabe behandelt den Umgang mit Potenzen. Somit gehört die Aufgabe zum Themenfeld „Operationsvorstellungen und Rechenstrategien“ im Rahmenlehrplan.¹⁵⁴

Wie lässt sich die Potenz 2^{14} halbieren?

- a) Potenzen können halbiert werden, indem mit $\frac{1}{2}$ multipliziert wird: $\frac{2^{14}}{2}$
- b) Potenzen können nicht halbiert werden, weil sie eine verkürzte Darstellung einer Multiplikation sind.
- c) Potenzen müssen zum Halbieren durch eine weitere Potenz mit selber Basis, aber halben Exponenten geteilt werden: $\frac{2^{14}}{2^7}$
- d) Potenzen können erst halbiert werden, wenn die Potenz ausgerechnet ist.

Die Antwortoption a) ist korrekt. Bei dieser Aufgabe wird der Begriff Potenz thematisiert und ein Verständnis und die Bedeutung der Rechenregeln von Potenzen erfragt. Hinter Antwortoption c) verbirgt sich eine falsche Vorstellung, was der Exponent tatsächlich bedeutet. Denn selbst wenn die Potenzgesetze bekannt sind und sicher umgesetzt werden, muss in dieser Aufgabe entschieden werden ob 2^7 oder 2^{13} die Hälfte von 2^{14} ist.

¹⁵⁴ Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 38.

L2 Größen und Messen

PI-Aufgabe L2.1

Die folgende Aufgabe beschäftigt sich mit dem Satz von Cavalieri, ohne diesen explizit zu nennen. Die Aufgabe lässt sich im Rahmenlehrplan mehrfach verorten. Zum einen fällt sie unter das Themenfeld „geometrische Objekte“¹⁵⁵, da Eigenschaften von Kegeln erfragt werden. Zum anderen passt die Frage auch zu dem Feld „Größen in Sachzusammenhängen berechnen“¹⁵⁶, weil dies die Basis für die Berechnung des Volumens darstellt. Da Peer Instruction nach den Kriterien kein bloßes Ausrechnen verlangen darf, sondern auf die zugrundeliegenden Prinzipien zielen soll, gelingt mit der vorliegenden Frage trotzdem eine Thematisierung des Themenfelds „Berechnen“ der Größen im Rahmenlehrplan.

Betrachte die beiden Kreiskegel.

Kreiskegel A Kreiskegel B

Welche Aussage stimmt:

- e) Das Volumen des Kreiskegels A muss größer sein, als jenes von Kreiskegel B, weil der Öffnungswinkel in der Spitze bei A größer ist.
- f) Das Volumen des Kreiskegels B muss größer sein, als jenes von Kreiskegel A, weil die Strecke \overline{MS} vom Mittelpunkt zur Spitze bei B länger ist.
- g) Die Volumina beider Kreiskegel müssen gleich sein, weil die Grundfläche und die Höhe jeweils gleich sind.
- h) Die Volumina beider Kreiskegel müssen gleich sein, weil es ausreicht, dass die Grundfläche gleich ist.

Antwort c) ist korrekt. Der Distraktor d) soll auf die Unumstößlichkeit von Voraussetzungen für die Gültigkeit und Anwendbarkeit von Sätzen aufmerksam machen. Die Distraktoren bilden naheliegende Denkmuster zur Fehleinschätzung des Volumens ab. Da es bei der Aufgabe um die Satzaussage gehen sollte, wurde hier der explizite Verweis auf den „Satz von Cavalieri“ verzichtet. Eine Variation des Inhalts könnte im Einführungstext den Satz von Cavalieri benennen und als eine Antwortmöglichkeit „... weil ... und der Satz von Cavalieri gilt“ beinhalten.

¹⁵⁵ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 50.

¹⁵⁶ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 25 und 45.

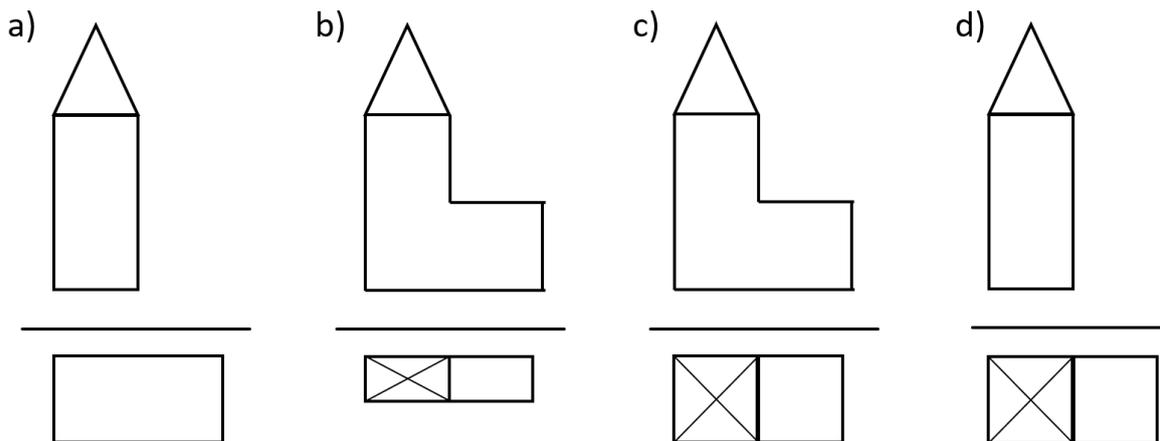
PI-Aufgabe L2.2

In der folgenden Aufgabe abreiten Lernende mit der Darstellung geometrischer Objekte im Zweitafelbild. Die Lernenden müssen hierbei Lagebeziehungen an Körpern erkennen. Daher gehört die Aufgabe im Rahmenlehrplan zu dem Themenfeld „Größenvorstellungen und Messen“.¹⁵⁷ Sie können im Rahmen von technischen Zeichnungen aber auch zur Vorbereitung auf bestimmte Berufsfelder (Architektur und Bauwesen) dienen. Im Rahmenlehrplan lassen sie sich daher ebenfalls dem Themenfeld „Geometrischen Abbildungen“ zuordnen.¹⁵⁸

Betrachte das folgende Modell eines zusammengesetzten Holzklötzchens einer Spielzeugfirma:



Welche Darstellung im Zweitafelbild entspricht diesem Schrägbild?



