

UNTERNEHMENSBEWERTUNG,
ARBITRAGEFREIHEIT UND
ASYMMETRISCHE BESTEUERUNG VON
GEWINNEN UND VERLUSTEN

*Objektive Unternehmensbewertung auf Grundlage einer
Schedulensteuer*

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
Wirtschaftswissenschaft des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft der Freien
Universität Berlin

Vorgelegt von
Diplom-Ökonom Dirk Guntermann
aus
Laatzen

Berlin, Januar 2017

Erstgutachter: Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

Zweitgutachter: Prof. Dr. Dr. h.c. Lutz Kruschwitz

Tag der Disputation: 20. Oktober 2017

DANKSAGUNG

Es war ein außerordentliches Glück, dass ich mich im Rahmen dieser Promotion mit einer Frage auseinandersetzen durfte, die mich seit meinen Studientagen beschäftigte. Wie verträgt sich die Arbitrage­theorie mit einer asymmetrischen Gewinnsteuer?

Mein aufrichtiger Dank gilt an erster Stelle Professor Dr. Dr. Löffler, der mich nicht nur auf dieses Thema aufmerksam gemacht hat, sondern auch das Risiko eingegangen ist, mich im Rahmen einer externen Promotion zu betreuen. Bei einer externen Promotion liegt es in der Natur der Sache, nicht sehr stark bis gar nicht in den wissenschaftlichen Betrieb eingebunden zu sein. Es handelt sich aber in jedem Fall um einen sehr einsamen Weg, den ich ohne die hervorragende Betreuung durch Professor Dr. Dr. Löffler und seine motivierende Art nicht hätte durchstehen können. Seine Geduld und sein fortwährendes Engagement bei der Beantwortung vieler Fragen und insbesondere der Durchsicht von Texten, in den unterschiedlichsten Reifegraden und nicht immer lesenswert, haben den Abschluss dieser Arbeit erst ermöglicht. Nicht unerwähnt an dieser Stelle soll Professor Dr. Dr. hc Kruschwitz bleiben, dem ich ganz herzlich für seine Begutachtung danke. Ich sehe es als große Auszeichnung an, dass sich zwei renommierte Vertreter ihres Faches mit dieser Arbeit beschäftigen.

Ebenfalls gilt mein Dank meiner Familie, meiner Frau Sarah und meinen beiden Kindern Dénise und Bosse, die in den vergangenen Jahren einen großen Teil der sowieso schon spärlichen Familienzeit auf mich verzichten mussten. Insbesondere meiner Frau Sarah danke ich dafür, dass sie mir jederzeit den Rücken freigehalten hat und mir damit erst ermöglichte, diese Arbeit fertigzustellen.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

3.1	Zeitstruktur des Modells.	54
3.2	Preisstruktur des Modells.	60
3.3	Preis der Aktie vor asymmetrischer Besteuerung	72
3.4	Cashflow des Unternehmens vor asymmetrischer Besteuerung	83

LISTE DER ANNAHMEN, DEFINITIONEN UND SÄTZE

2.1	Definition (Arbitragefreiheit)	22
2.2	Satz (1. Fundamentalsatz der Preistheorie)	23
2.3	Definition (Gewinn und Verlust: Basistitel)	25
2.4	Definition (Bemessungsgrundlage der Schedulensteuer)	25
2.5	Definition (Steuerschuld: Basistitel)	26
2.6	Definition (Steuerschuld: Portfolio)	27
2.7	Annahme (Fundamentalannahme)	27
2.8	Definition (Portfoliopreis nach Steuern)	27
2.9	Definition (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer)	28
2.10	Annahme (Eindeutiger Steuersatz)	31
2.11	Satz (1. Fundamentalsatz der Preistheorie im Ein-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer)	34
2.12	Annahme (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer)	37
2.13	Definition (Gewinn und Verlust: Unternehmen)	38
2.14	Definition (Bemessungsgrundlage: Unternehmen)	39
2.15	Definition (Steuerschuld: Unternehmen)	39
2.16	Definition (Gesamtsteuerschuld im erweiterten Modell)	39
2.17	Annahme (Vollständiger Markt)	40
2.18	Satz (Arbitragefreiheit im erweiterten Modell)	41
2.19	Satz (Eindeutiges risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß)	43
2.20	Satz (Steuerliche Berücksichtigung des Kaufpreises)	46
2.21	Definition (Ökonomisch zulässiger Preis)	48
2.22	Satz (Eindeutigkeit des ökonomisch zulässigen Preises)	48
3.1	Definition (Arbitragefreiheit)	51
3.2	Annahme (Buchwert)	56
3.3	Definition (Gewinn und Verlust: Basistitel im Zeitpunkt t)	56
3.4	Definition (Bemessungsgrundlage: Basistitel im Zeitpunkt t)	57
3.5	Definition (Steuerschuld: Basistitel im Zeitpunkt t)	58

3.6	Definition (Steuerschuld: Portfolio im Zeitpunkt t)	58
3.7	Definition (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer)	62
3.8	Satz (Ein-Perioden-Arbitrage)	62
3.9	Satz (Arbitragefreiheit und diskontierter Preisprozess)	64
3.10	Annahme (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer)	65
3.11	Definition (Äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß)	66
3.12	Satz (Martingal)	66
3.13	Satz (Preis des Portfolios unter Q^τ)	67
3.14	Satz (1. Fundamentalsatz der Preistheorie im Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer)	68
3.15	Definition (Gewinn und Verlust: Unternehmen im Zeitpunkt t)	77
3.16	Definition (Steuerschuld: Unternehmen im Zeitpunkt t)	77
3.17	Satz (Messbarkeit der Steuerschuld des Unternehmens)	77
3.18	Annahme (Vollständiger Markt)	78
3.19	Satz (Arbitragefreiheit im erweiterten Modell)	79
3.20	Satz (Eindeutiges äquivalentes Martingalmaß)	81
3.21	Satz (Objektiver und eindeutiger Preis des Unternehmens)	82

LISTE DER VERWENDETEN SYMBOLE

$E(\cdot)$	(Bedingter) Erwartungswert
$ \mathcal{F}_t$	Information bedingt auf t
\widetilde{AfA}_t	Abschreibung eines Assets in t
\widetilde{B}_t	Buchwert eines Assets in t
\widetilde{CF}_t	Cashflow des Unternehmens vor Steuern in t
\widetilde{CF}_t^τ	Cashflow des Unternehmens nach Steuern in t
δ_t^D	Entnahme im Modell mit Dividendenzahlung vor Steuern in t
δ_t^τ	Entnahme im Modell mit Dividendenzahlung nach Steuern in t
\widetilde{D}_t	Dividende in t
\widetilde{G}	steuerrechtlicher Gewinn und Verlust
\widetilde{H}	Handelsstrategie
r_f	risikoloser Zinssatz
S_0	Bekannter Preis des Portfolios in $t = 0$
\widetilde{S}_t	Preis des Portfolios vor Steuern in $t > 0$
\widetilde{Tax}_t	Steuerschuld in t
\widetilde{TB}_t	Bemessungsgrundlage der Steuer in t
τ^G	Gewinnsteuersatz
τ^V	Verluststeuersatz
\widetilde{V}_t	Preis des Portfolios im Modell mit Dividendenzahlung vor Steuern in t
\widetilde{V}_t^τ	Preis des Portfolios nach Steuern in t
\widetilde{V}_t^U	Preis des Unternehmens im Modell ohne Steuern in t
$\widetilde{V}_t^{U,\tau}$	Preis des Unternehmens im Modell mit Steuern in t
x^T	Mengenvektor der Basistitel

INHALTSVERZEICHNIS

1 Einleitung 10

- 1.1 Zielsetzung und Einordnung der Arbeit in die Literatur 10
- 1.2 Problem 14

2 Ein-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer 21

- 2.1 Kapitalmarkt 21
- 2.2 Schedulensteuer 23
- 2.3 Definition der Arbitragefreiheit 27
- 2.4 Fundamentalsatz der Preistheorie im Ein-Perioden-Modell 34
- 2.5 Unternehmensbewertung bei asymmetrischer Schedulensteuer 37
 - 2.5.1 Buchwert- Abschreibung im Ein-Perioden-Modell 37
 - 2.5.2 *Exkurs:* Steuerliche Berücksichtigung des Kaufpreises zum Zeitpunkt der Liquidation 45
 - 2.5.3 Marktwert- Abschreibung im Ein-Perioden-Modell 47
- 2.6 Zusammenfassung 50

3 Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer 51

- 3.1 Kapitalmarkt 52
- 3.2 Schedulensteuer 55
- 3.3 Fundamentalsatz der Preistheorie im Mehr-Perioden-Modell 62
- 3.4 Unternehmensbewertung bei asymmetrischer Schedulensteuer 75

4 Resümee 86

Literaturverzeichnis 88

A Anhang 94

- A.1 Abstract 94
- A.2 Zusammenfassung 94
- A.3 Lebenslauf 95
- A.4 Eidesstattliche Erklärung 96

1 EINLEITUNG

1.1 ZIELSETZUNG UND EINORDNUNG DER ARBEIT IN DIE LITERATUR

In dieser Arbeit gehen wir der Frage nach, wie sich im Rahmen einer Unternehmensbewertung ein objektiver und arbitragefreier Marktpreis ermitteln lässt, wenn sich die Marktteilnehmer einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten gegenübersehen. Arbeiten zur Einbeziehung von Steuern in Fragestellungen der Finanzierung sind nicht neu. Ein für die Finanzierung wegweisendes Modell wurde vor mehr als einem halben Jahrhundert von Modigliani & Miller (1958) formuliert. Die Autoren haben in dieser Arbeit auf Grundlage des Arbitragefreiheitskalküls gezeigt, dass ein Unternehmen unabhängig vom Verschuldungsgrad einen einheitlichen Wert aufweist, sofern Steuern und Transaktionskosten außer Acht gelassen werden. Einige Jahre später untersuchten Modigliani & Miller (1963) den Einfluss einer symmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten auf Unternehmensebene und konnten zeigen, dass eine einfache Steuer einen werterhöhenden Effekt bei Fremdfinanzierung auslöst. Für eine sehr einfache Finanzierungspolitik wurde dieser Effekt auch genau quantifiziert. Während man auf viele Annahmen von Modigliani und Miller in den folgenden Jahren verzichten konnte, ohne das Hauptergebnis zu gefährden, finden sich jedoch bis heute nur sehr wenige Arbeiten, die sich mit der asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten befassen.¹ Eine solche Arbeit neueren Datums ist die von Drukarczyk & Lobe (2002). Die Autoren haben dort gezeigt, dass die Argumentationstechnik von Modigliani und Miller zur Bewertung einer Realinvestition bei asymmetrischer Besteuerung von Zinsaufwendungen und Zinserträgen versagt. Ein Schwachpunkt dieser Untersuchung ist jedoch die Tatsache, dass die Autoren versäumt haben, die Auswirkungen der Steuer auf den zugrundeliegenden Kapitalmarkt zu untersuchen. Das ist ein gravierendes Problem, auf das Kruschwitz, Löffler & von Lehna (2010) hingewiesen haben, denn der zugrundeliegende Kapitalmarkt bildet das theoretische Fundament des Modells und darf somit nicht unberücksichtigt bleiben.

In der Finanzmarkttheorie werden üblicherweise Arbitragediskussionen in Modellen geführt, die neben der Realinvestition einen Kapitalmarkt mit mehreren Basistiteln beinhalten. Das geschieht in der Regel durch die Einbettung der Realinvestition in ein arbitragefreies Preissystem von Kapitalmarktbasispapieren.² Aus den Basisti-

1. Es ist jedoch unbestritten, dass die Berücksichtigung asymmetrischer Steuern in den Finanzwissenschaften und der betriebswirtschaftlichen Steuerlehre von Bedeutung ist. Siehe dazu bspw. Ewert & Niemann (2010, S. 3ff).
2. Die Arbitrage Theorie ist eine stochastische Theorie der Finanzmärkte, die zum Ziel hat, eindeutige und faire Preise einzelner Assets zu ermitteln, ohne dass dazu Marktträumung oder die

teln kann durch geeignete Portfoliobildung der Zahlungsstrom einer Realinvestition nachgebildet und ein fairer Preis für das reale Asset ermittelt werden, sofern die Realinvestition repliziert werden kann. Aus diesem Grund muss der Kapitalmarkt zwingend Berücksichtigung finden.

Wir nehmen die Kritik an der Arbeit von Drukarczyk & Lobe (2002) auf und werden im Folgenden eine asymmetrische Steuerfunktion in einem zeit- und zustandsdiskreten Modell vorstellen, die mit dem klassischen Arbitragefreiheitspostulat vereinbar ist. Zunächst werden wir unsere asymmetrische Steuer in einem einfachen einperiodigen Modell entwickeln. Anschließend implementieren wir die Steuerfunktion in einem mehrperiodigen Modell mit dynamischer Handelsstrategie. Um die Untersuchung so einfach wie möglich zu halten, werden wir auf ein stark stilisiertes Steuersystem zurückgreifen und ausschließlich eine Besteuerung von Gewinnen und Verlusten auf persönlicher Ebene berücksichtigen.

Bei der Ermittlung des fairen Unternehmenswertes werden wir uns auf die Grundlagen der Bewertung beschränken und die Preisgleichung unter einem geeigneten risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaß herleiten. Darauf basierende und anwendungsnähere Ansätze, wie bspw. die sehr populären DCF-Verfahren, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht.³ Die meisten mathematischen Beweise in dieser Arbeit basieren auf dem Buch von Irle (2003, Kap. 1-3).

Nach Modigliani & Miller (1958) hat die Arbitragetheorie durch die Arbeit von Harrison & Kreps (1979) eine beachtliche Entwicklung genommen. Die Autoren haben die Äquivalenz von Arbitragefreiheit und Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes, auch risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß genannt, nachgewiesen.⁴ Dieses Ergebnis ist als *Fundamentalsatz der Preistheorie* in die einschlägige Literatur eingegangen. Der faire Preis eines bewertbaren Anspruchs entspricht in einem arbitragefreien Preissystem genau dem Erwartungswert des Anspruchs unter dem äquivalenten Martingalmaß und lässt ebenfalls keine Arbitragemöglichkeiten zu. In der Folgezeit wurde der Fundamentalsatz der Preistheorie stetig weiterentwickelt und hat bis zum heutigen Tag nichts an Relevanz für die neoklassische Finanzierungstheorie verloren. Eine abstrakte und sehr allgemeine Version des Fundamentalsatzes der Preistheorie findet sich bspw. bei Kabanov & Kramkov (1995).

Der Einfluss von Steuerarbitrage sowohl bei symmetrischer als auch bei asymmetrischer Besteuerung wird seit längerem in der einschlägigen Literatur diskutiert. Exemplarisch für die Arbeiten vor der Jahrtausendwende seien hier Schaefer (1982), Constantinides (1983), Ross (1987) und Dammon & Green (1987) aufgeführt. Einen

Kenntnis individueller Nutzenfunktionen unterstellt werden muss.

3. Einen guten Einstieg in die Theorie der Unternehmensbewertung mittels DCF-Verfahren bietet das Lehrbuch von Kruschwitz & Löffler (2006), das Steuern sowohl auf Unternehmensebene als auch auf persönlicher Ebene berücksichtigt.
4. Harrison & Kreps (1979) gelten gemeinhin als diejenigen, die als Erste den Nachweis über Äquivalenz von Arbitragefreiheit und Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes erbracht haben. Bei Ross (1976) finden sich jedoch bereits wesentliche Vorarbeiten zu dieser Aussage.

guten Überblick über die frühen Arbeiten zum Thema Steuerarbitrage bietet die Arbeit von Raab (1993).

Schaefer (1982) ist im Rahmen eines Ein-Perioden-Gleichgewichtsmodells unter Sicherheit der Frage nachgegangen, wie sich eine asymmetrische Besteuerung auf das Postulat der Arbitragefreiheit auswirkt. Mit Ausnahme der Steuer unterstellt Schaefer einen vollkommenen Markt und kommt zu dem Ergebnis, dass Arbitragemöglichkeiten nicht ausgeschlossen werden können, sofern die Marktteilnehmer einer unterschiedlichen Besteuerung unterzogen werden.

Dammon & Green (1987) greifen die Fragestellung von Schaefer (1982) auf, betrachten in ihrer Untersuchung aber ein wesentlich realitätsnäheres Modell unter Unsicherheit. Sie kommen im Rahmen ihres Modells unter anderem zu dem Schluss, dass zur Vermeidung von Arbitrage die Steuersätze zwischen Marktteilnehmern identisch sein müssen, sofern es sich bei den Kapitalmarktstiteln nicht um perfekte Substitute handelt.

Constantinides (1983) betrachtet ein Mehr-Perioden-Modell unter Einbeziehung persönlicher Steuern. Er geht der Frage nach, welches die optimalen Zeitpunkte für einen Investor sind, sein Portfolio zusammenzustellen bzw. aufzulösen, um die Steuerzahlungen an den Fiskus zu minimieren. Constantinides (1983) findet heraus, dass durch geschickte Wahl der Zeitpunkte und bei Vorliegen von steuerlichen Verlustverrechnungen die Generierung risikofreier Arbitragegewinne möglich ist.

Ross (1987) hat im Rahmen eines Ein-Perioden-Modells den Einfluss einer sehr allgemeinen und konvexen Steuerfunktion auf die Vereinbarkeit mit dem Postulat der Arbitragefreiheit untersucht.⁵ Um Probleme mit dem klassischen Arbitragefreiheitspostulat zu vermeiden, die insbesondere bei asymmetrischer Besteuerung auftreten, formuliert Ross die Definition der lokalen Arbitragemöglichkeit.⁶ Bei der Betrachtung einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten lässt sich Ross' Modellansatz jedoch nicht mehr uneingeschränkt anwenden.⁷

Im Folgenden sind neuere Untersuchungen aufgeführt, die sich mit Steuerarbitrage im Rahmen theoretischer Modelle der Arbitragetheorie befassen. Um den Rahmen dieses Literaturüberblicks nicht zu sprengen, konzentrieren wir uns auf die für unsere Fragestellung wegweisenden Arbeiten.

Löffler & Schneider (2003) leiten in ihrer Arbeit den Fundamentalsatz der Preistheorie in einer allgemeinen Version mit Steuern, angelehnt an der klassischen Version der Arbitragefreiheit, her. Auf Basis des Fundamentalsatzes der Preistheorie unter Steuern wird die Investitionsneutralität von diversen Steuersystemen unter Unsicherheit untersucht. Löffler & Schneider (2003) betrachten in ihrer Arbeit ei-

5. Im Gegensatz zu Schaefer (1982) und Dammon & Green (1987) betrachtet Ross (1987) kein Gleichgewichtsmodell, sondern fordert in seinem Modell einzig die Arbitragefreiheit des Marktes.

6. In der einschlägigen Literatur wird die lokale Arbitragemöglichkeit häufig auch nur mit dem Akronym LAO (aus dem englischen Original: Local Arbitrage Opportunity) bezeichnet.

7. Siehe [Fußnote 2, S. 383] Ross (1987). Im nächsten Abschnitt zeigen wir anhand eines einfachen Beispiels, in welchen Situationen der Ansatz von Ross versagt.

ne Steuer auf Unternehmensebene mit ausschließlich linearem Steuertarif sowohl in einem zeitdiskreten als auch in einem zeitstetigen Modellrahmen.

Das Modell von Ross (1987) erhielt durch die Arbeit von Schosser & Wilhelm (2007) eine wesentliche Weiterentwicklung. Die Autoren erweitern den Ansatz von Ross auf ein mehrperiodiges Modell mit dynamischer Handelsstruktur.

Jensen (2009) befasst sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen ein Steuersystem auf Basis des Arbitragefreiheitspostulats als neutral anzusehen ist. Der Autor bezeichnet ein Steuersystem als neutral, sofern der Markt frei von Arbitrage ist und folgende Bedingungen erfüllt sind: Der Nachsteuerpreis der Kapitalmarkttitel ist eindeutig und die Haltedauer der Assets ist beliebig wählbar. In seiner Arbeit betrachtet Jensen (2009) die Besteuerung von Kapitalgewinnen und -verlusten mit ausschließlich linearem Steuertarif auf persönlicher Ebene.

Gallmeyer & Srivastava (2011) beschäftigt die Frage, wie ein arbitragefreies Steuersystem unter Abwesenheit von Scheingeschäften und der Beschränkung des sofortigen Verlustausgleichs ausgestaltet sein muss. Das Modell von Gallmeyer & Srivastava (2011) hat die Definition der lokalen Arbitrage von Ross (1987) zur Grundlage.⁸ Die Autoren kommen bei Annahme eines positiven risikolosen Zinssatzes sowie höherer Steuersätze auf Zinserträge als auf Kapitalerträge zu dem Ergebnis, dass die Abwesenheit von Arbitrage vor Steuern mit der Abwesenheit von Arbitrage nach Steuern einhergeht.

Kruschwitz & Löffler (2015) gehen der Frage nach, welchen Einfluss das *Tax Shield* auf den objektiven Unternehmenswert ausübt. Dazu wenden sie erstmalig im Rahmen einer modellanalytischen Untersuchung einen asymmetrischen Steuertarif auf Unternehmensgewinne bzw. -verluste an. Die Autoren quantifizieren den Effekt des *Tax Shields* für zwei populäre Finanzierungspolitiken.

In einer aktuellen Arbeit untersuchen Becker & Löffler (2016) die Frage, unter welchen Bedingungen Arbitragegelegenheiten bei asymmetrischer Besteuerung und konvexen Steuerschuldfunktionen auftreten können.⁹ Anders als in unserer Arbeit führen Becker & Löffler (2016) ihren Diskurs in einem Modell unter Sicherheit und unterscheiden zwischen klassischer und *beschränkter* Arbitrage während wir uns im Rahmen eines Modells unter Unsicherheit ausschließlich an der klassischen Definition der Arbitragefreiheit orientieren. Des Weiteren ist eine Schedulessteuer von zentraler Bedeutung in unserem Modell, diese Form der Besteuerung wird von Becker & Löffler (2016) jedoch nicht betrachtet.

8. Siehe Gallmeyer & Srivastava (2011, S. 187).

9. Der Autor hat im Dezember 2016 Kenntnis von dieser Arbeit erlangt.

1.2 PROBLEM

In betriebswirtschaftlichen Arbeiten zu asymmetrischen Steuern auf persönlicher Ebene ist es üblich, die Steuerfunktion derart auszugestalten, dass Gewinne und Verluste *separat* und mit unterschiedlichen Steuersätzen besteuert werden.¹⁰ Das ist auch notwendig, um die aus einer anteiligen Anrechnung von Zinsaufwendungen auf Zinserträgen resultierenden Steuereffekte richtig abzubilden. Andernfalls würden sich Aufwendungen und Erträge saldieren, wodurch ja gerade der Effekt der asymmetrischen Steuer vernichtet wird. Zur Illustration einer solch asymmetrischen Steuerfunktion betrachten wir einen Markt, bestehend aus zwei Assets \tilde{S}^1 und \tilde{S}^2 , die in den Mengen $x \in \mathbb{R}$ gehandelt werden.¹¹ Wir nehmen an, dass ein Investor im Zustand w_j mit Titel $\tilde{S}^1(w_j)$ einen Gewinn und mit Titel $\tilde{S}^2(w_j)$ einen Verlust realisiert. Der Gewinn $x_1 \Delta \tilde{S}^1(w_j) = x_1 (\tilde{S}_1^1(w_j) - S_0^1)$ wird mit τ^G und der Verlust $x_2 \Delta \tilde{S}^2(w_j) = x_2 (\tilde{S}_1^2(w_j) - S_0^2)$ wird mit τ^V besteuert, wobei $\tau^G \neq \tau^V$ sei. Für den Investor ergibt sich eine Steuerschuld $\widetilde{Tax}(w_j)$ in Höhe von

$$\widetilde{Tax}(w_j) = \tau^G x_1 \Delta \tilde{S}^1(w_j) + \tau^V x_2 \Delta \tilde{S}^2(w_j), \quad (1.1)$$

was im Ergebnis einer unterschiedlichen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten entspricht. Eine derartige Steuerfunktion ist zwar stark stilisiert, erlaubt uns jedoch die Abbildung vielfältiger steuerlicher Asymmetrien, die u. a. aus zeitlich nachgelagerten Verlustausgleichen oder unterschiedlich hohen Freibeträgen bei Gewinnen und Verlusten resultieren können.¹² Die Steuerfunktion 1.1 entspricht somit im Kern der von Drukarczyk & Lobe (2002) verwendeten Steuerfunktion im Fall der asymmetrischen Besteuerung von Zinsaufwand und Zinsertrag.

Wir zeigen anhand von zwei Beispielen, welchen Irrweg man einschlägt, wenn ohne weitere Anpassungen eine derartige Steuerfunktion im Rahmen der Arbitrage Theorie Anwendung findet.¹³ In beiden Beispielen unterstellen wir, wie bereits erwähnt, dass die Investoren ausschließlich einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten auf persönlicher Ebene unterliegen. Eine Besteuerung auf Unternehmenzebene ist damit ausgeschlossen.

Beispiel 1: Wir greifen das Beispiel von Drukarczyk & Lobe (2002) auf und zeigen, dass die von uns skizzierte Steuerfunktion Arbitragemöglichkeiten bei der Bewertung einer Realinvestition bietet. Dass wir im Gegensatz zu Drukarczyk & Lobe

10. Siehe bspw. Drukarczyk & Lobe (2002, S.4f), Kruschwitz et al. (2010, S.5ff), Niemann (2010, S.9ff), Schosser & Wilhelm (2007, S. 141ff).
11. Die Tilde beschreibt eine unsichere Zahlung. Die Preise der beiden Titel werden in $t = 0$ mit S_0^i und in $t = 1$ mit \tilde{S}_1^i beschrieben, wobei $i = 1, 2$ ist. Die gehaltene Menge an Titel \tilde{S}^1 bezeichnen wir mit x_1 und die gehaltene Menge an Titel \tilde{S}^2 mit x_2 .
12. Siehe z. B. Niemann (2010, S.12). Ein vollständiger und sofortiger Verlustausgleich wird auch bei dieser Steuerfunktion über $\tau^G = \tau^V$ dargestellt.
13. Auf einem arbitragehaltigen Markt können Marktteilnehmer ohne Einsatz eigener Mittel beliebig reich werden. Wir werden weiter unten eine formale Definition der Arbitragefreiheit geben.

(2002) ein wesentlich einfacheres Steuersystem unterstellen, verändert nichts an der allgemeingültigen Aussagekraft unseres Beispiels bezüglich der Diskussion zur Arbitragefreiheit.

Betrachten wir zwei Unternehmen und nehmen in der Tradition von Modigliani und Miller an, dass das eine Unternehmen unverschuldet und das andere Unternehmen verschuldet ist. Wir untersuchen lediglich zwei Zeitpunkte heute ($t = 0$) und morgen ($t = 1$), wobei die Zukunft unsicher ist. Die beiden Unternehmen sind bis auf ihre Kapitalstruktur identisch und erwirtschaften in $t = 1$ gleiche und unsichere Erträge \tilde{X}_1 vor Steuern.¹⁴ Die Erträge werden vollständig an die Anteilseigner ausgeschüttet, und durch die Unternehmen werden keine weiteren Zahlungen im Zeitpunkt $t = 1$ generiert.

Die Zahlungen an die Eigentümer nach Steuern sowie eventuelle Verbindlichkeiten werden beim unverschuldeten Unternehmen mit \tilde{X}_1^u und beim verschuldeten Unternehmen mit $\tilde{X}_1^{E,l}$ bezeichnet. Die Kredite sind ausfallsicher und der aufgenommene Kreditbetrag, sowie die darauf anfallende Zinszahlung, können in jedem Fall bedient werden. In unserem Beispiel unterliegen ausschließlich Gewinne aus Zinsen und Dividendenzahlungen mit dem Steuersatz $\tau^G > 0$ der Besteuerung. Ein Verlustausgleich wird durch $\tau^V = 0$ ausgeschlossen. In $t = 1$ werden die Cashflows nach Zinszahlung vollständig als Dividende an die Anteilseigner ausgeschüttet.

Betrachten wir die Zahlungen des verschuldeten Unternehmens im Zeitpunkt $t = 1$ etwas genauer. Die Gläubiger des verschuldeten Unternehmens erhalten in $t = 1$ eine sichere Zahlung in Höhe von

$$X_1^D = T + Z,$$

bestehend aus Tilgung T und Zins Z und müssen darauf den erhaltenen Zinsgewinn versteuern

$$X_1^{D,\tau} = T + Z(1 - \tau^G). \quad (1.2)$$

Den Eigentümern steht die verbleibende Auszahlung

$$\tilde{X}_1^{E,l} = \tilde{X}_1 - X_1^D \quad (1.3)$$

nach Begleichen der Verbindlichkeiten zu. Auf diesen Betrag wird eine Steuerschuld fällig und den Eigentümern verbleibt ein Nettobetrag in Höhe von

$$\tilde{X}_1^{E,l} = (\tilde{X}_1 - X_1^D)(1 - \tau^G) = \tilde{X}_1(1 - \tau^G) - T(1 - \tau^G) - Z(1 - \tau^G).$$

Die Summe der Zahlungen nach Steuern an Eigentümer und Gläubiger beläuft sich auf

$$\tilde{X}_1^l = \tilde{X}_1^{E,l} + X_1^{D,\tau} = \tilde{X}_1(1 - \tau^G) + \tau^G T. \quad (1.4)$$

Bei dem unverschuldeten Unternehmen ist der Zahlungsstrom in $t = 1$ einfacher, es

14. Wir orientieren uns bei der Konstruktion des Beispiels an Kruschwitz (2002, Kap. 7.4.1).

fließen lediglich Zahlungen nach Steuern in Höhe von

$$\tilde{X}_1^u = \tilde{X}_1(1 - \tau^G) \quad (1.5)$$

an die Eigentümer, da keine Gläubiger bedient werden müssen. Wir erkennen bereits an dieser Stelle, dass auch bei asymmetrischer Besteuerung das verschuldete Unternehmen mehr Wert ist als das unverschuldete Unternehmen. Diesen Wertvorteil quantifizieren wir, indem wir Linearität im Preissystem unterstellen. Wir verwenden $p(\tilde{X}_1^u)$ als Symbol für den Marktwert der Zahlungen des unverschuldeten Unternehmens und definieren den Unternehmenswert des unverschuldeten Unternehmens durch

$$V_0^u = p(\tilde{X}_1^u).$$

Mit $p(\tilde{X}_1^{E,l})$ als Marktwert der Aktien und $p(X_1^D)$ als Marktwert der Anleihen des verschuldeten Unternehmens definieren wir den Unternehmenswert des verschuldeten Unternehmens durch

$$V_0^l = p(\tilde{X}_1^{E,l}) + p(X_1^D).$$

Mit der geforderten Linearität im Preissystem erhalten wir

$$p(\tilde{X}_1^{E,l}) + p(X_1^D) = p(\tilde{X}_1^{E,l} + X_1^D)$$

und wegen 1.3 folgt

$$V_0^l = p(\tilde{X}_1^l).$$

Aus 1.4 und 1.5 erhalten wir

$$\tilde{X}_1^l = \tilde{X}_1^u + \tau^G T.$$

Der Marktwert des Unternehmens in $t = 0$ entspricht den Marktpreisen der ausgegebenen Finanztitel und mit der Linearität des Preissystems und dem Gesetz des eindeutigen Preises folgt

$$p(X_1^l) = p(\tilde{X}_1^u) + p(\tau^G T), \quad (1.6)$$

was uns zu

$$\begin{aligned} V_0^l &= p(\tilde{X}_1^l) \\ &= p(\tilde{X}_1^u) + p(\tau^G T) \\ &= V_0^u + p(\tau^G T) \end{aligned}$$

führt.

