Masterarbeit

im Masterstudiengang für das Lehramt an Integrierten Sekundarschulen und Gymnasien an der Freien Universität Berlin

Mein Mathe-Skript 2.0 –

Exemplarische Überarbeitung eines Vorlesungsskripts unter hochschulmathematikdidaktischen Gesichtspunkten

1. Prüfer: Dr. Benedikt Weygandt

2. Prüferin: Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal

vorgelegt von:

Vorname, Nachname: Alexandra Rezmer

Abgabedatum: 19.10.2021

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

iMPACt .... *Mathe Plus Aachen*
MMS 2.0 .... *Mein Mathe-Skript 2.0*
MPB .... *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*

1. Einleitung

Die Bewältigung des Übergangs von der Schule in die Hochschule ist für alle Studienanfänger/-innen mit Herausforderungen verbunden (Roth et al., 2015, S. Vff.). Inäquale Lehrstile, Einstellungen und Denkmuster, eine differierende Organisation an beiden Bildungseinrichtungen, sowie verschiedene Ansprüche an eine selbstständige Arbeitshaltung, wie beispielsweise der Einsatz von Lernstrategien, demonstrieren nur einige dieser Übergangsschwierigkeiten (Blömeke, 2016, S. 3). In den vergangenen Jahren bildet vor allem die Transitionsphase von der Schule zur Hochschule den Schwerpunkt mathematikdidaktischer Forschung (Moser-Fendel & Wessel, 2019, S. 8). Die Grundlage dafür stellen überdurchschnittlich hohe und frühe Studienfachwechsel-[1] bzw. Abbruchquoten[2] von Mathematikstudierenden in der Studieneingangsphase dar. Als Hauptursachen für diese Problematik werden unter anderem der andersartige Charakter der Hochschul- und Schulmathematik (Gueduet, 2008, S. 245) sowie Differenzen in den Lerngelegenheiten und deren Nutzung vermutet (Gueduet, 2008, S. 249f.). Die speziellen Erfordernisse bei dem Übertritt von der Schule an die Hochschule im Fach Mathematik wurden in den vergangenen Jahren z.B. von Rach et al. erforscht, welche auch insbesondere zwei Umbrüche verorten. Den ersten stelle ebenfalls die „Charakterverschiebung des Lerngegenstandes Mathematik“ (Rach et al., 2014, S. 207f.) dar. Während mit der Schulmathematik oftmals das Anwenden von Mathematik in der Lebenswelt der Schüler/-innen und Berechnungen nach vorgegebenen

[1] Nach Dieter (2012, S. 59ff.) betragen die Abbruchquoten deutschlandweit im Studienfach Mathematik (Diplomstudium) im Durchschnitt 82,6% bei weiblichen und 78,7% bei männlichen Studierenden, was einen höheren Anteil darstellt als in allen anderen Studienbereichen.

[2] Nach Dieter (2012, S. 60f.) betragen die Studienfachwechselquoten im Zeitraum seit dem Wintersemester 2000/01 bis 2007/08 im Studienfach Mathematik (Bachelor) nach zwei Fachsemestern im Durchschnitt 35,3% und im Studienfach Mathematik (Diplom) im Durchschnitt 45,3 % bei weiblichen und 33,9 % bei männlichen Studierenden, was einen größeren Anteil als in allen anderen Studienbereichen darstellt. Mit Studienfachwechselquote wird hier der Anteil der Studienanfänger/-innen beschrieben, der nach einer bestimmten Semesteranzahl das begonnene Studium nicht weiter fortgesetzt hat.

Algorithmen assoziiert werden (Thomas & Klymchuk, 2012, S. 286), wird die Mathematik der Hochschullehre aus einer wissenschaftlichen Perspektive betrachtet (Rach & Heinze, 2013, S. 125). Diese zeichne sich im Gegensatz zu der Schulmathematik durch einen axiomatisch-deduktiven Theorieaufbau mittels formal aufgeführter Definitionen, Sätze und Beweise aus (Halverscheid & Müller, 2013, S. 118). Den zweiten Umbruch bei dem Übergang von der Schule in die Hochschule bilde die „Veränderung des Lehrangebots und des damit zusammenhängenden erforderlichen Nutzungsverhaltens“ (Rach et al., 2014, S. 208). Dabei ist vor allem die Relevanz des Selbststudiums in vielen Studiengängen hervorzuheben (Rach, 2014, S. 142), welche im Gegensatz zur Schule mehr Eigenverantwortung der Studierenden erfordert. Solche und weitere Diskrepanzen resultieren unter anderem in geringerem Selbstbewusstsein und kognitiven Hindernissen bei Studierenden in der Eingangsphase (Grieser, 2016, S. 664). Unzufriedenheiten nicht nur auf Seiten der Studierenden, sondern auch der Hochschullehrenden, sind die Folge (Langemann, 2015, S. 70). Insbesondere Lehramtsstudierende der Mathematik lassen Enttäuschungen und Frust erkennen, da sie zusätzlich eine mangelhafte Vorbereitung auf den Lehrendenberuf kritisieren (Beutelspacher et al., 2011, S. 5f.), welcher weniger mit dem mathematischen Hochschulstudium in Verbindung gebracht wird (Grieser, 2015, S. 90). Sie erleben somit nicht nur eine Diskrepanz bei dem Übergang von der Schule in die Hochschule, sondern darüber hinaus eine zweite bei dem Eintritt in das Berufsleben (Hefendehl-Hebeker, 2013, S. 1f.).[3]

Vor diesem Hintergrund wurden bereits verschiedene mathematikdidaktische Unterstützungsmaßnahmen entwickelt, welche darauf ausgerichtet sind, Studierende der Mathematik bei den erlebten Diskontinuitäten zu entlasten. Ein Überblick dazu findet sich unter anderem bei

[3] Die Problematik des Übergangs von der Schule in das Mathematikstudium und nach dem Studienabschluss zurück an die Schule, wurde bereits 1908 von Klein als „doppelte Diskontinuität“ (Klein, 1908, S. 2) thematisiert, ist jedoch immer noch aktuell, was deren hohen Stellenwert besonders deutlich macht.

Ableitinger et al. (2013) und Roth et al. (2015). In dieser Arbeit interessieren vor allem Ansätze, die die erste Diskontinuität, also den Einstieg in das Studium und somit den Übergang von der Schulmathematik in die universitäre Mathematik, thematisieren. Mit „Übergang“ wird in den Untersuchungen von Gueduet (2008, S. 238) die Zeitspanne der zwei Jahre vor der Aufnahme des Hochschulstudiums und der zwei Jahre nach eben diesem Zeitpunkt benannt. Somit setzen mögliche Fördermaßnahmen bereits in der gymnasialen Oberstufe im Sinne von vertiefenden Wahlfächern oder Arbeitsgemeinschaften an, um Schüler/-innen auf ein mögliches Hochschulstudium vorzubereiten, wie z.B. das iMPACt-Projekt (Heitzer, 2015). Auch in der Zeit zwischen dem Gymnasialabschluss und dem Beginn des Studiums gibt es zahlreiche Maßnahmen, die den Einstieg in das Studium erleichtern sollen, wie etwa verschiedene mathematische Vor- und Brückenkurse.[4] Daneben spielen auch semesterbegleitende Angebote eine große Rolle. Zu Letzterem gehören beispielsweise die Einrichtung von Lernzentren für Studierende der Mathematik, Tutor/-innenschulungen und diagnostische Tests (Biehler, 2018, S. 13). Weiterhin findet an vielen Universitäten bereits eine explizite Umgestaltung von Lehrveranstaltungen statt, welche den Fokus stärker auf methodische Aspekte der Mathematik legen als traditionelle Veranstaltungen, wie z.B. das Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ (Grieser, 2016). „Weniger verbreitet sind Konzepte, wie man Anfängervorlesungen in Mathematik wie Analysis und Lineare Algebra im Hinblick auf eine Transitionsdidaktik umgestalten könnte“ (Biehler, 2018, S. 13). Einen entsprechenden, oft hervorgehobenen Ansatz bilden die so genannten „Schnittstellenaufgaben“ (Bauer, 2013a; 2013b), welche sich leicht in eine Lehrveranstaltung einbauen lassen (Biehler, 2018, S. 13).

Während der Fokus vieler Förderangebote explizit auf die Umgestaltung des Präsenzlernens gelegt wurde, indem beispielsweise neue Veranstaltungstypen erprobt wurden, soll sich diese Arbeit mit der Anregung eines gehaltvollen Selbststudiums befassen, um dadurch eine Möglichkeit der

[4] Ein umfangreicher Überblick zu Vor- und Brückenkursen als Fördermaßnahme findet sich bei Bausch et al. (2014).

Verbindung des Selbst- und Präsenzstudiums zu erreichen. In diesem Zusammenhang soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, eine lernförderliche Umgestaltung bereits existierender Lehrveranstaltungen zu erreichen, die ebenfalls leicht in bestehende Veranstaltungen integrierbar wäre. Dabei soll das Medium im Vordergrund stehen, welches nicht nur in Präsenz-, sondern auch im Selbststudium genutzt werden kann, jedoch erfahrungsgemäß bei vielen Studierenden und der Hochschulmathematikdidaktik größtenteils außer Acht gelassen wird: Das Vorlesungsskript.[5] Unter dem Titel „Mein Mathe-Skript 2.0 – Exemplarische Überarbeitung eines Vorlesungsskripts unter hochschulmathematikdidaktischen Gesichtspunkten", wird in dieser Arbeit somit die Idee des „Mein Mathe-Skripts 2.0"[6] vorgestellt – ein Skript, welches nicht ausschließlich darauf ausgerichtet ist, die formal aufgebaute Mathematiktheorie widerzuspiegeln, die bereits in der Vorlesung thematisiert wird. Mithilfe dieses Skripts soll ein lernenendenzentrierter Ort geschaffen werden, der den individuellen Lernweg dokumentieren lässt und eine aktive Auseinandersetzung mit der Mathematik wie sie an der Hochschule gelehrt wird, ermöglicht.