Die korrekte Antwortoption ist c). Mit der Möglichkeit b) kann die halbe Kantenlänge im Schrägbild thematisiert werden. Beide Distraktoren a) und d) zielen auf die Notwendigkeit der Einhaltung der Perspektive ab.

¹⁵⁷ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 44.

¹⁵⁸ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 51.

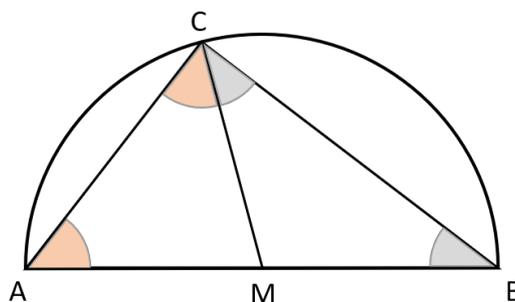
L3 Raum und Form

PI-Aufgabe L3.1

Die folgende Aufgabe bespricht den Satz des Thales. Dabei arbeiten die Lernenden insbesondere auf der Ebene des Argumentierens. Diese Aufgabe lässt sich im RLP unter „Raum und Form“ bei „Geometrische Objekte“ verorten.¹⁵⁹

Der Satz des Thales besagt: Wenn zwei Punkte A und B den Durchmesser eines Kreises bilden und ein dritter Punkt C irgendwo auf dem dazugehörigen Kreisbogen liegt, dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ immer rechtwinklig in C. Kim möchte diese Aussage beweisen:

1. Zuerst zeichnet Kim eine Hilfslinie von C zum Mittelpunkt M des Kreises (Mitte des Durchmessers \overline{AB}).
2. Die beiden daraus entstandenen Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ müssen jeweils gleichschenkelig sein, da jeweils der Radius die Schenkel von M ausgehend bildet.
3. Kim weiß, dass die Basiswinkel von gleichschenkligen Dreiecken gleich groß sind.



Was wäre der nächste Schritt in Kims Argumentation, um zu zeigen, dass in dem Dreieck $\triangle ABC$ mit Standardbezeichnung $\gamma = 90^\circ$ gilt?

- a) Die beiden kleineren Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ haben je eine Innenwinkelsumme von 180° und zusammen 360° .
- b) Den Winkel γ kann man jetzt so beschreiben: $\gamma = \alpha + \beta$ und es gilt $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$ wegen der Innenwinkelsumme.
- c) Es fehlen Informationen, um die Aussage zu beweisen. Ohne bestimmte Werte für die Winkel können wir nicht beweisen, dass $\gamma = 90^\circ$ sein muss.
- d) Wir wissen, in rechtwinkligen Dreiecken können wir den Sinus verwenden, sodass $\sin(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ gilt.

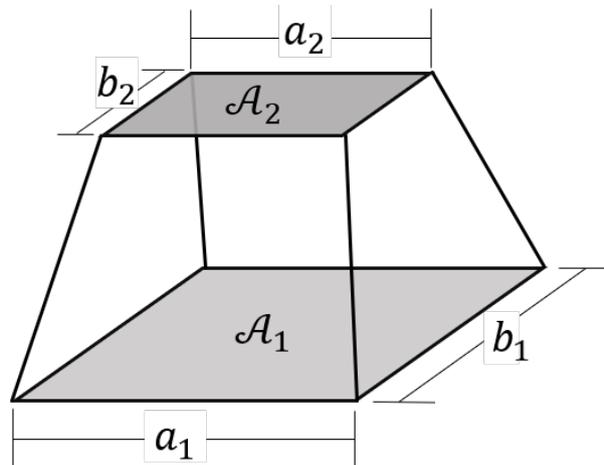
Die korrekte Antwort ist b). Distraktor c) soll Möglichkeit bieten in der Expertenphase, die Allgemeingültigkeit von Beweisen zu veranschaulichen. Der Distraktor a) kann durch eine Erweiterung zu einer „logischeren“ Antwort entwickelt werden, bspw. mit: „Teilt man dies durch die 4 verwendeten Punkte A, B, C und M, erhält man $360^\circ : 4 = 90^\circ$.“ Bei dieser Aufgabe soll die Kompetenz „mathematisch argumentieren“ gefördert werden, insbesondere dadurch, dass der Anfang bereits getätigt ist und die Lernenden den Ansatz weiterentwickeln müssen. Dies funktioniert ebenfalls, wenn der Beweis im Unterricht bereits einmal vorgestellt wurde, da die hier gefragte eigene Auseinandersetzung mit der Materie eigenes mathematisches Denken erfordert. Zu beachten ist weiterhin, falls der Satz im Unterricht etwas anders formuliert wurde, muss der Einführungstext der Aufgabe entsprechend angepasst werden.

¹⁵⁹ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 50.

PI-Aufgabe L3.2

Die folgende Aufgabe behandelt einen Pyramidenstumpf. Die Lernenden sind dabei aufgefordert, ein gegebenes Objekt auf die per Definition geforderten Eigenschaften zu prüfen. Hiermit wird das Thema „Eigenschaften geometrischer Objekte“ aus dem Rahmenlehrplan angesprochen.¹⁶⁰

Betrachte diese Skizze mit den angegebenen Größen:



Rechteck \mathcal{A}_2 mit $a_2 = 12 \text{ cm}$ und $b_2 = 7 \text{ cm}$

Rechteck \mathcal{A}_1 mit $a_1 = 15 \text{ cm}$ und $b_1 = 15 \text{ cm}$

Höhe $h = 8 \text{ cm}$

Kann es sich bei dem beschriebenen Objekt um einen Pyramidenstumpf mit rechteckiger Grundfläche handeln?

- a) Ja, weil beide Flächen rechteckig sind und vier Mantelflächen existiert.
- b) Nein, weil die Fläche \mathcal{A}_2 größer ist als \mathcal{A}_1 und Pyramidenstümpfe nach oben zusammenlaufen müssen.
- c) Kann man nicht sagen, weil die Ergänzungspyramide unbekannt ist.
- d) Nein, weil die Rechtecke der Flächen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 nicht ähnlich zueinander sind.