Aus Sicht des unverschuldeten Unternehmers muss der Marktpreis des Steuervor-

teils

$$p(\tau^{GT})^u = \frac{\tau^{GT}}{1 + r_f} \quad (1.7)$$

betragen, um Arbitragefreiheit zu gewährleisten. Nehmen wir zur Erläuterung an, dass der Besitzer des unverschuldeten Unternehmens seine Anteile in Höhe von $p(\tilde{X}_1^u)$ verkauft, einen Kredit in Höhe von $p(\tau^{GT})^u$ aufnimmt und das verschuldete Unternehmen in Gänze erwirbt. Im Zeitpunkt $t = 1$ wird, neben dem Erlös aus dem Besitz des verschuldeten Unternehmens \tilde{X}_1^l , die Rückzahlung des Kredits in Höhe von $\tau^{GT} = p(\tau^{GT})^u(1 + r_f)$ fällig. Um nun die Arbitragefreiheit im Preissystem zu gewährleisten, muss der Wert des Steuervorteils in $t = 0$ der Gleichung 1.7 entsprechen.¹⁵

Nehmen wir jetzt an, dass ein Unternehmer in $t = 0$ alle Aktien und Anleihen des verschuldeten Unternehmens in Höhe von V_0^l besitzt und diese zum Marktpreis veräußert. Von dem Erlös kauft er das unverschuldete Unternehmen und verleiht die verbleibenden Mittel $p(\tau^{GT})^l$ zum sicheren Zinssatz r_f am Kapitalmarkt. In $t = 1$ erhält der Unternehmer die Erlöse aus dem unverschuldeten Unternehmen \tilde{X}_1^u und die Rückzahlung des Kreditbetrags nebst Zinsen und abzüglich der darauf anfallenden Steuerzahlung in Höhe von $p(\tau^{GT})^l(1 + r_f(1 - \tau^G))$. In diesem Fall muss der Marktpreis des Steuervorteils in $t = 0$

$$p(\tau^{GT})^l = \frac{\tau^{GT}}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \quad (1.8)$$

betragen, um Arbitrage zu vermeiden.¹⁶ Es ist offensichtlich, dass

$$p(\tau^{GT})^l > p(\tau^{GT})^u \quad (1.9)$$

ist und wir zwei Preise für das zu bewertende Unternehmen erhalten.

■

Bei dem gefundenen Ergebnis handelt es sich um keine neue Erkenntnis und entspricht insoweit auch dem Ergebnis von Drukarczyk & Lobe (2002). Jedoch versuchen Drukarczyk & Lobe (2002) die daraus resultierenden Probleme mit der Berücksichtigung der Präferenzen der Investoren zu umgehen. Dass es sich dabei um keine geeignete Methode handelt, einen objektiven Marktwert zu ermitteln, bemerkten u. a. Diedrich, Dierkes & Gröger (2010). Des Weiteren bricht bei diesem Ansatz aufgrund der unterschiedlichen Nachsteuer-Zinssätze das Fisher-Separationstheorem zusammen.¹⁷ Aber auch wenn wir versuchen das Fisher-Separationstheorem zu um-

15. Der Unternehmer erhält in $t = 1$ aus seinen Transaktionen $\tilde{X}_1^l - \tau^{GT} = \tilde{X}_1^u$, was seinem erwarteten Erlös als Besitzer des unverschuldeten Unternehmens entsprochen hätte. Das Preissystem ist aber nur dann frei von Arbitrage, wenn im Zeitpunkt $t = 0$ die Gleichung 1.6 erfüllt ist.

16. Mit $\tilde{X}_1(1 - \tau^G) + \tau^{GT} = \tilde{X}_1^l$ muss in $t = 0$ aufgrund von Linearität und Eindeutigkeit des Preissystems ebenfalls 1.6 gelten.

17. Siehe zu den Annahmen eines vollkommenen Marktes bei Unsicherheit Wilhelm (1983, S.527ff).

gehen und lediglich der Annahme folgen, dass sich alle Marktteilnehmer am Marktwert zu orientieren haben, ist ein eindeutiger Marktpreis zur Preisfestsetzung erforderlich. Bei einem nicht mehr eindeutigen Marktpreis ist ein Arbitragegewinn nicht mehr auszuschließen. Zur Erzielung einer Arbitrage reicht es aus, dass ein Investor einen Marktteilnehmer findet, dem er das verschuldete Unternehmen zum Preis von $V_0^u + p(\tau^{GT})^u$ abkauft und gleichzeitig das Unternehmen zum Preis von $V_0^u + p(\tau^{GT})^l$ an einen dritten Marktteilnehmer verkauft. In diesem Fall macht der Investor in $t = 0$ einen sicheren Arbitragegewinn in Höhe von

$$p(\tau^{GT})^l - p(\tau^{GT})^u > 0. \quad (1.10)$$

Sicherlich lassen sich in einem Modell auch ohne größere Anstrengungen Annahmen treffen, die diese Art von Geschäft ausschließen. Jedoch würde ein solches Vorgehen gar nichts an der Tatsache ändern, dass für ein Unternehmen zwei Preise existieren. Allein dieser Umstand rechtfertigt es aus unserer Sicht *nicht*, einen Markt als arbitragefrei anzusehen.

Einerseits muss in einem Modell klar definiert sein, was unter einem arbitragefreien Markt überhaupt verstanden werden soll, um auf dieser Basis zu konsistenten und nachvollziehbaren Ergebnissen zu gelangen. Andererseits muss unabhängig von der Definition der Arbitragefreiheit die objektive Bewertungslehre zum Ziel haben, einen eindeutigen und von allen Marktteilnehmern akzeptierten Marktpreis zu ermitteln. Siehe zu der letzten Aussage bspw. Diedrich et al. (2010, Kap. 1). Bei Wallmeier (1999) findet sich Lesenswertes zu Standardannahmen der objektiven Bewertungslehre, die zwingend zu berücksichtigen sind. Wallmeier (1999) weist insbesondere darauf hin, dass der Marktwert ausschließlich aus dem Barwert diskontierter zukünftiger Zahlungen der Investitionen resultiert und demzufolge unabhängig von jeglichen Präferenzen zu sein hat. Der Ansatz von Drukarczyk & Lobe (2002) zur Bewertung von Realinvestitionen im Rahmen der Arbitragetheorie kann daher nur als gescheitert angesehen werden.

Beispiel 2: In diesem Beispiel setzen wir die Steuersätze ins Verhältnis $\tau^V > \tau^G$ und betrachten lediglich einen sicheren Basistitel S^1 des Kapitalmarkts.¹⁸ Wir tätigen in $t = 0$ sowohl einen Kauf der Menge x^* als auch einen Leerverkauf der identischen Menge $-x^*$ in das sichere Asset. Bei diesen Transaktionen ist im Zeitpunkt $t = 0$ der Einsatz eigener Mittel

$$x^*(S_0^1 + (-S_0^1)) = 0$$

nicht notwendig. Im Zeitpunkt $t = 1$ erhalten wir eine sichere Zahlung nach Steuern

18. Der sichere Titel hat in $t = 0$ einen Preis in Höhe von S_0^1 und führt in $t = 1$ auf eine sichere Zahlung in Höhe von S_1^1 .

in Höhe von

$$\begin{aligned} x^*(S_1^1 - \tau^G(S_1^1 - S_0^1)) + (-x^*)(S_1^1 - \tau^V(S_1^1 - S_0^1)) &= \\ = x^*(S_1^1 - \tau^G \Delta S^1 - S_1^1 + \tau^V \Delta S^1) &= \\ = x^* \Delta S^1 (-\tau^G + \tau^V) &> 0 \end{aligned}$$

und somit einen risikolosen und sicheren Arbitragegewinn. ■

Bei dem von uns gewählten Verhältnis der Steuersätze $\tau^V > \tau^G$ handelt es sich um ein seltenes, aber trotzdem realistisches Szenario. Eine solche Situation gab es bspw. in den USA der 1980er Jahre bei der Besteuerung langfristiger Kapitalgeschäfte. Siehe dazu den Kommentar bei Ross (1987, Fußnote 2). Ross sieht aus diesem Grund sein Modell bei einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten als nur bedingt anwendbar an, da es den im letzten Beispiel aufgezeigten Fall einer konkaven Steuerfunktion nicht abbilden kann. Bei der von uns gewählten Fragestellung, den Einfluss einer asymmetrischen Besteuerung auf Realinvestitionen bzw. auf Unternehmenswerte¹⁹ zu untersuchen, spielen jedoch die Ertragsteuern eine entscheidende Rolle.²⁰ Auf Grund dessen werden wir den Modellansatz von Ross (1987) nicht zur Grundlage unserer Untersuchung machen.

Des Weiteren ist bei unserem letzten Beispiel bemerkenswert, dass das Modell vor Steuern, also bei Steuersätzen $\tau^G = \tau^V = 0$ arbitragefrei ist.²¹ Eine Aussage über die Arbitragefreiheit des Modells ist demzufolge abhängig von der expliziten Wahl der Steuersätze, was aus unserer Sicht einen weiteren unbefriedigenden Aspekt darstellt.

Aus dem Standardmodell ist hinreichend bekannt, welche grundlegenden Probleme in einem arbitragehaltigen Markt auftreten.²² So sind vernünftige Aussagen im Rahmen der ökonomischen Theorie nicht mehr möglich, sobald Marktteilnehmer ohne Einsatz eigener Mittel beliebig reich werden können. Vernünftige Aussagen sind auch dann nicht mehr gegeben, wenn allein durch die Einbeziehung einer Steuer Arbitragemöglichkeiten entstehen. In diesem Fall würden die Marktteilnehmer eine Handelsstrategie wählen, die es ihnen nur aufgrund der Ausgestaltung des Steuersystems erlaubt, Gewinne ohne Einsatz eigener Mittel zu generieren.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass wir eine Steuerfunktion entwickeln müssen, die einerseits die asymmetrische Besteuerung von Gewinnen und Verlusten auf persönlicher Ebene ermöglicht und andererseits das Arbitragefreiheitspostulat

19. Wir betrachten in dieser Arbeit als Realinvestition ausschließlich ein Unternehmen und verwenden daher beide Begriffe synonym.

20. Siehe zur Relevanz von Ertragsteuern auf Investitions- und Finanzierungsentscheidungen z. B. Wagner (1984, S. 201ff).

21. Die Zahlung in $t = 1$ beträgt vor Steuern $x^*(S_1^1 + (-S_1^1)) = 0$.

22. Siehe bspw. Kruschwitz et al. (2010, S. 7). Zu einer ausführlichen Diskussion über das Arbitragefreiheitspostulat in Wissenschaft und Praxis siehe Kruschwitz & Löffler (2005b, S. 73ff).

nicht verletzt. Dazu werden wir ein geeignetes Modell basierend auf den folgenden drei Kriterien entwickeln:

- Das Fundament des Modells mit asymmetrischer Besteuerung von Gewinnen und Verlusten bildet die formale Definition der Arbitragefreiheit.
- Die Steuersätze τ^G und τ^V liegen im halboffenen Intervall von $[0,1)$ und können beliebig variiert werden. Insbesondere wird dadurch die Konstellation der Steuersätze zueinander, $\tau^G \geq \tau^V$ oder $\tau^G < \tau^V$, nicht beschränkt.
- Die Bewertung einer Realinvestition bzw. eines Unternehmens führt zu einem eindeutigen und objektiven Marktpreis.

Bei der Ausgestaltung der Steuerfunktion geht es uns aber ausdrücklich nicht um die detailgetreue Abbildung eines realen Steuersystems. Vielmehr soll uns das Modell mit stark vereinfachtem Steuerrecht und stilisierter Steuerfunktion in die Lage versetzen, eine Realinvestition - im Kontext eines arbitragefreien Marktes - mit einem eindeutigen und objektiven Preis zu bewerten. Eine realitätsnähere Ausgestaltung des Modells hinsichtlich real existierender Steuersysteme sei späteren Arbeiten überlassen.

Der weitere Aufbau der Arbeit gliedert sich wie folgt: Im 2. Kapitel werden wir im Rahmen eines einfachen Ein-Perioden-Modells eine asymmetrische Steuerfunktion vorstellen, die das Postulat der Arbitragefreiheit nicht verletzt. Auf Basis des arbitragefreien Kapitalmarkts und unter Verwendung der von uns entwickelten Steuerfunktion gelingt uns damit die Bestimmung eines eindeutigen und objektiven Preises der Realinvestition. Im 3. Kapitel verallgemeinern wir das Modell auf mehrere Perioden mit dynamischer Handelsstruktur. Die obligatorische Zusammenfassung mit den wichtigsten Ergebnissen und einem kurzen Ausblick beschließt die Arbeit.

2 EIN-PERIODEN-MODELL MIT ASYMMETRISCHER STEUER

2.1 KAPITALMARKT

Wir betrachten ein Modell unter Unsicherheit mit zwei diskreten Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$. Der Handel am Kapitalmarkt erfolgt ausschließlich in $t = 0$. Im Zeitpunkt $t = 1$ wird der Markt in einen Zustand w_j aus $\Omega = \{w_1, \dots, w_K\}$ übergehen und die Vermögenspositionen werden aufgelöst.²³ Es herrscht unter den Marktteilnehmern in $t = 0$ Ungewissheit darüber, welcher Zustand w_j in $t = 1$ tatsächlich eintreten wird. Jedoch herrscht Einigkeit unter den Investoren, welche Zustände in $t = 1$ insgesamt möglich sind. Am Kapitalmarkt agieren viele Anbieter und Nachfrager, ohne dass einzelne eine marktbeherrschende Stellung einnehmen. Die Preise $\tilde{S} \in \mathbb{R}$ sind demzufolge von einzelnen Investoren nicht beeinflussbar. Alle Marktteilnehmer gelten als ungesättigt und die für den Handel notwendigen Informationen liegen den Investoren gleichermaßen vor.²⁴ Jeder Investor bewertet den möglichen Eintritt eines Zustandes individuell über sein subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß P . Abgesehen von einer noch näher zu definierenden Steuer existieren keine Transaktionskosten oder Zutrittsbeschränkungen auf dem Markt.

Auf dem Kapitalmarkt werden i riskante Wertpapiere $i = 2, \dots, N$ mit bekannten und positiven Preisen im Zeitpunkt $t = 0$

$$S_0^i \tag{2.1}$$

und zufälligen nicht-negativen Auszahlungen im Zeitpunkt $t = 1$

$$\tilde{S}_1^i \tag{2.2}$$

gehandelt. Wir sprechen bezüglich der Auszahlung in $t = 1$ auch vom Preis des riskanten Basistitels.

Des Weiteren wird auf dem Markt ein sicheres Wertpapier $i = 1$ mit eindeutiger und als sicher angenommener Bruttoverzinsung $r_f > 0$ gehandelt.²⁵ Der Preis des sicheren Assets im Zeitpunkt $t = 0$

$$S_0^1 \tag{2.3}$$

23. Dabei handelt es sich um Standardannahmen ökonomischer Modelle der Arbitragetheorie unter Unsicherheit, siehe z. B. Kruschwitz (2002, S. 134ff) oder Pliska (1997, S. 1ff). Zwischen den beiden Zeitpunkten ist jegliche ökonomische Transaktion ausgeschlossen.

24. Die Marktteilnehmer verfügen damit über homogene Erwartungen bezüglich der Höhe der zukünftigen Auszahlungen.

25. Bezüglich der geforderten Eindeutigkeit der sicheren Einlage siehe z. B. Irle (2003, Kap. 1.12).

ist ebenfalls positiv. Im Zeitpunkt $t = 1$ beläuft sich der Preis des sicheren Assets auf

$$S_1^1 = S_0^1(1 + r_f). \quad (2.4)$$

Wir müssen, um im Zeitpunkt $t = 1$ eine sichere Zahlung in Höhe einer Einheit zu erhalten, im Zeitpunkt $t = 0$ genau $\frac{S_0^1}{S_1^1}$ in die sichere Anlage investieren. Aus diesem Grund definieren wir den Diskontfaktor d wie folgt

$$d := \frac{1}{1 + r_f}.$$

Die N Basistitel werden auf dem Markt in Form von Portfolios gehandelt. Portfolios können aus einem, mehreren bzw. allen Basistiteln beliebig zusammengestellt werden. Ein Portfolio wird über einen Mengenvektor $x^T = (x_1, \dots, x_N)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ abgebildet und der Preis des Portfolios in $t = 0$ ist definiert durch

$$x^T S_0 := x_1 S_0^1 + \dots + x_N S_0^N \quad (2.5)$$

sowie in $t = 1$ durch

$$x^T \tilde{S}_1 := (x^T \tilde{S}_1(w_1), \dots, x^T \tilde{S}_1(w_K))^T \quad (2.6)$$

mit

$$x^T \tilde{S}_1(w_j) = x_1 S_1^1(w_j) + \dots + x_N \tilde{S}_1^N(w_j). \quad (2.7)$$

Der Kauf eines Portfolios mit positivem Preis führt zu einer Auszahlung in Höhe von $-x^T S_0$ und zu einer Einzahlung in Höhe von $x^T \tilde{S}_1$. Es können beliebige Anteile an Finanzgütern erworben werden und ein Leerverkauf wird über einen negativen Eintrag im Mengenvektor x abgebildet. Des Weiteren werden zustandsabhängige Zahlungsansprüche bzw. Realinvestitionen durch Portfolios dupliziert, um einen fairen und für alle Marktteilnehmer eindeutigen Marktwert zu ermitteln.²⁶

Ist der Kapitalmarkt ohne Steuern im folgenden Sinne frei von Arbitrage,²⁷ so folgt daraus der Fundamentalsatz der Preistheorie.²⁸

Definition 2.1 (Arbitragefreiheit). *Auf dem Kapitalmarkt ohne Steuern wird ein Portfolio x als Arbitrage bezeichnet, falls*

$$-x^T S_0 \geq 0; \quad x^T \tilde{S}_1 \geq 0$$

sowie $x^T S_0 \neq 0$ oder $x^T \tilde{S}_1 \neq 0$ gilt.

26. Das Modell wird weiter unten um die Realinvestition erweitert. In dieser Arbeit verwenden wir die Begriffe Preis und Wert bedeutungsgleich.
27. Siehe Irle (2003, Definition 1.10, Seite 16). Eine Klassifizierung verschiedener Typen von Arbitragefreiheit geben Bamberg & Krapp (2003, S. 261ff). Wir beziehen uns auf die folgende Definition, sofern wir in dieser Arbeit von der "klassischen Definition der Arbitragefreiheit" sprechen.
28. Siehe z. B. Duffie (2001, S. 4f) oder Irle (2003, S. 27).

Satz 2.2 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie). *In einem Markt sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Das Modell ist arbitragefrei.*
- (ii) *Es existiert ein risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß Q .*

Wie sich die Aussage des Fundamentalsatzes der Preistheorie in einem Modell mit asymmetrischer Besteuerung von Gewinnen und Verlusten aufrechterhalten lässt, wird in den folgenden Abschnitten untersucht.

2.2 SCHEDULENSTEUER

Unsere Steuer wird sich von dem aus der Literatur bekannten klassischen Standardmodell nur hinsichtlich eines Details unterscheiden: Während in der Literatur nahezu ausnahmslos ein linearer Steuertarif Anwendung findet, werden wir eine nichtlineare Tariffunktion unterstellen.²⁹ Wir unterstellen in diesem Kapitel außerdem, dass die Steuer nur im Zeitpunkt $t = 1$ gezahlt wird und in $t = 0$ keine Steuerzahlungen anfallen. Des Weiteren führen wir eine Schedulessteuer in unserem Modell ein.³⁰ In Steuerschedulen werden steuerrelevante Einkünfte nach steuerrechtlichen Regeln gruppiert und je Schedule der Besteuerung unterzogen. So werden im deutschen Steuerrecht des Jahres 2016 Einkünfte aus Kapitalmarktgeschäften separat von den anderen Einkunftsarten in einer eigenen Steuerschedule erfasst und einer abweichenden Besteuerungssystematik unterzogen.³¹

Wir werden in unserem Modell die Idee der Schedulessteuer aufgreifen und jeden Basistitel des Kapitalmarkts in einer eigenen Steuerschedule separat von den anderen Basistiteln der Besteuerung unterziehen. Dazu zerlegen wir jedes beliebig zusammengesetzte Portfolio zur Berechnung der Steuerschuld in seine Komponenten bzw. in seine Basistitel. Aus diesem Grund sprechen wir von einer *komponentenweisen Besteuerung* des Portfolios. Die sich aus dem Ansatz einer komponentenweisen Besteuerung ergebenden steuerlichen Konsequenzen, denen sich ein Steuersubjekt gegenüber sieht, illustrieren wir an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 3: Bei Anwendung der komponentenweisen Besteuerung ist die Verrechnung eines Gewinns in Höhe von 10 bei Basistitel A und eines Verlusts in Höhe von 5 bei Basistitel B innerhalb des Portfolios nicht mehr möglich. Unterstellen wir einen Gewinnsteuersatz von $\tau^G = 0,5$ und einen Verluststeuersatz von $\tau^V = 0$, so hat der Investor eine Steuerzahlung in Höhe von $10 \cdot 0,5 + (-5) \cdot 0 = 5$ an den Fiskus zu leisten. Ist jedoch die Gewinn- und Verlustverrechnung innerhalb des Portfolios

29. Die Steuer entspricht bis auf die Nichtlinearität der Steuerfunktion der üblichen Darstellung in finanztheoretischen Modellen, siehe Kruschwitz & Löffler (2006, Kap. 1.1.2) oder Jensen (2009, Kap. 2).

30. Eine kurze Abgrenzung von Schedulessteuer und synthetischer Steuer gibt bspw. Schreiber (2012, Kap. 3).

31. Im Wesentlichen werden Kapitalerträge mit 25 % besteuert. Auf die anderen Einkunftsarten findet der persönliche Steuersatz Anwendung. Siehe §32d EStG sowie §2 Abs. 1 und §20 EStG.

erlaubt, resultiert daraus eine Steuerschuld in Höhe von $(10 - 5) \cdot 0,5 = 2,5$. In diesem Beispiel ist der Steuerpflichtige mit der komponentenweisen Besteuerung schlechter gestellt.



Nachdem wir die zugrundeliegende Idee unserer komponentenweisen Besteuerung erläutert haben, wenden wir uns der allgemeinen Formulierung der Steuerfunktion zu. Wir beginnen die Beschreibung unserer Steuer mit der kurzen Charakterisierung von Steuersubjekt, -objekt und -schuld.

Steuersubjekt. Das Steuersubjekt ist der steuerpflichtige Investor. Wir gehen davon aus, dass es sich bei allen Investoren um natürliche Personen handelt. Ein Übertrag von Steuerverpflichtungen auf Dritte ist ausgeschlossen.

Steuerobjekt. Das Steuerobjekt ist der Ertrag $x^T \tilde{S}_1$ aus dem Handel am Kapitalmarkt. Weitere zu besteuernde Objekte existieren nicht.

Steuerschuld. Jeder Basistitel wird in einer eigenen Steuerschedule besteuert. Die Steuerschuld einer Schedule errechnet sich als Produkt von jeweiliger Bemessungsgrundlage und anzuwendendem Tarif. Die Gesamtsteuerschuld des Investors ist die Summe der Steuerschulden der N Steuerschedulen. Hält der Investor keinen Anteil an einem Basistitel in seinem Portfolio, ist die daraus resultierende Steuerschuld Null.

Alle Rückflüsse aus Kauf und Leerverkauf von Kapitalmarktstiteln werden im Zeitpunkt $t = 1$ in $x^T \tilde{S}_1$ erfasst und einer einheitlichen Besteuerung unterzogen.³² Bei der Herleitung steuerlicher Verpflichtungen müssen wir zudem den Charakter unserer Schedulensteuer berücksichtigen. Bei einer Schedulensteuer ist es zweckmäßig, zuerst die Steuerzahlung des einzelnen Basistitels zu definieren. Erst im Anschluss werden wir uns der Steuerzahlung des Portfolios zuwenden.

Unsere steuerrechtliche Gewinn- und Verlustdefinition wird sich von der gewöhnlich verwendeten Gewinndefinition³³ dahingehend unterscheiden, dass wir die gehaltene Menge x_i am Titel i unberücksichtigt lassen.³⁴ Zudem ist bei einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten die eindeutige Abgrenzung eines steuerrechtlichen Gewinns von einem steuerrechtlichen Verlust von enormer Bedeutung. Wir werden in unserem Modell den steuerrechtlichen Gewinn mit dem Symbol \tilde{G} bezeichnen und unterstellen, dass ein negativer Gewinn einen Verlust abbildet.

32. Die gesamten Rückflüsse aus den Kapitalmarktgeschäften unterliegen ohne Modifikation der Besteuerung. Siehe dazu bspw. Jensen (2009, Kap.2).

33. Siehe bspw. zu einer Gewinndefinition im Rahmen eines Modells mit symmetrischer Steuer Löffler & Schneider (2003, S. 6).

34. Ein Blick auf reale Steuersysteme legt nahe, die Menge x in die Gewinndefinition einzubeziehen. Dieses Vorgehen würde in unserem Modell zu Arbitragemöglichkeiten führen, wie wir sie in Beispiel 2 der Einleitung aufgezeigt haben.

Definition 2.3 (Gewinn und Verlust: Basistitel). *Der Investor hält in seinem Portfolio den Basistitel i .*

- *Ein steuerrechtlicher Gewinn \tilde{G}^i ist bei Basistitel i in Zustand w_j gegeben, sofern*

$$\tilde{G}^i(w_j) := \tilde{S}_1^i(w_j) - S_0^i = \Delta \tilde{S}^i(w_j) \geq 0$$

ist.

- *Ein steuerrechtlicher Verlust \tilde{G}^i ist bei Basistitel i in Zustand w_j gegeben, sofern*

$$\tilde{G}^i(w_j) := \tilde{S}_1^i(w_j) - S_0^i = \Delta \tilde{S}^i(w_j) < 0$$

ist.

Bei den klassischen Finanzmarktmodellen wird der Gesamtgewinn oder -verlust eines Portfolios durch Addition der Gewinne und Verluste der Basistitel, aus denen das Portfolio zusammengesetzt ist, ermittelt. Ein solches Vorgehen ist bei einer Schedulensteuer nicht mehr zulässig. Für eine steuerliche Gewinn- bzw. Verlustberechnung ist es im Rahmen einer Schedulensteuer bedeutungslos, Gewinne und Verluste zu addieren, die nicht derselben Schedule zugehören. Die komponentenweise Besteuerung des Portfolios zeichnet sich ja gerade dadurch aus, dass jeder Basistitel in einer eigenen Steuerschedule der Besteuerung unterzogen wird. Der Gewinn bzw. der Verlust eines Portfolios bestehend aus $J \leq N$ Basistiteln stellt jedoch einen Vektor

$$\tilde{G} = (\tilde{G}^1, \tilde{G}^2, \dots, \tilde{G}^J)$$

dar. In der Definition der Steuerbemessungsgrundlage \widetilde{TB}^i findet die gehaltene Menge x_i des Basistitels i nunmehr Berücksichtigung. Des Weiteren gilt zu beachten, dass in unserem Modell genauso viele Steuerbemessungsgrundlagen wie Basistitel existieren.

Definition 2.4 (Bemessungsgrundlage der Schedulensteuer). *Es existieren genauso viele Steuerbemessungsgrundlagen $\widetilde{TB}^i(w_j)$ wie $i = 1, \dots, N$ Wertpapiere auf dem Markt existieren. Die steuerliche Bemessungsgrundlage von Basistitel i in Zustand w_j ist das Produkt von gehaltener Menge und Gewinn bzw. Verlust*

$$\widetilde{TB}^i(w_j) := x_i \tilde{G}^i(w_j) \tag{2.8}$$

nach Definition 2.3.

Auch die Addition der steuerlichen Bemessungsgrundlagen \widetilde{TB}^i ist bei einer asymmetrischen Steuer, entsprechend unseren Ausführungen zum steuerrechtlichen Ge-

winn bzw. Verlust, nicht zweckdienlich. Die Bemessungsgrundlage eines beliebig zusammengesetzten Portfolios lässt sich aber ebenfalls als Vektor

$$\widetilde{TB} = (\widetilde{TB}^1, \dots, \widetilde{TB}^J)$$

darstellen.

Der im Modell verwendete asymmetrische Steuertarif ist deterministisch und die beiden Steuersätze τ^G und τ^V liegen im halboffenen Intervall $[0,1)$. In Modellen mit asymmetrischer Besteuerung müssen wir genau festlegen, in welchen Fällen der Steuersatz τ^G und in welchen Fällen der Steuersatz τ^V zur Anwendung kommt. Wir werden τ^G bei einem steuerrechtlichen Gewinn und τ^V bei einem steuerrechtlichen Verlust anwenden.

Definition 2.5 (Steuerschuld: Basistitel). *Die Steuerschuld des Basistitels i in Zustand w_j zum Zeitpunkt $t = 1$ ergibt sich gemäß*

$$\widetilde{Tax}^i(x_i, w_j) = \begin{cases} \tau^G x_i \widetilde{G}^i(w_j); & \widetilde{G}^i(w_j) \geq 0 \\ \tau^V x_i \widetilde{G}^i(w_j); & \widetilde{G}^i(w_j) < 0 \end{cases}.$$

In Zustand w_j wird ein Basistitel unabhängig vom Vorzeichen der gehaltenen Menge $x_i \in \mathbb{R}$ mit einem eindeutigen Steuersatz besteuert.³⁵ Bei den Titeln mit unsicheren Zahlungen werden, wenn wir mehrere Zustände betrachten, in aller Regel beide Steuersätze zur Anwendung kommen. Üblicherweise realisiert ein Titel mit unsicheren Zahlungen in einem Zustand einen steuerlichen Gewinn und in einem anderen Zustand einen steuerlichen Verlust. Wenn bspw. ein Basistitel mit unsicheren Zahlungen, der in der Menge x_i gehalten wird, in Zustand w_j eine nicht-negative Preisentwicklung $\widetilde{S}_1^i(w_j) - S_0^i \geq 0$ genommen hat, resultiert daraus eine Steuerzahlung in Höhe von

$$\widetilde{Tax}^i(x_i, w_j) = \tau^G \widetilde{TB}^i(w_j).$$

In Zustand w_k mit $w_k \neq w_j$ und $\widetilde{S}_1^i(w_k) - S_0^i < 0$ folgt für denselben Basistitel eine Steuerzahlung in Höhe von

$$\widetilde{Tax}^i(x_i, w_k) = \tau^V \widetilde{TB}^i(w_k).$$

Für das sichere Asset ist aufgrund von Definition 2.5 und dem sicheren Bruttozinssatz

35. In beliebigem Zustand w_j führt Titel i bei $\widetilde{S}_1^i(w_j) \geq S_0^i$ und $x_i \geq 0$ auf eine Zahlung nach Steuern in Höhe von

$$x_i(\widetilde{S}_1^i - \tau^G(\widetilde{S}_1^i - S_0^i))(w_j). \quad (2.9)$$

Betrachten wir dieselbe Situation nur mit $x_i < 0$, so erhalten wir eine Zahlung nach Steuern in Höhe von

$$-x_i(\widetilde{S}_1^i - \tau^G(\widetilde{S}_1^i - S_0^i))(w_j). \quad (2.10)$$

Die Argumentation bei $\widetilde{S}_1^i(w_j) < S_0^i$ ist analog. Es handelt sich um ein Nullsummenspiel, sobald identische Mengen x_i eines Basistitels gekauft und gleichzeitig leer verkauft werden.

$r_f > 0$ bereits im Zeitpunkt $t = 0$ festgelegt, dass ausschließlich der Gewinnsteuersatz zur Anwendung kommt.³⁶

Nachdem wir die Steuerschuld $\widetilde{Tax}^i(x_i, w_j)$ eines einzelnen Basistitels i definiert haben, erhalten wir durch Addition der Steuerschulden der Basistitel, aus denen sich ein Portfolio zusammensetzt, die Gesamtsteuerschuld $\widetilde{Tax}(x, w_j)$ des Portfolios. Die Steuerschuld des Portfolios besteht in der Regel aus Summanden, die entweder den Gewinnsteuersatz oder den Verluststeuersatz beinhalten.³⁷

Definition 2.6 (Steuerschuld: Portfolio). *Die Steuerschuld $\widetilde{Tax}(x, w_j)$ eines Investors beläuft sich im Zustand w_j unter Berücksichtigung von Definition 2.5 auf*

$$\widetilde{Tax}(x, w_j) = \sum_{i=1}^N \widetilde{Tax}^i(x_i, w_j).$$

2.3 DEFINITION DER ARBITRAGEFREIHEIT

In diesem Abschnitt werden wir ein formales Argument der Arbitragefreiheit im Ein-Perioden-Modell geben. Treffen wir vorab die folgende für unser Modell fundamentale Annahme:

Annahme 2.7 (Fundamentalannahme). *Der Kapitalmarkt unterliegt einer komponentenweisen Besteuerung der Basistitel (Schedulenanatz) nach Definition 2.6.*

Des Weiteren definieren wir die Nachsteuer-Zahlung $\widetilde{V}_1^{i,\tau}(x_i)$ der $i = 1, \dots, N$ Kapitalmarkttitel im Zeitpunkt $t = 1$ durch

$$x_i \widetilde{V}_1^{i,\tau} := x_i \widetilde{S}_1^i - \widetilde{Tax}^i(x_i) \quad (2.11)$$

und des Portfolios durch:

Definition 2.8 (Portfoliopreis nach Steuern). *Der Preis eines Portfolios nach Steuern $x^T \widetilde{V}_1^\tau$ im Zeitpunkt $t = 1$ ermittelt sich aus dem Ertrag vor Steuern $x^T \widetilde{S}_1$ abzüglich der Steuerschuld des Portfolios $\widetilde{Tax}(x)$*

$$x^T \widetilde{V}_1^\tau := x^T \widetilde{S}_1 - \widetilde{Tax}(x). \quad (2.12)$$

Für den sicheren Titel $i = 1$ folgt mit $x_1 = 1$ und aus 2.11

$$V_1^{1,\tau} = S_1^1 - \tau^G (S_1^1 - S_0^1)$$

36. Damit vermeiden wir Arbitrage aufgrund einer uneinheitlichen Besteuerung von Kreditvergabe und Kreditaufnahme. Siehe Beispiel 2 in Kapitel 1.2.