Um die Motivation eines solchen Skripts und dessen Entstehung zu begründen, setzt die Arbeit an einem der in der Forschung verorteten Umbrüche von Schule zu Hochschule, dem Wandel von Angebot und Nutzung, an. Aus diesem Grund beginnt die Arbeit mit einer Ausführung zu herkömmlichen Angeboten der Universität, sowie zwei ausgewählten, bereits existierenden Fördermaßnahmen, die das Erlernen der Hochschulmathematik in der Studieneingangsphase entlasten sollen. Weiterhin werden die Idee und Zielsetzung des erstellten MMS 2.0 spezifiziert. Im Anschluss befindet sich die begründete Vorstellung des konstruierten Skripts anhand konkreter

[5] Dass das Vorlesungsskript bei vielen Studierenden im Selbststudium eine Nebenrolle spielt, wird an dieser Stelle aus der Auseinandersetzung mit Göller (2020) gefolgert, der sich mit selbstständigem Lernen von Mathematikstudierenden in der Studienanfangsphase befasst hat. Dass das Vorlesungsskript von der Hochschuldidaktik außer Acht gelassen wird, wird aus der Tatsache gefolgert, dass der Autorin trotz einer ausgiebigen Auseinandersetzung mit dieser Thematik keine bisher ergriffenen Maßnahmen zu einer didaktischen Aufwertung oder Umgestaltung eines Hochschulskripts bekannt sind.

[6] Im Folgenden wird der Ausdruck „Mein Mathe-Skript 2.0" der besseren Lesbarkeit wegen mit „MMS 2.0" abgekürzt.

Beispiele, welche in einer Übersicht, einer Art „Manual“ für Hochschuldozierende mündet. Abschließend folgt eine Reflexion des MMS 2.0 und ein Fazit, welches die wichtigsten Aspekte dieser Arbeit zusammenfassend darstellt.

2. Herkömmliche Angebote und deren Nutzung in der Übergangsphase zu einem Mathematikstudium

Der schulische Unterricht wird angelehnt an Fend (1998, S. 57ff.) als ein Angebot von Lerngelegenheiten interpretiert, welches von Schüler/-innen genutzt werden kann. „Dabei geht es nicht […] um schlichte Übertragung von Wissen“ (Reiss & Hammer, 2013, S. 16). Das gestellte Angebot kann durch individuelle Einflussfaktoren wie beispielsweise das fachliche, fachdidaktische und pädagogische Wissen der Lehrkraft oder systemische Einflüsse wie verschiedene Charakteristika der Schule (z.B. Lehrpläne und Bildungsstandards) beeinflusst werden (Reiss & Hammer, 2013, S. 16). Auch die Nutzung des Angebots durch die Schüler/-innen ist nicht durch eine reine Aufnahme des Angebots bestimmt. Wie oft und wie nachhaltig unterrichtliche Lerngelegenheiten von Schüler/-innen genutzt werden, hängt von verschiedenen Faktoren ab, wie beispielsweise von der Qualität des Unterrichtsmaterials sowie von individuellen, kognitiven, motivationalen und sozialen Aspekten (Helmke & Schrader, 2006, S. 7).

Das vorgestellte Denkmodell von Angebot und Nutzung in schulischen Kontexten könnte auf die universitäre Lehre übertragen werden. Diese stellt ebenfalls Angebote, welche von den Studierenden als Lerngelegenheiten genutzt werden können. In erster Linie spielen bei typischen Mathematikveranstaltungen folgende drei konstitutiven Elemente eine Rolle: Die Vorlesung, die wöchentlichen Hausaufgabenzettel und die Übungen (Püschl, 2019, S. 8). An der Freien Universität Berlin wird für eine typische Einstiegsvorlesung wie die Analysis 1 ein allgemeiner Arbeitszeitaufwand von 300 Semesterstunden gerechnet, wobei davon 60 Stunden für die Prüfung und deren Vorbereitung im Selbststudium vorgesehen sind (Das Präsidium der Freien Universität Berlin, 2013, S. 603), die im Folgenden nicht genauer thematisiert werden. Näher eingegangen wird als Nächstes auf die Übungen, Übungsaufgaben, Vorlesung und deren Nutzung in der Studieneingangsphase. Die Angaben für den Zeitaufwand pro Modul beziehen sich dabei auf das Einstiegsmodul Analysis 1 der Freien Universität Berlin, wobei diese Angaben auch anderen vergleichbaren Modulen ähneln.

2.1 Die Lerngelegenheit der Übungen

In wöchentlich stattfindenden Übungen bzw. Tutorien werden in erster Linie erarbeitete Lösungen der Hausaufgabenzettel besprochen (Püschl, 2019, S. 16). Im Idealfall kommen dabei die Lernenden ins Gespräch und es wird Raum für Fragen jenseits der Übungsaufgaben gegeben (Püschl, 2019, S. 17). Hierbei können die Tutoren und Tutorinnen für den Lernerfolg von Studierenden relevant sein. Einerseits fungieren sie als Vermittler/-innen zwischen Studierenden und Dozierenden (Püschl, 2019, S. 10), andererseits kommt ihnen im besten Fall auch eine Art Moderations- und Motivationsrolle zu. So wird auf der Homepage der Freien Universität Berlin beispielsweise zu der Aufgabe von Tutoren und Tutorinnen folgendes erklärt:

> Ihre Aufgabe besteht weniger darin, Dinge „vorzumachen“, als vielmehr die Teilnehmer*innen zu eigenen Beiträgen zu motivieren. Im Idealfall wird ein*e gute*r Tutor*in wenig reden sondern darauf achten, dass die Teilnehmer*innen ihre erarbeiteten Lösungen vortragen und miteinander darüber ins Gespräch kommen. Dabei moderiert der/die Tutor*in die gemeinsame Diskussion. (Ablauf der Tutorien und Aufgaben von Tutoren, o. D.)

Auch in der Studienordnung der Freien Universität Berlin wird festgelegt, dass Studierende sich bei dieser Lernform aktiv im Rahmen einer Ausarbeitung von Lösungen der Übungsaufgaben und einer Beteiligung an Diskussionen, einbringen sollten (Das Präsidium der Freien Universität Berlin, 2013, S. 603). Dabei beträgt der Arbeitsaufwand für die Präsenzzeit der Übung 30 Stunden und für die Vor- und Nachbereitung der Übung 45

Stunden pro Modul (Das Präsidium der Freien Universität Berlin, 2013, S. 603).

2.2 Die Lerngelegenheit der Übungsaufgaben

Die Übungsaufgaben stellen eine Besonderheit des Mathematikstudiums dar. Oftmals sind diese wöchentlich abzugeben und werden parallel zu den Mathematikvorlesungen bearbeitet, um behandelte Inhalte der Vorlesung anzuwenden (Püschl, 2019, S. 8). Das Bearbeiten von Übungsaufgaben fungiert neben der Unterstützung des Lernens oftmals zusätzlich als eine der Voraussetzungen für das Bestehen von Prüfungsleistungen (Liebendörfer, 2018, S. 22f.). Typischerweise müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl der Hausaufgabenzettel erreicht werden, um an der Klausur am Ende des Semesters teilnehmen zu können (Liebendörfer, 2018, S. 22f.). Oftmals birgt die Bearbeitung solcher Übungsaufgaben insbesondere bei Studierenden in der Eingangsphase einen hohen Zeitaufwand, so dass diese in die Zeiten des Selbststudiums fällt (Göller, 2020, S. 4). Für die Bearbeitung der schriftlichen Übungsaufgaben in der Analysis 1 sind laut Studienordnung 45 Stunden pro Modul vorgesehen (Das Präsidium der Freien Universität Berlin, 2013, S. 603).

2.3 Die Lerngelegenheit der Vorlesungen

Bereits 1928 problematisiert Toeplitz die „Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule“ (Toeplitz, 1928, S. 1) und beschreibt in einem gleichnamigen Vortrag die mathematische Hochschullehre wie folgt:

> Ihre Vorlesungen sind ausgesprochenermaßen auf das Stoffliche eingestellt. Sie lehren Tatsachen und betrachten Tatsachen stillschweigend als das einzig gültige Ziel. Die Tatsachen werden – das ist die Norm, und vereinzelte Abweichungen von der Norm haben in diesem ganzen Vortrag nur ein untergeordnetes Interesse – um ihrer selbst willen als absolute Werte hingesetzt, deren äußere oder innere Notwendigkeit zu motivieren

> überflüssig ist. Und dieselben Tatsachen bilden hernach als „abfragbares Wissen“, die Grundlage der abschließenden Prüfungen. (Toeplitz, 1928, S. 3)

Die universitären Vorlesungen seien demnach auf das Unterrichten von Inhalten bzw. „Tatsachen“ ausgerichtet, welche gültig sein müssen und letztendlich als „abfragbares Wissen“ geprüft werden. Aktuellere Literatur bestätigt, dass sich die Situation an der Universität, wie sie Toeplitz beschrieb, in den letzten 100 Jahren kaum geändert habe. Vorlesungen finden nach wie vor unter einer instruktionalen Lehr-Lern-Perspektive statt (Reiss & Hammer, 2013, S. 23). Die Vermittlung von Wissen an einer Hochschule besteht aus einer Darbietung der fertigen mathematischen, formalen Theorie, welche durch die drei Kernelemente Definition, Satz und Beweis gekennzeichnet ist, wobei außerhalb dieser „Tatsachen“ keine tiefere Auseinandersetzung mit den Prozessen, die zu eben diesen geführt haben, stattfindet (Rach & Heinze, 2013, S. 126). Des Weiteren erfolgt die Wissensvermittlung durch das aktive Präsentieren von aufbereiteten Lehrinhalten des Lehrenden, während die Lernenden eine eher passive Rolle einnehmen (Liebendörfer, 2018, S. 21). „Am präsentierten Wissen orientiert sich das Ziel des Unterrichts“ (Reiss & Hammer, 2013, S. 24). Vorteile dieser Methodik sind beispielsweise die einfache Umsetzbarkeit in großen Gruppen, die größere Kontrolle des Dozierenden über den Lehr- und Lerninput, welcher der Modulbeschreibung gerecht werden kann und die Zeiteffizienz in Bezug auf das Lehren (Reiss & Hammer, 2013, S. 23f.).