Die korrekte Antwort ist d). Bei der Antwort b) soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass Körper im dreidimensionalen Raum drehbar sind und die „obere“ Fläche trotzdem die Grundfläche sein kann. Aus diesem Grund wurden die beiden Flächen bis auf ihre Nummerierung nicht spezifischer beschrieben. Antwortoption c) kann plausibel klingen, wenn durch die Aufgabenskizze direkt ein Automatismus zur Berechnung des Volumens des Pyramidenstumpfes ausgelöst wird.

¹⁶⁰ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 50.

L4 Gleichungen und Funktionen

PI-Aufgabe L4.1

Die folgende Frage verortet sich inhaltlich im Rahmenlehrplan unter dem Thema und Inhalt „Terme und Gleichungen – Gleichungen und Gleichungssysteme lösen“ auf dem Niveau G (= angestrebter Abschluss MSA)¹⁶¹. Sie thematisiert, wie viele Lösungen ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Variablen x und y haben kann?

Welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme (LGS) zwei Variablen x und y stimmen?

- a) Ein LGS kann eine Lösung haben, welche aus einem Wert für x und einem Wert für y besteht.
- b) Ein LGS kann zwei Lösungen haben, da jede Variable eine eigene Lösung hat.
- c) Wenn die grafische Lösung zwei voneinander verschiedene, parallele Geraden darstellt, hat das LGS keine Lösung.
- d) Wenn die Geraden der Gleichungen genau einen Schnittpunkt haben, hat das LGS unendlich viele Lösungen.

Die korrekten Antworten sind a) und c). Antwortmöglichkeit d) soll einen Distraktor für diejenigen darstellen, die keine Vorstellung für die Begründung/Veranschaulichung, was unendliche viele Lösungen für ein LGS bedeuten, entwickelt haben. Eine Fehlvorstellungen zu Lösungsmengen wird mit der Antwortmöglichkeit b) abgedeckt. Die hinsichtlich der Formulierung in Blöcken geschalteten Antwortoptionen können je nach Geschmack in eine andere Reihenfolge gebracht werden.

¹⁶¹ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 54.

PI-Aufgabe L4.2

Die folgende Aufgabe fordert die Lernenden im Bereich der Linearen Gleichungssysteme. Hierbei wird der Umgang mit den jeweiligen Lösungsverfahren vertieft. Diese Aufgabe fällt im Rahmenlehrplan unter den Gliederungspunkt „Terme und Gleichungen“.¹⁶²

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen gibt es verschiedene Verfahren. In welchem Fall eignet sich das Additionsverfahren am ehesten?

- f) Wenn zwei Koeffizienten der gleichen Variable denselben Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen haben, weil Addition sonst nicht zur gewünschten Eliminierung führt
- g) Wenn beide Gleichungen bereits nach derselben Variablen umgestellt sind
- h) Wenn zwei Koeffizienten denselben Wert haben
- i) Wenn die Aufgabe es vorschreibt
- j) Wenn bei der gleichen Variable die Koeffizienten gleich oder ein Vielfaches voneinander sind

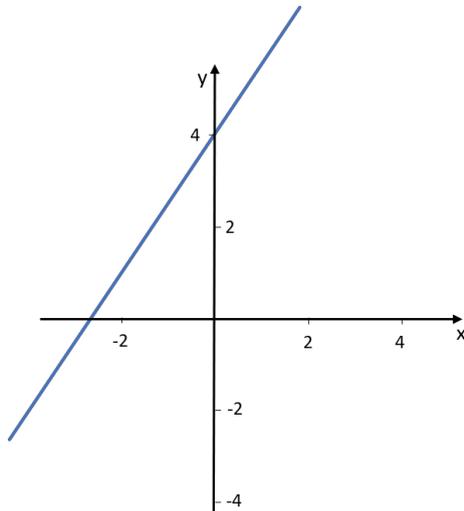
Die korrekte Antwort ist e). Der Distraktor a) kann für Lernende als korrekt erscheinen, wenn sie die Möglichkeit Addition von Negativem bzw. eine entsprechende Umformung nicht bedenken. Unter c) soll die Stolperstelle fokussiert werden, dass komponentenweise addiert (subtrahiert) werden muss. Sollte der Begriff „Koeffizient“ (noch) nicht eingeführt sein, muss die Aufgabe sprachlich angepasst werden. Als Varianten dieser Aufgabe bieten sich Peer Instruction-Aufgaben zur Eignung der anderen Verfahren an. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, ein LGS mit zwei Variablen vorzugeben und nach dem geeigneten Verfahren zu fragen. In diesem Fall lohnt sich für gute Distraktoren eine Begründung in der Antwort bspw.: „Gleichsetzungsverfahren, weil x-Koeffizienten ein Vielfaches voneinander sind“ o.ä. Eine andere Formulierungsmöglichkeit besteht darin, die Frage „Gibt es Fälle, in denen sich das Verfahren ... besonders eignet“ zu stellen und die Antwortoptionen mit „Ja, wenn ...“ bzw. „Nein, weil ...“ zu beginnen.

¹⁶² Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 56.

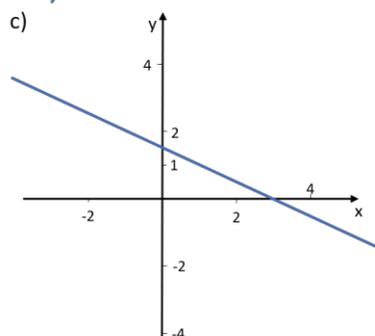
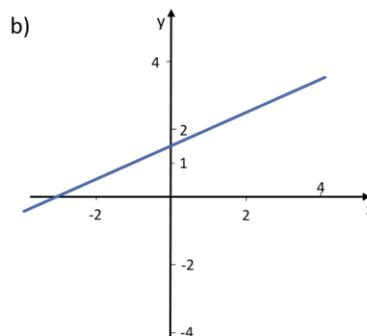
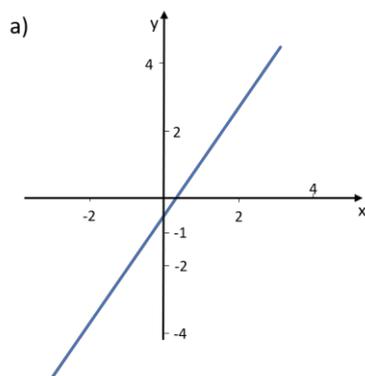
PI-Aufgabe L4.3

Die folgende Aufgabe strebt eine Vertiefung der Auswirkungen von Parametern bei linearen Funktionen an. Thematisch findet sich diese Aufgabe im Rahmenlehrplan unter dem Themenfeld „Zuordnungen und Funktionen untersuchen“ wieder.¹⁶³

Gegeben sei eine lineare Funktion mit $y = \frac{3}{2}x + 4$.