37. Im Fall von $\tau^G = \tau^V = \tau$ spezialisiert sich die Steuerfunktion zu

$$\widetilde{Tax}(x, w_j) = \tau \sum_{i=1}^N x_i (\widetilde{S}_1^i(w_j) - S_0^i).$$

und mit $S_1^1 = S_0^1(1 + r_f)$ erhalten wir durch kurzes Umstellen

$$\frac{S_0^1}{V_1^{1,\tau}} = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)}.$$

Wir bezeichnen d^τ als Diskontierungsfaktor nach Steuern und definieren

$$d^\tau := \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)}.$$

Kommen wir nun zu der Definition der Arbitragefreiheit in unserem Modell mit asymmetrischer Besteuerung, die sich eng an der klassischen Definition der Arbitragefreiheit im Standardmodell orientiert.³⁸

Definition 2.9 (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer). *Auf dem Kapitalmarkt mit asymmetrischer Besteuerung von Gewinnen und Verlusten wird ein Portfolio x als Arbitrage bezeichnet, falls*

$$-x^T S_0 \geq 0; \quad x^T \tilde{V}_1^\tau \geq 0$$

sowie $x^T S_0 \neq 0$ oder $x^T \tilde{V}_1^\tau \neq 0$ gilt.

Eine Arbitrage lässt sich alternativ über den Entnahmeprozess $\delta(x)$ mit

$$\delta(x) := (-x^T S_0, x^T \tilde{V}_1^\tau) \geq 0 \tag{2.13}$$

beschreiben.³⁹

Betrachten wir die Definition der Nachsteuerzahlungen $x^T \tilde{V}_1^\tau := x^T \tilde{S}_1 - \widetilde{Tax}(x)$, wird sofort deutlich, dass Definition 2.9 bei $\widetilde{Tax}(x) = 0$ mit der Definition der Arbitragefreiheit im Modell ohne Steuer übereinstimmt. Unser Modell wäre demzufolge widersprüchlich, wenn, bei ansonsten gleichbleibenden Parametern, nur bei $\widetilde{Tax}(x) = 0$ von Arbitragefreiheit gesprochen werden kann, bei $\widetilde{Tax}(x) \neq 0$ hingegen nicht. Aus diesem Grund hat in unserem Modell der Fundamentalsatz der Preistheorie sowohl bei $\widetilde{Tax}(x) = 0$ als auch bei $\widetilde{Tax}(x) \neq 0$ seine Gültigkeit beizubehalten.

Um die Arbitragefreiheit in unserem Modell mit asymmetrischer Besteuerung von Gewinnen und Verlusten zu gewährleisten, müssen wir zwei weitere Einschränkungen bei der Ausgestaltung der Steuersätze τ^G und τ^V hinnehmen. Zum einen dürfen sich die Steuersätze τ^G und τ^V zwischen den Marktteilnehmern nicht unterscheiden. Damit vermeiden wir die Bildung von Steuerklientelen und daraus resultierende Arbitragemöglichkeiten.⁴⁰ Zum anderen müssen wir einen über alle Steuerschulen hinweg jeweils einheitlichen und konstanten Gewinn- und Verluststeuersatz

38. Siehe Definition 2.1.

39. Siehe Kremer (2005, S. 29), nur dass wir hier nicht mehr ohne Weiteres von einer linearen Abbildung ausgehen können.

40. Siehe Schaefer (1982, S. 163ff).

unterstellen. Im folgenden Beispiel veranschaulichen wir das Auftreten von Arbitragemöglichkeiten sofern die Steuersätze zwischen den einzelnen Schedules variieren.⁴¹

Beispiel 4a: Wir betrachten ein Ein-Perioden-Binomialmodell, bestehend aus Bond S^1 und Aktie \tilde{S}^2 . Der Bond erzielt in $t = 1$ einen sicheren Ertrag vor Steuern in Höhe von $S_1^1 := (1 + r_f)S_0^1$. Die Aktie erzielt im Zeitpunkt $t = 1$ in Zustand u einen Ertrag vor Steuern in Höhe von $\tilde{S}_1^2(u) := uS_0^2$ und in Zustand d einen Preis in Höhe von $\tilde{S}_1^2(d) := dS_0^2$. Wir unterstellen, dass der Markt ohne Steuer frei von Arbitrage und die Ungleichung

$$u > 1 + r_f > d \quad (2.14)$$

mit $u > d > 0$ erfüllt ist. Der steuerliche Gewinn der Aktie wird mit $\tau_{\tilde{S}^2}^G$ und der des Bonds mit $\tau_{S^1}^G$ besteuert. Einen Verlustausgleich schließen wir bei beiden Wertpapieren aus und wir besteuern Aktie und Bond in separaten Schedules. Des Weiteren gilt $\tilde{S}_1^2(u) > S_0^2 > \tilde{S}_1^2(d)$ sowie $V_1^{1,\tau} := (1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G))S_0^1$, $\tilde{V}_1^{2,\tau}(u) := u^\tau S_0^2$ und $\tilde{V}_1^{2,\tau}(d) := d^\tau S_0^2$ mit $u^\tau = u - \tau_{\tilde{S}^2}^G(u - 1)$ und $d^\tau = d$.

Wir beschreiben den Markt der Nachsteuerzahlungen durch folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G) & 1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G) \\ u^\tau & d^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_u^\tau \\ \psi_d^\tau \end{pmatrix},$$

wobei ψ^τ den Vektor der Zustandspreise bzw. der Arrow-Debreu-Preise darstellt.⁴² Durch Auflösen des Gleichungssystems nach ψ_u^τ und ψ_d^τ erhalten wir die Gleichungen

$$\psi_u^\tau = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G)} \frac{(1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G)) - d^\tau}{u^\tau - d^\tau} \quad (2.15)$$

und

$$\psi_d^\tau = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G)} \frac{u^\tau - (1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G))}{u^\tau - d^\tau}. \quad (2.16)$$

Mit derselben Argumentation, die wir auch beim Markt ohne Steuern verwenden, existiert sowohl ein $\psi_u^\tau > 0$ als auch ein $\psi_d^\tau > 0$ genau dann, wenn die Ungleichung

$$u^\tau > 1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G) > d^\tau \quad (2.17)$$

erfüllt ist.⁴³ Aufgrund unterschiedlicher Steuersätze bei Aktie und Bond kann in unserem Beispiel die Ungleichung

$$1 + r_f(1 - \tau_{S^1}^G) > u(1 - \tau_{\tilde{S}^2}^G) + \tau_{\tilde{S}^2}^G$$

41. In der Realität unterscheiden sich üblicherweise die Steuersätze je Schedule. Siehe z. B. das deutsche Einkommensteuerrecht (Stand 2016) mit der unterschiedlichen Besteuerung von Kapitalerträgen und den sonstigen Erträgen.

42. Siehe zur Beschreibung von Arrow-Debreu-Preisen bspw. Kruschwitz (2002, S. 270f).

43. Siehe Kremer (2005, S. 42).

bzw.

$$\frac{1 - \tau_{S^1}^G}{1 - \tau_{\tilde{S}^2}^G} > \frac{u - 1}{r_f} \quad (2.18)$$

eintreten und einen Arbitragegewinn ermöglichen, obwohl wir den Markt mit $\tau^G = \tau^V = 0$ als arbitragefrei vorausgesetzt haben.⁴⁴

Veranschaulichen wir einen solchen Fall an folgendem Zahlenbeispiel: Ein Bond S^1 und eine Aktie \tilde{S}^2 kosten in $t = 0$ jeweils eine Einheit. In $t = 1$ führen die Wertpapiere zu Auszahlungen vor Steuern in Höhe von

$$S_1^1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_1^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

und mit $u = 2$, $d = 0,5$ sowie $r_f = 0,5$ ist $u > 1 + r_f > d$. Berücksichtigen wir nun eine asymmetrische Steuer mit Steuersätzen $\tau_{S^1}^V = \tau_{\tilde{S}^2}^V = 0$, $\tau_{S^1}^G = 0,1$ und $\tau_{\tilde{S}^2}^G = 0,6$ so erhalten wir Auszahlungen nach Steuern in Höhe von

$$V_1^{1,\tau} = \begin{pmatrix} 1,45 \\ 1,45 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_1^{2,\tau} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen mit den von uns gewählten Zahlen in 2.18 und wir erhalten

$$\frac{1 - 0,1}{1 - 0,6} > \frac{2 - 1}{0,5}.$$

Da sich die Anwendung der Steuersätze ausschließlich an der Preisentwicklung eines Titels ausrichtet, kommt je Zustand w_j , unabhängig von Kauf oder Leerverkauf, ein eindeutiger Steuersatz zur Anwendung. Ein Leerverkauf in die Aktie mit einem gleichzeitigen Kauf des Bonds

$$\tilde{X} = S^1 - \tilde{S}^2$$

führt in $t = 0$ zu einer Zahlung von

$$X_0 = 1 - 1 = 0.$$

Aus dem Kauf von Portfolio \tilde{X} resultiert in Zustand u des Zeitpunkts $t = 1$ eine Zahlung nach Steuern in Höhe von

$$\tilde{X}_1^\tau(u) = 1,45 - 1,4 = 0,05$$

44. In unserem Modell haben wir ausdrücklich die Wahl beliebiger Steuersätze im Intervall $[0,1)$ erlaubt. Unser Modell wäre widersprüchlich, wenn Konstellationen von Steuersätzen nach Ungleichung 2.18 zu einem Arbitragegewinn führen.

und in Zustand d in Höhe von

$$\tilde{X}_1^\tau(d) = 1,45 - 0,5 = 0,95.$$

Wir erhalten als Ergebnis einen sicheren Arbitragegewinn. ■

Zur Vermeidung von Arbitragemöglichkeiten, die aus unterschiedlichen Steuersätzen zwischen den Schedules und den Marktteilnehmern resultieren, treffen wir folgende Annahme:⁴⁵

Annahme 2.10 (Eindeutiger Steuersatz). *Die Steuersätze τ^G und τ^V sind über alle Schedules und für alle Marktteilnehmer jeweils eindeutig bestimmt.*

Wir können die Existenz eines risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaßes Q^τ und die Arbitragefreiheit des Marktes zeigen, sofern wir uns in unserem Modell auf einen jeweils einheitlichen Steuersatz für Gewinne und Verluste beschränken. Dazu betrachten wir noch einmal den Finanzmarkt aus Beispiel 4a.

Beispiel 4b: Um das Beispiel abzukürzen, nehmen wir den Markt ohne Steuern als arbitragefrei an. Wir beschreiben den Markt aus Beispiel 4a diesmal mit einem jeweils einheitlichen τ^G und τ^V für Aktie und Bond mit dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_f(1 - \tau^G) & 1 + r_f(1 - \tau^G) \\ u^\tau & d^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_u^\tau \\ \psi_d^\tau \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\psi_u^\tau = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \frac{(1 + r_f(1 - \tau^G)) - d^\tau}{u^\tau - d^\tau}$$

sowie

$$\psi_d^\tau = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \frac{u^\tau - (1 + r_f(1 - \tau^G))}{u^\tau - d^\tau}.$$

Die Existenz eines risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaßes Q^τ ist mit Definition

$$Q^\tau(w_j) := \frac{\psi_j^\tau}{\sum \psi^\tau} \quad (2.19)$$

bei $u^\tau > 1 + r_f(1 - \tau^G) > d^\tau$ offensichtlich.

45. Die Gewinne und Verluste werden weiterhin asymmetrisch besteuert. Bezogen auf unser Beispiel 4a erhalten wir Nachsteuerzahlungen, bei einem einheitlichen Gewinnsteuersatz $\tau^G = 0,5$ sowie einem einheitlichen Verluststeuersatz $\tau^V = 0,2$, in Höhe von

$$V_1^{1,\tau} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,25 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_1^{2,\tau} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen wir abschließend, dass aus der Arbitragefreiheit des Modells ohne Steuer die Arbitragefreiheit des Modells mit asymmetrischer Steuer folgt. Dazu machen wir uns klar, dass die Wachstumsfaktoren bei asymmetrischer Steuer die folgenden Ausprägungen

$$u^\tau = \begin{cases} u - \tau^G(u - 1), & u \geq 1 \\ u - \tau^V(u - 1), & u < 1 \end{cases}, \quad d^\tau = \begin{cases} d - \tau^G(d - 1), & d \geq 1 \\ d - \tau^V(d - 1), & d < 1 \end{cases}$$

annehmen können. Es stellt sich für jede der vier möglichen Konstellation die Frage, ob aus der Arbitragefreiheit im Markt ohne Steuern die Arbitragefreiheit im Markt mit asymmetrischer Besteuerung folgt. Wir müssen glücklicherweise nur zwei der vier möglichen Fälle genauer betrachten.⁴⁶ Beginnen wir mit $u \geq 1$ und $d \geq 1$ und untersuchen die Ungleichungskette

$$(1 - \tau^G)(u - 1) > r_f(1 - \tau^G) > (1 - \tau^G)(d - 1).$$

Wir erhalten durch Kürzen

$$u > 1 + r_f > d$$

und der Markt ohne Steuer ist nach Voraussetzung arbitragefrei. Untersuchen wir nun den Fall $u \geq 1$ und $d < 1$, also

$$(1 - \tau^G)(u - 1) > r_f(1 - \tau^G) > (1 - \tau^V)(d - 1).$$

Betrachten wir zuerst die linke Ungleichung $(1 - \tau^G)(u - 1) > r_f(1 - \tau^G)$ und daraus folgt sofort $u > 1 + r_f$. Die rechte Ungleichung mit $r_f(1 - \tau^G) > (1 - \tau^V)(d - 1)$ ist aufgrund $r_f(1 - \tau^G) > 0$ sowie $(1 - \tau^V) > 0$ und $(d - 1) < 0$ immer erfüllt und wir erhalten auch in diesem Fall einen arbitragefreien Markt. ■

Im folgenden Beispiel veranschaulichen wir, dass die von uns definierte Schedulingsteuer auf einen arbitragefreien Entnahmeprozess führt.

Beispiel 5: Wir betrachten einen vollständigen Finanzmarkt bestehend aus Aktie und Bond mit folgenden Preisen

$$S_0 = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ S_0^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_1 = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^1 \\ \tilde{S}_1^2(u) & \tilde{S}_1^2(d) \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_1^\tau = \begin{pmatrix} V_1^{1,\tau} & V_1^{1,\tau} \\ \tilde{V}_1^{2,\tau}(u) & \tilde{V}_1^{2,\tau}(d) \end{pmatrix}.$$

Der Markt wird im Zeitpunkt $t = 1$ in einen der beiden Zustände u oder d übergehen. Auf dem Markt existiert ein sicherer Bruttozins $r_f > 0$ und es gelte $\tau^G > \tau^V$.

46. Die beiden anderen Konstellationen sind offensichtlich. Der Fall $u < 1$ und $d \geq 1$ ist aufgrund $u > d$ ausgeschlossen und $u < 1$ mit $d < 1$ führt bereits im Modell ohne Steuer zu Arbitrage.

Der Bond und die Aktie werden mit demselben Gewinnsteuersatz besteuert. Des Weiteren unterstellen wir, dass die Zahlung des unsicheren Assets der Ungleichung $\tilde{S}_1^2(d) < S_0^2 < \tilde{S}_1^2(u)$ genügt. Auf dem Markt wird ein Portfolio \tilde{Y} im Zeitpunkt $t = 0$ mit Preis Y_0 gehandelt, welches im Zeitpunkt $t = 1$ zu Auszahlungen $\tilde{Y}_1^\tau(u)$ und $\tilde{Y}_1^\tau(d)$ führt. Das Portfolio \tilde{Y} ist durch Kauf je eines Basistitels S^1 und \tilde{S}^2 zusammengestellt. Daraus folgt $Y_0 = S_0^1 + S_0^2$ sowie mit der komponentenweisen Besteuerung der Basistitel im Portfolio

$$\tilde{Y}_1^\tau(u) = \tilde{S}_1^2(u) + S_1^1 - (\tau^G \Delta \tilde{S}^2(u) + \tau^G \Delta S^1)$$

und

$$\tilde{Y}_1^\tau(d) = \tilde{S}_1^2(d) + S_1^1 - (\tau^V \Delta \tilde{S}^2(d) + \tau^G \Delta S^1).$$

Ein Investor setzt sein persönliches Portfolio \tilde{Z} in $t = 0$ zusammen, indem er Portfolio \tilde{Y} kauft und einen Leerverkauf in die Basistitel S^1 und \tilde{S}^2 tätigt. Aus diesen Transaktionen werden zu keinem Zeitpunkt Zahlungen an den Investor generiert. Wir erhalten in $t = 0$

$$Z_0 = -Y_0 + S_0^2 + S_0^1 = 0$$

sowie im Zeitpunkt $t = 1$ in Zustand u

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1^\tau(u) &= \tilde{Y}_1^\tau(u) - \tilde{V}_1^{2,\tau}(u) - V_1^{1,\tau} = \\ &= [\tilde{S}_1^2(u) - \tau^G \Delta \tilde{S}^2(u)] + [S_1^1 - \tau^G \Delta S^1] - [\tilde{S}_1^2(u) - \tau^G \Delta \tilde{S}^2(u)] - [S_1^1 - \tau^G \Delta S^1] = \\ &= 0 \end{aligned}$$

und in Zustand d

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1^\tau(d) &= \tilde{Y}_1^\tau(d) - \tilde{V}_1^{2,\tau}(d) - V_1^{1,\tau} = \\ &= [\tilde{S}_1^2(d) - \tau^V \Delta \tilde{S}^2(d)] + [S_1^1 - \tau^G \Delta S^1] - [\tilde{S}_1^2(d) - \tau^V \Delta \tilde{S}^2(d)] - [S_1^1 - \tau^G \Delta S^1] = \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit einen arbitragefreien Entnahmeprozess. ■

Abschließend sei anzumerken, dass wir jedes Kapitalmarktportfolio zum Zweck der Besteuerung zwingend in seine Bestandteile zerlegen müssen. Würden wir Portfolios steuerlich wie einen Basistitel behandeln, folgt daraus die Möglichkeit eines Arbitragegewinns, da wir bei einer asymmetrischen Steuer Terme mit unterschiedlichen Steuersätzen $\tau^G \neq \tau^V$ zusammenrechnen müssen.⁴⁷ Wenn wir die restriktiven Annahmen akzeptieren, die wir an unsere Schedulensteuer gestellt haben, erhalten wir ein finanztheoretisch konsistentes und arbitragefreies Modell des Kapitalmarkts.

47. Betrachten wir noch einmal Beispiel 5, jedoch ohne komponentenweise Besteuerung des Portfolios. Wir unterstellen $\Delta \tilde{S}^2(d) < 0$ sowie $|\Delta \tilde{S}^2(d)| > |\Delta S^1|$ und daraus folgt $\tau^V \Delta \tilde{Y}(d)$. Mit

2.4 FUNDAMENTALSATZ DER PREISTHEORIE IM EIN-PERIODEN-MODELL

Mit dem Schedulesansatz sind wir in der Lage, die Äquivalenz von Arbitragefreiheit und Existenz eines risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaßes zu beweisen. Wir merken vorab an, dass durch die von uns getroffenen Annahmen an die Steuerschuld $\widetilde{Tax}^i(x_i)$ alle Komponenten der Preisgleichung $\widetilde{V}_1^{i,\tau} = x_i \widetilde{S}_1^i - \widetilde{Tax}^i(x_i)$ bereits in $t = 0$ bekannt sind. Somit ist der Nachsteuerpreis eines beliebigen Kapitalmarktstitels dem Wert nach eindeutig bestimmt.

Satz 2.11 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie im Ein-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer). *Auf einem Markt mit asymmetrischer Besteuerung nach Annahme 2.7 (Schedulesansatz) sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Das Modell mit asymmetrischer Steuer ist arbitragefrei.*
- (ii) *Es existieren ein risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß Q^τ und*

$$S_0 = d^\tau E_{Q^\tau}(\widetilde{V}_1^\tau).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Nachsteuerzahlung \widetilde{V}_1^τ eines beliebigen Portfolios der Summe der Nachsteuerzahlungen der Basistitel, aus denen das Portfolio zusammengesetzt ist, entspricht. Eine nicht-negative Preisentwicklung wird mit dem Gewinnsteuersatz $\tau^G > 0$ und eine negative Preisentwicklung mit dem Verluststeuersatz $\tau^V \neq \tau^G$ besteuert. Weiterhin sei die Existenz eines beliebig zusammengesetzten Portfolios x angenommen. Das Portfolio besteht aus $x_i \in \mathbb{R}$ Anteilen der N Basistitel des Kapitalmarktes und hat nach Definition 2.8 in beliebigem Zustand w_j einen Nachsteuerpreis in Höhe von

$$x^T \widetilde{V}_1^\tau(w_j) = (x^T \widetilde{S}_1 - \widetilde{Tax}(x))(w_j). \quad (2.20)$$

diesen Annahmen erhalten wir Nachsteuerzahlungen des Portfolios \widetilde{Y} in Höhe von

$$\widetilde{Y}_1^\tau(u) = \widetilde{S}_1^2(u) + S_1^1 - \tau^G(\Delta \widetilde{S}^2(u) + \Delta S^1)$$

und

$$\widetilde{Y}_1^\tau(d) = \widetilde{S}_1^2(d) + S_1^1 - \tau^V(\Delta \widetilde{S}^2(d) + \Delta S^1).$$

Zwar generiert auch diesmal Portfolio \widetilde{Z} weder in $t = 0$ mit

$$Z_0 = -Y_0 + S_0^2 + S_0^1 = 0$$

noch in Zustand u des Zeitpunkts $t = 1$

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_1^\tau(u) &= \widetilde{Y}_1^\tau(u) - \widetilde{V}_1^{2,\tau}(u) - V_1^{1,\tau} = \\ &= \widetilde{S}_1^2(u) + S_1^1 - \tau^G(\Delta \widetilde{S}^2(u) + \Delta S^1) - (\widetilde{S}_1^2(u) - \tau^G \Delta \widetilde{S}^2(u)) - (S_1^1 - \tau^G \Delta S^1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

eine Zahlung. Der Investor realisiert jedoch einen Arbitragegewinn in Höhe von

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_1^\tau(d) &= \widetilde{Y}_1^\tau(d) - \widetilde{V}_1^{2,\tau}(d) - V_1^{1,\tau} = \\ &= \widetilde{S}_1^2(d) + S_1^1 - \tau^V(\Delta \widetilde{S}^2(d) + \Delta S^1) - (\widetilde{S}_1^2(d) - \tau^V \Delta \widetilde{S}^2(d)) - (S_1^1 - \tau^G \Delta S^1) = \\ &= (\tau^G - \tau^V) \Delta S^1 > 0, \end{aligned}$$

sofern in $t = 1$ der Zustand d eintritt.

Unter Berücksichtigung von 2.7 und Definition 2.6 lässt sich 2.20 auch schreiben als⁴⁸

$$x^T \widetilde{V}_1^\tau(w_j) = \sum_{i=1}^N x_i \widetilde{S}_1^i(w_j) - \sum_{i=1}^N \widetilde{Tax}^i(x_i)(w_j).$$

Da beide Summen mit demselben Laufindex sowie Start- und Endwert versehen sind, folgt

$$x^T \widetilde{V}_1^\tau(w_j) = \sum_{i=1}^N (x_i \widetilde{S}_1^i - \widetilde{Tax}^i(x_i))(w_j)$$

und mit 2.11 erhalten wir

$$x^T \widetilde{V}_1^\tau(w_j) = \sum_{i=1}^N x_i \widetilde{V}_1^{i,\tau}(w_j) \quad (2.21)$$

und somit unser gewünschtes Ergebnis.

Die gerade gefundene Aussage ist für beliebig zusammengesetzte Portfolios gültig. Die Gültigkeit für beliebige Portfolios resultiert insbesondere aus der Eindeutigkeit der Nachsteuerpreise der Basistitel.⁴⁹ Jede denkbare Kombination von Kauf und Leerverkauf eines Titels ist durch

$$x'_i := (x_i) + (-x_i)$$

abbildbar. Wir können demzufolge mit

$$x^T \widetilde{V}_1^\tau = x_1 V_1^{1,\tau} + (-x_1) V_1^{1,\tau} + \dots + x_N \widetilde{V}_1^{N,\tau} + (-x_N) \widetilde{V}_1^{N,\tau} = x'_1 V_1^{1,\tau} + \dots + x'_N \widetilde{V}_1^{N,\tau}$$

beliebige Portfolios beschreiben und die allgemeine Gültigkeit von 2.21 sicherstellen. Mit diesem Ergebnis erfassen wir die Nachsteuerpreise \widetilde{V}_1^τ der N Basistitel in der Auszahlungsmatrix⁵⁰

$$A^\tau = \begin{pmatrix} V_1^{1,\tau}(w_1) & V_1^{1,\tau}(w_2) & \dots & V_1^{1,\tau}(w_K) \\ \widetilde{V}_1^{2,\tau}(w_1) & \widetilde{V}_1^{2,\tau}(w_2) & \dots & \widetilde{V}_1^{2,\tau}(w_K) \\ \vdots & \widetilde{V}_1^{i,\tau}(w_j) & \ddots & \vdots \\ \widetilde{V}_1^{N,\tau}(w_1) & \dots & \widetilde{V}_1^{N,\tau}(w_{K-1}) & \widetilde{V}_1^{N,\tau}(w_K) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Die Auszahlungsmatrix A^τ ist in unserem Modell aufgrund der Eindeutigkeit der Steuersätze τ^G und τ^V ebenfalls eindeutig und das Lemma von Farkas sichert uns

48. An dieser Stelle kommt der Ansatz der Schedulensteuer zum Tragen. Die Steuerschuld des Portfolios ist die Summe der einzelnen Steuerschulden der Basistitel.
49. Hierbei ist von wesentlicher Bedeutung, dass der anzuwendende Steuersatz in Zustand w_j unabhängig von Kauf oder Leerverkauf eines Basistitels festgelegt wird.
50. Auf Basis der Auszahlungsmatrix A^τ lassen sich die Nachsteuerpreise beliebiger Portfolios durch einfache Addition berechnen.

die folgende Aussage:

Sei A^τ eine reelle $N \times K$ Matrix mit N Kapitalmarktstiteln und K Zuständen und $S_0 \in \mathbb{R}^N$ ein Preisvektor, dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert ein $\psi^\tau \in \mathbb{R}^K$ mit $\psi^\tau \geq 0$, sodass das Gleichungssystem $A^\tau \psi^\tau = S_0$ gelöst wird,
- (ii) oder es existiert ein $x \in \mathbb{R}^N$, sodass $(A^\tau)^T x \geq 0$ und $x^T S_0 < 0$ gilt.

Zum Beweis von Farkas Lemma siehe z. B. Jungnickel (1999, S. 35f). Abschließend definieren wir das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß durch

$$Q^\tau(\{w\}) := \frac{\psi^\tau(w)}{d^\tau} \quad (2.23)$$

und den Diskontierungsfaktor nach Steuern durch⁵¹

$$d^\tau := \sum \psi^\tau. \quad (2.24)$$

Nach dem Lemma von Farkas existiert entweder ein Vektor x , sodass

$$(A^\tau)^T x \geq 0, \quad x^T S_0 < 0 \quad (2.25)$$

gilt, dann aber liegt Arbitrage auf dem Markt vor. Oder es existiert ein Vektor $\psi^\tau \geq 0$, sodass

$$A^\tau \psi^\tau = S_0 \quad (2.26)$$

gilt. In diesem Fall ist der Markt frei von Arbitrage und Einsetzen von 2.23 und 2.24 in 2.26 führt uns unmittelbar auf die Gleichung

$$S_0 = A^\tau \psi^\tau = d^\tau E_{Q^\tau}(\tilde{V}_1^\tau). \quad (2.27)$$

■

51. Es gilt $\sum \psi^\tau = \frac{1}{1+r_f(1-\tau^G)}$, siehe Kremer (2005, Lemma 1.67, S. 49).

2.5 UNTERNEHMENSBEWERTUNG BEI ASYMMETRISCHER SCHEDULENSTEUER

2.5.1 BUCHWERT- ABSCHREIBUNG IM EIN-PERIODEN-MODELL

Wir werden uns in diesem Abschnitt der Bewertung eines Unternehmens zuwenden. Dazu erweitern wir unser Modell um eine Realinvestition und treffen folgende Annahme über den Kapitalmarkt:

Annahme 2.12 (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer). *Der Kapitalmarkt ist frei von Arbitrage.*

In dieser Arbeit soll es sich bei der Realinvestition ausnahmslos um ein Unternehmen handeln. Das Unternehmen verspricht im Zeitpunkt $t = 1$ zustandsabhängige Auszahlungen in Höhe von

$$\widetilde{CF}_1.$$

Aus dem Standardmodell ist hinlänglich bekannt, dass der Preis einer Realinvestition mit

$$V_0^U = x^T S_0$$

festgesetzt ist und die Realinvestition ohne Kenntnis des replizierenden Portfolios mit der Formel

$$V_0^U = \frac{E_Q[\widetilde{CF}_1]}{1 + r_f}$$

bewertet werden kann.⁵² Dieses Ergebnis werden wir auf unser Modell mit asymmetrischer Schedulensteuer übertragen und den fairen Unternehmenspreis im Zeitpunkt t mit $\widetilde{V}_t^{U,\tau}$ bezeichnen.

Die aus dem Besitz des Unternehmens resultierende Steuer bemisst sich ausschließlich an den Cashflows \widetilde{CF}_1 , die im Zeitpunkt $t = 1$ den Anteilseignern des Unternehmens zufließen, und einer noch näher zu definierenden Abschreibung. Das Steuerobjekt wird um die Erträge \widetilde{CF}_1 aus der Beteiligung am Unternehmen erweitert. Die steuerlichen Verpflichtungen aus dem Besitz des Unternehmens werden separat in einer eigenen Steuerschedule erfasst. Demzufolge erhält das Unternehmen auch eine eigene Bemessungsgrundlage der Steuer

$$\widetilde{TB}^{N+1}.$$

Bei einer Realinvestition bemisst sich die Steuer üblicherweise anhand von Abschreibungsregeln die vom Gesetzgeber vorgegebenen werden. In der finanztheoretischen Standardliteratur kommen dazu vereinfachte und verallgemeinerte Abschreibungen zur Anwendung, die nur im entferntesten Ähnlichkeit mit den komplexen Regel-

52. Siehe Irle (2003, S. 30), vorausgesetzt die Realinvestition ist replizierbar.

werken realer Steuergesetze aufweisen.⁵³ Wir werden dem Ansatz einer verallgemeinerten Abschreibung folgen und dem Unternehmen in beiden Zeitpunkten exogen vorgegebene Buchwerte

$$\widetilde{B}_t$$

zuordnen, die sich in aller Regel von den Marktwerten \widetilde{V}_t^U der Realinvestition unterscheiden. Den heutigen Buchwert B_0 setzen wir als bekannt und sicher voraus. In unserem Ein-Perioden-Modell fällt eine Abschreibung auf die Realinvestition lediglich im Zeitpunkt $t = 1$ an. Die Abschreibung \widetilde{AfA}_1 ergibt sich aus der Differenz der Buchwerte

$$\widetilde{AfA}_1 := B_0 - \widetilde{B}_1.$$

Der steuerliche Gewinn bzw. Verlust des Unternehmens bemisst sich ausschließlich an der Differenz zwischen Cashflow und Abschreibung und ist an die Definition 2.3 angelehnt.