Manche Dozierende bieten Studierenden Hilfestellungen parallel zu der Vorlesung an, wie z.B. Vorlesungsskripte (Alcock, 2017, S. 177). Die Vorlesung wird dann durch ein Skript begleitet, welches erfahrungsgemäß von Dozierenden selbst verfasst und an deren Inhalten orientiert ist. Das heißt, dass das zugehörige Vorlesungsskript die hauptsächlichen Inhalte der Vorlesung widerspiegelt und somit auch in derselben, axiomatisch-deduktiv orientierten Form, bereitgestellt wird.[7] Es wird empfohlen, die Vorlesung mit

[7] Diese Ausführungen orientieren sich an der im Rahmen dieser Arbeit stattgefundenen Auseinandersetzung mit mehreren Skripten der Analysis 1, unter anderem das Skript von Joachim Weidmann (2004), das Skript von Bernd Ammann (2019), das Skript von

Hilfe des Skripts oder eigenen Notizen vor- und nachzuarbeiten (Alcock, 2017, S. 181). Das Vorlesungsskript stellt somit primär eine Unterstützung für das Selbststudium dar. Die Zeit für den Arbeitsaufwand eines Selbststudiums im Zusammenhang mit der Vorlesung beträgt insgesamt 60 Stunden pro Modul und entspricht damit der empfohlenen Stundenzahl, welche für die Präsenzzeit der Vorlesung verbunden ist (Das Präsidium der Freien Universität Berlin, 2013, S. 603).

2.4 Die Nutzung von typischen Lerngelegenheiten durch Studierende in der Eingangsphase

Es kann angenommen werden, dass auch Angebote seitens der universitären Lehre, ähnlich wie dies auch in der Schule anzunehmen sei, nicht unbedingt von den Studierenden so genutzt werden (können), wie von den Lehrenden intendiert. Liebendörfer (2018, S. 339) weist zudem darauf hin, dass Studierende am Anfang des Mathematikstudiums in erster Linie extrinsisch motiviert sind. Während die Effizienz der Übungen in Bezug auf deren Nutzung als Lerngelegenheit vermutlich stark von den jeweiligen Tutoren und Tutorinnen abhängig sind, erzeugen die Übungsaufgaben einen hohen Leistungsdruck bei Studierenden (Liebendörfer, 2018, S. 339). Die rezeptive Aufnahme von Informationen in der Vorlesung führt zudem dazu, dass Studierende auch dieser oft nicht folgen können (Gunesch, 2013, S. 71). Die für das Modul aufzuwendenden Arbeitszeiten weisen in diesem Zusammenhang darauf hin, dass im Unterschied zum schulischen Lernen ein intensives Selbststudium erforderlich ist, welches über die Bearbeitung der Übungszettel hinausgeht.[8]

Alexander Schmitt (2010) und ausgiebiger das Skript von Dirk Werner (2021), wobei bereits diese Auswahl an Vorlesungsskripten Unterschiede in deren Umfang, Aufbereitung und Detailliertheit aufweisen, welche jedoch alle zumeist die Instruktionsperspektive der Vorlesung widerspiegeln.

[8] Dies ist nicht bloß an der Freien Universität Berlin für das Modul Analysis 1 der Fall, für das die genauen Zeiten exemplarisch angegeben worden sind. Auch außerhalb wird betont, dass der Arbeitsaufwand für traditionelle Einstiegsvorlesungen in der Mathematik im

> Während die Aufgabenbearbeitung sehr explizit gefordert wird, werden die Anforderungen des Selbststudiums weitgehend implizit vermittelt und scheinen nicht alle Studierenden zu erreichen. Die ideell angedachte Form eines über die Aufgabenbearbeitung substanziell hinausgehenden, der Bearbeitung oft vorgelagerten Selbststudiums […] wird zumindest am Studienanfang nicht erreicht, weil sich viele Studierende fast ausschließlich an den Aufgaben orientieren. Hinzu kommt die geringe individuelle Unterstützung […]. Im Ergebnis erleben sich die Studierenden oft inkompetent und auch nicht in der Lage, ihr Lernen selbstbestimmt zu gestalten. Stattdessen fühlen sich viele Studierende bei ihren Lernprozessen nicht geeignet unterstützt, manchmal sogar behindert. (Liebendörfer, 2018, S. 342)

Auch Göller (2020, S. 213f.) beobachtet in seiner Studie, dass ein systematisches, von der Bearbeitung der Übungsaufgaben gelöstes Nacharbeiten der Vorlesungsinhalte eher die Ausnahme als die Regel darstellt. Primär wird in diesem Rahmen das Vorlesungsskript oder die Mitschrift nach brauchbaren Inhalten für das Bearbeiten der Übungszettel durchsucht (Göller, 2020, S. 213f.). Jedoch wird selbst dies bei einigen Studierenden nach nicht allzu langer Zeit aufgegeben (Göller, 2020, S. 242f.). So wird in Interviewumfragen von Göller (2020, S. 243) berichtet:

> Am Anfang habe ich wirklich echt probiert, mit den Sachen, mit dem Skript die Aufgaben zu lösen […]. Aber mittlerweile sofort Schlagwörter bei Google eingeben, ob irgendwas Ähnliches findet. Dann versuche ich das nachzuvollziehen. Und auf die Aufgabe anzuwenden. Aber so, also dass ich nur erstmal nur das Skript angucke, das kostet immer zu viel Zeit. Also das ist leider, weil ich damit nix kann einfach.

Im Extremfall kann es sein, dass die Vorlesung kaum mehr besucht und auch das Skript nicht mehr angeschaut, sondern nur noch auf die Übungsaufgaben fokussiert wird, wie folgender Transkriptausschnitt zeigt:

> […] wenn ich in der Vorlesung bin, dann bin ich so demotiviert dadurch, weil ich in der Vorlesung wirklich gar nichts verstehe. Und ich gucke auch kaum in das Skript zuhause rein, wenn ich irgendwelche Aufgaben mache, weil ich es selbst im Skript nicht verstehe […]. Und seitdem ich jetzt nicht mehr so wirklich zu den Vorlesungen gehe, fallen mir auch die Übungsblätter leichter, weil ich einfach, keine Ahnung, das ist einfach weniger Stress. (Göller, 2020, S. 330)

Daraus ließe sich ableiten, dass es Studierende gibt, die durch das Angebot der Vorlesung und des darauf abgestimmten Skripts sogar demotiviert

---

Allgemeinen zu etwa dem doppelten Zeitaufwand der Präsenzzeit aus dem Selbststudium besteht (Göller, 2020, S. 4f.).

werden, das Skript und die Vorlesung als Lerngelegenheit im Laufe des Semesters nicht mehr nutzen und dies sogar als Entlastung wahrnehmen, da so mehr Zeit für die vermeintlich wichtigeren Übungsaufgaben aufgebracht werden kann. Das Rechnen von Übungsaufgaben oder Aufgaben der Altklausuren wird von manchen Studienanfängern und -anfängerinnen zudem als ausreichende Vorbereitung auf die Klausur angesehen.

> Vor einer mündlichen Ergänzungsprüfung nach dem dritten fehlgeschlagenen schriftlichen Versuch bemühen sich etwa ein Viertel der Prüfungskandidaten um ein Vorgespräch. Der Extremfall wird durch einen Studierenden verkörpert, der sagte, er hätte *vor jeder Klausur sehr viel geübt*, er hätte *alle Aufgaben aus den Übungen und den Altklausuren gekonnt*, und der nun verzweifelt vom ausbleibenden Erfolg fragte: *Was soll ich lernen und wie soll ich lernen?* (Langemann, 2015, S. 74f.)

Dies könnte durch eine besonders präsente Differenz zwischen der strategischen Vorbereitung auf eine Mathematikarbeit in der Schule und der auf eine Mathematikklausur in der Hochschule erklärt werden. Die Vorbereitung mittels zahlreicher Aufgaben, von welchen sich ein direktes Übernehmen in die Klausur erhofft wird, wie es an der Schule eventuell möglich war, sollte seitens der Studierenden lernstrategisch für die Universität angepasst werden. Dadurch, dass die Zeiten des Selbststudiums weniger angeleitet werden als in der Schule, könnte vermutet werden, dass auch in Hinblick auf die Klausurvorbereitung nicht allen Studierenden bewusst ist, was ein Selbststudium genau ausmacht. Dies veranschaulicht unter anderem folgender Beitrag einer Studentin, welche nach eigenen Angaben im zweiten Semester folgende Erfahrung mit ihrer anfänglichen Studienzeit macht:

> Ja, ich wusste gar nicht, was das heißt, nacharbeiten. Ich dachte immer, durch die Hausaufgaben arbeitet man die nach. Und hätte mir jemand gesagt so: „Weißt du was richtig gut ist? Wenn du während des Semesters dir wirklich die Sätze und Definitionen“, das war wirklich das Elementarste, muss ich ehrlich sagen […]. „Ähm schreib dir die echt raus und versteh die. Ne, versuch echt alles, dass du die verstehst. Nimm dir Bücher und alles. Und auch miteinander verknüpfen, und, ne. Das ist wirklich absolut wichtig. Und wenn du das im Semester machst, hast du halt am Ende des Semesters nicht so viel Stress.“ (Göller, 2020, S. 343f.)

Auch hier wird, nicht nur im Hinblick auf die Klausur, der anfängliche Fokus auf die Übungsaufgaben deutlich. Die Erkenntnis, dass das systematische Verinnerlichen von Inhalten aus dem Vorlesungsskript auf lange Sicht zu einem verständnisreicheren und eventuell sogar zeitsparenden Bearbeiten der Übungsaufgaben, sowie eben dem Lernen in Hinblick auf die Klausur führt, tritt erst zu einem späteren Zeitpunkt ein: Einem Zeitpunkt, zu dem bereits einige Studierende ihr Mathematikstudium abgebrochen haben könnten (siehe Kapitel 1).