Wenn sich der Parameter m ändert auf den Wert $m = -\frac{2}{4}$ und der Parameter n auf den Wert $n = \frac{6}{4}$, sieht er Graph dazu so aus:



d) Keines davon.

Die korrekte Darstellung ist c). Antwortoption a) stellt die Skizze des angegebenen Graphen mit vertauschten Parametern dar – eine typische Unaufmerksamkeit. Damit diese Antwortoption einen

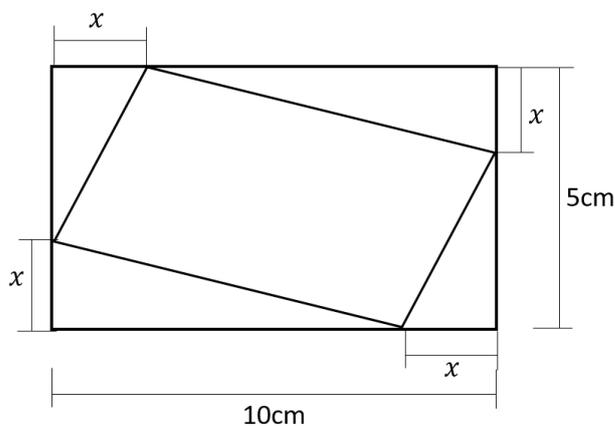
¹⁶³ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 55.

sinnvollen Distraktor bildet, wird im Einführungstext bewusst die Formulierung „lineare Funktion nach der Form $y = m \cdot x + n$ “ weggelassen. Unter Antwort b) versteckt sich die Missachtung des Vorzeichens. Zuletzt eignet sich d) für diejenigen, welche das Erweitern bzw. Kürzen der Brüche im Parameter nicht erkennen bzw. den genauen Bruch in der Steigung nicht ablesen können. Eine Variante besteht darin, die Antworten zusätzlich zur Skizze mit einer Begründung zu versehen.

PI-Aufgabe L4.4

Die folgende Aufgabe stellt die Lernenden vor die Herausforderung, mithilfe einer quadratischen Funktion die kleinstmögliche Fläche und bestimmten Bedingungen zu ermitteln. Diese Aufgabe kann unter den Themenfeldern „Terme und Gleichungen“ sowie „Zuordnungen und Funktionen“ verortet werden, je nach Wahl des Schwerpunktes auf die Erstellung der Gleichung oder auf die Bedeutung des Extremums.¹⁶⁴ Diese Aufgabe ist wegen ihrer Komplexität dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Gegeben sei ein Rechteck mit den Abmessungen 10cm und 5cm, in welches ein Parallelogramm eingezeichnet ist. Bestimmt werden soll das x , bei welchem der Flächeninhalt des Parallelogramms am kleinsten ist.



Welches Vorgehen führt am ehesten zur Lösung der Aufgabe?

- Es wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, aus der Formel des Flächeninhalts für Rechteck und Parallelogramm. Die kleinste Lösung der Lösungsmenge ist die Antwort.
- Die Differenzfläche wird betrachtet und eine quadratische Gleichung in Abhängigkeit von x aufgestellt. Der größte Funktionswert für x ist die Lösung.
- Die Höhe für jedes x wird ermittelt und damit der kleinste Flächeninhalt für ein Parallelogramm berechnet. Für die Ermittlung der Grundseite muss der Satz des Pythagoras verwendet werden.

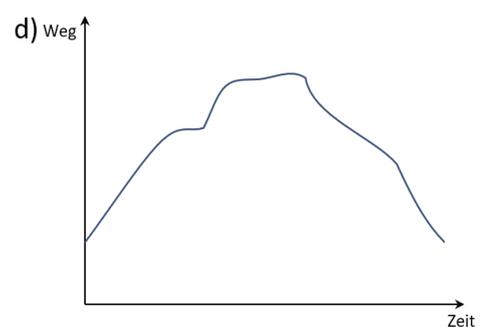
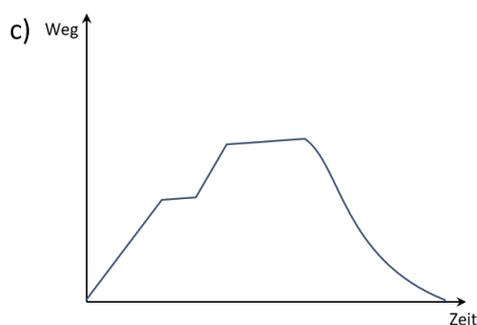
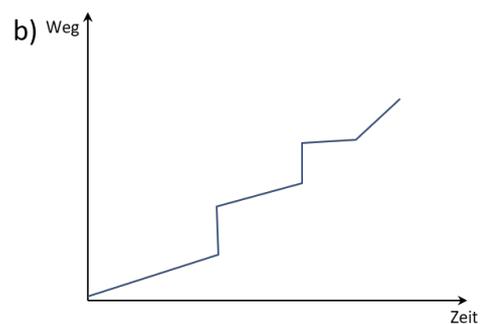
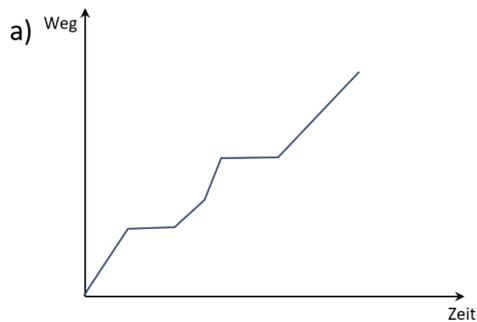
Antwort b) ist korrekt. Als Formel soll $A_{\text{Parallelogramm}} = 10 \cdot 5 - (x(10 - x) + x(5 - x))$ aufgestellt werden, wobei der Scheitelpunkt der quadratischen Gleichung den größtmöglichen Minuenden bildet. Für den Distraktor c) wurde ein typischer Lösungsansatz aus der Geometrie gewählt, der an dieser Stelle allerdings nicht hilfreich ist. Da diese Aufgabe recht komplex ist und leseintensiv erscheint, wurden die Optionen bewusst auf drei beschränkt. Schließlich soll der Umfang so gewählt sein, dass eine Diskussion angemessen tief geführt werden kann.