Definition 2.13 (Gewinn und Verlust: Unternehmen). *Der Investor hält Anteile am Unternehmen.*

- Ein steuerrechtlicher Gewinn \widetilde{G}^{N+1} aus der Beteiligung am Unternehmen ist in Zustand w_j gegeben, sofern

$$\widetilde{G}^{N+1}(w_j) := (\widetilde{CF}_1 - \widetilde{AfA}_1)(w_j) \geq 0$$

ist.

- Ein steuerrechtlicher Verlust \widetilde{G}^{N+1} aus der Beteiligung am Unternehmen ist in Zustand w_j gegeben, sofern

$$\widetilde{G}^{N+1}(w_j) := (\widetilde{CF}_1 - \widetilde{AfA}_1)(w_j) < 0$$

ist.

Sollte der Cashflow vor Steuern abzüglich der Abschreibung

$$\widetilde{CF}_1(w_j) - \widetilde{AfA}_1(w_j)$$

größer oder Null sein, findet der Gewinnsteuersatz τ^G Anwendung, ansonsten der Verluststeuersatz τ^V .

Den Anteil an der Beteiligung am Unternehmen legen wir über den Parameter $x_{N+1} \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x_{N+1} \leq 1$ fest. Bei $x_{N+1} < 0$ handelt es sich um einen Leerverkauf in das *verbrieft*e Unternehmen, und bei $x_{N+1} = 1$ befinden sich alle Anteile des Unternehmens in der Hand des Investors. Die Beteiligung am Unternehmen findet in der Bemessungsgrundlage der Steuer Berücksichtigung.

53. Wir orientieren uns bei der Darstellung von Abschreibung und Buchwerten an Löffler & Schneider (2003, Kapitel I.B).

Definition 2.14 (Bemessungsgrundlage: Unternehmen). *Die Bemessungsgrundlage der Steuer aus der Beteiligung x_{N+1} am Unternehmen ist*

$$\widetilde{TB}^{N+1}(w_j) = x_{N+1} \widetilde{G}^{N+1}.$$

Definieren wir nun noch die aus der Beteiligung am Unternehmen resultierende Steuerschuld $\widetilde{Tax}^{N+1}(x_{N+1})$.

Definition 2.15 (Steuerschuld: Unternehmen). *Die Steuerschuld des Investors in Zustand w_j aus der Beteiligung x_{N+1} am Unternehmen beläuft sich auf*

$$\widetilde{Tax}^{N+1}(x_{N+1}, w_j) = \begin{cases} \tau^G x_{N+1} \widetilde{G}^{N+1}(w_j); & \widetilde{G}^{N+1}(w_j) \geq 0 \\ \tau^V x_{N+1} \widetilde{G}^{N+1}(w_j); & \widetilde{G}^{N+1}(w_j) < 0 \end{cases}.$$

Die Ermittlung des anzuwendenden Steuersatzes ist unabhängig von Kauf oder Leerverkauf der Realinvestition. Damit entspricht die Besteuerung des Unternehmens der steuerlichen Systematik, die wir bereits bei der Besteuerung der Kapitalmarkttitel angewendet haben. Wir folgen in dieser Arbeit der Annahme, dass der Investor den steuerlichen Verpflichtungen aus der Beteiligung am Unternehmen jederzeit und in voller Höhe nachkommen wird. Die gesamte Steuerschuld des Investors setzt sich im erweiterten Modell aus den N Schedules der Kapitalmarkttitel zuzüglich der Schedule aus der Beteiligung am Unternehmen zusammen.

Definition 2.16 (Gesamtsteuerschuld im erweiterten Modell). *Die gesamte Steuerschuld des Investors im erweiterten Modell basierend auf den Beteiligungen am Unternehmen und am Kapitalmarkt beläuft sich in Zustand w_j auf*

$$\widetilde{Tax}(\underline{x}, w_j) = \sum_{i=1}^{N+1} \widetilde{Tax}^i(x_i, w_j)$$

mit $\underline{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1})$.

Aus der Beteiligung x_{N+1} erfolgt im Zeitpunkt $t = 1$ ein Anspruch auf die zu erwartenden Zahlungen des Unternehmens in Höhe von

$$x_{N+1} \widetilde{CF}_1,$$

und mit Berücksichtigung der Steuerschuld $\widetilde{Tax}^{N+1}(x_{N+1})$ sind wir in der Lage, den Cashflow nach Steuern

$$x_{N+1} \widetilde{CF}_1^r := x_{N+1} \widetilde{CF}_1 - \widetilde{Tax}^{N+1}(x_{N+1}) \quad (2.28)$$

zu berechnen. Wir werden aus Gründen der Vereinfachung annehmen, dass das Unternehmen im Zeitpunkt $t = 1$ vollständig abgeschrieben und der Marktwert

$\widetilde{V}_1^{U,\tau} = 0$ ist. Demzufolge setzen wir den Buchwert $\widetilde{B}_1 = 0$ und können die Abschreibung des Unternehmens auch schreiben als

$$AfA_1 = B_0. \quad (2.29)$$

Mit 2.29 vereinfacht sich 2.28 zu

$$x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau = x_{N+1}(\widetilde{CF}_1(1 - \tau^G) + \tau^G B_0)$$

bzw.

$$x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau = x_{N+1}(\widetilde{CF}_1(1 - \tau^V) + \tau^V B_0)$$

und für die Bemessungsgrundlage des Unternehmens folgt

$$\widetilde{TB}^{N+1}(w_j) = x_{N+1}(\widetilde{CF}_1(w_j) - B_0). \quad (2.30)$$

Im Standardmodell ist eine Realinvestition replizierbar, falls ein Portfolio x mit $\widetilde{CF}_1 = x^T \widetilde{S}_1$ existiert.⁵⁴ Daran angelehnt sprechen wir im Modell mit asymmetrischer Besteuerung von einer replizierbaren Realinvestition, sofern ein Kapitalmarktportfolio x mit

$$x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau = x^T \widetilde{V}_1^\tau \quad (2.31)$$

existiert. Des Weiteren ist es in der einschlägigen Finanzliteratur üblich, einen Markt als vollständig zu bezeichnen, sofern jede Realinvestition replizierbar ist.⁵⁵ Wir übernehmen in unserem Modell die Definition zur Vollständigkeit des Marktes und treffen folgende Annahme:

Annahme 2.17 (Vollständiger Markt). *Der Markt mit asymmetrischer Besteuerung ist vollständig.*

Das erweiterte Modell mit asymmetrischer Schedulensteuer ist arbitragefrei, sofern im Zeitpunkt $t = 0$ der Preis der Realinvestition dem Preis des replizierenden Portfolios

$$x_{N+1}V_0^{U,\tau} = x^T S_0$$

entspricht.

54. Siehe bspw. Irle (2003, S.19f).

55. Siehe zur Definition der Vollständigkeit im Standardmodell Irle (2003, S. 20). Im ökonomischen Sinn besteht in einem endlichen und diskreten Zustandsraum die Forderung, dass mindestens so viele handelbare Wertpapiere N existieren, wie es erreichbare zukünftige Zustände K gibt.

Satz 2.18 (Arbitragefreiheit im erweiterten Modell). *Es liegt ein arbitragefreier Kapitalmarkt vor, der einer asymmetrischen und komponentenweisen Besteuerung unterliegt. Der Markt ist um eine replizierbare Realinvestition erweitert*

$$\underline{S}_0 = \begin{pmatrix} V_0^{U,\tau} \\ S_0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{V}}_1^\tau = \begin{pmatrix} \widetilde{CF}_1^\tau \\ \tilde{V}_1^\tau \end{pmatrix}$$

und folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das Modell mit Realinvestition ist arbitragefrei.
- (ii) Der Preis der Realinvestition in $t = 0$ ist eindeutig bestimmt durch

$$x_{N+1}V_0^{U,\tau} = d^T E_{Q^\tau} [x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau]. \quad (2.32)$$

Beweis. Den Beweis führen wir analog zu Irle (2003, Sätze 1.19 und 1.28). Setzen wir für den ersten Teil des Beweises die Arbitragefreiheit des erweiterten Modells voraus und nehmen an, dass $x_{N+1}V_0^{U,\tau} < x^T S_0$ oder $x_{N+1}V_0^{U,\tau} > x^T S_0$ ist.

Bei $x_{N+1}V_0^{U,\tau} > x^T S_0$ tätigt der Investor einen Leerverkauf in das Unternehmen, kauft das replizierende Portfolio und legt die Differenz risikolos an. Zum Beweis definieren wir Portfolio

$$\underline{z} = \underline{y} + (x_{N+1}V_0^{U,\tau} - x^T S_0)\underline{x}_1 + \bar{x}$$

mit

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -x_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Setzen wir außerdem $S_0^1 = 1$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{z}^T \underline{S}_0 &= \underline{y}^T \underline{S}_0 + (x_{N+1}V_0^{U,\tau} - x^T S_0)\underline{x}_1^T \underline{S}_0 + \bar{x}^T \underline{S}_0 \\ &= -x_{N+1}V_0^{U,\tau} + (x_{N+1}V_0^{U,\tau} - x^T S_0)S_0^1 + x^T S_0 = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{z}^T \underline{\tilde{V}}_1^\tau &= \underline{y}^T \underline{\tilde{V}}_1^\tau + (x_{N+1}V_0^{U,\tau} - x^T S_0)\underline{x}_1^T \underline{\tilde{V}}_1^\tau + \bar{x}^T \underline{\tilde{V}}_1^\tau \\ &= -x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau + (x_{N+1}V_0^{U,\tau} - x^T S_0)V_1^{1,\tau} + x^T \tilde{V}_1^\tau > 0. \end{aligned}$$

Bei $x_{N+1}V_0^{U,\tau} < x^T S_0$ tätigt der Investor einen Leerverkauf in das replizierende

Portfolio, kauft das Unternehmen und legt die Differenz risikolos an. Entsprechend liefert

$$\underline{z} = \underline{y} + (x^T S_0 - x_{N+1} V_0^{U,\tau}) \underline{x}_1 - \bar{x}$$

mit

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine Arbitrage und es folgt $x_{N+1} V_0^{U,\tau} = x^T S_0$. Nach Satz 2.11 gilt

$$S_0 = d^T E_{Q^\tau}(\tilde{V}_1^T)$$

und mit 2.31 folgt

$$x_{N+1} V_0^{U,\tau} = x^T S_0 = x^T d^T E_{Q^\tau}(\tilde{V}_1^T) = d^T E_{Q^\tau}(x^T \tilde{V}_1^T) = d^T E_{Q^\tau}(x_{N+1} \widetilde{CF}_1^T).$$

Kommen wir zur zweiten Aussage des Satzes und setzen $x_{N+1} V_0^{U,\tau} = x^T S_0$ voraus. Außerdem nehmen wir eine Arbitrage im erweiterten Modell an. Betrachten wir dazu Portfolio z im zugrundeliegenden Kapitalmarktmodell und Portfolio \underline{z} im erweiterten Modell mit

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\underline{z}^T \underline{S}_0 = x_{N+1} V_0^{U,\tau} + z^T S_0 = x^T S_0 + z^T S_0 = (x + z)^T S_0$$

und

$$\underline{z}^T \underline{\tilde{V}}_1^T = x_{N+1} \widetilde{CF}_1^T + z^T \tilde{V}_1^T = x^T \tilde{V}_1^T + z^T \tilde{V}_1^T = (x + z)^T \tilde{V}_1^T$$

und es folgt bei Arbitrage \underline{z} im erweiterten Modell eine Arbitrage mit dem Portfolio $x + z$ im zugrundeliegenden Kapitalmarktmodell, was nach Voraussetzung jedoch arbitragefrei ist. ■

Der von uns gewählte Ansatz einer steuerlichen Abschreibung basierend auf exogen vorgegebenen Buchwerten erlaubt uns zur Berechnung des fairen Preises der Realinvestition $V_0^{U,\tau}$ den Rückgriff auf eine geschlossene Formel.⁵⁶ Da uns in jedem

56. Bei einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten ist die Anwendung einer geschlossenen Formel nicht mehr in allen Fällen gegeben. Weiter unten werden wir eine Abschreibungsmethode betrachten, bei der die Berechnung des fairen Marktwerts nur noch über

Zustand neben den Brutto- Cashflows $\widetilde{CF}_1(w_j)$ auch der Buchwert des Unternehmens B_0 bekannt ist, besitzen wir bereits in $t = 0$ Kenntnis über den Wert von $\widetilde{CF}_1^\tau(w_j)$. Somit sind wir in der Lage die Formel

$$x_{N+1}V_0^{U,\tau} = d^\tau E_{Q^\tau}[x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau]$$

zur Berechnung des objektiven Unternehmenswertes heranzuziehen, ohne Kenntnis des replizierenden Portfolios.

Aus der Vollständigkeit des arbitragefreien Marktes folgt in unserem Modell, ebenso wie beim arbitragefreien Markt ohne Steuern, die Eindeutigkeit des risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Satz 2.19 (Eindeutiges risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß). *In einem arbitragefreien und vollständigen Ein-Perioden-Modell mit komponentenweiser Besteuerung ist das risikolose Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig bestimmt.*

Beweis. Beim Beweis orientieren wir uns an Irle (2003, Satz 1.32). Seien Q_1^τ und Q_2^τ zwei zu P äquivalente risikolose Wahrscheinlichkeitsmaße. Dann muss für alle $w \in \Omega$

$$Q_1^\tau(\{w\}) = Q_2^\tau(\{w\})$$

gelten. Bei Vollständigkeit können wir ohne Einschränkung unterstellen, dass ein Portfolio x mit

$$x^T V_1^\tau = 1_{\{w\}}$$

für beliebiges $w \in \Omega$ existiert. Daraus folgt⁵⁷

$$x^T S_0 = x^T d^\tau E_{Q_1^\tau}(\widetilde{V}_1^\tau) = d^\tau E_{Q_1^\tau}(x^T \widetilde{V}_1^\tau) = d^\tau E_{Q_1^\tau}(1_{\{w\}}) = d^\tau Q_1^\tau(\{w\})$$

und ebenso folgt für $Q_2^\tau(\{w\})$

$$x^T S_0 = d^\tau Q_2^\tau(\{w\}).$$

Damit ist $Q_1^\tau(\{w\}) = Q_2^\tau(\{w\})$ für alle $w \in \Omega$. ■

Zur Veranschaulichung der bisher erarbeiteten Ergebnisse werden wir, anhand eines einfachen Beispiels, den objektiven Wert eines Unternehmens ermitteln.

das replizierende Portfolio möglich ist. Damit wir $x_{N+1}V_0^{U,\tau} = d^\tau E_{Q^\tau}[x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau]$ in unserem Modell sinnvoll anwenden können muss $\widetilde{CF}_1^\tau(w_j)$ bereits in $t = 0$ bekannt sein.

57. Eine Wahrscheinlichkeit lässt sich auch über den Erwartungswert

$$Q(A) = E_Q(1_A)$$

darstellen.

Beispiel 6: Betrachten wir folgenden Markt bestehend aus Aktie und Bond mit Zahlungen vor Steuern in Höhe von

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_1 = \begin{pmatrix} 1,02 & 1,02 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

in den Zuständen u und d . Der Investor sieht sich ausschließlich einer asymmetrischen und komponentenweisen Gewinn- und Verlustbesteuerung auf persönlicher Ebene gegenüber. Die auf dem Markt gehandelten Titel unterliegen einer Besteuerung mit $\tau^G = 0,5$ und $\tau^V = 0$ und wir erhalten Nachsteuerzahlungen in Höhe von

$$\tilde{V}_1^\tau = \begin{pmatrix} 1,01 & 1,01 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Die risikolosen Wahrscheinlichkeiten sind im Modell ohne Steuer

$$q_u = 0,4 \quad q_d = 0,6$$

und im Modell mit asymmetrischer Steuer

$$q_u^\tau = 0,55 \quad q_d^\tau = 0,45.$$

Das Unternehmen erwirtschaftet in $t = 1$ zustandsabhängige Zahlungen in Höhe von

$$\widetilde{CF}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir unterstellen zuerst, dass das gesamte Unternehmen im Besitz eines Investors ist.⁵⁸ Dann ist der faire Preis des Unternehmens im Modell ohne Steuer

$$V_0^U = \frac{E_Q[\widetilde{CF}_1]}{1 + r_f} = \frac{0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 0}{1,02} = 0,39.$$

Mit einem angenommenen Buchwert $B_0 = 0,5$ erhält der Investor aus dem Besitz des Unternehmens Zahlungen nach Steuern in Höhe von

$$\widetilde{CF}_1^\tau = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der faire Preis des Unternehmens im Modell mit asymmetrischer Steuer be-

58. Es gilt demzufolge $x_{N+1} = 1$.

stimmt sich zu

$$V_0^{U,\tau} = \frac{E_{Q^\tau}[\widetilde{CF}_1^\tau]}{1 + r_f(1 - \tau^G)} = \frac{0,55 \cdot 0,75 + 0,45 \cdot 0}{1,01} = 0,41.$$

Nehmen wir nun an, ein Investor hat einen Anteil am Unternehmen in Höhe von $x_{N+1} = 0,2$ leer verkauft. Dann erhält der Investor in $t = 0$ eine faire Zahlung in Höhe von

$$\begin{aligned} x_{N+1}V_0^{U,\tau} &= \frac{x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau(u) + x_{N+1}\widetilde{CF}_1^\tau(d)}{d^\tau} \\ &= x_{N+1}d^\tau E_{Q^\tau}[\widetilde{CF}_1^\tau] = -0,2 \cdot 0,41 \\ &= -0,082. \end{aligned}$$

■

2.5.2 Exkurs: STEUERLICHE BERÜCKSICHTIGUNG DES KAUFPREISES ZUM ZEITPUNKT DER LIQUIDATION

Wir gehen in diesem kurzen Exkurs der Frage nach, wie wir eine steuerliche Berücksichtigung des Kaufpreises zum Zeitpunkt der Liquidation in den Bewertungsgleichungen unseres Modells berücksichtigen können. Mit den möglichen Gründen einer solchen Besteuerung werden wir uns in dieser Arbeit nicht weiter beschäftigen und konzentrieren uns auf die technische Umsetzung bei einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten.

Wird die Marktwertentwicklung, die das Unternehmen zwischen dem Zeitpunkt des Kaufs $t = 0$ und dem Zeitpunkt der Liquidation $t = 1$ genommen hat der Einkommenbesteuerung unterzogen, erhalten wir eine Steuerzahlung bzw. -erstattung auf die Preisdifferenz $V_0^{U,\tau} - \widetilde{V}_1^{U,\tau}$.⁵⁹ Ein Gewinn wird mit τ^G und ein Verlust wird mit τ^V besteuert. Aus Annahme $\widetilde{V}_1^{U,\tau} = 0$ folgt, dass bei einem nicht-negativen Kaufpreis $V_0^{U,\tau} \geq 0$ im Zeitpunkt T ein steuerwerter Vorteil in Höhe von $\tau^V V_0^{U,\tau}$ resultiert. Bei einem negativen Kaufpreis wird im Zeitpunkt T eine Steuerzahlung in Höhe von $\tau^G V_0^{U,\tau}$ fällig.

59. Wir setzen im Folgenden $x_{N+1} = 1$ und merken an, dass die Wahl des Steuersatzes weiterhin unabhängig von der Entscheidung ist, ob wir Anteile am Unternehmen besitzen oder diese leer verkaufen.

Satz 2.20 (Steuerliche Berücksichtigung des Kaufpreises). *Zur steuerlichen Berücksichtigung des Kaufpreises der Realinvestition $V_0^{U,\tau}$ bei der Berechnung des fairen Preises des Unternehmens in $t = 0$ ist zuerst das Vorzeichen des Marktpreises über die Formel*

$$\underline{V}_0^{U,\tau} = d^\tau E_{Q^*}[\widetilde{CF}_1^*] \quad (2.33)$$

mit einem geeigneten risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaß Q^* und einem geeigneten Cashflow \widetilde{CF}_1^* zu berechnen.⁶⁰ Im Anschluss wird mit

$$V_0^{U,\tau} = \underline{V}_0^{U,\tau} + \begin{cases} d^\tau \tau^V V_0^{U,\tau}, & \underline{V}_0^{U,\tau} \geq 0 \\ d^\tau \tau^G V_0^{U,\tau}, & \underline{V}_0^{U,\tau} < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

der faire Preis des Unternehmens $V_0^{U,\tau}$ ermittelt.

Beweis. Wir zeigen, dass durch den Term

$$+ \begin{cases} d^\tau \tau^V V_0^{U,\tau}, & \underline{V}_0^{U,\tau} \geq 0 \\ d^\tau \tau^G V_0^{U,\tau}, & \underline{V}_0^{U,\tau} < 0 \end{cases}$$

kein Vorzeichenwechsel zwischen den Formeln 2.33 und 2.34 stattfindet. Nehmen wir $V_0^{U,\tau} \geq 0$ an, dann folgt

$$V_0^{U,\tau} = \underline{V}_0^{U,\tau} + d^\tau \tau^V V_0^{U,\tau}$$

bzw.

$$(1 - d^\tau \tau^V) V_0^{U,\tau} = \underline{V}_0^{U,\tau}.$$

Aus $0 \leq \tau^V < 1$, $0 \leq \tau^G < 1$, $r_f \geq 0$ und somit $0 < d^\tau = \frac{1}{1+r_f(1-\tau^G)} \leq 1$, folgt

$$(1 - d^\tau \tau^V) > 0.$$

Bei $V_0^{U,\tau} \geq 0$ ist demzufolge auch $\underline{V}_0^{U,\tau} \geq 0$.

Nehmen wir jetzt $\underline{V}_0^{U,\tau} \geq 0$ an, dann folgt daraus $(1 - d^\tau \tau^V) V_0^{U,\tau} \geq 0$ und somit $V_0^{U,\tau} \geq 0$. Die Argumentation bei $\underline{V}_0^{U,\tau} < 0$ bzw. $V_0^{U,\tau} < 0$ ist identisch. ■

Wir illustrieren die steuerliche Berücksichtigung des Kaufpreises an dem folgenden Zahlenbeispiel:

Beispiel 7: Wir haben $\underline{V}_0^{U,\tau} = 10$ berechnet. Mit $\tau^V = 0,1$ und $d^\tau = \frac{1}{1,01}$ erhalten wir

$$V_0^{U,\tau} = \frac{\underline{V}_0^{U,\tau}}{1 - \tau^V d^\tau} = \frac{10}{1 - \frac{0,1}{1,01}} = 11,1. \quad \blacksquare$$

60. Die Wahl von Q^* und \widetilde{CF}_1^* ist von der konkreten Ausgestaltung der steuerlichen Bemessungsgrundlage abhängig.

2.5.3 MARKTWERT- ABSCHREIBUNG IM EIN-PERIODEN-MODELL

In diesem Abschnitt setzen wir die Buchwerte gleich den Marktwerten, also

$$\widetilde{V}_t^{U,\tau} = \widetilde{B}_t$$

für $t = 0, 1$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass sich dieser Ansatz im Fall unserer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten als unpraktikabel erweist.

Aus Gründen der Vereinfachung und für den Rest dieses Abschnitts setzen wir $x_{N+1} = 1$, $\widetilde{V}_1^{U,\tau} = 0$ und $\widetilde{B}_1 = 0$. Somit fließt der gesamte Kaufpreis $V_0^{U,\tau}$ als Abschreibung

$$AfA_1(w_j) = B_0 - 0 = V_0^{U,\tau}$$

in die Bemessungsgrundlage der Steuer und wir erhalten

$$\widetilde{TB}^{N+1}(w_j) = \widetilde{CF}_1(w_j) - V_0^{U,\tau}. \quad (2.35)$$

Um den Cashflow nach Steuern $\widetilde{CF}_1^\tau(w_j)$ im Zustand w_j

$$\widetilde{CF}_1^\tau(w_j) = \widetilde{CF}(w_j) - \begin{cases} \tau^G \widetilde{TB}^{N+1}(w_j); & (\widetilde{CF}_1(w_j) - V_0^{U,\tau}) \geq 0 \\ \tau^V \widetilde{TB}^{N+1}(w_j); & (\widetilde{CF}_1(w_j) - V_0^{U,\tau}) < 0 \end{cases}$$

ermitteln zu können, benötigen wir, aufgrund der Asymmetrie in der Besteuerung, den von uns gesuchten Preis $V_0^{U,\tau}$. Die geschlossene Formel 2.32 zur Berechnung von $V_0^{U,\tau}$ können wir demzufolge nicht mehr anwenden. Es bleibt uns daher nur noch die Möglichkeit, den Preis $V_0^{U,\tau}$ mithilfe des replizierenden Portfolios zu bestimmen. Die dazu notwendige Vorgehensweise illustrieren wir an folgendem Beispiel:

Beispiel 8: Wir betrachten noch einmal den Kapitalmarkt und die Realinvestition mit Bruttozahlungen in $t = 1$ in Höhe von

$$\widetilde{CF}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 6. Aus den vorgenannten Gründen steht uns keine geschlossene Preisgleichung zur Verfügung und uns bleibt keine andere Wahl, als die Lage des gesuchten Preises $V_0^{U,\tau}$ durch Ausprobieren zu bestimmen. Nehmen wir an, dass der gesuchte Preis zwischen den Bruttoauszahlungen $1 \geq V_0^{U,\tau} > 0$ liegt. Dann folgt für die Zahlungen nach Steuern

$$\widetilde{CF}_1^\tau = \begin{pmatrix} 1 - \tau^G(1 - V_0^{U,\tau}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} 1,01x_1 + 11x_2 &= 1 - 0,5 + 0,5V_0^{U,\tau} \\ 1,01x_1 + 9x_2 &= 0 \\ x_1S_0^1 + x_2S_0^2 &= V_0^{U,\tau}. \end{aligned}$$

Auflösen nach x_1 und x_2 führt uns auf die Lösungen

$$x_1 = -3,06125$$

und

$$x_2 = +0,34354.$$

Der faire Preis der Realinvestition beläuft sich damit auf

$$V_0^{U,\tau} = -3,06125 \cdot 1 + 0,34354 \cdot 10 = 0,37.$$

Erst jetzt gelingt uns die Berechnung von

$$\widetilde{CF}_1^\tau = \begin{pmatrix} 1 - 0,5(1 - 0,37) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,68 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wir können die geschlossene Formel

$$V_0^{U,\tau} = d^\tau E_{Q^\tau}[CF_1^\tau] = \frac{0,55 \cdot 0,68 + 0,45 \cdot 0}{1,01} = 0,37$$

anwenden. ■

In dem vorangegangenen Beispiel haben wir stillschweigend eine wichtige Voraussetzung eingehalten, die beim Ansatz der Marktwert-Abschreibung zusätzlich erfüllt sein muss, um ökonomisch *zulässige* Aussagen zu erhalten.

Definition 2.21 (Ökonomisch zulässiger Preis). *Ein Preis $V_0^{U,\tau}$ ist ökonomisch zulässig, wenn ein Gleichungssystem existiert bei dem alle $\widetilde{CF}_1(w_i) \geq \widetilde{CF}_1(w_j)$ mit τ^G und alle $\widetilde{CF}_1(w_k) \leq \widetilde{CF}_1(w_{j+1})$ mit τ^V besteuert werden, sofern $\widetilde{CF}_1(w_j) \geq V_0^{U,\tau} > \widetilde{CF}_1(w_{j+1})$ ist und das Gleichungssystem die Lösung $V_0^{U,\tau}$ besitzt.*

Mit der gerade getroffenen Definition schließen wir Preise aus, die nicht unseren ökonomischen Annahmen an die Steuerfunktion entsprechen. Des Weiteren können wir zeigen, dass ein so definierter Preis $V_0^{U,\tau}$ eindeutig ist.

Satz 2.22 (Eindeutigkeit des ökonomisch zulässigen Preises). *Ist ein Preis $V_0^{U,\tau}$ für eine Realinvestition gefunden, der Definition 2.21 entspricht, so ist dieser bei asymmetrischer Besteuerung $\tau^G \neq \tau^V$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir setzen $\tau^G \neq \tau^V$ und sortieren ohne Beschränkung der Allgemeinheit die zustandsabhängigen Zahlungen der Realinvestition der Größe nach absteigend

$$\widetilde{CF}_1(I_1) \geq \widetilde{CF}_1(I_2) \geq \dots \geq \widetilde{CF}_1(I_K).$$

Dabei charakterisiert $\widetilde{CF}_1(I_1)$ den Zustand mit dem absolut größten Cashflow und $\widetilde{CF}_1(I_K)$ den Zustand mit dem kleinsten Cashflow und es ist mindestens eine Ungleichung $\widetilde{CF}_1(I_i) > \widetilde{CF}_1(I_j)$ mit $i \neq j$ strikt. Wir unterstellen, dass folgende ökonomisch zulässige Lösung

$$\widetilde{CF}_1(I_1) \geq V_0^{U,\tau} > \widetilde{CF}_1(I_2) \geq \dots \geq \widetilde{CF}_1(I_K)$$

bereits gefunden wurde, und erhalten

$$\frac{V_0^{U,\tau}}{d^\tau} + \tau^G(\widetilde{CF}_1(I_1) - V_0^{U,\tau}) + \tau^V \sum_{j=2}^K (\widetilde{CF}_1(I_j) - V_0^{U,\tau}) = \sum_{j=1}^K \widetilde{CF}_1(I_j). \quad (2.36)$$

Zum weiteren Beweis unterstellen wir die Existenz einer weiteren ökonomisch zulässigen Lösung

$$\widetilde{CF}_1(I_1) > \widetilde{CF}_1(I_2) \geq V_0^{U,\tau} > \widetilde{CF}_1(I_3) \geq \dots \geq \widetilde{CF}_1(I_K).$$

Dann aber muss die folgende Gleichung

$$\frac{V_0^{U,\tau}}{d^\tau} + \tau^G \sum_{j=1}^2 (\widetilde{CF}_1(I_j) - V_0^{U,\tau}) + \tau^V \sum_{j=3}^K (\widetilde{CF}_1(I_j) - V_0^{U,\tau}) = \sum_{j=1}^K \widetilde{CF}_1(I_j) \quad (2.37)$$

ebenfalls eine zulässige Lösung darstellen. Setzen wir 2.36 und 2.37 gleich

$$\begin{aligned} & \frac{V_0^{U,\tau}}{d^\tau} + \tau^G(\widetilde{CF}_1(I_1) - V_0^{U,\tau}) + \tau^V \sum_{j=2}^K (\widetilde{CF}_1(I_j) - V_0^{U,\tau}) = \\ & = \frac{V_0^{U,\tau}}{d^\tau} + \tau^G \sum_{j=1}^2 (\widetilde{CF}_1(I_j) - V_0^{U,\tau}) + \tau^V \sum_{j=3}^K (\widetilde{CF}_1(I_j) - V_0^{U,\tau}), \end{aligned} \quad (2.38)$$

erhalten wir durch Kürzen $\tau^G = \tau^V$, was im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\tau^G \neq \tau^V$ steht. ■

2.6 ZUSAMMENFASSUNG

Wir konnten im Rahmen eines Ein-Perioden-Modells zeigen, dass die Implementierung einer asymmetrischen Gewinnsteuer in ein arbitragefreies Modell *nicht* ohne Weiteres möglich ist. In unserem Modell vermeiden wir Steuerarbitrage indem wir jeden Basistitel in einer eigenen Schedule besteuern. Damit gelingt uns die Herleitung des Fundamentalsatzes der Preistheorie bei asymmetrischer Besteuerung und wir sind in der Lage, einen eindeutigen Marktpreis für ein Unternehmen zu bestimmen.

Sofern wir den Marktwert des Unternehmens in der Bemessungsgrundlage der Cashflows berücksichtigen, müssen wir zur Bewertung des Unternehmens das replizierende Portfolio heranziehen. Wir werden diesen Ansatz daher als unpraktikabel verwerfen. Bei exogen vorgegebenen Buchwerten ist die Anwendung einer geschlossenen Formel zur Ermittlung von $V_0^{U,\tau}$ jedoch problemlos möglich. Im nächsten Kapitel werden wir die gefundenen Ergebnisse auf ein realitätsnäheres Modell mit mehreren Perioden übertragen. Bei der Bewertung des Unternehmens betrachten wir nur noch den Ansatz der Buchwert-Abschreibung.