Auch Hochschuldozierende sind der Meinung, dass das Wiederholen von Vorlesungsinhalten essenziell für das Bestehen der Klausur sei. So empfahl der Prüfer bei Langemann (2015, S. 75) dem Studierenden bezüglich der Frage, wie sich auf die Klausur vorbereitet werden soll, anstatt weiterhin Aufgaben zu lösen

> […] *die Inhalte der Vorlesung zu rekapitulieren*, die *mathematische Notation detailliert zu lesen* und in *selbstständigen Reproduktionen* sorgfältig und korrekt zu verwenden, eigene *Verbildlichungen zu erarbeiten, Skizzen zu zeichnen* und *Kurzreferate zu wesentlichen Inhalten zu memorieren*. (Langemann, 2015, S. 75)

Nach der Beachtung dieser Empfehlung, äußerte sich der Studierende zu der erfolgreich abgeschlossenen Klausur folgendermaßen: „*Wie konnte ich so etwas einfaches vorher nicht verstehen?*“ (Langemann, 2015, S. 75).

Die exemplarischen Ausführungen zeigen, dass vor allem die Angebote Übungszettel und Vorlesung von Mathematikstudierenden nicht unbedingt immer so genutzt werden, wie von den Hochschullehrenden vermutlich erwünscht. Dabei scheint vor allem das Vor- oder Nacharbeiten der Vorlesung nicht optimal auf die Bedürfnisse der Studierenden ausgerichtet zu sein. Während das Vorlesungsskript oftmals als Hilfestellung fungieren soll, die eine Orientierung für das Selbststudium bieten kann, wird es von Studierenden oftmals ausschließlich zur Bearbeitung von Übungszetteln oder erst in Vorbereitung auf die Klausur, genutzt. Dies wirft die Frage nach dem näheren Sinn dieser Ressource auf.

3. Exemplarische Angebote zur Unterstützung der Schnittstelle Schule – Hochschule

Bereits existierende Unterstützungsangebote im Zusammenhang mit der Studieneingangsphase sind vielseitig. Im Folgenden werden zwei ausgewählte Fördermaßnahmen näher vorgestellt, welche Grundideen für die Entwicklung des MMS 2.0 geschaffen haben.

3.1 Das Schul-Hochschulprojekt „Mathe Plus Aachen“

Die folgenden Ausführungen basieren hauptsächlich auf Heitzer (2015). Zusätzlich wurden jedoch auch andere Materialien genutzt, welche von Johanna Heitzer auf Anfrage zur Verfügung gestellt wurden. Diese umfassen drei Präsentationen aus den Jahren 2011 und 2012, die einzelnen Schülerarbeitshefte des Projekts und deren Lösungen, die Probeklausur aus dem Jahre 2014 und die eigentliche Klausur desselben Jahres.[9]

Das Aachener Schul-Hochschul-Projekt „Mathe Plus Aachen“[10] verfolgt die Zielsetzung, bereits in der Schule eine Grundlage für die Mathematikanforderungen in MINT-Studiengängen zu schaffen und auf diese Weise den Studieneinstieg zu erleichtern. Dabei wählen Hochschuldozierende auf die Inhalte der Universität abgestimmte, mathematische Themen aus und erarbeiten dazu Unterrichtsmaterialien in Form so genannter „Schülerarbeitshefte“, welche von Lehrenden hauptsächlich in Projektkursen der Sekundarstufe II eingesetzt werden. Durch die Äußerung von Themenwünschen und Rückmeldungen zu den Materialien von den Lehrkräften sowie der Unterstützung seitens der Hochschullehrenden durch Lösungshefte,

---

[9] Bei Interesse können die Zugangsdaten für die iMPACt-Materialien per E-Mail an impact@rwth-aachen.de angefragt werden.
[10] Das Projekt „Mathe Plus Aachen“ wird im Folgenden wie von Heitzer (2015, S. 4) selbst mit „iMPACt“ abgekürzt.

Literaturtipps, Klausuraufgaben und Zertifikaten findet eine Kooperation von Schule und Hochschule statt.

Die im Zusammenhang mit diesem Projekt entstandenen Arbeitshefte eignen sich auch zum autonomen Durcharbeiten der Lernenden. Allgemein können diese somit an ein selbstständiges Arbeiten, wie es in der Hochschule verstärkt erwartet wird, heranführen. Dies wird in ihrem Aufbau deutlich. Die iMPACt-Arbeitshefte sind ähnlich wie Vorlesungsskripte aufgebaut, wobei es viele Passagen gibt, die die Formalität eines typischen Vorlesungsskripts durchbrechen. Der axiomatisch-deduktive Aufbau klassischer Vorlesungsskripte existiert nicht, sondern wird durch viele Beispiele und Aufgaben durchzogen. Es gibt aber auch „wasserdichte“ Definitionen, die die formale mathematische Fachsprache aufzeigen. Die Teilkapitel der Arbeitshefte enthalten Einführungen und Einführungsaufgaben, Basiswissen, Beispiele, einfache und komplexere Übungsaufgaben, Anwendungen, Probleme, Zusammenfassungen des jeweiligen Themengebiets in Form von sogenannten „Wissensspeichern“ sowie Kurzkontrollen nach einzelnen Teilkapiteln. Am Rand befinden sich zudem historische und andere Anmerkungen, Tipps, Hilfestellungen, Merkkästen und Orientierungshilfen an den Rändern (z.B. „Einführung“, „Erläuterung“, „Übungsaufgaben“, „Beispiele“). Definitionen und Sätze sind immer visuell durch einen roten Rahmen gekennzeichnet. Zudem gibt es Exkurse zu verschiedenen Begriffen, wie z.B. zum Begriff der Aussage.[11]

Lehrendenbeobachtungen zum iMPACt-Projekt ergeben eine hohe Motivation, Interesse, zahlreiche Diskussionen und ein hohes Maß an Selbstständigkeit seitens der Schüler/-innen, die die Arbeitshefte im Rahmen der Projektkurse bearbeiten. Es wird von der Freude an reiner Mathematik und deren Herausforderungen berichtet, welche von Schüler/-innen gewissenhaft wahrgenommen werden.

[11] Für ein genaueres Bild des beschriebenen Arbeitshefts soll an dieser Stelle nochmals auf den Artikel von Heitzer verwiesen werden, indem auch exemplarische Skript-Ausschnitte gezeigt werden (Heitzer, 2015, S. 10ff.).

3.2 Das Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“

Während in den meisten traditionellen Veranstaltungen eines Mathematikstudiums fertiggestellte Theorien gelehrt werden, soll das methodisch orientierte Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“[12] eben jene Konzeption aufbrechen. Zentral sind dabei das Problemlösen und die autonome Ausarbeitung von Beweisen, wobei verschiedenartige mathematische Probleme in der Vorlesung, den Tutorien und den Übungszetteln bearbeitet werden (Grieser, 2015, S. 93).

Allgemein unterscheidet Grieser (2016, S. 670) für die Lehrveranstaltung MPB drei Phasen: *Entdecken, Konsolidieren* und *Strategien lernen*. Während in der ersten Phase das mathematische Entdecken zentral ist, wird dies nach und nach um die nächsten Phasen ergänzt (Grieser, 2015, S. 94).

Die mathematischen Probleme für die Lehrveranstaltung werden nach ihrer „Attraktivität“ ausgewählt. Passende Probleme werden von Grieser (2015, S. 93) als „hübsch“ bezeichnet, an welchen konkreten Kriterien ein „‚hübsches‘ Problem“ gemessen wird, bleibt offen. Diese Art von Problem sei förderlich, denn „‚hübsche‘ Probleme motivieren mehr als langweilige“ (Grieser, 2015, S. 93). Die Studierenden sollen auf diesem Wege die Entstehung von Mathematik und die zugehörigen kreativen Tätigkeiten selbst entdecken, um so zum einen intrinsisch motiviert zu werden und zum anderen ein gesteigertes mathematisches Selbstbewusstsein zu erlangen (Grieser, 2013a, S. 69). Gleichzeitig sei auf diese Art die Förderung eines Problembewusstseins möglich. Weiterhin werde die Konkretisierung und der Ausdruck von Lösungsideen eingeübt, sowie für die Erfordernis von Beweisen sensibilisiert (Grieser, 2016, S. 670). Allgemein werden so verschiedenste Strategien zur Bearbeitung mathematischer Probleme gelernt und eingesetzt (Grieser, 2016, S. 670). Weiterhin sei für das Modul

[12] Das Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ wird im Folgenden wie von Grieser (2016, S. 666) selbst mit MPB abgekürzt.

die Führung eins Lerntagebuchs zentral, um individuelle Lernfortschritte sichtbar zu machen (Grieser, 2013a, S. 70).

Sprachlich wird an dem alltagssprachlichen Register angesetzt, wobei stets eine logisch exakte Formulierung beachtet wird, sodass nach und nach die mathematisch formale Sprache in passenden Kontexten immer mehr implementiert werden kann (Grieser, 2015, S. 92). Systematische Behandlung der mathematischen Logik und Beweise werden erst mit fortschreitender Länge der Veranstaltung eingeführt (Grieser, 2015, S. 92). Ein Grund dafür sei das Anknüpfen an die Alltagslogik der Studienanfänger/-innen und die damit einhergehende zeitversetzte Aufgeschlossenheit gegenüber expliziteren Betrachtungen (Grieser, 2015, S. 92).

Um einen aktiven Zugang zu der Mathematik zu ermöglichen, wird die Vorlesung zudem dialogorientierter gestaltet, sodass exploratives Lernen möglich wird (Grieser, 2016, S. 671). Grieser betont die Relevanz solcher Lehrveranstaltungen insbesondere für Lehramtsstudierende, indem er unter anderem behauptet, sie könnten „ihren Schülern eine lebendige Mathematik nur vermitteln, wenn sie sie selbst als solche erleben. Die Berufsrelevanz ist für sie klar erkennbar“ (Grieser, 2015, S. 92).

Beim Abschluss des Moduls werde ein Niveau erlangt, welches andere mathematische Einstiegsvorlesungen im Grad der logischen Komplexität und Bedarf an Kreativität überrage (Grieser, 2015, S. 95). Nach Grieser (2016, S. 671) sei dies „nur möglich, da nicht gleichzeitig abstrakte Inhalte zu verarbeiten sind“.