¹⁶⁴ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 56; 57.

PI-Aufgabe L4.5

Im Rahmenlehrplan gehört diese Aufgabe zum Themenbereich „Zuordnungen und Funktionen darstellen“.¹⁶⁵ Hierbei wird das Lesen und Verstehen von Zuordnungen in Form von Weg-Zeit-Diagrammen vertieft.

Welches dieser Weg-Zeit-Diagramme einer Alpenwanderung ist plausibel? Es können mehrere Antworten richtig sein.



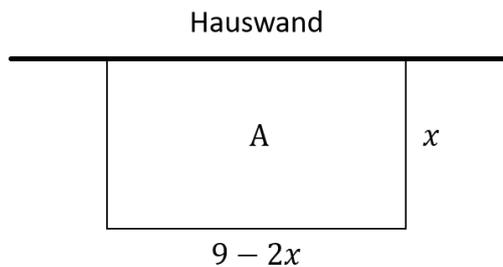
Die korrekte Antwort ist a). Die Antwortoption b) birgt den Fehler, bei zurückgelegtem Weg keine Zeit zu verbringen. Die Antwortoptionen c) und d) stellen je eine Variation für die Fehlvorstellung, der Betrachtung „Graph als Bild“ dar. Dass im Einführungstext die Möglichkeit mehrerer korrekter Antworten genannt wird, soll die Suche nach Mustern verhindern, und somit zum inhaltlichen Nachdenken anregen. Diese Peer Instruction-Aufgabe eignet sich somit als „Finde den Fehler“-Aufgabe. Als Variante bietet sich die Frage an, welche Darstellungen nicht stimmen können mit mehreren richtigen Antworten. In jedem Fall können sich die Lernenden nicht darauf ausruhen, wenn sie einen „Fehler“ gefunden haben.

¹⁶⁵ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 57.

PI-Aufgabe L4.6

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit den Eigenschaften quadratischer Funktionen und deren Nutzen in Problemstellungen. Die Aufgabe gehört thematisch im Rahmenlehrplan zum Themenfeld „Eigenschaften von Funktionen nutzen“¹⁶⁶.

Familie Kümmel möchte ein rechteckiges Schildkrötengehege für ihre Schildkröte Schildi an die Hauswand anbauen. Sie wollen dafür die übriggebliebene Drahtzaunrolle von insgesamt 9 m verwenden. Schildi soll möglichst viel Platz haben und sie fertigen folgende Skizze mit dazugehöriger Formel an:



$$A = x \cdot (9 - 2x)$$

Welche Schritte sind jetzt nötig, um die Abmessungen für das größtmögliche Gehege zu bestimmen? Es können mehrere Antworten stimmen.

- x muss zwischen 0 und ∞ liegen.
- Der Scheitelpunkt der entsprechenden quadratischen Gleichung muss bestimmt werden.
- Die Nullstelle der entsprechenden linearen Gleichung muss bestimmt werden.
- Für A einen sinnvollen Wert einsetzen und nach x umstellen und sich so mit mehreren Werten annähern.

Antwortoption a) und b) sind korrekt. Der Distraktor c) ist gedacht für Lernende, welche die aufgestellte Formel ohne expliziten Exponenten nicht als quadratische Funktion erkennen. Die Antwortoption d) bietet einen intuitiven Ansatz, wobei durch geschicktes Ausprobieren evtl. das Maximum berechnet wird, aber es kann nicht als solches bestimmt werden. Vielleicht hat man hier auch nur die größte Zahl der eigenen Daten gefunden. Eine Variante dieser Aufgabe könnte durch eine Negation geschaffen werden, bspw.: Welche Aussage stimmt nicht? In diesem Fall könnte Antwort c) umgekehrt werden: „Die Nullstellen der quadratischen Gleichung müssen aufgrund der Symmetrieeigenschaften bestimmt werden.“

¹⁶⁶ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 57.

PI-Aufgabe L4.7

Diese Aufgabe gehört zum Themenkomplex „Zuordnungen und Funktionen“ im Rahmenlehrplan.¹⁶⁷ Sie ermöglicht die begriffliche Vertiefung der Bedingungen zur Aufstellung von eindeutigen Funktionsgleichungen.

Eine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ soll aufgestellt werden. Was wird dafür auf jeden Fall benötigt, damit die Funktionsgleichung eindeutig ist?

- a) Man benötigt zwei Punkte, von denen einer eine Nullstelle sein muss.
- b) Man benötigt den Scheitelpunkt für die Scheitelpunktform und formt diese um.
- c) Man benötigt drei Punkte, wobei es egal ist, welche Punkte das sind.
- d) Man benötigt alle Schnittpunkte mit den beiden Achsen.

Die korrekte Antwort ist c). Sobald Ableitungen eingeführt wurden, genügen zwar zwei Punkte, solange einer davon das Extremum darstellt. Damit a) eindeutig nicht gilt, wurde eine entsprechende Voraussetzung angeknüpft. Zwei Punkte würden zwar ausreichen, wenn einer davon den Scheitelpunkt darstellt, aber da dies unter a) nicht vorausgesetzt wird, ist die Antwort falsch. In der Expert:innenphase kann darauf Bezug genommen und diskutiert werden, was an der Antwortoption geändert werden müsste, damit die Aussage korrekt wird. Antwortoption b) lässt die Stauchung/Streckung und Öffnung außer Acht. Die Antwortoption könnte ebenfalls „[...] drei beliebige Punkte“ heißen, würde sich dann aber grammatikalisch von den anderen Antwortmöglichkeiten etwas abheben. Als Variante bietet sich die Fragen zur Aufstellung der Funktionsgleichung von linearen Funktionen an.