3 MEHR-PERIODEN-MODELL MIT ASYMMETRISCHER STEUER

Für die Übertragung der Ergebnisse des letzten Kapitels auf ein Mehr-Perioden-Modell ist die Verwendung des Martingalbegriffs von entscheidender Bedeutung. Damit gelingt uns die Umformulierung des risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaßes zu einem äquivalenten Martingalmaß.⁶¹ Zu einem besseren Verständnis unserer Vorgehensweise skizzieren wir vorab die wichtigsten Schritte an einem Modell ohne Steuer. Als Ausgangspunkt unserer Überlegungen dient uns folgende Definition der Arbitragefreiheit.⁶²

Definition 3.1 (Arbitragefreiheit). *Der Kapitalmarkt ist frei von Arbitrage, sofern keine Handelsarbitrage vorliegt. Eine Handelsstrategie \tilde{H} ist eine Handelsarbitrage, wenn*

$$\delta_t(\tilde{H}) \geq 0$$

für alle t und

$$P(\delta_t(\tilde{H}) > 0) > 0$$

für mindestens ein t erfüllt ist.

Der Entnahmeprozess ist definiert als

$$\delta_t(\tilde{H}) := \tilde{H}_{t-1}^T \tilde{S}_t - \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t \quad (3.1)$$

für alle t . Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie liegt vor, wenn in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T - 1$ für den Entnahmeprozess

$$\delta_t(\tilde{H}) = 0$$

gilt.

Wir bezeichnen ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q als äquivalentes Martingalmaß, sofern der diskontierte Preisprozess

$$d_t \tilde{S}_t = E_Q[d_{t+1} \tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t]$$

ein Martingal bezüglich Q ist. Mit der Martingaleigenschaft einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie lässt sich der Fundamentalsatz der Preistheorie im Mehr-Perioden-Modell elegant beweisen. In einem diskreten Modell mit endlichem Zeit-

61. Siehe Irle (2003, S. 75). Zu einer ausführlichen Diskussion zu Martingalen und bedingten Erwartungen siehe Pliska (1997, Kap. 3.3), Irle (2003, Kap. 2) oder Kremer (2005, Kap. 3.5.5 - 3.6 sowie 6.1).

62. Siehe Irle (2003, S. 64).

und Zustandsraum siehe zum Beweis des Fundamentalsatzes der Preistheorie bspw. Williams (2006, Kap. 3.2). Bei nicht-endlichem Zustandsraum siehe Irle (2003, Kap. 5).⁶³

Liegt ein äquivalentes Martingalmaß vor, lässt sich mit⁶⁴

$$d_t \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t = E_Q \left[\sum_{i=t+1}^T d_i \widetilde{CF}_i \mid \mathcal{F}_t \right]$$

jeder replizierbare Anspruch mit einem fairen und eindeutigen Preis bewerten.

3.1 KAPITALMARKT

Wir verallgemeinern unser Modell auf $t = 0, 1, \dots, T$ diskrete Zeitpunkte mit $T < \infty$.⁶⁵ Der Wahrscheinlichkeitsraum wird durch das Tripel (Ω, \mathcal{F}, P) beschrieben, wobei wir einen endlichen Zustandsraum Ω mit $K < \infty$ Zuständen unterstellen. Außerdem existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω mit $P(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.⁶⁶ Die Filtration \mathcal{F} beschreibt die Gesamtheit der verfügbaren Informationen. Mit zunehmenden t nimmt der Informationsstand der Investoren nicht ab, was durch $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T$ dargestellt wird.⁶⁷ Auf dem Kapitalmarkt werden N Wertpapiere $\tilde{S} \in \mathbb{R}$ mit positiven Preisen $S_0 > 0$ in $t = 0$ und nicht-negativen Preisen $\tilde{S}_t \geq 0$ in $t = 1, \dots, T$ gehandelt. Der Preisprozess ist für die Zeitpunkte $t = 0, \dots, T$ gegeben durch

$$\tilde{S} = (S_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_T), \quad \tilde{S}_t = (\tilde{S}_t^1, \dots, \tilde{S}_t^N)$$

und an \mathcal{F} adaptiert.⁶⁸ Jedes der N Wertpapiere schüttet in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ eine nicht-negative Dividende $\tilde{D} \in \mathbb{R}$ aus. In $t = 0$ wird per Annahme keine Dividende gezahlt und es gilt $D_0 = 0$. Der Dividendenprozess \tilde{D} ist ebenfalls an \mathcal{F} adaptiert und für jedes $t > 0$ gegeben durch

$$\tilde{D} = (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_T), \quad \tilde{D}_t = (\tilde{D}_t^1, \dots, \tilde{D}_t^N).$$

63. Ein alternativer Beweisgang, der ohne Q geführt wird, findet sich für den Fall eines endlichen Zustandsraumes bei Kremer (2005, S.180 f).
64. Siehe Irle (2003, S.79f).
65. Es handelt sich im Folgenden um Standardannahmen in Finanzmarktmodellen mit mehreren Perioden unter Unsicherheit, siehe z. B. Duffie (2001, Kap. 2) oder Pliska (1997, Kap. 3.1).
66. Es sei darauf hingewiesen, dass die w_j in einem Mehr-Perioden-Modell Pfade beschreiben. Siehe Kremer (2005, S. 153ff).
67. Siehe zu einer ausführlichen Diskussion über die Modellierung der Informationsstruktur mit Hilfe von Algebren Irle (2003, Kap. 2). Für unser Modell mit endlichem Zustandsraum und diskreten Zeitparametern kann auch eine Beschreibung der Informationsstruktur mit Hilfe von Partitionen herangezogen werden, siehe dazu bspw. Pliska (1997, Kap. 3.1.1).
68. Siehe zu einer ausführlichen Darstellung adaptierter Preisprozesse Irle (2003, Kap. 2.3) oder Pliska (1997, Kap. 3.1.2).

Neben der Dividendenzahlung \tilde{D}_t wird dem Portfolio in Zeitpunkt t kein weiteres Kapital entzogen.⁶⁹ Mit \tilde{S}_t^i bezeichnen wir den Preis eines Basistitels i im Zeitpunkt t *ex-Dividende*, also abzüglich der in t zu zahlenden Dividende \tilde{D}_t .

Der risikolose Basistitel S^1 mit konstanter Bruttoverzinsung r_f hat in den Zeitpunkten $t = 0, \dots, T$ einen Preis in Höhe von⁷⁰

$$S_t^1 = \begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t = T \end{cases}$$

und in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ eine Dividendenzahlung in Höhe von

$$D_t^1 = \begin{cases} r_f, & t < T \\ 1 + r_f, & t = T \end{cases}.$$

Die Handelsstrategie $\tilde{H} \in \mathbb{R}$ ist ein vorhersehbarer und ein an \mathcal{F} adaptierter und stochastischer Prozess

$$\tilde{H} = (H_0, \tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{T-1}) \quad (3.2)$$

mit

$$\tilde{H}_t = (\tilde{H}_t^1, \dots, \tilde{H}_t^N),$$

wobei \tilde{H}_t^i die Anteile des i -ten Wertpapiers im Zeitpunkt t darstellt.⁷¹ Der Handel der Wertpapiere beginnt in $t = 0$ und endet in $T - 1$. Der Investor stellt in $t = 0$ ein Portfolio H_0 aus den N zur Verfügung stehenden Wertpapieren entsprechend seinen finanziellen Möglichkeiten zusammen.⁷² Vor diesem Zeitpunkt ist kein Handel möglich und wir setzen $H_{-1} = 0$. Das Portfolio H_0 hält der Investor bis zum Zeitpunkt $t = 1$ und löst es nach Dividendenzahlung komplett auf. Danach baut der Investor ein neues Portfolio \tilde{H}_1 auf und hält es bis zum nächsten Zeitpunkt, um es dann wieder aufzulösen. Der Handel setzt sich in dieser Form über alle Zeitpunkte fort, bis er letztmalig in $T - 1$ abgewickelt wird. Im Zeitpunkt T werden lediglich die Vermögenspositionen aufgelöst und es findet kein neuerlicher Handel statt, demzufolge setzen wir $\tilde{H}_T = 0$. Die folgende Abbildung illustriert den Handel im Modell.⁷³

69. Damit stellen wir weiter unten sicher, dass sämtliche Kapitalabflüsse in Zeitpunkt t steuerlich erfasst werden.

70. Siehe Löffler & Schneider (2003).

71. Siehe zur Definition und Erläuterung vorhersehbarer Prozesse bspw. Kremer (2005, S. 164).

72. Eine Kreditaufnahme bzw. Leerverkäufe sind im Modell nicht ausgeschlossen. Zu einer ausführlicheren Diskussion von Handelsstrategien siehe z. B. Irle (2003, Kap. 3.2) oder Pliska (1997, Kap. 3.1.3).

73. Angelehnt an Irle (2003).

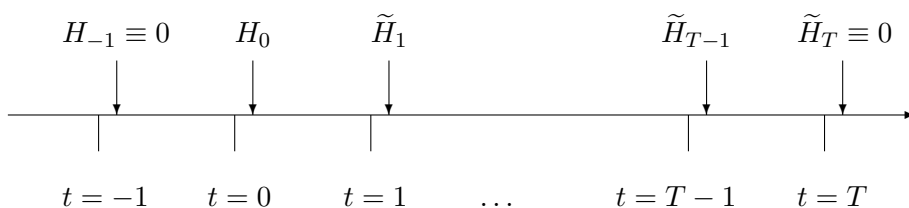


Abbildung 3.1: Zeitstruktur des Modells.

Wir definieren den Wertprozess \tilde{V} zur Handelsstrategie \tilde{H} für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T$ durch

$$\tilde{V}(\tilde{H}) = (\tilde{V}_1(H_0), \dots, \tilde{V}_T(\tilde{H}_{T-1})) \quad (3.3)$$

und für den Zeitpunkt $t = 0$ als

$$V_0(H_0) := H_0^T S_0. \quad (3.4)$$

Der Preis einschließlich der Dividende von Basistitel i im Zeitpunkt t ist definiert als

$$\tilde{V}_t^i(\tilde{H}_{t-1}^i) := \tilde{H}_{t-1}^i \tilde{V}_t^i = \tilde{H}_{t-1}^i (\tilde{S}_t^i + \tilde{D}_t^i) \quad (3.5)$$

für alle $t = 1, \dots, T$. Daraus folgt in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$, unter Berücksichtigung der gemachten Annahmen und Definition sowie $\tilde{H}_{t,t=0,1,\dots,T-1}^1 = 1$, für den sicheren Titel

$$V_t^1 = \begin{cases} 1 + r_f, & t < T \\ 0 + (1 + r_f), & t = T \end{cases}.$$

Im Zeitpunkt $t = 0$ gilt nach Voraussetzung $V_0^1 = S_0^1 = 1$. Somit müssen wir in $t = 0$

$$H_0^1 S_0^1 = \left(\frac{1}{1 + r_f} \right)^t$$

in das sichere Asset investieren, um in t genau eine Einheit zu erhalten, sofern wir die Dividende vollständig reinvestieren.⁷⁴

Ein Portfolio \tilde{H}_{t-1}^i , das im Zeitpunkt $t-1$ zusammengestellt wurde, hat zu Beginn von Zeitpunkt t einen Wert in Höhe von

$$\tilde{V}_t(\tilde{H}_{t-1}) := \tilde{H}_{t-1}^T \tilde{V}_t = \tilde{H}_{t-1}^T (\tilde{S}_t + \tilde{D}_t) = \sum_{i=0}^N \tilde{H}_{t-1}^i (\tilde{S}_t^i + \tilde{D}_t^i). \quad (3.6)$$

Nach Zahlung der Dividende wird das Portfolio aufgelöst und mit den Preisen \tilde{S}_t wird ein neues Portfolio \tilde{H}_t zusammengestellt. Den Entnahmeprozess $\delta_t^D(\tilde{H})$ im

74. Siehe zur Herleitung Irle (2003, S. 62f).

Mehr-Perioden-Modell mit Dividendenzahlung definieren wir daher durch

$$\delta_t^D(\tilde{H}) := \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t) - \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t = \tilde{V}_t(\tilde{H}_{t-1}) - \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t \quad (3.7)$$

für die Zeitpunkte $t = 0, \dots, T$.⁷⁵

Wir bezeichnen im Modell mit Dividendenzahlung eine Strategie als selbstfinanzierend, falls in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T - 1$ für die Entnahme

$$\delta_t^D(\tilde{H}) = 0$$

gilt. Den Diskontierungsprozess definieren wir durch

$$d := (d_0, \dots, d_T),$$

wobei in jedem Zeitpunkt t der Diskontierungsfaktor d_t definiert ist als ⁷⁶

$$d_t = \left(\frac{1}{1 + r_f} \right)^t. \quad (3.8)$$

Mit d notieren wir den diskontierten Preisprozess als

$$d\tilde{S} = (d_1\tilde{S}_1, \dots, d_T\tilde{S}_T)$$

und den diskontierten Wertprozess als

$$d\tilde{V} = (d_1\tilde{V}_1, \dots, d_T\tilde{V}_T).$$

3.2 SCHEDULENSTEUER

Nach den Ausführungen zu Preisen und Dividenden wenden wir uns dem Steuerterm zu. Die Definition des Steuersubjektes übernehmen wir aus Kapitel 2.2. Das Steuerobjekt im Zeitpunkt t ist der aus dem Handel am Kapitalmarkt resultierende Ertrag

$$\tilde{V}_t(\tilde{H}_{t-1}) = \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t).$$

Bei einem Mehr-Perioden-Modell ist es aufgrund der Unterscheidung in Preise und Dividenden zweckmäßig, bereits bei den Kapitalmarktstiteln zwischen dem Marktwert und dem der Besteuerung zugrunde liegenden Buchwert eines Vermögensgegenstandes zu unterscheiden.⁷⁷ Diese Vorgehensweise ermöglicht uns außerdem die Erweiterung des Modells um eine Realinvestition.

75. Aufgrund unserer Annahmen gilt für $\delta_0^D(\tilde{H}) = -H_0^T S_0$ und für $\delta_T^D(\tilde{H}) = \tilde{H}_{T-1}^T(\tilde{S}_T + \tilde{D}_T)$.

76. Siehe Irle (2003, S. 63).

77. Wir orientieren uns bei der Herangehensweise zur Ermittlung der Steuerschuld basierend auf Buchwerten weiterhin an Löffler & Schneider (2003, Kap. I.B).

Die Buchwerte $\tilde{B} \in \mathbb{R}$ der N Wertpapiere seien ein ebenfalls an \mathcal{F} adaptierter Prozess mit

$$\tilde{B} = (B_0, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_T). \quad (3.9)$$

Wir unterstellen, dass jedes Wertpapier im Zeitpunkt T vollständig abgeschrieben ist. Es gilt demzufolge $\tilde{B}_T = 0$ und der Buchwertprozess für das Asset i reduziert sich auf

$$\tilde{B}^i = (B_0^i, \tilde{B}_1^i, \dots, \tilde{B}_{T-1}^i) \quad (3.10)$$

mit Buchwert \tilde{B}_t^i im Zeitpunkt t . Bezüglich der Markt- und Buchwerte der Finanzmarkttitel treffen wir folgende Annahme:

Annahme 3.2 (Buchwert). *Der Buchwert des Finanzmarkttitels $i = 1, \dots, N$ entspricht zu allen Zeitpunkten t dessen Marktpreis ohne Dividende und vor Begleichen der Steuerschuld, also*

$$\tilde{B}_t^i = \tilde{S}_t^i.$$

Aus $\tilde{B}_T^i = 0$ folgt in $t = T$ aufgrund Annahme 3.2 für den Preis eines Finanzmarkttitels $\tilde{S}_T^i = 0$. Die Abschreibung \widetilde{AfA} ist für alle $t > 0$ definiert als

$$\widetilde{AfA}_t := \tilde{B}_{t-1} - \tilde{B}_t. \quad (3.11)$$

Diese Definition berücksichtigt sowohl Zu- als auch Abschreibungen und ähnelt entsprechend unseren Ausführungen zur \widetilde{AfA} in Abschnitt 2.5.1 nur bedingt Abschreibungen realer Steuersysteme.

Den Gewinn und den Verlust eines Wertpapiers in den Zeitpunkten $t > 0$ definieren wir wie folgt:

Definition 3.3 (Gewinn und Verlust: Basistitel im Zeitpunkt t). *Der Investor hält in seinem Portfolio Basistitel i im Zeitpunkt t .*

- Ein steuerrechtlicher Gewinn \tilde{G}_t^i ist bei Basistitel i in Zeitpunkt t gegeben, sofern

$$\tilde{G}_t^i := \tilde{D}_t^i - \widetilde{AfA}_t^i \geq 0$$

ist.

- Ein steuerrechtlicher Verlust \tilde{G}_t^i ist bei Basistitel i in Zeitpunkt t gegeben, sofern

$$\tilde{G}_t^i := \tilde{D}_t^i - \widetilde{AfA}_t^i < 0$$

ist.

Der steuerrechtliche Gewinn \tilde{G}_t eines Portfolios setzt sich aus Gewinnen und Verlusten \tilde{G}_t^i der $J \leq N$ Basistitel, die das Portfolio im Zeitpunkt t bilden, zusammen und lässt sich als Vektor

$$\tilde{G}_t = (\tilde{G}_t^1, \tilde{G}_t^2, \dots, \tilde{G}_t^J)$$

darstellen. Eine Addition der Gewinne der Basistitel ist nicht möglich. Die dazugehörige Begründung haben wir bereits im Ein-Perioden-Modell gegeben. Wir müssen im Mehr-Perioden-Modell jedoch zusätzlich beachten, dass die Dividende aufgrund des Charakters unserer Schedulensteuer für jeden Basistitel im Portfolio einzeln ausgewiesen werden muss.

Wir definieren als Nächstes die Steuerbemessungsgrundlage \widetilde{TB}_t^i des Basistitels i im Zeitpunkt t .

Definition 3.4 (Bemessungsgrundlage: Basistitel im Zeitpunkt t). *Es existieren in jedem Zeitpunkt t genauso viele steuerliche Bemessungsgrundlagen \widetilde{TB}_t^i wie $i = 1, \dots, N$ Wertpapiere auf dem Markt existieren. Die steuerliche Bemessungsgrundlage des Basistitels i ist das Produkt von gehaltener Menge \widetilde{H}_{t-1}^i und Gewinn bzw. Verlust nach Definition 3.3, also*

$$\widetilde{TB}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i) := \widetilde{H}_{t-1}^i \widetilde{G}_t^i. \quad (3.12)$$

Wir unterscheiden in unserem Modell nicht zwischen realisierten und nicht-realisierten Gewinnen und Verlusten. Vielmehr umgehen wir diese Fragestellung, indem wir zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ das Portfolio komplett auflösen und wieder neu zusammenstellen. Die Bemessungsgrundlage eines Portfolios \widetilde{TB}_t ist ebenfalls als Vektor der $J \leq N$ Bemessungsgrundlagen $\widetilde{TB}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i)$, aus denen sich das Portfolio im Zeitpunkt t zusammensetzt, darstellbar mit

$$\widetilde{TB}_t(\widetilde{H}_{t-1}) = (\widetilde{TB}_t^1(\widetilde{H}_{t-1}^1), \dots, \widetilde{TB}_t^J(\widetilde{H}_{t-1}^J)).$$

Wiederum ist die Addition der einzelnen Bemessungsgrundlagen nicht möglich.

Wir müssen weiterhin einen jeweils einheitlichen und konstanten Gewinn- und Verluststeuersatz für alle Marktteilnehmer und über alle Steuerschedulen unterstellen, um Arbitrage zu vermeiden.⁷⁸ Die Anwendung des Gewinnsteuersatzes τ^G oder des Verluststeuersatzes τ^V orientiert sich entsprechend der Definition 2.5 aus Abschnitt 2.2 auch im Mehr-Perioden-Modell ausschließlich an der Preis- und Dividendenentwicklung und ist somit unabhängig von der Menge an gehaltenen Titeln.

Ist die Dividendenzahlung abzüglich der Abschreibung größer oder gleich Null ($\widetilde{D}_t^i - \widetilde{AfA}_t^i \geq 0$) wird τ^G angewendet. Bei ($\widetilde{D}_t^i - \widetilde{AfA}_t^i < 0$) findet der Verluststeuersatz τ^V Anwendung. Unsere Definitionen der Bemessungsgrundlage und des steuerlichen Gewinns und Verlusts implizieren, dass bei einer negativen Preisentwicklung des Basistitels i im Zeitpunkt t , also $\widetilde{S}_t^i < \widetilde{S}_{t-1}^i$, der Gewinnsteuersatz zur Anwendung kommt, sofern der Betrag der Dividende den Betrag der Abschreibung

$$|\widetilde{D}_t^i| > |\widetilde{AfA}_t^i|$$

78. Auch diese dazugehörige Begründung haben wir im vorausgegangenen Kapitel gegeben.

übersteigt. In diesem Fall werden sowohl die Dividende als auch die Abschreibung mit dem Gewinnsteuersatz belegt.⁷⁹ Ist jedoch der Betrag der Abschreibung größer als der Betrag der Dividende

$$|\widetilde{AfA}_t^i| > |\widetilde{D}_t^i|$$

werden sowohl Dividende als auch Abschreibung mit dem Verluststeuersatz belegt.⁸⁰ Wir definieren die Steuerschuld des einzelnen Basistitels im Zeitpunkt t wie folgt:

Definition 3.5 (Steuerschuld: Basistitel im Zeitpunkt t). *Die Steuerschuld von Basistitel i im Zeitpunkt t beläuft sich auf*

$$\widetilde{Tax}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i) = \begin{cases} \tau^G \widetilde{H}_{t-1}^i \widetilde{G}_t^i, & \widetilde{G}_t^i \geq 0 \\ \tau^V \widetilde{H}_{t-1}^i \widetilde{G}_t^i, & \widetilde{G}_t^i < 0 \end{cases}.$$

Die Eigenschaften der von uns definierten Schedulessteuer haben wir in aller Ausführlichkeit im letzten Kapitel diskutiert und die Ergebnisse sind ohne Einschränkung auf die einzelnen Zeitpunkte des Mehr-Perioden-Modells übertragbar. Sofern es zu einer besseren Lesbarkeit in Formeln führt, verwenden wir für $\widetilde{Tax}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i)$ bedeutungsgleich die Schreibweise $\widetilde{H}_{t-1}^i \widetilde{Tax}_t^i$.

Die komponentenweise Besteuerung erlaubt es uns, auch weiterhin die Steuerschuld des Portfolios im Zeitpunkt t durch einfache Addition der Steuerschulden $\widetilde{Tax}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i)$ der $i = 1, \dots, N$ Basistitel zu berechnen.

Definition 3.6 (Steuerschuld: Portfolio im Zeitpunkt t). *Die Steuerschuld eines Investors beläuft sich im Zeitpunkt t unter Berücksichtigung von Definition 3.5 auf*

$$\widetilde{Tax}_t(\widetilde{H}_{t-1}) := \sum_{i=1}^N \widetilde{Tax}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i).$$

79. Unterstellen wir, dass sich im Zeitpunkt t folgende Dividendenzahlung und Preisentwicklung für einen beliebigen Basistitel i eingestellt haben

$$S_{t-1}^i = 4, S_t^i = 1, D_t^i = 5$$

und nehmen Steuersätze iHv. $\tau^V = 0,2$ und $\tau^G = 0,5$ an. Dann müssen wir bei einer separaten Besteuerung von Dividende und Preisentwicklung eine Steuerzahlung iHv.

$$0,2 \cdot (1 - 4) + 0,5 \cdot 5 = 1,9$$

an den Fiskus leisten. Fassen wir Dividende und Preisentwicklung in der Bemessungsgrundlage zusammen, so beläuft sich die Steuerzahlung in unserem Beispiel auf lediglich

$$0,5 \cdot (5 + (1 - 4)) = 1.$$

Eine Änderung der Steuersystematik führt bei asymmetrischer Besteuerung in der Regel zu einer grundlegenden Überarbeitung der Beweise.

80. Bei einer nicht-negativen Preisentwicklung des Basistitels $\widetilde{S}_t^i \geq \widetilde{S}_{t-1}^i$ kommt ausschließlich der Gewinnsteuersatz zur Anwendung, da wir den Dividendenprozess als nicht-negativen Wertprozess definiert haben.

Ein steuerbarer Ertrag fällt ausschließlich zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ an und wir setzen $Tax_0 = 0$.⁸¹

Betrachten wir nun den Handel im Modell mit Steuern etwas genauer. Ein Portfolio \tilde{H}_{t-1} , das im Zeitpunkt $t - 1$ zusammengestellt wurde, hat zu Beginn des Zeitpunktes t und entsprechend 3.6 einen Wert in Höhe von

$$\tilde{V}_t(\tilde{H}_{t-1}) = \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t).$$

Das Portfolio wird aufgelöst und die Steuerschuld $\widetilde{Tax}_t(\tilde{H}_{t-1})$ wird beglichen. Wir definieren den zugehörigen Wertprozess nach Steuern \tilde{V}^τ zur Handelsstrategie \tilde{H} in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T - 1$ als

$$\tilde{V}^\tau(\tilde{H}) := (\tilde{V}_1^\tau(H_0), \dots, \tilde{V}_T^\tau(\tilde{H}_{T-1})). \quad (3.13)$$

und im Zeitpunkt $t = 0$ als⁸²

$$H_0^T S_0 = H_0^T V_0^\tau.$$

In den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T - 1$ hat das Portfolio \tilde{H}_{t-1} einen Wert nach Steuern in Höhe von⁸³

$$\tilde{V}_t^\tau(\tilde{H}_{t-1}) := \tilde{H}_{t-1}^T \tilde{V}_t^\tau = \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t - \widetilde{Tax}_t) = \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{V}_t - \widetilde{Tax}_t). \quad (3.14)$$

Wir lassen bei den Finanzmarktstiteln, neben der Kapitalentnahme in Form der Dividende, auch Kapitalzuführungen in den einzelnen Zeitpunkten t zu. Dabei lassen wir offen, aus welchen Quellen der Investor das Kapital entnimmt. Definieren wir für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T$ die Dividende nach Steuern \tilde{D}_t^τ durch⁸⁴

$$\tilde{D}_t^\tau(\tilde{H}_{t-1}) = \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{D}_t - \widetilde{Tax}_t)$$

lässt sich 3.14 für $t = 1, \dots, T$ auch schreiben als

$$\tilde{V}_t^\tau(\tilde{H}_{t-1}) = \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t^\tau). \quad (3.15)$$

Am Kapitalmarkt wird zum Ende jedes Handelszeitpunkts t aus $t = (1, \dots, T - 1)$ aus den verbleibenden und gegebenenfalls von außen zufließenden Mitteln ein neues Portfolio

$$\tilde{H}_t \tilde{S}_t$$

zusammengestellt. Ein eventueller Zufluss finanzieller Mittel von außen findet aus-

81. Die Definition der Steuerschuld im Mehr-Perioden-Modell entspricht bei $T = 1$ der Definition 2.6 aus dem Ein-Perioden-Modell.

82. Es fallen in $t = 0$ weder Steuer- noch Dividendenzahlungen an.

83. Um den Handel übersichtlicher zu notieren, verwenden wir eigene Symbole für den Portfoliowert vor Steuern \tilde{V}_t und nach Steuern \tilde{V}_t^τ .

84. Wir werden insbesondere beim Beweis der Arbitragefreiheit im erweiterten Modell mit Realinvestition auf \tilde{D}_t^τ zurückgreifen.

nahmslos erst jetzt statt und bleibt daher im Zeitpunkt t steuerlich unberücksichtigt.

Im Zeitpunkt $t = T$ findet per Definition kein Handel statt und die Vermögenspositionen des Portfolios \tilde{H}_{T-1} werden aufgelöst und unter Beachtung von $\tilde{S}_T = 0$ nicht wieder neu zusammengestellt. Wir veranschaulichen die Preise vor und nach Steuer- und Dividendenzahlung in Abbildung 3.2.⁸⁵

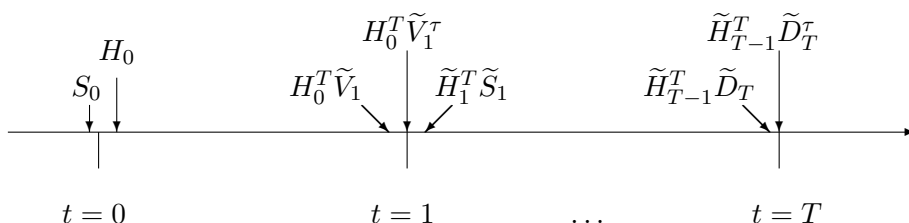


Abbildung 3.2: Preisstruktur des Modells.

Den bisherigen Ausführungen folgend beläuft sich der Preis eines einzelnen Assets nach Steuern $\tilde{V}_t^{i,\tau}$ in den Zeitpunkten $t > 0$ auf

$$\tilde{V}_t^{i,\tau}(\tilde{H}_{t-1}^i) := \tilde{H}_{t-1}^i(\tilde{S}_t^i + \tilde{D}_t^i - \widetilde{Tax}_t^i). \quad (3.16)$$

Mit

$$\tilde{D}_t^{i,\tau} := \tilde{D}_t^i - \begin{cases} \tau^G \tilde{G}_t^i; & \tilde{D}_t^i - \widetilde{AfA}_t^i \geq 0 \\ \tau^V \tilde{G}_t^i; & \tilde{D}_t^i - \widetilde{AfA}_t^i < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

können wir den Preis des Assets nach Steuern auch schreiben als

$$\tilde{V}_t^{i,\tau}(\tilde{H}_{t-1}^i) = \tilde{H}_{t-1}^i(\tilde{S}_t^i + \tilde{D}_t^{i,\tau}). \quad (3.18)$$

Für das sichere Asset $V_t^{1,\tau}$ beläuft sich der Preis nach Steuern im Zeitpunkt t auf

$$V_t^{1,\tau}(\tilde{H}_{t-1}^1) = \begin{cases} \tilde{H}_{t-1}^1(1 + r_f - \tau^G r_f), & 0 < t < T \\ \tilde{H}_{T-1}^1(0 + (1 + r_f) - \tau^G r_f), & t = T \end{cases}.$$

In Anlehnung an 3.7 definieren wir den Entnahmeprozess *nach* Steuern für die Zeitpunkte $t = 0, \dots, T$ durch

$$\begin{aligned} \delta_t^{\tau}(\tilde{H}) &:= \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t - \widetilde{Tax}_t) - \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t \\ &= \tilde{H}_{t-1}^T \tilde{V}_t^{\tau} - \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t \\ &= \tilde{H}_{t-1}^T(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t^{\tau}) - \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t. \end{aligned}$$

85. Angelehnt an Irle (2003).

In $t = 0$ ist $\delta_0^\tau(\tilde{H}) = -H_0^T S_0$ und in $t = T$ gilt aufgrund $\tilde{H}_T^T = 0$ für den Entnahmeprozess $\delta_T^\tau(\tilde{H}) = \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau$. Die Steuerzahlungen an den Fiskus bzw. Steuerstattungen vom Fiskus sind im Gegensatz zur Festlegung der Dividende durch das zugrunde liegende Steuerecht bestimmt. Aus diesem Grund werten wir die Steuerzahlung nicht als private Entnahme aus dem Portfolio und werden uns im Folgenden an der Definition des Entnahmeprozesses nach Steuern orientieren. Wir illustrieren die Unterschiede des Entnahmeprozesses vor und nach Steuern an einem einfachen Zahlenbeispiel.

Beispiel 9: Betrachten wir ein Portfolio bestehend aus Basisitel i in einem beliebigen Ereignis $A_t(x)$ von Zeitpunkt t . Es sei $\tau^G = 0,5$, $\tau^V = 0$, $\tilde{D}_t^i = 1$, $\tilde{S}_{t-1}^i = 1$ sowie $\tilde{S}_t^i = 2$, und wir setzen $\tilde{H}_{t-1}^i = \tilde{H}_t^i = 1$. Dann erhalten wir

$$\tilde{V}_t = \tilde{H}_{t-1}^i (\tilde{D}_t^i + \tilde{S}_t^i) = 3$$

und

$$\tilde{V}_t^\tau = \tilde{H}_{t-1}^i (\tilde{D}_t^i + \tilde{S}_t^i - \tau^G (\tilde{D}_t^i - (\tilde{S}_{t-1}^i - \tilde{S}_t^i))) = 2.$$

Für unsere Entnahmeprozesse vor und nach Steuern folgt daraus

$$\delta_t^D(\tilde{H}) = 3 - 2 = 1$$

und

$$\delta_t^\tau(\tilde{H}) = 2 - 2 = 0.$$

■

Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzierend, sofern für den Entnahmeprozess nach Steuern in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T - 1$

$$\delta_t^\tau(\tilde{H}) = 0 \tag{3.19}$$

gilt. Daraus folgt

$$\tilde{H}_{t-1}^T \tilde{V}_t^\tau = \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t \tag{3.20}$$

für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T - 1$.