Grieser (2015, S. 101) selbst zählt die hohen Anforderungen an Tutor/-innen und Dozierenden zu den Herausforderungen dieser Lehrveranstaltung, welche vor allem durch das interaktive Format verursacht werden. Gleichzeitig sieht er dies auch als Chance, denn in einer so möglichen Sichtbarmachung des mathematischen Prozesses durch die Dozierenden bestehe ein Ziel des Moduls MPB: „*Ausdrückliches Ziel von MPB ist es, Aspekte der Mathematik, die bisher hauptsächlich für* *besonders leistungsstarke Studierende erreichbar waren, für viele zugänglich zu machen“* (Grieser, 2016, S. 668).

Angelehnt an diese Lehrveranstaltung wurde zudem ein Buch unter dem Titel „Mathematisches Problemlösen und Beweisen – Eine Entdeckungsreise in die Mathematik“ (Grieser, 2013b) geschrieben, welches nun als Grundlage des Moduls fungiert (Grieser, 2013a, S. 69).

4. Die Idee eines innovativen Vorlesungsskripts: Das MMS 2.0

Im Gegensatz zu der Idee gänzlich neu gestalteter Lehrformate (wie z.B. das Modul MPB) wurde in dieser Arbeit auf eine herkömmliche und oft bereits eingesetzte Ressource – das Vorlesungsskript – zurückgegriffen. In diesem Zusammenhang wurde das Analysis 1 Vorlesungsskript von Werner (2021) herangezogen, welches im Sommersemester 2020 an der Freien Universität Berlin eingesetzt wurde. Jenes wurde im Rahmen dieser Arbeit nach ausgewählten hochschulmathematikdidaktischen Gesichtspunkten verändert.

4.1 Rahmenbedingungen

Das MMS 2.0 richtet sich an alle Studierenden des Bachelorstudiengangs Mathematik und/oder des Bachelorstudiengangs Mathematik für das Lehramt. Dabei ist das Skript insbesondere für Studierende konzipiert, die bereits über fundamentale mathematische Fähigkeiten verfügen und beim Übergang in das Mathematikstudium bereit sind, an möglichen auftretenden Herausforderungen zu arbeiten. Dementsprechend ist der Entwurf des MMS 2.0 getragen von der kognitiv-konstruktivistischen Überzeugung, dass alle Studierende der Studieneingangsphase als grundlegend aktive und selbstreflexive Lernende auftreten, welche prinzipielle Fähigkeiten besitzen, neue Informationen durch die Selektion zweckmäßiger Strategien zu verarbeiten und ihre individuelle Motivation zu lenken. Die Analysis fällt traditionell in die bereits thematisierte Übergangsphase, da sie in den letzten Schuljahren des Gymnasiums gelehrt und grundsätzlich in den ersten beiden Studienjahren belegt wird (Roos, 2020, S. 65). Vor allem für Studienanfänger/-innen ist sie aus diesem Grund von großer Bedeutung und folglich auch für diese Arbeit besonders relevant. Die Idee eines solchen Skripts kann jedoch auf jede beliebige Vorlesung mit Mathematikanteilen übertragen werden. Gedacht ist das MMS 2.0 als fakultatives Angebot und kann in selbstständiger Lernform durch die Studierenden bearbeitet werden. Die mathematischen Inhalte des ursprünglichen Skripts sollen keinen großen Abweichungen unterliegen. Grundsätzlich wirkt sich die hier vorgestellte Arbeit somit nicht explizit auf die Präsenzlehre der Dozierenden sowie Tutoren und Tutorinnen aus, da prinzipiell dieselben (inhaltlichen) Anforderungen gestellt werden. Dies soll im Allgemeinen den Einsatz dieser Ressource erleichtern.

4.2 Ziele und Intentionen

Das MMS 2.0 soll ein Angebot für Studierende stellen, welches eine lernförderlichere Nutzung der Vorlesung und Übung erlaubt, wobei die Vorlesung immer noch im Vordergrund steht. Es soll dabei einen Versuch demonstrieren, der Forderung von Biehler (2018, S. 13), welche eine Umgestaltung der Einstiegsvorlesungen im Hinblick auf eine Transitionsdidaktik im Sinn hat, mithilfe eines leicht einsetzbaren Vorlesungsskripts, zumindest implizit gerecht zu werden. Konkret lauten die Ziele wie folgt:

Das MMS 2.0 soll …

1) … Beiträge der Studierenden zur Hochschulmathematik motivieren.
2) … die Aufgabenzettel als Lerngelegenheit hervorheben.
3) … die Studierenden in den Mittelpunkt des mathematischen Lernens rücken.

4) … die Anforderungen des Selbststudiums explizit vermitteln.

Um Studierende zur Hochschulmathematik zu motivieren, wird ein Teil des Aufgabenbereichs der Tutoren und Tutorinnen auf das MMS 2.0 erweitert, indem es individuelle Äußerungen der Studierenden anregt und sie ermutigt, diese niederzuschreiben. Dabei wird jedoch weniger auf die Aufgabenzettel, als auf die Vorlesung fokussiert. Der individuelle Lernweg der Studierenden wird auf diese Weise nicht nur dokumentiert, sondern auch explizit für die Studierenden sichtbar gemacht.

Die Aufgabenzettel sollen durch das MMS 2.0 gezielter in das Licht einer Lerngelegenheit geschoben werden, welche das Anwenden der Vorlesungsinhalte beinhaltet. So soll das Skript nicht mehr bloß als Nachschlagewerk für die Aufgabenzettel fungieren, sondern für deren Bearbeitung ein systematisches Vorbereiten der Vorlesung voraussetzen.

Für eine Lernendenorientierung im Rahmen der Hochschulmathematik soll das MMS 2.0 den Charakter der Vorlesung nicht vollständig beibehalten und diese somit nicht – wie bisher – gänzlich in ihren Inhalten widerspiegeln. Vielmehr soll neben der Sicherungsfunktion der wichtigsten Inhalte der Vorlesung eine Eigenaktivität der Studierenden stattfinden, welche in einer traditionellen Vorlesung nicht angestrebt wird. Dabei soll sich eben nicht nur an inhaltlichen „Tatsachen“ (Toeplitz, 1928, S. 3), sondern an der Individualität der Studierenden und deren Bedürfnissen orientiert werden. Das mathematische Lernen soll im Rahmen des Selbststudiums von den Studierenden selbstbestimmt mitgestaltet und ihr Lernprozess dabei unterstützt werden. Dies setzt das Einnehmen einer eher konstruktivistischen Perspektive voraus.

Um die Anforderungen des Selbststudiums zu vermitteln, soll das MMS 2.0 eine Orientierungshilfe für die verstehensorientierte Erarbeitung von Vorlesungsinhalten bieten und damit bei einer Erarbeitung selbst zu einer Lerngelegenheit statt zu einer Lernbehinderung werden. Die Studierenden sollen im Rahmen des Selbststudiums in Bezug auf die Vorlesung zu mathematischen Akteuren werden. Es wird das Resultat erhofft, dass Studierende der Vorlesung und den Übungen im Anschluss besser folgen können.

Allgemein wurde sich bei der Organisation des MMS 2.0 an der übersichtlichen Aufbereitung des Schülerarbeitshefts des iMPACt-Projekts orientiert. Grund dafür ist, dass dieses schulische Arbeitsheft trotz der Ausrichtung an universitären Inhalten positive Ergebnisse bei Schülern und Schülerinnen im Umgang mit der Mathematik vorweisen konnte. Außerdem wurde der Leitgedanke des entdeckenden Lernens und der Mathematik als kreatives Handlungsfeld von der Lehrveranstaltung MPB übernommen und einige Aspekte des MMS 2.0 durch eben jene Veranstaltung inspiriert.

5. Ansatzpunkte für eine Umsetzung des MMS 2.0

Im Folgenden werden konkrete Maßnahmen vorgestellt, welche die Umsetzung des MMS 2.0 als innovatives Vorlesungsskript ermöglichen sollen.

5.1 Formalia

Zuerst sollen eher organisatorische Aspekte des Skripts erläutert werden, die das Selbststudium im Rahmen des MMS 2.0 unterstützen können.

5.1.1 Format

Das MMS 2.0 wurde im DIN-A5-Format konzipiert, damit es möglichst praktikabel eingesetzt werden kann. Beachtet wird damit die Ausstattung vieler Hörsäle, deren Sitzplätze oftmals eine eher geringe Schreibfläche bieten. Für das Ermöglichen solch eines direkten Bearbeitens würde zudem eine Ringbindung des Skripts oder eine ähnlich gestaltete Darbietung ratsam erscheinen. Das MMS 2.0 bietet sich jedoch ebenfalls für eine digitale Bearbeitung an, wobei eine angemessene Ausstattung der Studierenden vorausgesetzt werden muss. Insgesamt kann das MMS 2.0 in solch einem Format als kompakter Wegbegleiter über den Zeitraum des Moduls fungieren.

5.1.2 Deckblatt

Den Beginn des Skripts bildet klassischerweise ein Deckblatt. Dieses kann jedoch, anders als bei dem ursprünglichen Skript, durch den eigenen Namen und die Matrikelnummer personalisiert werden. Das Skript erscheint so bereits auf den ersten Blick wie eine Art „Lerntagebuch“ oder „Schulheft“, welche vielen Studierenden bereits aus dem schulischen Unterricht bekannt sein dürften. Die Idee der personalisierten Gestaltung entstammt dem Modul MPB (siehe Kapitel 3.2), in welchem ebenfalls Lerntagebücher eingesetzt werden. Durch das personalisierte Deckblatt wird somit dem zunächst neuartigen Format des Vorlesungsskripts entgegengewirkt und diesem eine gewisse Vertrautheit hinzugefügt. Zusätzlich könnte die sofortige Personalisierung des Skripts die Wahrnehmung des MMS 2.0 als individuelle Lerngelegenheit fördern und eine persönliche Identifikation mit dem eigenen Skript von Anfang an ermöglichen.