PI-Aufgabe L4.8

Die folgende Aufgabe thematisiert den Satz von Vieta und kann eingesetzt werden, um das Theorem Image zu verbessern und somit am Satzverständnis zu arbeiten. Diese Aufgabe gehört im Rahmenlehrplan zum Bereich „Gleichungen und Gleichungssysteme lösen“.¹⁶⁸

Welche Aussage über den Satz von Vieta stimmt nicht?

- a) Wenn eine quadratische Gleichung in Normalform vorliegt, kann man mit systematischem Probieren die Gleichung lösen.
- b) Mit $q = x_1 \cdot x_2$ und $-p = x_1 + x_2$ bekommt man immer eine Lösung der Gleichung.
- c) Mit dem Satz von Vieta erhält man für p und q dasselbe wie mit der Anwendung der p-q-Formel bei derselben quadratischen Gleichung.
- d) Die Vorzeichen von p und q aus dem Satz von Vieta dürfen nicht vertauscht werden.

Antwortoption b) ist die korrekte Antwort auf die Frage, da es quadratische Funktionen ohne Nullstellen gibt. Alternativ kann für c) auch die folgende Aussage verwendet werden: „Mit dem Satz von Vieta kann das Ergebnis von der Anwendung der p-q-Formel überprüft werden.“ Hierbei soll lediglich der Zusammenhang zwischen beiden „Werkzeugen“ deutlich werden.

¹⁶⁷ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 57.

¹⁶⁸ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 56.

PI-Aufgabe L4.10

Die folgende Aufgabe thematisiert die unterschiedlichen Funktionstypen basierend auf einer Wertetabelle mit dem Ziel, einen prognostischen Ansatz zu hinterfragen und so die Grenzen von Funktionen zu durchdenken. Damit lässt sich diese Frage im Rahmenlehrplan unter dem Themenfeld „Eigenschaften von Funktionen nutzen“ verorten.¹⁷⁰

Die folgende Tabelle stellt die Umsätze der Firma „VANverkauf & Ausbauzubehör“ vor und während der Corona-Pandemie dar:

Jahr	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Umsatz in €	50.314	99.648	201.870	398.760	800.500	1.569.900	3.210.000

Die Firma möchte hieraus die zukünftige Entwicklung prognostizieren. Welche Art von Funktion lässt sich dazu sinnvoll einsetzen?

- e) Eine lineare Funktion, weil der Umsatz streng monoton steigend ist.
- f) Eine quadratische Funktion, obwohl es bei 2020 und 2022 Ausreißer aus den Quadraten gibt.
- g) Eine exponentielle Funktion, obwohl die Zahlen annähernd um den Faktor 100.000 verschoben sind.
- h) Kein Funktionstyp kann der Firma Auskunft über einen Trend im nächsten Jahr geben.

Die Antwortoption d) ist korrekt. Zwar entsprechen die Werte annähernd dem Kurvenverlauf von $f(x) = 2^{x-1} \cdot 100.000$, aber Werte in ein Koordinatensystem einzutragen, ist nicht per se sinnvoll für eine Prognose. Durch den gewählten Realitätsbezug kann kein zukünftiger Trend abgelesen werden. Eine Alternative Aufgabe könnte exponentielle Funktionen thematisieren, ginge es um zuverlässige Wachstums- oder Zerfallsprozesse.

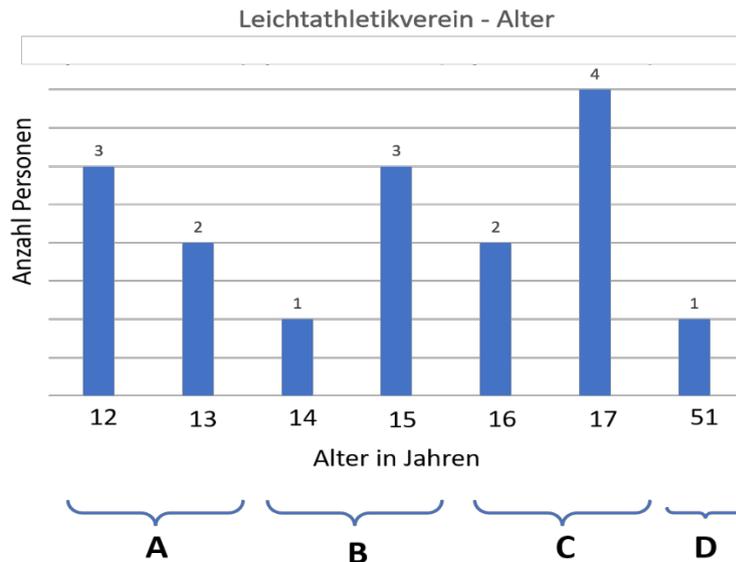
¹⁷⁰ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 57.

L5 Daten und Zufall

PI-Aufgabe L5.1

Die folgende Aufgabe befasst sich mit statistischen Kennwerten und erfragt konkret die Position des Medians eines Säulendiagramms. Dadurch soll eine Abgrenzung zu den Begriffen Durchschnitt und Modus gefördert werden. Thematisch findet sich dies Aufgabe im Rahmenlehrplan in dem Themenfeld „statistische Erhebungen auswerten“ wieder.¹⁷¹

Der Leichtathletikverein einer Schule hat eine Aufstellung aller Mitglieder nach Alter statistisch dargestellt:



In welchem Bereich befindet sich der Median des Datensatzes?