Den Diskontierungsfaktor d_t^τ im Modell mit Steuern definieren wir in Anlehnung an 3.8 durch

$$d_t^\tau := \left(\frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \right)^t. \tag{3.21}$$

Wir müssen demzufolge in unserem Modell mit asymmetrischer Steuer im Zeitpunkt $t = 0$

$$H_0^1 S_0^1 = \left(\frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \right)^t = d_t^\tau$$

in das sichere Wertpapier investieren, um im Zeitpunkt t genau eine Geldeinheit zu erhalten, sofern wir die Dividende zu allen Zeitpunkten s mit $0 < s < t$ vollständig einbehalten.

Der diskontierte Wertprozess nach Steuern sei für $t > 0$ definiert durch

$$d_t^T \tilde{V}_t^T(\tilde{H}_{t-1}) := d_t^T \tilde{H}_{t-1}^T (\tilde{S}_t + \tilde{D}_t - \tilde{T}ax_t). \quad (3.22)$$

3.3 FUNDAMENTALSATZ DER PREISTHEORIE IM MEHR-PERIODEN-MODELL

Zu Beginn dieses Abschnitts geben wir ein formales Argument der Arbitragefreiheit und orientieren uns dazu an Definition 3.1.⁸⁶

Definition 3.7 (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer). *Der Kapitalmarkt mit asymmetrischer Besteuerung ist frei von Arbitrage, wenn keine Handelsarbitrage vorliegt. Eine Handelsstrategie \tilde{H} ist eine Handelsarbitrage, wenn*

$$\delta_t^T(\tilde{H}) \geq 0$$

für alle t und

$$P(\delta_t^T(\tilde{H}) > 0) > 0$$

für mindestens ein t erfüllt ist.

Wir zeigen, dass unser Mehr-Perioden-Modell mit Schedulensteuer arbitragefrei im Sinn von Definition 3.7 genau dann ist, wenn keine Ein-Perioden-Arbitrage vorliegt.

Satz 3.8 (Ein-Perioden-Arbitrage). *Auf dem Markt existiert eine Ein-Perioden-Arbitrage genau dann, wenn eine Handelsarbitrage existiert.*

Beweis. Wir folgen dem Beweisgang von Irle (2003, Satz 3.5). Dazu definieren wir eine Handelsstrategie \tilde{H} durch

$$\tilde{H}_t = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, T\}, \quad \tilde{H}_k = \tilde{X}_k \neq 0$$

sowie eine Ein-Perioden-Arbitrage \tilde{X}_k in $t = k$ durch

$$-\tilde{X}_k^T \tilde{S}_k \geq 0 \quad \text{und} \quad \tilde{X}_k^T \tilde{V}_{k+1}^\tau \geq 0$$

und

$$P(\tilde{X}_k^T \tilde{V}_{k+1}^\tau > \tilde{X}_k^T \tilde{S}_k) > 0.$$

Dann ist

$$\delta_k^T = \tilde{X}_{k-1}^T \tilde{V}_k^\tau - \tilde{X}_k^T \tilde{S}_k = -\tilde{X}_k^T \tilde{S}_k \geq 0$$

86. In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen der Herangehensweise von Irle (2003, Kap. 3).

sowie

$$\delta_{k+1}^T = \tilde{X}_k^T \tilde{V}_{k+1}^\tau - \tilde{X}_{k+1}^T \tilde{S}_{k+1} = \tilde{X}_k^T \tilde{V}_{k+1}^\tau \geq 0,$$

wobei eine Ungleichung strikt ist. Des Weiteren ist für alle weiteren Zeitpunkte t $\delta_t^T = 0$, und wir erhalten eine Handelsarbitrage.

Kommen wir zum Beweis der Umkehrung unter Anwendung der vollständigen Induktion. Wir werden folgende Induktionsbehauptung beweisen: Liegt bei einer Handelsarbitrage im T -Perioden-Modell eine Ein-Perioden-Arbitrage vor, dann gilt diese Aussage auch im $T + 1$ -Perioden-Modell. Setzen wir den Induktionsanfang auf $T = 1$ und beachten, dass in diesem Fall die Begriffe der Handelsarbitrage und der Ein-Perioden-Arbitrage übereinstimmen. Eine Handelsarbitrage bei $T = 1$ liegt bei $\delta_t^T \geq 0$ für $t = 0, 1$ und $P(\delta_t^T > 0) > 0$ für mindestens ein $t \in \{0, 1\}$ vor. Dann ist

$$\delta_0^T = H_{-1}^T V_0^\tau - H_0^T S_0 = -H_0^T S_0 = -X_0^T S_0 \geq 0$$

und

$$\delta_1^T = H_0^T \tilde{V}_1^\tau - \tilde{H}_1^T \tilde{S}_1 = H_0^T \tilde{V}_1^\tau = X_0^T \tilde{V}_1^\tau \geq 0$$

und daraus folgt eine Arbitrage X_0 in $t = 1$.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass bei $T \geq 2$ aus einer Handelsarbitrage

$$\tilde{H}^A = (H_0, \dots, \tilde{H}_{T-1})$$

eine Ein-Perioden-Arbitrage folgt.

Der Induktionsschritt wird von T auf $T + 1$ geführt und wir definieren dazu eine Handelsarbitrage \tilde{H} mit

$$\tilde{H} = (H_0, \dots, \tilde{H}_T)$$

für

$$\tilde{V}^\tau = (V_0, \dots, \tilde{V}_{T+1}^\tau), \quad \tilde{S} = (S_0, \dots, \tilde{S}_{T+1})$$

und behaupten, dass im $T + 1$ -Modell aus einer Handelsarbitrage eine Ein-Perioden-Arbitrage folgt, sofern die Induktionsvoraussetzung erfüllt ist. Kommen wir zum Beweis.

1. Fall: $\tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau \geq 0$, $P(\tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau > 0) > 0$.

Dann ist $\tilde{H}^A = (H_0, \dots, \tilde{H}_{T-1})$ Handelsarbitrage für $\tilde{V}^A = (V_0, \dots, \tilde{V}_T^\tau)$ und $\tilde{S}^A = (S_0, \dots, \tilde{S}_T)$ im zugehörigen T -Perioden-Modell, sodass nach der Induktionsvoraussetzung eine Ein-Perioden-Arbitrage existiert.

2. Fall: $P(\tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau < 0) > 0$.

Wir definieren eine Ein-Perioden-Arbitrage mit

$$A = \{\tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau < 0\},$$

und

$$\tilde{X}_T = \tilde{H}_T 1_A.$$

Da \tilde{H} eine Handelsarbitrage ist, folgt mit $\delta_T^\tau = \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau - \tilde{H}_T^T \tilde{S}_T \geq 0$

$$\tilde{X}_T^T \tilde{S}_T = 1_A \tilde{H}_T^T \tilde{S}_T \leq 1_A \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau < 0.$$

Des Weiteren ist bei einer Handelsarbitrage im $T + 1$ -Modell $\delta_{T+1}^\tau = \tilde{H}_T^T \tilde{V}_{T+1}^\tau \geq 0$ und es folgt

$$\tilde{X}_T^T \tilde{V}_{T+1}^\tau = 1_A \tilde{H}_T^T \tilde{V}_{T+1}^\tau \geq 0.$$

Also ist \tilde{X}_T eine Ein-Perioden-Arbitrage in $T + 1$.

3. Fall: $\tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau = 0$.

Es folgt

$$\tilde{H}_T^T \tilde{S}_T \leq \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau = 0$$

aufgrund $\delta_T^\tau \geq 0$ sowie

$$\tilde{H}_T^T \tilde{V}_{T+1}^\tau \geq 0$$

aufgrund $\delta_{T+1}^\tau = \tilde{H}_T^T \tilde{V}_{T+1}^\tau \geq 0$. Falls

$$\tilde{H}_T^T \tilde{S}_T = 0 \text{ und } \tilde{H}_T^T \tilde{V}_{T+1}^\tau = 0,$$

ist $(H_0, \dots, \tilde{H}_{T-1})$ eine Handelsarbitrage und nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Ein-Perioden-Arbitrage. Andernfalls ist $\tilde{H}_T = \tilde{X}_T$ eine Ein-Perioden-Arbitrage in Periode $T + 1$. ■

Wir betrachten jetzt eine weitere Beschreibung der Arbitragefreiheit des Marktes, auf die wir im ersten Teil des Beweises des Fundamentalsatzes der Preistheorie zurückgreifen werden.

Satz 3.9 (Arbitragefreiheit und diskontierter Preisprozess). *In einem Mehr-Perioden-Modell sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Modell ist arbitragefrei.*

(ii) *Es existiert für $t = 1, \dots, T$ kein \mathcal{F}_{t-1} -meßbares \tilde{X}_{t-1}^T mit*

$$\tilde{X}_{t-1}^T (d_t^\tau \tilde{V}_t^\tau - d_{t-1}^\tau \tilde{S}_{t-1}) \geq 0$$

und

$$P(\tilde{X}_{t-1}^T (d_t^\tau \tilde{V}_t^\tau - d_{t-1}^\tau \tilde{S}_{t-1}) > 0) > 0.$$

Beweis. Diesen Beweis führen wir analog zu Irle (2003, Satz 3.6) und setzen zunächst die Arbitragefreiheit des Marktes voraus. Wir nehmen an, dass ein \mathcal{F}_{t-1} -meßbares

\tilde{X}_{t-1}^T mit

$$\tilde{X}_{t-1}^T(d_t^r \tilde{V}_t^r - d_{t-1}^r \tilde{S}_{t-1}) \geq 0; \quad P(X_{t-1}^T(d_t^r \tilde{V}_t^r - d_{t-1}^r \tilde{S}_{t-1}) > 0) > 0$$

existiert. Wir betrachten eine risikofreie Anlage \bar{X}_t mit

$$\bar{X}_t^T \tilde{V}_{t+1}^r = 1$$

sowie

$$\bar{X}_t^T \tilde{S}_t = \frac{d_{t+1}^r}{d_t^r} > 0$$

und definieren ein Portfolio durch

$$\tilde{X}_{t-1}^* := \tilde{X}_{t-1} - \frac{\tilde{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1}}{\bar{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1}} \bar{X}_{t-1}.$$

Dann ist

$$\tilde{X}_{t-1}^{*T} \tilde{S}_{t-1} = \tilde{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1} - \frac{\tilde{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1}}{\bar{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1}} \bar{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1} = 0.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{t-1}^{*T} \tilde{V}_t^r &= \tilde{X}_{t-1}^T \tilde{V}_t^r - \tilde{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1} \frac{\bar{X}_{t-1}^T \tilde{V}_t^r}{\bar{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1}} \\ &= \tilde{X}_{t-1}^T \tilde{V}_t^r - \tilde{X}_{t-1}^T \tilde{S}_{t-1} \frac{d_{t-1}^r}{d_t^r} \\ &= \tilde{X}_{t-1}^T (d_t^r \tilde{V}_t^r - d_{t-1}^r \tilde{S}_{t-1}) \frac{1}{d_t^r} \geq 0 \end{aligned}$$

wegen

$$P(\tilde{X}_{t-1}^T (d_t^r \tilde{V}_t^r - d_{t-1}^r \tilde{S}_{t-1}) > 0) > 0.$$

Wir erhalten eine Ein-Perioden-Arbitrage, und mit Satz 3.8 folgt daraus die Existenz einer Handelsarbitrage.

Zum Beweis der Umkehrung setzen wir eine Ein-Perioden-Arbitrage voraus und es folgt unmittelbar

$$\tilde{X}_{t-1}^T d_{t-1}^r \tilde{S}_{t-1} \leq 0, \quad \tilde{X}_{t-1}^T d_t^r \tilde{V}_t^r \geq 0,$$

wobei eine Ungleichung strikt ist. Damit erhalten wir den gesuchten Widerspruch zu (ii). ■

Annahme 3.10 (Arbitragefreiheit bei asymmetrischer Steuer). *Auf dem Markt existiert keine Handelsarbitrage nach Definition 3.7.*

Wir führen nun den Begriff des äquivalenten Martingalmaßes formal ein.⁸⁷

87. Dazu folgen wir der Darstellung bei Williams (2006, S.34).

Definition 3.11 (Äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß). *Wir bezeichnen das zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß Q^τ als äquivalentes Martingalmaß, sofern in allen Zeitpunkten*

$$d_t^\tau \tilde{S}_t = E_{Q^\tau} [d_{t+1}^\tau (\tilde{S}_{t+1} + \tilde{D}_{t+1} - \widetilde{Tax}_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] = E_{Q^\tau} [d_{t+1}^\tau \tilde{V}_{t+1}^\tau \mid \mathcal{F}_t]$$

gilt.

Diese Definition ist zur Bewertung von Portfolios zweckmäßig gewählt. Im Zeitpunkt t ist die Dividende entnommen und muss bei Bewertungsfragen unberücksichtigt bleiben. Im Zeitpunkt $t + 1$ fließen jedoch Preis und Dividende abzüglich der zu zahlenden Steuer in die Bewertung ein.

Wir werden im Folgenden den Beweis führen, dass die von uns gewählte Definition ein Martingal darstellt. Eine an die Filtration \mathcal{F}_t adaptierte Familie reellwertiger Zufallsvariablen \tilde{X}_t für $t = 0, \dots, T$ ist ein Martingal, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:⁸⁸

- (i) \tilde{X}_t ist beschränkt bzw. integrierbar für $t = 0, \dots, T$,
- (ii) \tilde{X}_t ist \mathcal{F}_t -messbar für $t = 0, \dots, T$,
- (iii) $E[\tilde{X}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{X}_{t-1}$ für $t = 1, \dots, T$.

Satz 3.12 (Martingal). *Sei Q^τ ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, dann ist der diskontierte Preisprozess mit Dividenden- und Steuerzahlung*

$$d_t^\tau \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t = E_{Q^\tau} [d_{t+1}^\tau \tilde{H}_t^T \tilde{V}_{t+1}^\tau \mid \mathcal{F}_t]$$

ein Martingal bezüglich Q^τ .

Beweis. Betrachten wir den diskontierten Preisprozess mit Dividenden- und Steuerzahlung. Die Beschränktheit resultiert aus der Voraussetzung eines endlichen Zustandsraumes und daraus, dass der Vektor der Handelsstrategie \tilde{H} sowie die Preise \tilde{S} , Dividenden \tilde{D} und Buchwerte \tilde{B} in \mathbb{R} liegen. Die Messbarkeit von \tilde{H} , \tilde{S} und \tilde{D} ist per Definition gegeben. Wir müssen nun noch zeigen, dass der Steuerprozess \widetilde{Tax}_t ebenfalls für alle t messbar ist. Im Zeitpunkt $t = 0$ ist per Annahme $Tax_0 = 0$. In den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ ist $\widetilde{Tax}_t = \sum \widetilde{Tax}_t^i$ und wir betrachten im ersten Schritt ein einzelnes Wertpapier des Kapitalmarkts. Dazu setzen wir

$$\tilde{D}_t^i := g, \quad (\tilde{B}_t^i - \tilde{B}_{t-1}^i) := f$$

und erhalten mit $g - f$ die Bemessungsgrundlage des Basistitels i . Da f und g nach Voraussetzung messbar sind, folgt sofort die Messbarkeit von $g - f := z$. Auf jeder Teilmenge A der Algebra \mathcal{F}_t ist aufgrund unserer Gewinn- und Verlustdefinition eindeutig festgelegt, welcher Steuersatz für das einzelne Wertpapier zur Anwendung

88. Siehe Williams (2006, S.128f).

kommt. Demzufolge ist auch $\tau^G z$ bzw. $\tau^V z$ auf jeder Teilmenge A der Algebra \mathcal{F}_t messbar. Dieses Ergebnis ist für alle N Wertpapiere gültig.

Mit der komponentenweisen Besteuerung ergibt sich die gesamte Steuerschuld im Zeitpunkt t aus beliebig zusammengestellten Portfolios aus der Summe der einzelnen Steuerschulden \widetilde{Tax}_t^i . Daraus folgt für alle t die Messbarkeit von \widetilde{Tax}_t auf jeder Teilmenge A der Algebra \mathcal{F}_t . Somit ist $d_t^T(\widetilde{S}_t + \widetilde{D}_t - \widetilde{Tax}_t)$ eine für alle t messbare und an \mathcal{F}_t adaptierte Funktion. Die dritte Eigenschaft, die Martingaleigenschaft, berechnen wir durch

$$E_{Q^\tau}[d_{t+1}^T \widetilde{V}_{t+1}^T(\widetilde{H}) \mid \mathcal{F}_t] = E_{Q^\tau}[d_{t+1}^T \widetilde{H}_t^T(\widetilde{S}_{t+1} + \widetilde{D}_{t+1} - \widetilde{Tax}_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t].$$

Mit der Vorhersehbarkeit der Handelsstrategie folgt

$$E_{Q^\tau}[d_{t+1}^T \widetilde{V}_{t+1}^T(\widetilde{H}) \mid \mathcal{F}_t] = \widetilde{H}_t^T E_{Q^\tau}[d_{t+1}^T(\widetilde{S}_{t+1} + \widetilde{D}_{t+1} - \widetilde{Tax}_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t]$$

und mit der Definition 3.11 erhalten wir

$$E_{Q^\tau}[d_{t+1}^T \widetilde{V}_{t+1}^T(\widetilde{H}) \mid \mathcal{F}_t] = \widetilde{H}_t^T d_t^T \widetilde{S}_t.$$

■

Der Preis eines Portfolios unter dem äquivalenten Martingalmaß lässt sich wie folgt ermitteln:

Satz 3.13 (Preis des Portfolios unter Q^τ). *Sei Q^τ äquivalentes Martingalmaß. Dann ist der diskontierte Portfoliowert nach Steuern zum Zeitpunkt k*

$$d_k^T \widetilde{H}_k^T \widetilde{S}_k = E_{Q^\tau} \left[\sum_{i=k+1}^T d_i^T \delta_i^T(\widetilde{H}) \mid \mathcal{F}_k \right], \quad k = 0, \dots, T-1 \quad (3.23)$$

die Summe der unter dem äquivalenten Martingalmaß diskontierten Entnahmen nach Steuern $\delta_i^T(\widetilde{H})$.

Beweis. In einem beliebigen Zeitpunkt $i = 1, \dots, T$ werden aus den Ansprüchen eines Portfolios \widetilde{H} Bruttozahlungen abzüglich Steuern $\widetilde{H}_{i-1}^T \widetilde{V}_i^T$ erlöst und ein neues Portfolio wird mit $\widetilde{H}_i^T \widetilde{S}_i$ aufgebaut.

Für $i > k$ gilt

$$\begin{aligned} E_{Q^\tau}[d_i^T \delta_i^T(\widetilde{H}) \mid \mathcal{F}_k] &= E_{Q^\tau}[d_i^T(\widetilde{H}_{i-1}^T \widetilde{V}_i^T - \widetilde{H}_i^T \widetilde{S}_i) \mid \mathcal{F}_k] = \\ &= E_{Q^\tau}[E_{Q^\tau}(d_i^T \widetilde{H}_{i-1}^T \widetilde{V}_i^T \mid \mathcal{F}_{i-1}) \mid \mathcal{F}_k] - E_{Q^\tau}[d_i^T \widetilde{H}_i^T \widetilde{S}_i \mid \mathcal{F}_k] \end{aligned}$$

und mit Satz 3.12 folgt

$$E_{Q^\tau}[d_i^T \delta_i^T(\widetilde{H}) \mid \mathcal{F}_k] = E_{Q^\tau}[d_{i-1}^T \widetilde{H}_{i-1}^T \widetilde{S}_{i-1} \mid \mathcal{F}_k] - E_{Q^\tau}[d_i^T \widetilde{H}_i^T \widetilde{S}_i \mid \mathcal{F}_k].$$

Durch Summation und unter Beachtung von $\tilde{H}_T = 0$ erhalten wir schlussendlich ⁸⁹

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=k+1}^T E_{Q^\tau} [d_i^\tau \delta_i^\tau(\tilde{H}) \mid \mathcal{F}_k] \\
&= \sum_{i=k+1}^T (E_{Q^\tau} [d_{i-1}^\tau \tilde{H}_{i-1}^T \tilde{S}_{i-1} \mid \mathcal{F}_k] - E_{Q^\tau} [d_i^\tau \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i \mid \mathcal{F}_k]) \\
&= d_k^\tau \tilde{H}_k^T \tilde{S}_k.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

■

Existieren bei unveränderten Steuersätzen τ^G und τ^V mehrere Q^τ im Modell, sagt uns 3.24, dass

$$\sum_{i=k+1}^T E_{Q^\tau} [d_i^\tau \delta_i^\tau(\tilde{H}) \mid \mathcal{F}_k]$$

unabhängig vom gewählten Q^τ eindeutig bestimmt ist.

Bei Selbstfinanzierung ist in den Zeitpunkten $i = 1, \dots, T-1$ bekanntlich $\delta_i^\tau = 0$ und wir erhalten für die Zeitpunkte $k = 1, \dots, T-1$

$$d_k^\tau \tilde{H}_k^T \tilde{S}_k = E_{Q^\tau} [d_T^\tau \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau \mid \mathcal{F}_k]$$

aufgrund von $\delta_T^\tau(\tilde{H}) = \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{V}_T^\tau$. In $k = 0$ gilt

$$E_{Q^\tau} [d_T^\tau \delta_T^\tau(\tilde{H}) - \delta_0^\tau(\tilde{H})] = 0 \tag{3.25}$$

mit $\delta_0^\tau(\tilde{H}) = -H_0^T S_0$.

Wir werden jetzt den Beweis des Fundamentalsatzes der Preistheorie im Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Schedulensteuer führen. Es sei angemerkt, dass aus unserer Annahme eines endlichen Zustandsraumes und $P(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ die Äquivalenz von Q^τ zu P folgt, falls $Q^\tau(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Satz 3.14 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie im Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer). *In einem Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Steuer sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Der Markt mit asymmetrischer Steuer ist frei von Arbitrage.*
- (ii) *Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q^τ .*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass aus der Existenz von Q^τ die Arbitragefreiheit des Marktes folgt. In diesem Fall folgt für Q^τ mit \mathcal{F}_t -messbaren \tilde{X}_t

$$E_{Q^\tau} (\tilde{X}_t^T (d_{t+1}^\tau \tilde{V}_{t+1}^\tau - d_t^\tau \tilde{S}_t)) = E_{Q^\tau} (\tilde{X}_t^T E_{Q^\tau} (d_{t+1}^\tau \tilde{V}_{t+1}^\tau - d_t^\tau \tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_t)) = 0$$

89. Das ergibt sich sofort aus $E_{Q^\tau} [d_k^\tau \tilde{H}_k^T \tilde{S}_k \mid \mathcal{F}_k] - E_{Q^\tau} [d_{k+1}^\tau \tilde{H}_{k+1}^T \tilde{S}_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] + E_{Q^\tau} [d_{k+1}^\tau \tilde{H}_{k+1}^T \tilde{S}_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] - E_{Q^\tau} [d_{k+2}^\tau \tilde{H}_{k+2}^T \tilde{S}_{k+2} \mid \mathcal{F}_k] + \dots + E_{Q^\tau} [d_{T-2}^\tau \tilde{H}_{T-2}^T \tilde{S}_{T-2} \mid \mathcal{F}_k] - E_{Q^\tau} [d_{T-1}^\tau \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{S}_{T-1} \mid \mathcal{F}_k] + E_{Q^\tau} [d_{T-1}^\tau \tilde{H}_{T-1}^T \tilde{S}_{T-1} \mid \mathcal{F}_k] = E_{Q^\tau} [d_k^\tau \tilde{H}_k^T \tilde{S}_k \mid \mathcal{F}_k]$.

und damit existiert kein

$$\tilde{X}_t^T (d_{t+1}^\tau \tilde{V}_{t+1}^\tau - d_t^\tau \tilde{S}_t) \geq 0$$

mit

$$Q^\tau (\tilde{X}_t^T (d_{t+1}^\tau \tilde{V}_{t+1}^\tau - d_t^\tau \tilde{S}_t) > 0) > 0.$$

Mit der Äquivalenz von P und Q^τ und Satz 3.9 folgt die Arbitragefreiheit des Marktes.

Kommen wir nun zur umgekehrten Implikation des Satzes.⁹⁰ Wir setzen

$$\mathbb{X} = \{d_T^\tau \delta_T^\tau(\tilde{H}) - \delta_0^\tau(\tilde{H}) : \tilde{H} \text{ ist selbstfinanzierende Handelsstrategie}\}$$

und mit $\Omega \in \{w_1, \dots, w_K\}$ stellen die Zufallsvariable

$$\mathbb{Y} = \{(\tilde{X}(w_1), \dots, \tilde{X}(w_K)) : \tilde{X} \in \mathbb{X}\}$$

Ereignisse als Vektoren des \mathbb{R}^K dar. Die selbstfinanzierenden Handelsstrategien bilden einen linearen Raum und damit ist \mathbb{Y} Unterraum des \mathbb{R}^T . Des Weiteren sei

$$\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{R}^K : z_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, K, \sum_{i=1}^K z_i = 1\}$$

die kompakte und konvexe Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße, die im positiven Orthanten des \mathbb{R}^K liegen. Da wir Arbitragefreiheit vorausgesetzt haben, ist $\mathbb{Y} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Dann existiert eine strikt trennende Hyperebene mit Vektor $\phi \in \mathbb{R}^K$ und Skalar $\beta \in \mathbb{R}$, sodass für alle $y \in \mathbb{Y}$ und $z \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\phi^T y \leq \beta < \phi^T z.$$

Da \mathbb{Y} Unterraum von \mathbb{R}^T ist, folgt $\phi^T y = 0$ für alle $y \in \mathbb{Y}$ und wir können ohne Einschränkung $\beta = 0$ annehmen.⁹¹ Damit folgt $\phi^T z > 0$. Da alle Einheitsvektoren in \mathbb{Z} liegen, muss $\phi_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, K$ gelten. Wir definieren nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q^τ für jedes $w_j \in \{w_1, \dots, w_K\}$ durch

$$Q^\tau(w_j) = \frac{\phi_j}{\sum_{j=1}^K \phi_j}$$

und $Q^\tau(w) = 0$ für alle $w \in \Omega \setminus \{w_1, \dots, w_K\}$, das offensichtlich äquivalent zu P ist.

Abschließend zeigen wir, dass Q^τ äquivalentes Martingalmaß ist. Ist Q^τ ein

90. Wir folgen bei diesem Teil des Beweises Irle & Prelle (2007, Aufg. 5.4) und Williams (2006, Kap. 3.2, Kap. 3.6). Beweise des Trennungssatzes finden sich aber auch in vielen weiteren Standardlehrbüchern der Finanztheorie oder Mathematik, bspw. bei Duffie (2001, Appendix B), Kremer (2005, S. 32ff) oder Werner (2011, Kap. 3.2).

91. Siehe zur Herleitung dieser Aussage beispielsweise Kremer (2005, Kap. 1.5.1), insbesondere Satz 1.42.

äquivalentes Martingalmaß, gilt für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie⁹²

$$E_{Q^\tau} [d_T^\tau \delta_T^\tau(\tilde{H}) - \delta_0^\tau(\tilde{H})] = 0.$$

Wir nehmen zum Widerspruchsbeweis an, dass ein $i \in \{1, \dots, N\}$ und ein $k \in \{1, \dots, T\}$ mit

$$E_{Q^\tau} [d_k^\tau \tilde{V}_k^{i,\tau} \mid V_0, \dots, \tilde{V}_{k-1}^\tau] \neq d_k^\tau \tilde{S}_{k-1}^i$$

existieren und

$$A = \{E_{Q^\tau} [d_k^\tau \tilde{V}_k^{i,\tau} \mid V_0, \dots, \tilde{V}_{k-1}^\tau] > d_k^\tau \tilde{S}_{k-1}^i\}$$

keine Nullmenge ist. Wir konstruieren eine selbstfinanzierende Strategie in die risikofreie Anlage im Zeitpunkt i für alle Zeitpunkte $i = k - 1, k, \dots, T - 1$ mit

$$\bar{X}_i \tilde{V}_{i+1}^\tau = (1 + r_f(1 - \tau^G))^{i-(k-1)}$$

sowie

$$\bar{X}_i \tilde{S}_i = (1 + r_f(1 - \tau^G))^{i-k}.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass⁹³

$$\bar{X}_i \tilde{V}_{i+1}^\tau = \bar{X}_{i+1} \tilde{S}_{i+1} \quad (3.26)$$

ist. Wir konstruieren nun eine Handelsstrategie $\tilde{H} = (H_0, \dots, \tilde{H}_{T-1})$ derart, dass wir eine selbstfinanzierende Strategie erhalten. In den Zeitpunkten $t = 0, \dots, k - 2$ sei

$$\tilde{H}_t = 0$$

und im Zeitpunkt $t = k - 1$ ist

$$\tilde{H}_{k-1} = 1_A (d_k^\tau e_i - d_{k-1}^\tau \tilde{S}_{k-1}^i \bar{X}_{k-1})$$

mit e_i als i -tem Einheitsvektor in \mathbb{R}^N . In den Zeitpunkten $t = k, \dots, T - 1$ definieren wir die Handelsstrategie durch

$$\tilde{H}_t = 1_A (d_k^\tau \tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau \tilde{S}_{k-1}^i) \bar{X}_t.$$

Diese Handelsstrategie ist selbstfinanzierend. Bei Selbstfinanzierung gilt $\delta_t^\tau = 0$ für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T - 1$. Somit ist es ausreichend die Entnahmen δ_{k-1}^τ , δ_k^τ und δ_{k+1}^τ zu bestimmen.

92. Siehe 3.25.

93. Wir erhalten bspw. in $i = k - 1$ für $\bar{X}_{k-1} \tilde{V}_k^\tau = 1$ und für $\bar{X}_{k-1} \tilde{S}_{k-1} = (1 + r_f(1 - \tau^G))^{-1}$. Bei $i = k$ ist $\bar{X}_k \tilde{V}_{k+1}^\tau = (1 + r_f(1 - \tau^G))$ und $\bar{X}_k \tilde{S}_k = 1$ und für $i = k + 1$ erhalten wir $\bar{X}_{k+1} \tilde{V}_{k+2}^\tau = (1 + r_f(1 - \tau^G))^2$ und $\bar{X}_{k+1} \tilde{S}_{k+1} = (1 + r_f(1 - \tau^G))$.

In $t = k - 1$ gilt für die selbstfinanzierende Handelsstrategie

$$\begin{aligned}\delta_{k-1}^\tau(\tilde{H}) &= \tilde{H}_{k-2}\tilde{V}_{k-1}^\tau - \tilde{H}_{k-1}\tilde{S}_{k-1} \\ &= -\tilde{H}_{k-1}\tilde{S}_{k-1} \\ &= -1_A(d_k^\tau\tilde{S}_{k-1}e_i - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i\bar{X}_{k-1}\tilde{S}_{k-1}).\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $\bar{X}_{k-1}\tilde{S}_{k-1} = (1 + r_f(1 - \tau^G))^{k-1-k} = d^\tau$

$$\delta_{k-1}^\tau(\tilde{H}) = -1_A(d_k^\tau\tilde{S}_{k-1}^i - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i d^\tau) = 0.$$

In $t = k$ erhalten wir mit $\bar{X}_k\tilde{S}_k = 1$ und $\bar{X}_{k-1}\tilde{V}_k^\tau = 1$

$$\begin{aligned}\delta_k^\tau(\tilde{H}) &= \tilde{H}_{k-1}\tilde{V}_k^\tau - \tilde{H}_k\tilde{S}_k \\ &= 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^\tau e_i - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i\bar{X}_{k-1}\tilde{V}_k^\tau) - 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau}\tilde{S}_k - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i\tilde{S}_k)\bar{X}_k \\ &= 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i) - 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i) = 0.\end{aligned}$$

Der Zeitpunkt $t = k + 1$ wird stellvertretend für alle $t = k + 1, \dots, T - 1$ berechnet.