5.1.3 Bedienungsanleitung

Um eine möglichst transparente Nutzung des Skriptangebots zu gewährleisten, wird dessen Handhabung in einer Bedienungsanleitung vorgestellt. Diese thematisiert die grundlegenden Bausteine des Skripts, wie die Dreiteilung in einen Explorations-, Vorlesungs- und Reflexionsabschnitt, die unterschiedlichen Färbungen der Skriptseiten und die Randmarkierungen, um ihre Bedeutung zu verdeutlichen. Zusätzlich wird betont, dass in dem gesamten Skript alles an lernförderlichen Handlungen erlaubt ist. Die Studierenden können in dem Skript grundsätzlich frei markieren, schreiben, durchstreichen, etc. Der Vorteil solch einer Bedienungsanleitung wäre, dass das MMS 2.0 nicht explizit von den Lehrenden vorgestellt werden müsste, da das Skript auf diese Weise trotz seiner ungewöhnlichen Form selbsterklärend wäre. Dies erleichtert den Einsatz des Skripts in der Lehrveranstaltung auch für Dozierende und entspricht der Zielsetzung, ein in Lehrveranstaltungen möglichst leicht integrierbares Instrument zu schaffen.

5.1.4 Farb- und Randeinsatz

Die veränderte Organisation des MMS 2.0 entstammt in ihrer Ursprungsidee dem iMPACt-Schülerarbeitsheft (siehe Kapitel 3.1), welches ebenfalls farbliche Hervorhebungen und den Einsatz von Randnotizen aufweist. Weiterhin wurde sich bei der farblichen Gestaltung an dem Skript von Schmitt (2010) für die Analysis 1 Vorlesung an der Freien Universität Berlin zum Wintersemester 2009/2010 orientiert, welches eine vergleichbare Farbgebung beinhaltet.

5.1.4.1 Farbgebung

Im MMS 2.0 wurde mit unterschiedlichen Farbhintergründen gearbeitet: Rot, Blau, Grau und Grün. Jeder Farbe ist dabei eine eigene Bedeutung zugewiesen. Die Farbe Rot markiert Definitionen, die Farbe Blau mathematische Sätze und die Farben Grau und Grün zeigen an, dass die Studierenden selbst mathematisch tätig werden sollen. Für den jeweiligen Tätigkeitsbereich wurde explizit Raum für die Bearbeitung im Skript gelassen. In den grauen Arealen werden Arbeitsaufträge passend zur Exploration, Vorlesung und Reflexion gegeben. In den grünen Arealen befinden sich zusätzliche Übungen, wobei es freiwillige und verpflichtende Übungen gibt. Auch die Randbemerkungen sind farblich an die zugehörigen Areale angepasst. Die unterschiedliche Farbgebung dient der optischen Organisation der Skriptinhalte und soll die Studierenden bei der Arbeit mit dem Skript unterstützen.

5.1.4.2 Randbemerkungen

Die Bezeichnungen der Definitionen und Sätze sowie Beispiele und Beweise sind am jeweiligen Rand kenntlich gemacht. Dabei wurden die Sätze und zugehörige Beweise durchnummeriert. Zusätzlich gegebene Hinweise werden im MMS 2.0 durch ein Achtung-Symbol ebenfalls am Rand hervorgehoben. Da es für das Lesen mathematischer Texte „notwendig ist, […] immer wieder vor und zurück zu springen“ (Houston, 2012, S. 19), ist die Orientierung am Rand insbesondere für das gezielte Suchen von Vorlesungsabschnitten hilfreich. Ebenfalls unterstützend können dabei die Nummerierungen der Beispiele, Sätze und zugehöriger Beweise sein. Diese stehen zudem durch die in das Skript eingebauten Handlungsräume teilweise nicht mehr direkt hintereinander, weshalb die Nummerierung zusätzlich eine Zuordnungsfunktion von Satz oder Beispiel und Beweis bietet.

5.1.5 Inhaltsverzeichnis

Abbildung 1: Ausschnitt aus dem Skript nach Werner (2021, S. III)

Nachdem der methodische Umgang mit dem MMS 2.0 durch die Bedienungsanleitung erläutert wurde, wird durch das Inhaltsverzeichnis eine inhaltliche Orientierung dargeboten. Diese fällt im Gegensatz zu dem ursprünglichen Inhaltsverzeichnis deutlich detaillierter aus (siehe Abbildung 1 und 2).

Abbildung 2: Ausschnitt aus dem MMS 2.0 (S. 3)

So wird das Inhaltsverzeichnis des ursprünglichen Vorlesungsskripts in Kapitel und Unterkapitelüberschriften geteilt, während das MMS 2.0 zusätzlich die grundlegende Aufteilung in Explorations-, Vorlesungs- und Reflexionsabschnitte aufweist, auf welche im Verlauf der Arbeit noch näher eingegangen wird. Ein weiterer Unterschied ist, dass der Vorlesungsabschnitt im MMS 2.0 differenzierter gestaltet wurde. So besteht dieser aus mehreren Abschnittsüberschriften, welche den Beginn der Ausführung der Definitionen und Sätze thematisieren und nach eben diesen benannt wurden. Außerdem wird bereits hier auf zugehörige Übungsabschnitte verwiesen.

Das Inhaltsverzeichnis als Überblick bietet in einer solchen Form eine Organisationsmöglichkeit, die in erster Linie die mathematischen Inhalte der Vorlesung strukturiert. Die Struktur, nach der das mathematische Wissen in der Vorlesung organisiert ist, wird für Studierende auf diese Weise sofort sichtbar gemacht. Dies erlaubt einen schnellen Rückgriff auf zentrale Abschnitte der Vorlesung und einen klaren Überblick über deren Themen. Es kann sein, dass solch eine Übersicht als „Plan des Wissens“ (Friedrich & Mandl, 2006, S. 4) mitgelernt wird. In Hinblick auf die Vor- bzw. Nachbereitung der Vorlesung oder auf die Klausurvorbereitung wäre es denkbar, dass solch ein Plan den Einsatz von Planungsstrategien der Studierenden fördern könnte, welche sich positiv auf eine „aktive und bewusste (Selbst-)Kontrolle und (Selbst-)Steuerung des eigenen Lernens“ (Wild, 2005, S. 195) und demnach auch auf ein systematisches Lernen der Vorlesungsinhalte auswirken könnte.

5.1.6 Das griechische Alphabet, Symbolik und Bezeichnungen

Die Handhabung der mathematischen Fachsprache bedarf einer Lesekompetenz für mathematische Symbolik (Bauer & Hefendehl-Hebeker, 2019, S. 4f.). Bereits zu Anfang der Analysis-Vorlesung tauchen verschiedene Zeichen auf welche für viele Studienanfänger/-innen neu sein könnten, wie z.B. Σ, $\forall$, $\in$, u.v.m.[13] Im Sinne der Förderung einer mathematischen Fachsprache wäre es vermutlich hilfreich, mathematische Symbole besser zuordnen zu können. Dafür bietet es sich an, häufig benutzte Symbole und Bezeichnungen, sowie deren Bedeutung, von Anfang an zu thematisieren. Im MMS 2.0 befindet sich dafür zunächst das Abbild des griechischen Alphabets, welches unter anderem das Auftreten des Summenzeichens oder Epsilons erklärt. Das griechische Alphabet wurde vollständigkeitshalber mit der Aussprache, dem großen und kleinen zugehörigen Buchstaben, abgebildet. Solch ein Alphabet wurde von Dirk Werner in seiner Lehrveranstaltung im ersten Übungszettel ebenfalls bereitgestellt. In dieser Arbeit wird jedoch die Ansicht vertreten, dass dieses schon bekannt sein sollte, bevor neuartige Buchstaben auf neue Inhalte treffen und das sei eben nicht erst in der Übung, sondern bereits in der Vorlesung der Fall. Das griechische Alphabet soll an dieser Stelle vorbereitend wirken und für die Verwendung dieser Symbolik sensibilisieren. Zudem kann dieses Verzeichnis genutzt werden, um Buchstaben des griechischen Alphabets und deren Aussprache lokal nachzuschlagen.

Glossar für Symbole und Bezeichnungen

Erstellen Sie während der Bearbeitung des Skripts eine Übersicht mit den wichtigsten benutzten Symbolen und Bezeichnungen sowie deren Bedeutung. (Auf mögliche Ergänzungen wird mit $\to$ Glossar verwiesen.)

Symbol/Bezeichnung	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
n	Element von $\mathbb{N}$
$A(n)$	

Abbildung 3: Ausschnitt aus dem Glossar für Symbole und Bezeichnungen des MMS 2.0 (S. 5)

[13] Ein ausgiebiger Überblick über in der Mathematik verwendete Zeichen findet sich beispielsweise bei Höfner (2018, S. xiiiff.).

Getrennt vom griechischen Alphabet wird ein Glossar angeboten, welches die Symbolik und Bezeichnungen der Vorlesung, sowie die Bedeutung dieser thematisieren soll (siehe Abbildung 3). Grund dafür ist die Tatsache, dass in der Mathematik nicht nur Symbole vorkommen, die viele Studienanfänger/-innen vorher noch nie gesehen haben, sondern dass gewisse Symbole eine konventionell feste Bedeutung haben, welche vor allem Studienanfängern und -anfängerinnen nicht immer bekannt sein muss (Houston, 2012, S. 47). Ein ε stellt z.B. häufig eine kleine positive Zahl dar, während n meistens als Variable für eine natürliche Zahl verwendet wird. Ziel des Glossars ist somit die Förderung eines angemessenen Umgangs mit der mathematischen Symbolik. Des Weiteren kann so eine Übersicht wichtiger Zeichen für die Vorbereitung auf eine Klausur zusammengestellt werden. Die Methode eines Glossars sollte den meisten Studierenden zudem bereits aus der Schule bekannt sein. Das Glossar im MMS 2.0 ist dabei im Gegensatz zum griechischen Alphabet unvollständig. Die Aufgabe der Studierenden ist hierbei, Symbole, welche zunächst fremd sind, wahlweise dort einzutragen und deren Bedeutung zu notieren. Um das Potential dieser Methode optimal nutzen zu können, werden die Studierenden bei einem Verwenden eventuell neuer mathematischer Zeichen durch Anmerkungen im MMS 2.0 angehalten, das Glossar selbstständig weiterzuführen. Dies soll bewirken, dass zum Ende der Lehrveranstaltung ein mehr oder weniger großes Zeichenglossar für das Modul erarbeitet wird. Das Einführen eines solchen Glossars wäre zudem eine Organisationsstrategie, welche die Grundlage für fortlaufende Lernaktivitäten darstellen könnte. Die Methodik könnte in Hinblick auf die Klausur von Studierenden übernommen werden um zusätzlich Definitions-, Satz- oder Beweisglossare zu erstellen.