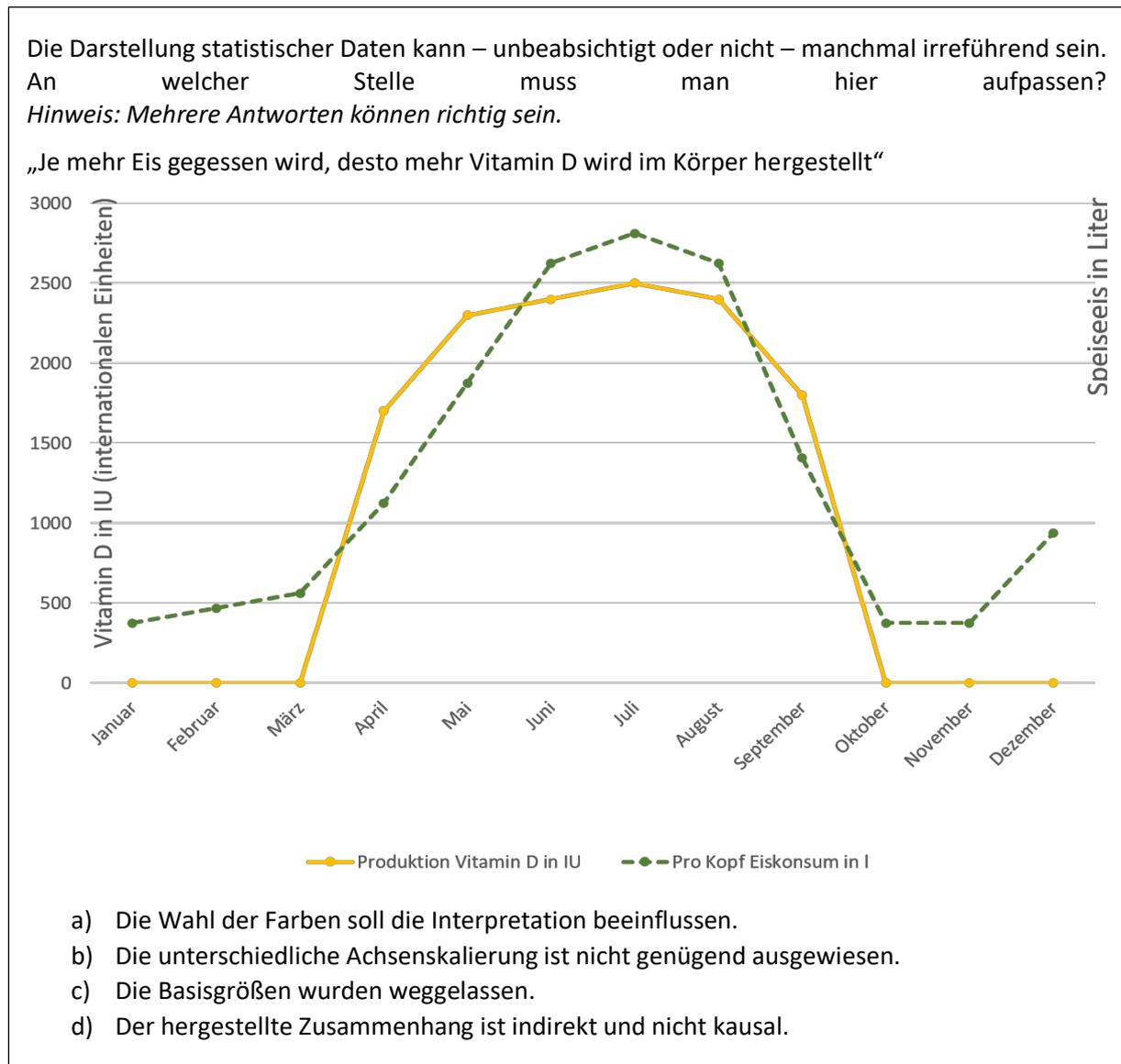
- a) Im Bereich A, weil hier der Modus/Zentralwert der Daten liegt.
- b) Im Bereich B, weil hier die Mitte der sortierten Daten liegt.
- c) Im Bereich C, weil hier der Durchschnitt der Daten liegt.
- d) Im Bereich D, weil hier der höchste Wert der Daten liegt.

Die korrekte Antwort ist b). Den offensichtlichsten Distraktor stellt hier Antwortoption a) dar, weil die Angabe in der Darstellung schnell als falsch erkannt werden kann. Dies sollte in der Expertenphase nicht als solcher benannt werden, um keine Bloßstellung von Lernenden zu riskieren. Modus, Median und arithmetischer Mittelwert werden in der Regel zeitgleich eingeführt, sodass für die anderen Distraktoren statt dem tatsächlichen Begriff die jeweilige Bedeutung benutzt wurde. Sonst könnten Lernende bspw. Antwort c) schneller ausschließen, weil sie wissen, dass Median und arithmetischer Mittelwert unterschiedliche Werte beschreiben. Nur wer die Bedeutungen dieser beiden Werte kennt und unterscheiden kann, erkennt die korrekte Antwort. Als Variante kann eine Darstellung als Kurve von bspw. Temperaturen gewählt werden oder nach einem anderen Lagemaß gefragt werden oder andere statistische Begriffe in die Distraktoren integriert werden.

¹⁷¹ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 60.

PI-Aufgabe L5.2

Diese Aufgabe widmet sich der Darstellung von Statistiken und worauf dabei zu achten ist. Thematisch finden sich Darstellungen von Datensätzen unter „Daten darstellen“ und „statistische Erhebungen auswerten“ im Rahmenlehrplan.¹⁷²



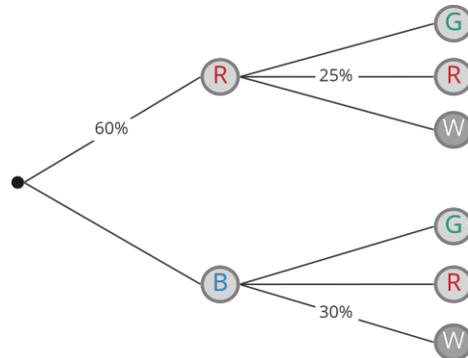
Die korrekte Antwort ist d). Bei dieser Aufgabe geht es um eine Fehlersuche, wie Daten nicht dargestellt werden sollen. Eine Variante dieser Peer Instruction-Aufgabe mit größerem Fokus auf die Darstellung könnte zwei Versionen eines Datensatzes zeigen und erfragen, welche Darstellung verzerrt erscheint und in den Antwortoptionen entsprechende Begründungen anführen. Zu den typischen Beispielen von Verzerrungen, die durch Peer Instruction zur Diskussion gebracht werden können, eignen sich Kreise mit doppeltem Radius als Darstellung von etwas Doppeltem, unpassend gewählte Perspektiven auf ein drei-dimensionales Tortendiagramm, die Wahl der Farbe sowie vorverurteilende Überschriften.