Es ist

$$\begin{aligned}\delta_{k+1}^\tau(\tilde{H}) &= \tilde{H}_k\tilde{V}_{k+1}^\tau - \tilde{H}_{k+1}\tilde{S}_{k+1} \\ &= 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau}\tilde{V}_{k+1}^\tau - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i\tilde{V}_{k+1}^\tau)\bar{X}_k - 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau}\tilde{S}_{k+1} - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i\tilde{S}_{k+1})\bar{X}_{k+1} \\ &= 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i)\bar{X}_k\tilde{V}_{k+1}^\tau - 1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i)\bar{X}_{k+1}\tilde{S}_{k+1}\end{aligned}$$

und mit 3.26 folgt sofort

$$\delta_{k+1}^\tau = 0.$$

Die betrachtete Handelsstrategie ist zwar selbstfinanzierend, wir erhalten jedoch unter dem Maß Q^τ folgenden Widerspruch. Es ist

$$E_{Q^\tau}[d_T^\tau\delta_T^\tau(\tilde{H}) - \delta_0^\tau(\tilde{H})] = E_{Q^\tau}[d_T^\tau\tilde{H}_{T-1}\tilde{V}_T^\tau - H_0S_0] = E_{Q^\tau}[d_T^\tau\tilde{H}_{T-1}\tilde{V}_T^\tau]$$

und daraus folgt

$$E_{Q^\tau}[d_T^\tau(1_A(d_k^\tau\tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau\tilde{S}_{k-1}^i)\bar{X}_{T-1})\tilde{V}_T^\tau].$$

Mit

$$\bar{X}_{T-1}\tilde{V}_T^\tau = (1 + r_f(1 - \tau^G))^{T-(k-1)} = \frac{(1 + r_f(1 - \tau^G))^T}{(1 + r_f(1 - \tau^G))^{k-1}} = \frac{d_{k-1}^\tau}{d_T^\tau}$$

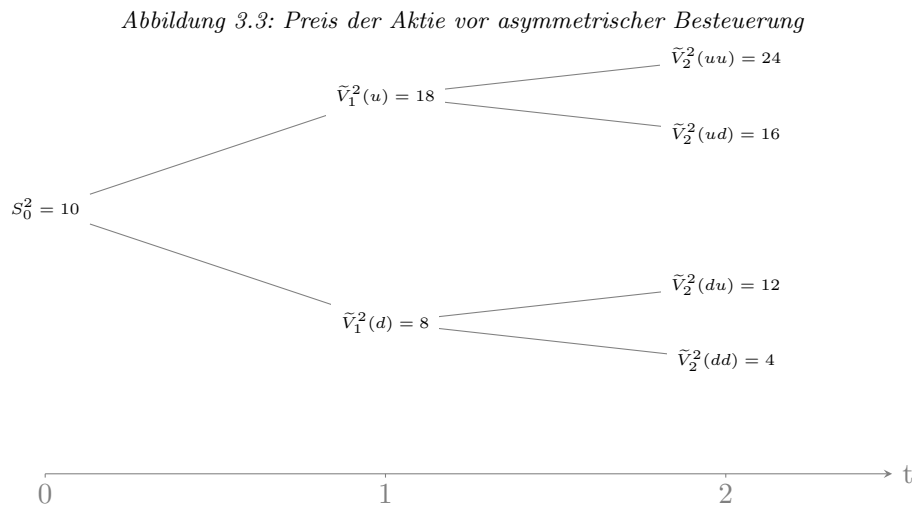
und nach Voraussetzung folgt

$$E_{Q^\tau} [d_{k-1}^\tau 1_A (d_k^\tau \tilde{V}_k^{i,\tau} - d_{k-1}^\tau \tilde{S}_{k-1}^i)] > 0$$

und wir erhalten den gewünschten Widerspruch. Damit ist Q^τ äquivalentes Martingalmaß. ■

Im folgenden Beispiel veranschaulichen wir die Berechnung der äquivalenten Martingalmaße und der Preise von Portfolios in unserem Modell mit asymmetrischer Schedulensteuer.

Beispiel 10: Betrachten wir im Folgenden einen Kapitalmarkt bestehend aus Bond S^1 und Aktie S^2 mit Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$. In den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ wird Handel betrieben und im Endzeitpunkt $T = 2$ werden die Vermögenspositionen aufgelöst. Die Steuersätze sind festgesetzt mit $\tau^G = 0,5$ und $\tau^V = 0,2$. Der Bond verspricht eine sichere Zinszahlung vor Steuern in Höhe von $r_f = 0,1$. Die Aktie zahlt in $t = 1$ keine Dividende und nimmt den in der folgenden Abbildung willkürlich gewählten Preisverlauf vor Steuern.



Betrachten wir zuerst den Preisverlauf von Aktie und Bond nach Steuern, sofern wir die beiden Titel in der Menge 1 halten. Der Bond erwirtschaftet innerhalb einer Periode einen Preis einschließlich der Dividende nach Steuern in Höhe von

$$V_t^{1,\tau} = 1 + r_f(1 - \tau^G) = 1,05.$$

Sofern wir im Zeitpunkt $t = 0$ eine Einheit vom Bond erwerben und in $t = 1$ die Dividende vollständig reinvestieren, erhalten wir im Zeitpunkt $t = 2$

$$V_2^{1,\tau} = (1 + r_f(1 - \tau^G))^2 = 1,1025.$$

Wir erhalten folgende Preise der Aktie nach Steuern im Zeitpunkt $t = 1$ unter Beachtung von $\tilde{D}_1^2 = 0$ und $\tilde{S}_2^2 = 0$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1^{2,\tau}(u) &= H_0^2(\tilde{S}_1^2(u) - \tau^G(\tilde{S}_1^2(u) - S_0^2)) = 18 - 0,5(18 - 10) = 14; \\ \tilde{V}_1^{2,\tau}(d) &= H_0^2(\tilde{S}_1^2(d) - \tau^V(\tilde{S}_1^2(d) - S_0^2)) = 8 - 0,2(8 - 10) = 8,4\end{aligned}$$

und im Zeitpunkt $t = 2$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2^{2,\tau}(uu) &= \tilde{H}_1^2(u)(\tilde{D}_2^2(uu) - \tau^G(\tilde{D}_2^2(uu) - \tilde{S}_1^2(u))) = \frac{14}{18}(24 - 0,5 \cdot 6) = 16,33; \\ \tilde{V}_2^{2,\tau}(ud) &= \tilde{H}_1^2(u)(\tilde{D}_2^2(ud) - \tau^V(\tilde{D}_2^2(ud) - \tilde{S}_1^2(u))) = \frac{14}{18}(16 - 0,2 \cdot (-2)) = 12,76; \\ \tilde{V}_2^{2,\tau}(du) &= \tilde{H}_1^2(d)(\tilde{D}_2^2(du) - \tau^G(\tilde{D}_2^2(du) - \tilde{S}_1^2(d))) = \frac{8,4}{8}(12 - 0,5 \cdot 4) = 10,5; \\ \tilde{V}_2^{2,\tau}(dd) &= \tilde{H}_1^2(d)(\tilde{D}_2^2(dd) - \tau^V(\tilde{D}_2^2(dd) - \tilde{S}_1^2(d))) = \frac{8,4}{8}(4 - 0,2 \cdot (-4)) = 5,04.\end{aligned}$$

Nachdem wir die Nachsteuerpreise von Aktie und Bond berechnet haben, fehlen zur Anwendung der Bewertungsformel noch die äquivalenten Martingalmaße nach Steuern Q^τ . Dafür greifen wir auf die Formeln

$$\psi_{A_t(u)}^\tau = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \frac{(1 + r_f(1 - \tau^G)) - d^\tau(A_t)}{u^\tau(A_t) - d^\tau(A_t)}$$

und

$$\psi_{A_t(d)}^\tau = \frac{1}{1 + r_f(1 - \tau^G)} \frac{u^\tau(A_t) - (1 + r_f(1 - \tau^G))}{u^\tau(A_t) - d^\tau(A_t)}$$

zurück. Wir erhalten⁹⁴

$$\begin{aligned}q_u^\tau &= 0,375; \quad q_d^\tau = 0,625; \\ q_{uu}^\tau &= 0,54347; \quad q_{ud}^\tau = 0,45653; \quad q_{du}^\tau = 0,69231; \quad q_{dd}^\tau = 0,30769\end{aligned}$$

sowie mit $q_{A_1, A_2}^\tau = q_{A_1}^\tau q_{A_2}^\tau$ für die Pfadwahrscheinlichkeiten

$$q_{u,uu}^\tau = 0,2038; \quad q_{u,ud}^\tau = 0,1712; \quad q_{d,du}^\tau = 0,43269; \quad q_{d,dd}^\tau = 0,19231.$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Bewertung eines Kapitalmarktportfolios anhand einer geschlossenen Formel durchzuführen. Betrachten wir dazu eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit

$$H_0^1 = 1; \quad \tilde{H}_1^1(u) = \tilde{H}_1^1(d) = 1,05; \quad H_2^1 := 0$$

94. Zum Vergleich berechnen wir die äquivalenten Martingalmaße vor Steuern

$$\begin{aligned}q_u &= 0,3; \quad q_d = 0,7; \\ q_{uu} &= 0,475; \quad q_{ud} = 0,525; \quad q_{du} = 0,6; \quad q_{dd} = 0,4.\end{aligned}$$

und erkennen sofort die Abhängigkeit des äquivalenten Martingalmaßes vom Steuersatz.

und

$$H_0^2 = 1; \quad \tilde{H}_1^2(u) = \frac{14}{18}; \quad \tilde{H}_1^2(d) = \frac{8,4}{8}; \quad H_2^2 := 0.$$

Bei dieser Handelsstrategie ist im Zeitpunkt $t = 1$ weder die Zuführung noch die Entnahme von Kapital aus dem Portfolio notwendig und wir erhalten

$$\begin{aligned} d_0^T H_0^T S_0 &= E_{Q^\tau} \left[\sum_{i=1}^2 d_i^T \delta_i^T(\tilde{H}) \mid \mathcal{F}_0 \right] = \\ &= \frac{0,375 \left[\left(14 - \frac{14 \cdot 18}{18} \right) + (1,05 - 1,05) \right] + 0,625 \left[\left(8,4 - \frac{8 \cdot 8,4}{8} \right) + (1,05 - 1,05) \right]}{1 + 0,01(1 - 0,5)} + \\ &+ \frac{0,2038 \left(\frac{14 \cdot 21}{18} + 1,1025 \right) + 0,1712 \left(\frac{14 \cdot 16,4}{18} + 1,1025 \right)}{(1 + 0,01(1 - 0,5))^2} + \\ &+ \frac{0,43269 \left(\frac{8 \cdot 8,4}{10} + 1,1025 \right) + 0,19231 \left(\frac{4 \cdot 8 \cdot 8,4}{8} + 1,1025 \right)}{(1 + 0,01(1 - 0,5))^2} \\ &= 0 + 11 = 11. \end{aligned}$$

Abschließend werden wir unser Beispiel leicht abändern und uns einem Portfolio aus Aktie und Bond zuwenden, welches in den Mengen

$$H_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad H_2 := 0$$

gehandelt wird und in $t = 1$ und $t = 2$ eine Dividende ausschüttet. Der Bond schüttet in $t = 1$ eine Dividende vor Steuern in Höhe des Zinsgewinns $r_f = 0,1$ aus und in $t = 2$ entsprechend unseren Modellannahmen in Höhe von 1,1. Die Zahlungsstruktur der Aktie ist durch

$$S_0^2 = 10; \quad \tilde{S}_1^2(u) = 12; \quad \tilde{S}_1^2(d) = 6$$

sowie

$$\tilde{D}_1^2(u) = 6; \quad \tilde{D}_1^2(d) = 2; \quad \tilde{D}_2^2(uu) = 16; \quad \tilde{D}_2^2(ud) = 10; \quad \tilde{D}_2^2(du) = 9; \quad \tilde{D}_2^2(dd) = 3$$

gegeben. Wir erhalten Zahlungen nach Steuern beim Bond in Höhe von $V_1^{1,\tau} = V_2^{1,\tau} = 1,05$ und bei der Aktie in Höhe von

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1^{2,\tau}(u) &= 14; \quad \tilde{V}_1^{2,\tau}(d) = 8,4; \\ \tilde{V}_2^{2,\tau}(uu) &= 14; \quad \tilde{V}_2^{2,\tau}(ud) = 10,4; \quad \tilde{V}_2^{2,\tau}(du) = 7,5; \quad \tilde{V}_2^{2,\tau}(dd) = 4,5. \end{aligned}$$

Des Weiteren erhalten wir für die äquivalenten Martingalmaße

$$\begin{aligned} q_u^\tau &= 0,375; \quad q_d^\tau = 0,625; \\ q_{uu}^\tau &= 0,6111; \quad q_{ud}^\tau = 0,3889; \quad q_{du}^\tau = 0,6; \quad q_{dd}^\tau = 0,4 \end{aligned}$$

sowie

$$q_{u,uu}^T = 0,22916; \quad q_{u,ud}^T = 0,14584; \quad q_{d,du}^T = 0,375; \quad q_{d,dd}^T = 0,25.$$

Als fairen Preis des Portfolios in $t = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d_0^T \tilde{H}_0^T \tilde{S}_0 &= E_{Q^T} \left[\sum_{i=1}^2 d_i^T \delta_i^T(\tilde{H}) \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \frac{0,375[3(14 - 12) + 2(1,05 - 1)] + 0,625[3(8,4 - 6) + 2(1,05 - 1)]}{1 + 0,01(1 - 0,5)} + \\ &+ \frac{0,22916(3 \cdot 14 + 2 \cdot 1,05) + 0,14584(3 \cdot 10,4 + 2 \cdot 1,05)}{(1 + 0,01(1 - 0,5))^2} + \\ &+ \frac{0,375(3 \cdot 7,5 + 2 \cdot 1,05) + 0,25(3 \cdot 4,5 + 2 \cdot 1,05)}{(1 + 0,01(1 - 0,5))^2} \\ &= 6,52 + 25,48 = 32. \end{aligned}$$

Anhand des letzten Beispiels erkennen wir, dass eine veränderte Zahlungsstruktur die äquivalenten Martingalmaße beeinflusst. ■

3.4 UNTERNEHMENSBEWERTUNG BEI ASYMMETRISCHER SCHEDULENSTEUER

Wir werden uns in diesem Abschnitt der Bewertung eines Unternehmens im Mehr-Perioden-Modell zuwenden. Im Gegensatz zu den Auszahlungen der Finanzmarkttitle, die wir als Dividende bezeichnet haben, sprechen wir bei den zustandsabhängigen Auszahlungen der Realinvestition von einem Cashflow. Abgesehen von dieser sprachlichen Unterscheidung können wir die Realinvestition wie einen Basistitel des Finanzmarktes mit Dividendenzahlung betrachten. Der Cashflow \widetilde{CF} ist ein reellwertiger und an \mathcal{F} adaptierter Prozess

$$\widetilde{CF} = (\widetilde{CF}_1, \widetilde{CF}_2, \dots, \widetilde{CF}_T). \quad (3.27)$$

Die Auszahlungen \widetilde{CF} fließen dem Besitzer des Unternehmens in den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ zu. Den Marktpreis bzw. fairen Preis einer Realinvestition vor Ausschüttung der Cashflows und vor Begleichen der Steuerschuld bezeichnen wir in den Zeitpunkten $t = 0, \dots, T$ mit

$$\tilde{V}_t^U$$

und setzen $\tilde{V}_T^U = 0$. Ein Unternehmen ist replizierbar, sofern eine Handelsstrategie \tilde{H} mit

$$\widetilde{CF}_t = \delta_t^D(\tilde{H})$$

für alle $t = 1, \dots, T$ existiert.⁹⁵ In einem Mehr-Perioden-Modell ohne Steuer lässt sich der Marktpreis eines replizierbaren Unternehmens durch die Formel⁹⁶

$$d_t \widetilde{V}_t^U = E_Q \left(\sum_{i=t+1}^T d_i \widetilde{CF}_i \mid \mathcal{F}_t \right) \quad (3.28)$$

ermitteln.

Nach den grundlegenden Anmerkungen zur Unternehmensbewertung wenden wir uns der Besteuerung des Unternehmens im Mehr-Perioden-Modell zu.⁹⁷ Unserem Ansatz einer Schedulensteuer folgend wird die Realinvestition in einer eigenen Steuerschedule der Besteuerung unterzogen und erhält in jedem Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ eine eigene Bemessungsgrundlage

$$\widetilde{TB}_t^{N+1}.$$

Zur Berechnung der Steuerschuld greifen wir unseren Ansatz aus Kapitel 2.5.1 auf und passen diesen an das Mehr-Perioden-Modell an. Wir nehmen an, dass wir dem Unternehmen in allen Zeitpunkten $t = 0, \dots, T$ exogen vorgegebene und unsichere Buchwerte

$$\widetilde{B}_t^{N+1}$$

beilegen können. Die Marktwerte der Realinvestition \widetilde{V}_t^U werden im Allgemeinen nicht den Buchwerten der Realinvestition \widetilde{B}_t^{N+1} entsprechen. Die Buchwerte sind ein ebenfalls an \mathcal{F} adaptierter Prozess mit

$$\widetilde{B}^{N+1} = (B_0^{N+1}, \widetilde{B}_1^{N+1}, \dots, \widetilde{B}_T^{N+1}).$$

Der heutige Buchwert B_0^{N+1} sei als bekannt und sicher vorausgesetzt. Im Zeitpunkt $t = T$ ist die Realinvestition vollständig abgeschrieben und es gilt $\widetilde{B}_T^{N+1} = 0$. Die Abschreibung der Realinvestition \widetilde{AfA}_t^{N+1} ist für die Zeitpunkte $t > 0$ definiert als Differenz der Buchwerte

$$\widetilde{AfA}_t^{N+1} := B_{t-1}^{N+1} - \widetilde{B}_t^{N+1}.$$

Der steuerliche Gewinn bzw. Verlust des Unternehmens bemisst sich an der Differenz von Cashflow und Abschreibung.

95. Siehe Irle (2003, S.70ff).

96. Siehe Irle (2003, S.79f).

97. Auch im Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Besteuerung bezeichnen wir den fairen Preis des Unternehmens im Zeitpunkt t mit $\widetilde{V}_t^{U,\tau}$.

Definition 3.15 (Gewinn und Verlust: Unternehmen im Zeitpunkt t). *Der Investor hält Anteile am Unternehmen im Zeitpunkt t .*

- Ein steuerrechtlicher Gewinn \widetilde{G}_t^{N+1} aus der Beteiligung am Unternehmen ist im Zeitpunkt t gegeben, sofern

$$\widetilde{G}_t^{N+1} := \widetilde{CF}_t - \widetilde{AfA}_t^{N+1} \geq 0$$

ist.

- Ein steuerrechtlicher Verlust \widetilde{G}_t^{N+1} aus der Beteiligung am Unternehmen ist im Zeitpunkt t gegeben, sofern

$$\widetilde{G}_t^{N+1} := \widetilde{CF}_t - \widetilde{AfA}_t^{N+1} < 0$$

ist.

Die Bemessungsgrundlage der Steuer im Zeitpunkt t aus der Beteiligung am Unternehmen entspricht dem Produkt aus steuerlichem Gewinn oder Verlust \widetilde{G}_t^{N+1} und der Beteiligung ($-1 \leq \widetilde{H}_t^{N+1} \leq 1$) am Unternehmen⁹⁸

$$\widetilde{TB}_t^{N+1}(\widetilde{H}_{t-1}^{N+1}) := \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{G}_t^{N+1},$$

wobei wir $\widetilde{H}_T^{N+1} = 0$ setzen.⁹⁹ Damit lässt sich die Steuerschuld aus der Beteiligung am Unternehmen \widetilde{H}^{N+1} im Zeitpunkt t wie folgt darstellen:

Definition 3.16 (Steuerschuld: Unternehmen im Zeitpunkt t). *Die Steuerschuld aus der Beteiligung am Unternehmen berechnet sich im Zeitpunkt t durch*

$$\widetilde{Tax}_t^{N+1}(\widetilde{H}_{t-1}^{N+1}) = \begin{cases} \tau^G \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{G}_t^{N+1}; & \widetilde{G}_t^{N+1} \geq 0 \\ \tau^V \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{G}_t^{N+1}; & \widetilde{G}_t^{N+1} < 0 \end{cases}.$$

Satz 3.17 (Messbarkeit der Steuerschuld des Unternehmens). *Die Steuerschuld \widetilde{Tax}_t^{N+1} ist auf jeder Teilmenge A der Algebra \mathcal{F}_t messbar und an \mathcal{F} adaptiert.*

Beweis. Der Beweis ist analog dem Beweis aus Satz 3.12 zu führen. Wir müssen lediglich die Dividende \widetilde{D}_t^i durch den Cashflow \widetilde{CF}_t ersetzen und beachten, dass die \widetilde{CF}_t nach Voraussetzung an \mathcal{F} adaptiert sind. ■

98. Im Ein-Perioden-Modell haben wir die Beteiligung am Unternehmen durch den Parameter x_{N+1} dargestellt. Auch im Mehr-Perioden-Modell ist der Investor jederzeit in der Lage seiner steuerlichen Verpflichtung aus der Beteiligung am Unternehmen nachzukommen.

99. Das entspricht unseren Modellannahmen zum Handel im Zeitpunkt T .

Die gesamte Steuerschuld des Investors im erweiterten Modell bestehend aus der Investition in das Unternehmen sowie aus den gehaltenen Basistiteln des Kapitalmarktes beläuft sich im Zeitpunkt t auf

$$\widetilde{Tax}_t(\widetilde{H}_{t-1}) = \sum_{i=1}^{N+1} (\widetilde{Tax}_t^i(\widetilde{H}_{t-1}^i))_i, \quad (3.29)$$

wobei wir $\widetilde{H}_{t-1}^T = (\widetilde{H}_{t-1}^1, \widetilde{H}_{t-1}^2, \dots, \widetilde{H}_{t-1}^{N+1})$ definieren.

Wenden wir uns nun dem Cashflow nach Steuern \widetilde{CF}_t^τ zu und definieren diesen für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T$ durch

$$\widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{CF}_t^\tau := \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{CF}_t - \begin{cases} \tau^G \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{G}_t^{N+1}; & \widetilde{G}_t^{N+1} \geq 0 \\ \tau^V \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{G}_t^{N+1}; & \widetilde{G}_t^{N+1} < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{CF}_t^\tau = \widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{CF}_t - \widetilde{Tax}_t^{N+1}(\widetilde{H}_{t-1}^{N+1}). \quad (3.30)$$

Es sei darüber hinaus angemerkt, dass auch die Cashflows nach Steuern einen an \mathcal{F} adaptierten Prozess darstellen

$$\widetilde{CF}^\tau = (\widetilde{CF}_1^\tau, \widetilde{CF}_2^\tau, \dots, \widetilde{CF}_T^\tau),$$

da \widetilde{CF}_t und \widetilde{B}_t an \mathcal{F} adaptiert sind und die Steuersätze τ^G und τ^V auf jeder Teilmenge A der Algebra \mathcal{F} eindeutig festgelegt sind.¹⁰⁰

Eine Realinvestition ist absicherbar, falls für alle $t = 1, \dots, T$ eine Handelstrategie \widetilde{H} mit

$$\widetilde{H}_{t-1}^{N+1} \widetilde{CF}_t^\tau = \delta_t^\tau(\widetilde{H}) \quad (3.31)$$

existiert. Um sicherzustellen, dass unsere Realinvestition replizierbar ist, setzen wir den Markt im Mehr-Perioden-Modell als vollständig voraus.

Annahme 3.18 (Vollständiger Markt). *Der Markt mit asymmetrischer Besteuerung ist vollständig.*

Betrachten wir jetzt die Arbitragefreiheitsbedingung im erweiterten Mehr-Perioden-Modell mit Realinvestition.

100. Siehe Satz 3.12.

Satz 3.19 (Arbitragefreiheit im erweiterten Modell). *Es liegt ein arbitragefreier Kapitalmarkt, der einer Besteuerung nach Definition 3.6 unterliegt, vor. Der Markt ist um eine replizierbare Realinvestition mit folgenden Preisen und Dividenden erweitert*

$$\tilde{\underline{S}}_{t,t=0,\dots,T-1} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_t^{U,\tau} \\ \tilde{S}_t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{S}}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{D}}_{t,t=1,\dots,T} = \begin{pmatrix} \widetilde{CF}_t^\tau \\ \tilde{D}_t^\tau \end{pmatrix}.$$

Die Realinvestition wird entsprechend 3.29 in einer eigenen Schedule besteuert, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das um eine Realinvestition erweiterte Modell ist arbitragefrei.
- (ii) Die Gleichung

$$\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau} = \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t$$

hält in den Zeitpunkten $t = 0, \dots, T - 1$.

Beweis. Mit den Ergebnissen aus Satz 3.13 und 3.31 sind wir in der Lage, den Beweisweg von Irlle (2003, Satz 3.16) ohne Modifikation zu übernehmen.

Setzen wir zunächst die Arbitragefreiheit des erweiterten Modells voraus und nehmen des Weiteren an, dass $P(\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau} < \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t) > 0$ oder $P(\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau} > \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t) > 0$ sei. Beginnen wir mit $P(\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} > \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) > 0$ und m als den maximalen Zeitpunkt an dem *ii*) verletzt ist. Wir definieren ein

$$\underline{X}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ X_m^1 \\ X_m^2 \\ \vdots \\ X_m^N \end{pmatrix}$$

mit $\underline{X}_m^T \tilde{\underline{S}}_m = 1$ und $P(\underline{X}_m^T \tilde{\underline{V}}_{m+1}^\tau > 0) = 1$ und setzen $\tilde{H}_m^{N+1} = \tilde{H}_{m+1}^{N+1}$.

Des Weiteren konstruieren wir mit $A = \{\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} > \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m\}$ eine Handelsstrategie durch

$$\tilde{\underline{H}}_m = 1_A \begin{pmatrix} -\tilde{H}_m^{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} - \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) \underline{X}_m + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_m \end{pmatrix}$$

sowie mit $\tilde{\underline{H}}_i = 0$ für alle $i \neq m$. Dann ist $\delta_i^\tau(\tilde{\underline{H}}) = 0$ für alle $i \neq m, m + 1$. Im

Zeitpunkt m erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta_m^\tau(\tilde{H}) &= -\tilde{H}_m^T \tilde{S}_m \\ &= -1_A(-\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} + (\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} - \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) + \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) = 0.\end{aligned}$$

Im Zeitpunkt $m+1$ erhalten wir unter Beachtung von $\tilde{V}_{m+1}^\tau = \tilde{S}_{m+1} + \tilde{D}_{m+1}^\tau$

$$\begin{aligned}\delta_{m+1}^\tau(\tilde{H}) &= \tilde{H}_m^T \tilde{V}_{m+1}^\tau \\ &= 1_A(-\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_{m+1}^{U,\tau} - \tilde{H}_m^{N+1} \tilde{C}F_{m+1}^\tau + \tilde{H}_m^T(\tilde{S}_{m+1} + \tilde{D}_{m+1}^\tau) + \\ &\quad + (\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} - \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) \underline{X}_m \tilde{V}_{m+1}^\tau).\end{aligned}$$

In einem vollständigen Markt ist $\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{C}F_{m+1}^\tau = \tilde{H}_m^T(\tilde{S}_{m+1} + \tilde{D}_{m+1}^\tau) - \tilde{H}_{m+1}^T \tilde{S}_{m+1}$ und somit

$$\begin{aligned}\delta_{m+1}^\tau(\tilde{H}) &= 1_A(-\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_{m+1}^{U,\tau} - \tilde{H}_m^T(\tilde{S}_{m+1} + \tilde{D}_{m+1}^\tau) + \tilde{H}_{m+1}^T \tilde{S}_{m+1} + \\ &\quad + \tilde{H}_m^T(\tilde{S}_{m+1} + \tilde{D}_{m+1}^\tau) + (\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} - \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) \underline{X}_m \tilde{V}_{m+1}^\tau).\end{aligned}$$

Da wir m als den maximalen Zeitpunkt gesetzt haben, an dem $ii)$ verletzt ist, hat in $m+1$ die Gleichung $\tilde{H}_{m+1}^{N+1} \tilde{V}_{m+1}^{U,\tau} = \tilde{H}_{m+1}^T \tilde{S}_{m+1}$ Gültigkeit und wir erhalten unter Berücksichtigung von $\tilde{H}_m^{N+1} = \tilde{H}_{m+1}^{N+1}$

$$\delta_{m+1}^\tau(\tilde{H}) = 1_A((\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} - \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) \underline{X}_m \tilde{V}_{m+1}^\tau) \geq 0$$

mit $P(\delta_{m+1}^\tau(\tilde{H}) > 0) > 0$. Demzufolge haben wir eine Arbitrage im erweiterten Modell.

Betrachten wir $P(\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} < \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m) > 0$ und setzen wiederum m als den maximalen Index, an dem $ii)$ verletzt ist. Wir konstruieren diesmal mit $B = \{\tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau} < \tilde{H}_m^T \tilde{S}_m\}$ eine Handelsstrategie durch

$$\tilde{H}_m = 1_B \left(\begin{array}{c} \tilde{H}_m^{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) + (\tilde{H}_m^T \tilde{S}_m - \tilde{H}_m^{N+1} \tilde{V}_m^{U,\tau}) \underline{X}_m - \left(\begin{array}{c} 0 \\ \tilde{H}_m \end{array} \right)$$

sowie mit $\tilde{H}_i = 0$ für alle $i \neq m$. Damit erhalten wir ebenfalls eine Arbitrage im erweiterten Modell. Demzufolge gilt bei Arbitragefreiheit im erweiterten Modell $\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau} = \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t$ für alle $t = 0, \dots, T-1$.

Setzen wir nun $\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau} = \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t$ voraus und nehmen eine Arbitrage im erwei-

terten Modell an mit

$$\underline{\tilde{H}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{H}_i^{N+1} \\ \hat{\tilde{H}}_i \end{pmatrix},$$

wobei $\hat{\tilde{H}}_i$ die Handelsstrategie im zugrunde liegenden Kapitalmarktmodell ist. Wir setzen wiederum $\tilde{H}_i^{N+1} = \tilde{H}_{i-1}^{N+1}$ und erzielen mit dieser Handelsstrategie im Zeitpunkt $t = i$ Entnahmen in Höhe von

$$\delta_i^\tau(\underline{\tilde{H}}) = \underline{\tilde{H}}_{i-1}^T \tilde{V}_i^\tau - \underline{\tilde{H}}_i^T \tilde{S}_i$$

mit $\tilde{V}_i^\tau = \tilde{S}_i + \underline{\tilde{D}}_i^\tau$ und erhalten

$$\delta_i^\tau(\underline{\tilde{H}}) = \hat{\tilde{H}}_{i-1}^T \tilde{V}_i^\tau + \tilde{H}_{i-1}^{N+1} \tilde{V}_i^{U,\tau} + \tilde{H}_{i-1}^{N+1} \widehat{CF}_i^\tau - (\hat{\tilde{H}}_i^T \tilde{S}_i + \tilde{H}_i^{N+1} \tilde{V}_i^{U,\tau}).$$

Aufgrund $\tilde{H}_{i-1}^{N+1} \tilde{V}_i^{U,\tau} = \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i$ und $\tilde{H}_{i-1}^{N+1} \widehat{CF}_i^\tau = \tilde{H}_{i-1}^T \tilde{V}_i^\tau - \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i$ folgt

$$\begin{aligned} \delta_i^\tau(\underline{\tilde{H}}) &= \hat{\tilde{H}}_{i-1}^T \tilde{V}_i^\tau + \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i + \tilde{H}_{i-1}^T \tilde{V}_i^\tau - \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i - (\hat{\tilde{H}}_i^T \tilde{S}_i + \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i) \\ &= (\hat{\tilde{H}}_{i-1} + \tilde{H}_{i-1})^T \tilde{V}_i^\tau - (\hat{\tilde{H}}_i + \tilde{H}_i)^T \tilde{S}_i. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass bei Vorliegen einer Arbitrage im erweiterten Modell auch das zugrunde liegende Kapitalmarktmodell mit dem Portfolio $(\hat{\tilde{H}} + \tilde{H})^T$ Arbitrage ermöglicht. Das zugrunde liegende Kapitalmarktmodell ist nach Voraussetzung jedoch arbitragefrei. ■

Satz 3.20 (Eindeutiges äquivalentes Martingalmaß). *In einem arbitragefreien und vollständigen Mehr-Perioden-Modell mit asymmetrischer Schedulensteuer ist das äquivalente Martingalmaß Q^τ eindeutig bestimmt.*

Beweis. In einem vollständigen Markt sind alle Realinvestitionen replizierbar, also existiert auch eine selbstfinanzierende Strategie \tilde{H} mit

$$\tilde{H} = 1_A, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Betrachten wir zwei äquivalente Martingalmaße $Q^{1,\tau}$ und $Q^{2,\tau}$ und mit der Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Erwartungswert folgt

$$Q^{1,\tau}(A) = E_{Q^{1,\tau}}(1_A) = E_{Q^{2,\tau}}(1_A) = Q^{2,\tau}(A)$$

für beliebig messbare Teilmengen $A \in \mathcal{F}_T$. Dann aber ist $Q^{1,\tau} = Q^{2,\tau}$. ■

Mit der Annahme exogen vorgegebener Buchwerte ist es uns auch im Mehr-Perioden-Modell möglich, den fairen Preis einer Realinvestition mit einer geschlossenen Formel zu berechnen. Die Kenntnis des replizierenden Portfolios ist

demzufolge nicht notwendig, um den objektiven Preis des Unternehmens zu bestimmen.