5.2 Handlungsräume

Mathematik ist eine Tätigkeit und sie sollte von Studierenden auch als solche erfahren werden.[14] Bereits Freudenthal (1971) weist darauf hin, dass nur wenige Menschen überhaupt wissen, dass Mathematik eine Aktivität sei. So deklariert er folgendes:

> Few people know that mathematics is an activity. Little children are taught mathematics as an activity, but as they mature into rational beings, we are prone to teach them a well organized prefrabicated deductive system of mathematics, because rational beings may be supposed to understand deductive systems. You know that it does not work very well. (Freudenthal, 1971, S. 414)

Mit dem MMS 2.0 sollen die Studierenden in einer Vorbereitung der Vorlesung zu mathematischen Tätigkeiten eingeladen werden und ihren individuellen, mathematischen Lernweg auf diese Weise mitgestalten. Die Motivation eigenaktiven Lernens soll dabei im Mittelpunkt stehen. Mit der Eigenaktivität soll dabei eine unterstützte, aber trotzdem weitaus selbstständige Erarbeitung neuen Wissens erfolgen. Diese kann nach Winter (2016, S. 2) „zu intellektuellen und emotionalen Identifikationen, zu Erfolgserlebnissen, Teilerfolgserlebnissen, Misserfolgserlebnisse, zu Erlebnissen mit seinem eigenen Verstand, seinem Gedächtnis [und] seinem Beharrungsvermögen […]“ führen.

Der Gedanke der Eigenaktivität orientiert sich dabei an der in der Fachdidaktik allgemein bekannten Methode des „Entdeckenden Lernens“, an welcher sich z.B. auch das Modul MPB orientiert.

> „Entdeckendes Lernen“ ist weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen (wenn so etwas überhaupt direkt möglich ist), sondern ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, dass Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Informationen von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive

[14] Diese Ansicht vertreten unter anderem auch Biehler & Kempen (2015, S. 122), welche das Veranstaltungskonzept „Einführung in die Kultur der Mathematik“ entwickelten. Dieses stellt das aktive Forschen und Entdecken durch sogenannte „Forschungsprojekte“ in der Studieneingangsphase in den Mittelpunkt. Sie interpretieren die Kultur der Mathematik dabei in erster Linie als „eine aktive Form von mathematischen Denk- und Arbeitsweisen“ (Biehler & Kempen, 2015, S. 122).

> Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse. (Winter, 2016, S. 3)

Solche „äußeren Impulse“ werden im Modul MPB beispielsweise durch die Bereitstellung geeigneter mathematischer Probleme gegeben. Im iMPACt-Arbeitsheft befinden sich dazu zahlreiche Übungsaufgaben, Beispiele und Exkursionen für Schüler/-innen. Im MMS 2.0 sollen jedoch grundsätzlich die Inhalte der Analysis 1 beibehalten werden. Wie solche „äußeren Impulse“ mit dieser Bedingung in die Form eines Skripts eingebaut werden können, wird im nächsten Teilkapitel an ausgewählten Ausschnitten des MMS 2.0 verdeutlicht. Dabei soll an dieser Stelle bereits betont werden, dass es üblicherweise in den meisten Vorlesungsskripts, die für diese Arbeit untersucht worden sind,[15] schon einige solcher Impulse gibt, die zu Eigenaktivitäten der Lernenden anregen könnten. In erster Linie machen sich solche durch Fragen der Art „Warum ist das so?“ (z.B. Werner, 2021, S. 71) oder Aufforderungen wie: „Beweisen Sie dies!“ (z.B. Ammann, 2019, S. 29), genauso wie Verweise auf die Übungszettel (z.B. Schmitt, 2012, S. 4), bemerkbar. An dieser Stelle sei jedoch behauptet, dass die Eigenart solcher Impulse pädagogisch-didaktisch nicht in der Form aufbereitet worden sind, in der sie ihr volles Potential im Sinne eines verständnisorientierten und entdeckenden Lernens entfalten könnten, wie an weiteren Beispielen gezeigt wird.

Um einen Ort für selbstständiges Entdecken zu bieten, wurde sich an einigen Prinzipien der Methodik des Lerntagebucheinsatzes orientiert. Die grundsätzliche Idee von Lerntagebüchern stammt, im Rahmen des Konzepts dialogischen Lernens, aus dem schulischen Unterricht und besteht darin, individuelle Lernprozesse im Rahmen eines Auftrags durch persönliche Ideen, Gedanken, Bearbeitungen, aber auch Gefühle oder Fehler zu verschriftlichen (Barzel et al., 2007, S. 130). Dabei sind informelle Notationen erlaubt. Solch eine Vorgangsweise, in der freier Raum zur persönlichen

[15] Siehe Fußnote 7.

Gestaltung geboten wird, kann vermehrt zu Lernerfolgen führen (Barzel et al., 2007, S. 130).

Im Gegensatz zu den im Rahmen des Moduls MPB eingesetzten Lerntagebüchern soll das MMS 2.0 jedoch ein fakultativ zu bearbeitendes Vorlesungsskript darstellen, welches eben solche Freiräume zur individuellen Bearbeitung erlaubt, aber nicht durch die Lehrenden kontrolliert wird. Dies soll zum einen die Selbstbestimmtheit des Einsatzes dieser Ressource bei Studierenden und zum anderen die Identifikation der Lernenden mit dieser Ressource stärken. Nach Stefanou et al. (2004, S. 97) gehören Maßnahmen, Gestaltungsräume für eigenes Lernen zu bieten zudem auch zu der kognitiven Autonomieunterstützung von Lernenden, welche sich positiv auf verständnisorientiertes Denken auswirken kann[16].

Konkret soll aus den oben genannten Gründen im allgemeinen Aufbau des Skripts regelmäßig Platz zwischen einzelnen Abschnitten gelassen werden, um eigene Ideen, Gedanken, Rechnungen und Fragen ausformulieren zu können. In dem MMS 2.0 sind diese Passagen durch graue Kästen gekennzeichnet, sodass Studierende automatisch zum „Mitarbeiten" aufgefordert werden. Die Methode „Handlungsräume bieten", indem freier Skriptraum zur Verfügung gestellt wird, erscheint in dieser Form zunächst banal. Solch eine „simple" Methodik bietet jedoch großes Potential. Einerseits kann die Einstellung transferiert werden, dass jedem und jeder Studierenden zugetraut wird, mathematisch tätig sein bzw. handeln zu können. Somit wird die individuelle Unterstützung geboten, welche momentan in traditionellen Lehrveranstaltungen fehlen soll. Das Unterbrechen des Leseflusses durch gelegentliche Aufforderungen wie „Beweisen Sie dies!" oder „Wieso?" (falls dies überhaupt als Aufforderung interpretiert wird), wie sie in traditionellen Vorlesungsskripten zu finden sind, verleiten schnell zum Überlesen. Um Mathematik zu betreiben – und schließlich wird das Fach vermutlich

[16] Stefanou et al. (2004) beziehen sich im Allgemeinen auf schulisches Lernen, stützen sich aber unter anderem auf die Selbstbestimmungstheorie nach Deci und Ryan (2000), sodass dies ebenfalls auf universitäres Lernen ausgeweitet werden könnte.

studiert, um es auch auszuüben – sind Handlungen jedoch essenziell. Der Akzent des Skripts wird allein durch den Handlungsraum, der Studierenden gegeben wird „vom Lehren aufs Lernen, vom Tun des Lehrers auf das des Schülers“ (Freudenthal, 1973, S. 2) verschoben.

5.2.1 Arbeitsaufträge

Obwohl in dieser Arbeit die Ansicht vertreten wird, dass frei verfügbarer Platz im Vorlesungsskript allein bereits großes Potential für eine erfolgreichere Nutzung des Skripts bildet, wurde im MMS 2.0 die didaktische Entscheidung getroffen, die Handlungsräume durch Arbeitsaufträge zu ergänzen. Die Arbeitsaufträge verfolgen in der Exploration, Vorlesung und Reflexion unterschiedliche Ziele und sind deshalb auch verschieden aufgebaut. Während die Explorations- und Reflexionsphase als besondere Handlungsräume im nächsten Kapitel näher erläutert werden, sollen an dieser Stelle die grauen Areale der Vorlesungsphase dargelegt werden. Die grünen Areale der Übungen werden ebenfalls im nächsten Kapitel präzisiert.

Das Versehen der Handlungsräume mit Arbeitsaufträgen berücksichtigt die im Kapitel 2.4 bereits hervorgehobene Ansicht, dass es Studienanfänger/-innen gibt, die nicht wissen, wie eine Vorlesung nach-, und dementsprechend auch vorbereitet wird. Die Arbeitsaufträge sollen somit als eine explizite Orientierung für ein Selbststudium dienen.

Die Arbeitsaufträge des MMS 2.0 wurden an schulischen Operatoren (Kultusministerkonferenz, 2012) ausgerichtet, um an schulische Arbeitsaufträge anzuschließen und diese mit dem selbstorganisierten Lernen im Studium zu verknüpfen. Durch die von der Kultusministerkonferenz für die Schule klar definierten Operatoren werden die Arbeitsaufträge zudem expliziter gefasst, was der Zielsetzung entsprechen würde, die Anforderungen des Selbststudiums für die Studierenden explizit zu vermitteln. Im Folgenden werden exemplarisch Arbeitsaufträge für Handlungsräume der Vorlesungsphase des MMS 2.0 begründet vorgestellt.

5.2.1.1 Skizzieren von Schaubildern

Die erste Aufgabenstellung, um die das ursprüngliche Vorlesungsskript ergänzt wurde, erfolgt bereits auf der ersten Seite des Vorlesungsabschnitts. Dieser beginnt mit einer kurzen Einführung, welche aus dem ursprünglichen Skript (Werner, 2021, S. 5) auf das MMS 2.0 beinahe identisch übertragen wurde. Ein Ausschnitt aus der Einführung des MMS 2.0 (S. 9) lautet somit wie folgt:

> Wir nehmen den Standpunkt ein, dass wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kennen; dazu mehr im nächsten Teilkapitel, wo der Unterschied zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen deutlich gemacht werden soll. Zuerst soll das System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen etwas näher betrachtet werden.