¹⁷² Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 60.

PI-Aufgabe L5.3

Im Rahmenlehrplan lässt sich die folgende Aufgabe dem Themenfeld „Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten“ zuordnen.¹⁷³ Sie thematisiert konkreter die Lesart von Baumdiagrammen.

Gegeben sei folgendes Baumdiagramm von zwei nacheinander betätigten Glücksrädern.



Dieses ist leider nur unvollständig beschriftet. Wie können die beiden dazugehörigen Glücksräder aussehen?

- a) Glücksrad 1 Glücksrad 2
-
- b) Glücksrad 1 Glücksrad 2
-
- c) Glücksrad 1 Glücksrad 2
-
- d) Es gibt nicht genügend Informationen, um die Glücksräder eindeutig darzustellen

Die Antwortoption c) ist korrekt. Dass bei Darstellungen nicht nur auf die Zahlen geachtet werden darf, soll Distraktor a) verdeutlichen und b) kann plausibel erscheinen, wenn das Baumdiagramm „Zeilenweise getrennt“ gelesen wird. Sollte diese Aufgabe analog in Papierform ausgehändigt werden, müssen die Farben je nach Kopierqualität ggf. zusätzlich beschreiben werden.

¹⁷³ Vgl. Rahmenlehrplan Berlin Brandenburg. Teil C, Mathematik. S. 61.

Abstrakte Aufgaben für Peer Instruction

Die beiden folgenden Aufgabe unterscheiden sich von den herkömmlichen Peer Instruction-Aufgaben insofern, als dass sie nicht inhaltlich auf mathematischer Ebene arbeiten.

PI-Aufgabe A.1

Diese Aufgabe befasst sich mit dem schüler:innengerechten Modellierungsprozess. Damit soll das Methodenrepertoire der Lernenden erweitert und gefestigt werden.

Bei einer Modellierungsaufgabe geht es darum, ein reales Problem durch Mathematik zu lösen. Welcher dieser Aspekte trifft beim mathematischen Modellieren nicht zu?

- a) Wenn man eine Zahl errechnet hat, ist man fertig.
- b) Man muss zuerst das reale Problem verstehen und wissen, wonach gesucht wird.
- c) Man muss die passenden Formeln ggf. selbst aufstellen.
- d) Das reale Problem ist in der Regel zu komplex und muss für die Mathematik vereinfacht werden.

Die korrekte Antwort ist a). Diese Peer Instruction-Aufgabe arbeitet auf einer Metaebene und soll den strategischen Ablauf des Modellierens festigen. Dafür liegt das folgende vereinfachte Modell auf Schüler:innenmodell zugrunde: Verstehen → Modell erstellen → Mathematik benutzen → Ergebnis interpretieren. Die ersten beiden Schritte sind der Realität zuzuordnen sind und die letzten beiden der Mathematik.

PI-Aufgabe A.2

Diese Aufgabe hat keine korrekte Lösung. Sie dient zum einen der Lehrperson als Instrument ein Stimmungsbild der Lerngruppe einzuholen sowie der Evaluierung der Lernatmosphäre des eigenen Unterrichts.¹⁷⁴

Welcher Aussage über Fehler und Irrwege im Mathematikunterricht würdest du am ehesten zustimmen? (Es gibt keine richtige oder falsche Antwort)

- a) Fehler und Irrwege zeigen mir, was ich noch nicht kann und wo ich üben muss.
- b) Fehler und Irrwegen bedeuten für mich, dass ich schlecht in Mathe bin und schlechte Noten bekomme.
- c) Fehler und Irrwege sind für mich notwendig. Ohne kann ich nicht lernen, weil ich nicht wüsste, was warum falsch ist.
- d) Fehler und Irrwege sind Zeitverschwendung und unnötig und deshalb zu vermeiden.

Eine Voraussetzung für fruchtbaren Unterricht mit Peer Instruction ist eine fehlertolerante Lernumgebung und Diskussionen können nur ungehemmt, ohne Angst etwas Falsches zu sagen, bloßgestellt zu sein o.ä. funktionieren. Daher sollte der eigene Unterricht regelmäßig dahingehend reflektiert werden, wobei diese Peer Instruction-Aufgabe dazu eine Möglichkeit bietet. Zum anderen kann die Peer Instruction-Aufgabe eine Anregung für die Lernenden darstellen, den persönlichen Wert, der Fehlern und Irrwegen beigemessen wird, zu erkennen und in der Diskussionsphase zu reflektieren.

¹⁷⁴ Vgl. Riegler. Didaktische, organisatorische und technische Grundlagen. 2019. S. 64.

Weitere Ideen für Peer Instruction-Aufgaben, die nicht mehr umgesetzt wurden, könnten die folgenden sein:

- Konstruktionsaufgaben, evtl. als Strategiebildungsaufgabe
- Aufgaben zu Maßstäben in Verbindung mit dem Strahlensatz
- Statistische Kennwerte anhand von zwei Datensätzen untersuchen (haben dieselbe Varianz, weil Spannweite gleich etc.)
- Vasenfüllstände; Prozess der Befüllung dargestellt als Zuordnung im Koordinatensystem (Zeit x Füllstand)
- Abgrenzung der Begriffe Variable, Parameter und Unbekannte voneinander
- Wie ein LGS aussehen könnte, wenn es ... Lösungen hat (ohne tatsächlich Zahlen zu nennen, sondern Eigenschaften anzugeben)
- Zusammenhang der p-q-Formel und dem Satz von Vieta
- In der Aufgabe eine Darstellung zu präsentieren und nach einer geeigneten anderen Darstellung in den Antwortoptionen zu suchen (mit Begründung)
- Kreise: π ist konstant; Verhältnis zum Radius