Satz 3.21 (Objektiver und eindeutiger Preis des Unternehmens). *In einem arbitragefreien und um eine Realinvestition erweiterten Modell mit asymmetrischer Schedulensteuer bestimmt sich der faire Preis des Unternehmens eindeutig durch*

$$d_k^\tau \tilde{H}_k^{N+1} \tilde{V}_k^{U,\tau} = E_{Q^\tau} \left(\sum_{i=k+1}^T d_i^\tau \tilde{H}_{i-1}^{N+1} \widetilde{CF}_i^\tau \mid \mathcal{F}_k \right), \quad (3.32)$$

sofern die steuerlichen Abschreibungen auf exogen vorgegebenen Buchwerten basieren.

Beweis. Nach Satz 3.19 ist $\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau} = \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t$. Bei Vorliegen eines weiteren Portfolios $\tilde{\tilde{H}}_t$ muss gelten

$$\tilde{\tilde{H}}_t^T \tilde{S}_t = \tilde{H}_t^T \tilde{S}_t,$$

da ansonsten eine Handelsarbitrage existiert. Ist z. B

$$P(\tilde{\tilde{H}}_i^T \tilde{S}_i > \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i) > 0$$

wird eine Handelsarbitrage definiert durch

$$1_A(\tilde{\tilde{H}}_t - \tilde{H}_t), \quad A = \{\tilde{\tilde{H}}_i^T \tilde{S}_i > \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i\}$$

für die Zeitpunkte $t = i, i+1, \dots, T$. Die Argumentation bei $P(\tilde{\tilde{H}}_i^T \tilde{S}_i < \tilde{H}_i^T \tilde{S}_i) > 0$ ist entsprechend. Damit ist gezeigt, dass $\tilde{H}_t^{N+1} \tilde{V}_t^{U,\tau}$ eindeutig bestimmt ist.

Mit dem gerade gefundenen Ergebnis und Satz 3.13 gilt

$$d_k^\tau \tilde{H}_k^{N+1} \tilde{V}_k^{U,\tau} = d_k^\tau \tilde{H}_k^T \tilde{S}_k = E_{Q^\tau} \left(\sum_{i=k+1}^T d_i^\tau \delta_i^\tau(\tilde{H}) \mid \mathcal{F}_k \right)$$

und mit $\delta_i^\tau(\tilde{H}) = \tilde{H}_{i-1}^{N+1} \widetilde{CF}_i^\tau$ erhalten wir 3.32. ■

Wenn wir zur Berechnung des fairen Preises des Unternehmens die Annahme treffen, dass die Beteiligung bis zum Zeitpunkt $t = T-1$ unverändert bleibt, spezialisiert sich 3.32 zu¹⁰¹

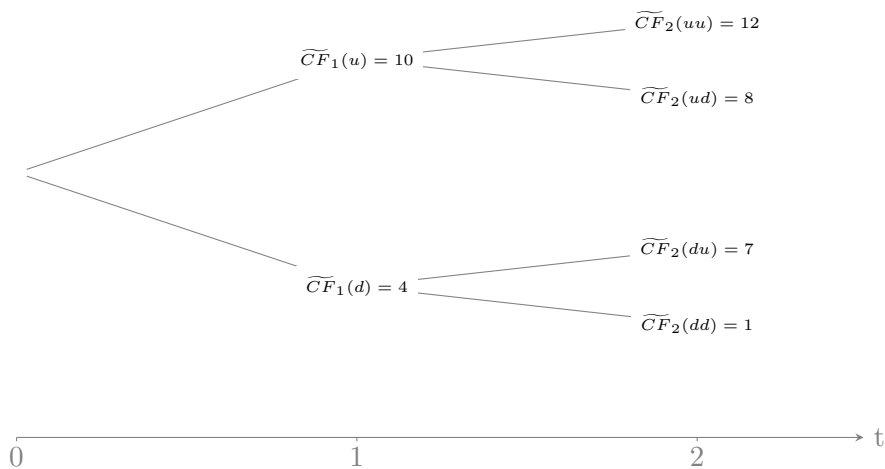
$$\tilde{H}_k^{N+1} d_k^\tau \tilde{V}_k^{U,\tau} = \tilde{H}_k^{N+1} E_{Q^\tau} \left(\sum_{i=k+1}^T d_i^\tau \widetilde{CF}_i^\tau \mid \mathcal{F}_k \right). \quad (3.33)$$

101. In diesem Fall gilt $H_k^{N+1} = H_{k+1}^{N+1} = \dots = H_{T-1}^{N+1}$ und wir können H_k^{N+1} vor den Erwartungswert ziehen. Sollte eine Änderung an der Höhe der Beteiligung vorgenommen werden, so ist das Anlass zu einer neuerlichen Bewertung.

Wir veranschaulichen im folgenden Beispiel die Bewertung eines fiktiven Unternehmens bei asymmetrischer Besteuerung von Gewinnen und Verlusten.

Beispiel 11: Wir legen in diesem Beispiel weiterhin den Kapitalmarkt aus Beispiel 10 zugrunde und erweitern das Modell um ein zu bewertendes Unternehmen. Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir voraus, dass sich das Unternehmen die ganze Zeit vollständig in unserem Besitz befindet und setzen $\tilde{H}_t^{N+1} = 1$ für $t = 0,1$ sowie $H_2^{N+1} = 0$. Das Unternehmen verspricht Auszahlungen vor Steuern entsprechend Abbildung 3.4.

Abbildung 3.4: Cashflow des Unternehmens vor asymmetrischer Besteuerung



Auf Basis der Cashflows vor Steuern und unter Berücksichtigung der äquivalenten risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaße

$$q_{u,uu} = 0,1425; \quad q_{u,ud} = 0,1575; \quad q_{d,du} = 0,42; \quad q_{d,dd} = 0,28$$

berechnet sich der faire Preis des Unternehmens im Modell ohne Steuern im Zeitpunkt $t = 0$ zu

$$\begin{aligned} V_0^U &= \sum_t d_t E_Q[\widetilde{CF}_t \mid \mathcal{F}_0] \\ &= \frac{0,3 \cdot 10 + 0,7 \cdot 4}{1,1} + \\ &+ \frac{0,1425 \cdot 12 + 0,1575 \cdot 8 + 0,42 \cdot 7 + 0,28 \cdot 1}{1,21} \\ &= 5,27 + 5,12 \\ &= 10,39. \end{aligned}$$

Im Zeitpunkt $t = 1$ erhalten wir Preise in Höhe von

$$\tilde{V}_1^U(u) = \frac{0,475 \cdot 12 + 0,525 \cdot 8}{1,1} = 9$$

und

$$\tilde{V}_1^U(d) = \frac{0,6 \cdot 7 + 0,4 \cdot 1}{1,1} = 4,18.$$

Bestimmen wir jetzt den Unternehmenswert $V_0^{U,\tau}$ unter asymmetrischer Besteuerung und nehmen dazu an, dass dem Unternehmen in den Zeitpunkten $t = 0,1,2$ die Buchwerte

$$B_0 = 7; \quad \tilde{B}_1(u) = 8; \quad \tilde{B}_1(d) = 5; \quad \tilde{B}_2 = 0$$

beigelegt werden. Der anzuwendende Steuersatz im Zeitpunkt $t = 1$ ergibt sich durch

$$\widetilde{CF}_1(u) - \widetilde{AfA}_1(u) = 10 + 8 - 7 = 11 > 0 \rightarrow \tau^G$$

sowie

$$\widetilde{CF}_1(d) - \widetilde{AfA}_1(d) = 4 + 5 - 7 = 2 > 0 \rightarrow \tau^G$$

und die Cashflows nach Steuern sind

$$\widetilde{CF}_1^\tau(u) = \widetilde{CF}_1(u) - \tau^G(\widetilde{CF}_1(u) - \widetilde{AfA}_1(u)) = 10 - 0,5 \cdot 11 = 4,5$$

und

$$\widetilde{CF}_1^\tau(d) = \widetilde{CF}_1(d) - \tau^G(\widetilde{CF}_1(d) - \widetilde{AfA}_1(d)) = 4 - 0,5 \cdot 2 = 3.$$

Wir haben in den Ereignissen in $t = 2$ die folgenden Steuersätze anzuwenden

$$\widetilde{CF}_2(uu) - \widetilde{AfA}_2(uu) = 12 - (8 - 0) = 4 \rightarrow \tau^G,$$

$$\widetilde{CF}_2(ud) - \widetilde{AfA}_2(ud) = 8 - (8 - 0) = 0 \rightarrow \tau^G,$$

$$\widetilde{CF}_2(du) - \widetilde{AfA}_2(du) = 7 - (5 - 0) = 2 \rightarrow \tau^G,$$

$$\widetilde{CF}_2(dd) - \widetilde{AfA}_2(dd) = 1 - (5 - 0) = -4 \rightarrow \tau^V.$$

Das Unternehmen erzielt in $t = 2$ Cashflows nach Steuern \widetilde{CF}_t^τ in Höhe von

$$\widetilde{CF}_2^\tau(uu) = \widetilde{CF}_2(uu) - \tau^G(\widetilde{CF}_2(uu) - \widetilde{AfA}_2(uu)) = 12 - 0,5 \cdot 4 = 10,$$

$$\widetilde{CF}_2^\tau(ud) = \widetilde{CF}_2(ud) - \tau^G(\widetilde{CF}_2(ud) - \widetilde{AfA}_2(ud)) = 8 - 0,5 \cdot 0 = 8,$$

$$\widetilde{CF}_2^\tau(du) = \widetilde{CF}_2(du) - \tau^G(\widetilde{CF}_2(du) - \widetilde{AfA}_2(du)) = 7 - 0,5 \cdot 2 = 6,$$

$$\widetilde{CF}_2^\tau(dd) = \widetilde{CF}_2(dd) - \tau^V(\widetilde{CF}_2(dd) - \widetilde{AfA}_2(dd)) = 1 - 0,2 \cdot (-4) = 1,8.$$

Wir sind schlussendlich in der Lage das Unternehmen im Zeitpunkt $t = 0$ mit dem

fairen Preis in Höhe von

$$\begin{aligned}
 V_0^{U,\tau} &= \sum_t d_t^r E_{Q^\tau}[\widetilde{CF}_t^\tau | \mathcal{F}_0] \\
 &= \frac{0,375 \cdot 4,5 + 0,625 \cdot 3}{1,05} + \\
 &+ \frac{0,2038 \cdot 10 + 0,1712 \cdot 8 + 0,43269 \cdot 6 + 0,19231 \cdot 1,8}{1,1025} \\
 &= 3,39 + 5,76 \\
 &= 9,15
 \end{aligned}$$

zu bewerten. Im Zeitpunkt $t = 1$ erhalten wir als faire Preise des Unternehmens

$$\widetilde{V}_1^{U,\tau}(u) = \frac{0,54347 \cdot 10 + 0,45653 \cdot 8}{1,05} = 8,65$$

sowie

$$\widetilde{V}_1^{U,\tau}(d) = \frac{0,69231 \cdot 6 + 0,30769 \cdot 1,8}{1,05} = 4,48.$$

Tätigen wir einen Leerverkauf in das verbrieftete Unternehmen, also $\widetilde{H}_t^{N+1} = -1$ für $t = 0,1$ sowie $H_2^{N+1} = 0$, so erhalten wir in $t = 0$ eine faire Zahlung in Höhe von

$$V_0^{U,\tau} = -9,15,$$

wie sich leicht nachrechnen lässt.¹⁰²

■

Anmerkung: Falls im Zeitpunkt T eine steuerliche Berücksichtigung des Kaufpreises $V_t^{U,\tau}$ anfällt, ist diese analog zu Satz 2.20 in die Bewertungsformel zu integrieren. Eine daraus resultierende Steuerzahlung wird mit d_{T-t}^r diskontiert.

102.

$$\begin{aligned}
 V_0^{U,\tau} &= \sum_t d_t^r E_{Q^\tau}[\widetilde{CF}_t^\tau | \mathcal{F}_0] \\
 &= \frac{0,375 \cdot (-4,5) + 0,625 \cdot (-3)}{1,05} + \\
 &+ \frac{0,2038 \cdot (-10) + 0,1712 \cdot (-8) + 0,43269 \cdot (-6) + 0,19231 \cdot (-1,8)}{1,1025} \\
 &= -3,39 - 5,76 \\
 &= -9,15
 \end{aligned}$$

4 RESÜMEE

Ist es Ziel, im Rahmen der Arbitrage­theorie und unter Berücksichtigung asymmetrischer Steuern einen fairen Unternehmenswert zu ermitteln, muss dem darunter liegenden Kapitalmarkt unbedingt Beachtung geschenkt werden. Wir konnten aufzeigen, dass die Anwendung der üblichen finanztheoretischen Modelle in einer Sackgasse endet, sobald eine Asymmetrie in der Gewinn- und Verlustbesteuerung unterstellt wird. Der Kapitalmarkt ist in diesem Fall nicht mehr frei von Arbitrage. Auf Basis eines arbitragehaltigen Kapitalmarktes sind Bewertungen, die als Ziel die Ermittlung eines objektiven Unternehmenswertes haben, schlichtweg nicht mehr möglich.

Ein möglicher Ansatz, dieses Problem bei asymmetrischen Gewinnsteuern zu umgehen, ist die Anwendung der von uns entwickelten Schedulessteuer. Bei unserem Steuerregime wird jeder Basistitel des Kapitalmarkts in einer eigenen Schedule der Besteuerung unterzogen. Ein Portfolio bestehend aus mehreren Basistiteln wird komponentenweise besteuert und die gesamte Steuerschuld des Portfolios errechnet sich als Summe der einzelnen Steuerschulden dieser Basistitel. Die zweite Besonderheit unserer Steuer ist die Steuersatzermittlung. Bei unserem Ansatz bleibt die Menge an gehaltenen Titeln bei der steuerlichen Gewinn- bzw. Verlustdefinition unberücksichtigt. Hat sich der Preis eines Basistitels zwischen zwei Zeitpunkten negativ entwickelt, kommt der Verluststeuersatz zur Anwendung, ansonsten der Gewinnsteuersatz. Den eindeutigen und fairen Unternehmenswert erhalten wir durch eine Preisgleichung, die basierend auf einem risikolosen Wahrscheinlichkeitsmaß ohne Rückgriff auf subjektive Präferenzen der Investoren auskommt.

Unser Modell lässt sich in vielerlei Hinsicht verbessern. Insbesondere die Tatsache, dass in der steuerrelevanten Gewinndefinition die Menge an gehaltenen Titeln unberücksichtigt bleibt, stellt aus unserer Sicht eine, wenn nicht sogar die wesentliche Einschränkung des Modells dar. Auch ist bei der verwendeten Anzahl an Steuer­schedules - eine je Kapitalmarkt­titel und Realinvestition - zu beachten, dass ein vergleichbarer Ansatz in realen Steuersystemen bislang nicht vorzufinden ist. Sollte es gelingen, das Modell hinsichtlich dieser beiden Punkte zu optimieren, wäre ein großer Schritt in Richtung eines realitätsnäheren Modells vollzogen. Darüber hinaus würden die Implementierung eines eigenen Steuersatzes je Schedule, die Berücksichtigung unsicheren Fremdkapitals oder auch die Berücksichtigung unsicherer Steuersätze das Modell wesentlich verbessern. Ebenso ist die Annahme eines Bruttozinses $r_f > 0$, insbesondere mit Blick auf die Zinspolitik der Europäischen Zentralbank in den nachfolgenden Jahren seit Beginn der sogenannten Finanzkrise in 2007, kritisch zu

hinterfragen. Jedoch gilt es zu bedenken, dass bei allen Modellanpassungen die Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts gewährleistet bleiben muss. Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Frage, ob die Aussagen des Modells ihre Gültigkeit behalten, wenn anstelle der stückweise linearen Steuerfunktion eine nichtlineare Steuerfunktion verwendet wird.

Zu diesem Zeitpunkt steht die Berücksichtigung asymmetrischer Steuern in der Arbitrage­theorie erst in den Anfängen und es bedarf noch vieler Arbeit, um reale Steuersysteme besser beschreiben zu können. Daher ist als offen anzusehen, ob nicht etwa alternative Ansätze der Besteuerung, die ohne Steuerschedulen auskommen, bessere Ergebnisse bei der Beschreibung einer asymmetrischen Besteuerung von Gewinnen und Verlusten liefern. Eventuell führt bereits die Betrachtung der Steuerwirkung auf die Preise im Zeitpunkt $t = 0$ auf ein arbitragefreies Modell, das ohne den Rückgriff auf Steuerschedulen auskommt.

LITERATURVERZEICHNIS

- Bamberg, G. & Krapp, M. (2003). Starke und schwache Arbitragefreiheit von Finanzmärkten mit Geld-Brief-Spannen, *Lecture Notes in Informatics* **33**: 261–276.
- Basak, S. & Croitoru, B. (2001). Non-linear taxation, tax-arbitrage and equilibrium asset prices, *Journal of Mathematical Economics* **35**: 347–382.
- Bauer, H. (1978). *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, de Gruyter Berlin.
- Becker, M. (2012). Fundamental Theorem of Asset Pricing with Taxes, *Working Paper*. <http://ssrn.com/abstract=2030759>, Download (06.03.2013).
- Becker, M. (2014). Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß mit und ohne Steuern, *Working Paper*. <http://ssrn.com/abstract=2384502>, Download (12.05.2014).
- Becker, M. & Löffler, A. (2016). Arbitrage and Non-linear Taxes. http://www.en.iuc.bwl.uni-muenchen.de/arw_engl/no_arbitrage_with_taxation.pdf, Download (02.01.2017).
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G. & Mühlig, H. (1999). *Taschenbuch der Mathematik*, 4. edn, Verlag Harri Deutsch.
- Brümmerhoff, D. (2007). *Finanzwissenschaft*, 9. edn, Oldenbourg Verlag.
- Constantinides, G. M. (1983). Capital market equilibrium with personal taxes, *Econometrica* **51**: 611–636.
- Cox, J. & Rubinstein, M. (1985). *Option Markets*, Englewood Cliffs.
- Dammon, R. M. & Green, R. C. (1987). Tax Arbitrage and the Existence of Equilibrium Prices for Financial Assets, *Journal of Finance* **XLII**, No. 5: 1143–1166.
- Diedrich, R., Dierkes, S. & Gröger, H.-C. (2010). Präferenzabhängige Werte im Rahmen einer kapitalmarktorientierten Unternehmensbewertung – eine kritische Analyse, *Arbeitspapier des Instituts für Unternehmensrechnung, Finanzierung und Besteuerung der Universität Leipzig*.

- Drukarczyk, J. & Lobe, S. (2002). Unternehmensbewertung und Halbeinkünfteverfahren – Probleme individueller und marktorientierter Bewertung steuerlicher Vorteile, *Betriebsberater: Betriebswirtschaft special, Beilage 6* **57**: 2–9.
- Duffie, D. (1988). *Security Markets: Stochastic Models (Economic Theory, Econometrics and Mathematical Economics)*, Boston: Academic Press.
- Duffie, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3. edn, Princeton University Press.
- Dybvig, P. H. & Ross, S. A. (1986). Tax Clienteles and Asset Pricing, *The Journal of Finance* **XLI**, No. 3: 751–763.
- Eichelsberger, P. (2012). *Einführung in die Stochastik*, Vorlesungsskript der Fernuniversität in Hagen, Fakultät für Mathematik und Informatik, SS 13.
- Elliot, R. & van der Hoek, J. (2006). *Binomial Models in Finance*, Springer Finance Textbook.
- Ewert, R. & Niemann, R. (2010). Haftungsbeschränkungen, asymmetrische Besteuerung und die Bereitschaft zur Risikoübernahme: Weshalb eine rechtsformneutrale Besteuerung allokativ schädlich ist, *Arqus Diskussionsbeiträge*. Nr. 103, http://www.arqus.info/mobile/paper/arqus_103.pdf, Download (16.08.2013).
- Fisher, I. (1930). *The Theory of Interest*, New York: The Macmillan Co. <http://www.econlib.org/library/YPDBooks/Fisher/fshToIO.html>, Download von der Library of Economics and Liberty (28.08.2014).
- Gallmeyer, A. & Srivastava, S. (2011). Arbitrage and the tax code, *Mathematics and Financial Economics* **4(3)**: 183–221.
- Harrison, J. M. & Kreps, D. M. (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory* **20**: 381–408.
- Homburg, S. (2010). *Allgemeine Steuerlehre*, 6. edn, München, Vahlen.
- Hundsdoerfer, J., Kiesewetter, D. & Sureth, C. (2008). Forschungsergebnisse in der Betriebswirtschaftlichen Steuerlehre: Eine Bestandsaufnahme, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **78**: 61–139.
- Irle, A. (2003). *Finanzmathematik Die Bewertung von Derivaten*, 2. edn, B. G. Teubner Stuttgart Leipzig Wiesbaden.
- Irle, A. & Prelle, C. (2007). *Übungsbuch Finanzmathematik Leitfaden, Aufgaben und Lösungen zur Derivatebewertung*, B. G. Teubner Stuttgart Leipzig Wiesbaden.

- Jensen, B. A. (2002). On Valuation before and after tax in no arbitrage models, *Working Paper Series, Copenhagen Business School*. http://swopec.hhs.se/cbsfin/abs/cbsfin2002_001.htm, Download (01.12.2010).
- Jensen, B. A. (2009). Valuation before and after tax in the discrete time, finite state no arbitrage model, *Annals of Finance* **5(1)**: 91–123.
- Jungnickel, D. (1999). *Optimierungsmethoden: Eine Einführung*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Kabanov, Y. M. & Kramkov, D. (1995). No-Arbitrage and Equivalent Martingale Measures: An Elementary Proof of the Harrison-Pliska Theorem, *Theory of Probability and its Applications* **39(3)**: 523–527.
- Klenke, A. (2011). *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2. edn, Springer: Berlin Heidelberg.
- Kremer, J. (2005). *Einführung in die Diskrete Finanzmathematik*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Kreps, D. M. (1982). Multiperiod Securities and the Efficient Allocation of Risk: A Comment on the Black-Scholes Option, *The Economics of Information and Uncertainty*, John McCall, UMI.
- Kruschwitz, L. (2002). *Finanzierung und Investition*, 3. edn, Oldenbourg Verlag München Wien.
- Kruschwitz, L. (2003). *Investitionsrechnung*, 9. edn, Oldenbourg Verlag München Wien.
- Kruschwitz, L., Husmann, S. & Schneider, D. (2002). Investitionsneutrale Steuersysteme vor dem Hintergrund der Kontroverse um Einkommen oder Konsum als geeignete Steuerbemessungsgrundlage, *Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Freien Universität Berlin*. Nr. 2002/16.
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2004). Bemerkungen über Kapitalkosten vor und nach Steuern, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **74**: 1175–1190.
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2005a). Kapitalkosten, Wertprozesse und Steuern, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **75**: 1013–1019.
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2005b). Unternehmensbewertung und Einkommensteuer aus der Sicht von Theoretikern und Praktikern, *Die Wirtschaftsprüfung* **58**: 73–79.
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2006). *Discounted Cash Flow – A theory of the Valuation of Firms*, John Wiley & Sons.

- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2009). Do Taxes Matter in the CAPM? (zugleich ein Beitrag zur Festschrift für Franz W. Wagner zum 65. Geburtstag), *Arqus Diskussionsbeiträge*. Nr. 73, http://www.arqus.info/mobile/paper/arqus_73.pdf, Download (12.09.2010).
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2015). Marginal Tax Rates under Asymmetric Taxation, *Arqus Diskussionsbeiträge*. Nr. 191, http://www.arqus.info/mobile/paper/arqus_191.pdf, Download (22.08.2015).
- Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2016). *Die Brownsche Bewegung – Eine gründliche Einführung für Ökonomen*, Books on Demand, Norderstedt.
- Kruschwitz, L., Löffler, A. & von Lehna, W. (2010). Was tun?, *Arqus Diskussionsbeiträge*. Nr. 107, http://www.arqus.info/mobile/paper/arqus_107.pdf, Download (12.09.2010).
- Löffler, A. (2001). Die Besteuerung von Kursgewinnen und Dividenden in der Unternehmensbewertung, *Finanz Betrieb* **11**: 593–594.
- Löffler, A. (2003). Das Standardmodell unter Unsicherheit ist ökonomisch unsinnig, *Diskussionspapiere der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Hannover*. Nr. 274, <http://www.wiwi.uni-hannover.de/fbwiwi/forschung/diskussionspapiere/dp-274.pdf>, Download (12.12.2010).
- Löffler, A. & Schneider, D. (2003). Martingales, Taxes and Neutrality, *Diskussionspapiere der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Hannover*. Nr. 269, <http://www.wiwi.uni-hannover.de/fbwiwi/forschung/diskussionspapiere/dp-269.pdf>, Download (12.12.2010).
- Meintrup, D. & Schäffler, S. (2005). *Stochastik, Theorie und Anwendungen*, Springer Berlin-Heidelberg.
- Miles, J. A. & Ezzell, J. R. (1980). The weighted average cost of capital, perfect capital markets, and project life: a clarification, *Journal of Finance and Quantitative Analysis* **15**: 719–730.
- Miskus, R. & Sandkühler, T. (2009). Zur Abgeltungssteuer bei Leerverkäufen, *Der Betrieb* **25**: 1320–1324.
- Modigliani, F. & Miller, M. (1958). The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment, *American Economic Review* **48**: 261–297.
- Modigliani, F. & Miller, M. (1963). Corporate income taxes and the cost of capital: a correction, *American Economic Review* **53**: 433–443.
- Myers, S. C. (1974). Interactions of corporate financing and investment decisions: implication for capital budgeting, *The Journal of Finance* **32**: 211–220.

- Niemann, R. (2010). Zum Einfluss asymmetrischer Besteuerung auf die Vorteilhaftigkeit erfolgsabhängiger Entlohnungsverträge, *Arqus Diskussionsbeiträge*. Nr. 110, http://www.arqus.info/mobile/paper/arqus_110.pdf, Download (27.03.2011).
- Pliska, S. R. (1997). *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publishing.
- Raab, M. (1993). *Steuerarbitrage, Kapitalmarktgleichgewicht und Unternehmensfinanzierung*, Physica-Verlag.
- Raaballe, J. (1995). On Black, Blue and Orange bonds. A Tax Arbitrage Model with Asymmetric Taxation, *Kredit und Kapital* **28**. Jg.: 270–297.
- Rapp, M. & Schwetzler, B. (2008). Equilibrium Security Prices with Capital Income Taxes and an Exogenous Interest Rate, *Finanzarchiv* **64**: 334–351.
- Ross, S. A. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory* **13(3)**: 341–360.
- Ross, S. A. (1987). Arbitrage and Martingales with Taxation, *The Journal of Political Economy* **95**, No. 2: 371–393.
- Schaefer, S. M. (1982). Taxes and Security Market Equilibrium, *Sharpe, W.F. and Cootner, C.M. Financial Economics. Essays in Honor of Paul Cootner*, Prentice Hall, Englewood Cliff, pp. 159–178.
- Scheffler, W. (2009). *Besteuerung von Unternehmen: Ertrag-, Substanz- und Verkehrssteuern*, 11. edn, Heidelberg; München; Landsberg; Frechen; Hamburg; Müller.
- Schindler, D. (2002). Besteuerung des Nichts - Steuerarbitrage und das schwindende Aufkommen bei Kapitaleinkommensteuer, *CoFE Working Paper 17*. University of Konstanz.
- Schosser, J. & Wilhelm, J. (2007). A note on arbitrage-free asset prices with and without personal income taxes, *Review of Managerial Science* **1**: 133–149.
- Schreiber, U. (2012). *Besteuerung der Unternehmen: Eine Einführung in Steuerrecht und Steuerwirkung*, 3. edn, Gabler Verlag Springer Fachmedien.
- Unger, L. (2012). *Mathematische Grundlagen*, Vorlesungsskript der Fernuniversität in Hagen, Fakultät für Mathematik und Informatik, WS 12/13.
- Varian, H. R. (1999). *Grundzüge der Mikroökonomie*, 4. edn, Oldenbourg Verlag.
- Wagner, F. W. (1984). Grundfragen und Entwicklungstendenzen der betriebswirtschaftlichen Steuerplanung, *Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis* **36**, 3: 201–222.

- Wagner, F. W. (1999). Besteuerung, *Vahlen's Kompendium der Betriebswirtschaftslehre*, Vol. 2, Verlag Vahlen München.
- Wallmeier, M. (1999). Kapitalkosten und Finanzierungsprämissen, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **69**: 1473–1490.
- Weber, N. M. (2005). *Der Einfluss von Transaktionskosten und Steuern auf die Preisbildung bei DAX-Futures*, Norderstedt: Books on Demand.
- Werner, D. (2011). *Funktionalanalysis*, 7. edn, Springer: Heidelberg Dordrecht London New York.
- Wilhelm, J. (1983). Marktwertmaximierung - Ein didaktisch einfacher Zugang zu einem Grundlagenproblem der Investitions- und Finanzierungstheorie, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **1**: 133–149.
- Williams, R. J. (2006). *Introduction to the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society.

A ANHANG

A.1 ABSTRACT

We show that an asymmetric taxation of gains and losses based on a classical financial market model violates the fundamental arbitrage postulate. In terms of an underlying capital market with arbitrage it is unfeasible to find an objective and unique value of a firm.

To avoid these problems we develop in a finite and discrete time and state model a simple tax function which leads us to an arbitrage free capital market. Based on this approach we are able to find a fair value of a firm under asymmetrical taxation of gains and losses.

A.2 ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit befasst sich mit der Berücksichtigung von asymmetrischen Steuern in arbitragefreien Finanzmarktmodellen, die zum Ziel haben, einen objektiven Preis für ein Unternehmen zu ermitteln. Dazu zeigen wir ausführlich, dass eine asymmetrische Besteuerung von Gewinnen und Verlusten basierend auf den klassischen finanztheoretischen Modellen zu einem arbitragehaltigen Kapitalmarkt führt. Mit diesem Ergebnis ist jegliche Bewertung im Rahmen der objektiven Bewertungslehre hinfällig.

Um die aufgezeigten Schwierigkeiten zu umgehen, entwickeln wir im Rahmen eines endlich-dimensionalen sowie zeit- und zustandsdiskreten Modells eine einfache Steuerfunktion, die mit dem Arbitragefreiheitspostulat einhergeht. Auf Basis eines arbitragefreien Kapitalmarktmodells gelingt uns schlussendlich die Bewertung eines Unternehmens mit einem fairen und eindeutigen Preis.

A.3 LEBENSLAUF

Der Lebenslauf ist in der Online-Version aus Gründen des Datenschutzes nicht enthalten.

A.4 EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit versichere ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt zu haben. Bei der Verfassung der Dissertation wurden keine anderen als die im Text aufgeführten Hilfsmittel verwendet.

Des Weiteren erkläre ich, dass ich mich noch keinem Promotionsverfahren unterzogen oder um Zulassung zu einem solchen beworben habe und die Dissertation in der gleichen oder einer anderen Fassung bzw. Überarbeitung einer anderen Fakultät, einem Prüfungsausschuss oder einem Fachvertreter an einer anderen Hochschule nicht bereits zur Überprüfung vorgelegen hat.

Berlin, den 26. Januar 2017

Dirk Guntermann