Daraufhin werden die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ in einer knappen Definition vorgestellt. Es fällt auf, dass bereits auf der ersten Seite des Vorlesungsabschnitts somit vier verschiedene mathematische Symbole auftauchen: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$. An dieser Stelle könnte bereits ein Zusammenhang von der universitären Mathematik zur schulischen Mathematik geschaffen und Vorstellungen verschiedener Zahlenmengen aktiviert werden, welche im Verlauf der Vorlesung eine große Rolle spielen. Die Aufgabe „Skizzieren Sie ein Schaubild der Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$, welche Sie bereits aus der Schule kennen könnten“ soll so eine Verknüpfung erreichen. Der Operator *Skizzieren* soll das Darstellen der „wesentlichen Eigenschaften eines Objekts, eines Sachverhaltes oder einer Struktur“ (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 2) beinhalten, wobei dieser im MMS 2.0 im Zusammenhang mit einem Schaubild verwendet wurde. Visualisierungen bergen im Allgemeinen großes Potential, da sie als Mittel gelten, Lernstoffe tiefergehend zu verarbeiten (Renkl & Nückles, 2005, S. 135f.). Außerdem können Zusammenhänge übersichtlich veranschaulicht und so Informationen leichter abgelesen werden (Renkl & Nückles, 2005, S. 136). Zudem können sie im Allgemeinen die mathematische Symbol- oder Fachsprache entlasten, weil sie sich auf eine ikonische Ebene beziehen. Wenn die Zahlenmengen zentral für die Analysis 1 Vorlesung sein sollen, könnte es somit für Einsteiger/-innen hilfreich sein, sich diese auf eine Art zu verdeutlichen, die einen schnellen Über- bzw. Rückblick erlaubt.

In dem Fall der vorgestellten Aufgabe wird Studierenden zudem die Möglichkeit geboten, Wissenslücken zu schließen, welches ebenfalls eine Funktion von Schaubildern sein kann (Renkl & Nückles, 2005, S. 136). Da in der Aufgabe angedeutet wird, dass ein grundlegendes Wissen über Zahlenmengen bereits aus der Schule bekannt sein sollte, könnten auf diese Weise Schulinhalte nachgearbeitet werden.

5.2.2.2 Exemplarisches Prüfen von Aussagen

Im MMS 2.0 sollen regelmäßig vorgegebene Aussagen von Studierenden anhand von Beispielen überprüft werden. Beispiele für solche Aufgabenstellungen aus dem MMS 2.0 wären folgende: „Prüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage exemplarisch, indem Sie für n natürliche Zahlen einsetzen" (MMS 2.0, S. 10) oder „Prüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Bernoullischen Ungleichung exemplarisch" (MMS 2.0, S. 14). Um den Operator *Prüfen* gezielt von den Operatoren *Zeigen* oder *Beweisen* abzugrenzen, wurde dabei jedes Mal betont, dass solch eine Überprüfung *exemplarisch* erfolgen soll. Anstatt des Operators *Prüfen* könnte an dieser Stelle ebenfalls der schulische Operator *Belegen* verwendet werden, da die Definition dieses Operators treffender zu sein scheint. So beinhaltet der Operator *Belegen* die Forderung, „die Gültigkeit einer Aussage anhand eines Beispiels [zu] veranschaulichen" (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 1). Die Definition des Operators *Prüfen* ist hingegen etwas weiter gefasst: „Fragestellungen, Sachverhalte, Probleme nach bestimmten fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten" (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 2). Entschieden wurde sich in diesem Zusammenhang für den Operator *Prüfen* da so eher eine kritisch-fragende Haltung vermittelt werden soll. Diese ist in der Mathematik beispielsweise für das Aufstellen von Vermutungen (Mason et al., 2012, S. 67) oder Aufklären von Strukturen in

Hinblick auf Erklärungen und Beweise (Mason et al., 2012, S. 90ff.) relevant.

5.2.2.3 Erklären von mathematischen Sachverhalten

Man beachte, dass $n!$ die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge angibt (warum?).

Abbildung 5: Beispiel für einen „äußeren Impuls“ im Skript nach Werner (2021, S. 7)

Für das Bestimmen der *Fakultäten* $n!$ (lies „n Fakultät“; engl. “n factorial”) setzt man für $n \in \mathbb{N}$

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

sowie

$$0! := 1.$$

Man beachte, dass $n!$ die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge angibt.

Fakul-täten

→ Glossar

Das bedeutet, dass die Anzahl der Möglichkeiten, auf wie viele verschiedene Arten die 3 Elemente einer 3-elementigen Menge angeordnet werden können, 3! und auf wie viele verschieden Arten die 4 Elemente einer 4-elementigen Menge angeordnet werden können, 4! entspricht.

Erklären Sie in eigenen Worten, warum $n!$ die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge angibt.

Abbildung 4: Beispiel für einen „äußeren Impuls“ im MMS 2.0 (S. 19)

Rach und Heinze (2013, S. 121) „deuten darauf hin, dass insbesondere die Entwicklung von Selbsterklärungsaktivitäten in Phasen des Selbststudiums einen bedeutsamen Einfluss auf die Entwicklung des Interesses an Mathematik, des mathematikbezogenen Selbstkonzepts sowie auf den

Studienerfolg im ersten Semester zeigt.“. Selbsterklärungen bilden damit eine Elaborationsstrategie, welche verständnisorientiertes Lernen fördern kann. Aus diesem Grund sind die meisten Arbeitsaufträge der Handlungsräume mit dem Operator *Erklären* versehen, wie z.B.: „Erklären Sie die einzelnen Schritte der Gleichungskette“ (MMS 2.0, S. 12), „Erklären Sie die zweite Gleichung durch Einsetzen der Fakultäten“ (MMS 2.0, S. 22) oder „Erklären Sie die Fallunterscheidung in ihren eigenen Worten“ (MMS 2.0, S. 33). Mit dem Operator *Erklären* konnten zudem einige der im Kapitel 5.2 bereits angesprochenen „äußeren Impulse“ des ursprünglichen Skripts verwendet werden. So können z.B. „Warum?“-Fragen (siehe Abbildung 4) beispielsweise in einen Arbeitsauftrag mit dem Operator *Erklären* verwandelt werden, der mit einem Handlungsraum versehen werden kann (siehe Abbildung 5).

5.2.2.4 Vergleichen von Inhalten

Der Operator *Vergleichen* zielt auf das Darstellen von „Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede[n]“ (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 2). Das damit einhergehende Aufdecken von Zusammenhängen sei in verschiedenen Bereichen des mathematischen Arbeitens von großer Relevanz (Gallin, 2011, S. 107). Im MMS 2.0 wurde dieser Operator beispielsweise verwendet, um einen Zusammenhang vom Explorations- zum Vorlesungsabschnitt zu schaffen und so auf die bereits durch die Exploration geschaffene Intuition zum Induktionsprinzip zu verweisen. Die zugehörige Aufgabenstellung lautet dabei: „Vergleichen Sie den Dominoeffekt mit dem hier vorgestellten Beweisprinzip“ (MMS 2.0, S. 12). Außerdem könnten mithilfe des Operators *Vergleichen* beispielsweise bereits verwendete Beweisstrukturen mit neuen verglichen und so sichtbar voneinander abgegrenzt werden. Im MMS 2.0 wurde z.B. versucht, eine Variante des Induktionsprinzips durch den Vergleich der zu beweisenden Aussage mit bereits bewiesenen Aussagen als solche zu identifizieren (siehe Abbildung 6). Eine entsprechende Beweisidee könnte so bereits vor der Definition dieser Variante entstehen. Außerdem könnten Studierende für verschiedene Abwandlungen des Beweisprinzips bereits sensibilisiert werden.

Varianten des Induktionsprinzips

Beispiel 4 Im Folgenden möchten wir uns eine Variante des Induktionsprinzips verdeutlichen, durch die wir die Existenz der Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ begründen:

Sei $A(n)$ die Aussage

„n kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden".

Dabei wird auch ein Produkt mit genau einem Faktor zugelassen.

Prüfen Sie exemplarisch den Wahrheitsgehalt der Aussage. Vergleichen Sie die Aussage mit den bereits bewiesenen Aussagen in Hinblick auf eine Beweisidee.

Abbildung 6: Vergleichen von Aussagen in Hinblick auf eine Beweisidee im MMS 2.0 (S. 32)

5.2.2.5 Zusammenfassen von Beweisen

Zusammenfassungen im Allgemeinen stellen Organisationsstrategien dar, welche Erkenntnisse festhalten und zu einem späteren Zeitpunkt abrufbar machen (Göller, 2020, S. 99). Im MMS 2.0 wird die Aufgabe: „Fassen Sie die Kernidee des Beweises in ein bis zwei Sätzen zusammen" (MMS 2.0, S. 12) gestellt, welche sich auf das erste Beispiel des Beweises per vollständige Induktion bezieht. Das Beweisbeispiel wurde dabei besonders detailliert vorgeführt und bereits durch mehrere Arbeitsaufträge beleuchtet.

Die vorangegangenen Inhalte des MMS 2.0 und die zugehörigen Arbeitsaufträge münden dabei in dieser Zusammenfassung. In diesem Fall werden die zentralen Punkte des Beweises per vollständige Induktion anhand eines Beispiels herausgearbeitet, noch bevor die formale Definition des Beweisprinzips vorliegt. So kann eigenständig auf die formale Definition vorbereitet werden. Außerdem wird eine Strategie aufgezeigt, das Verständnis des vorgegebenen Beweisbeispiels zu überprüfen (Houston, 2012, S. 309).

5.2.2.6 Beschreiben in eigenen Worten

Gueduet (2008, S. 244) macht darauf aufmerksam, dass Studierende in der Studieneingangsphase schnell anfangen, die mathematisch formale Sprache der Lernenden zu imitieren, wobei Texte produziert werden, die mehr auf die Form ausgerichtet sind als auf die Bedeutung. Im MMS 2.0 wurde der Operator *Beschreiben* bei Aufgaben verwendet, in denen über die Bedeutung der mathematisch formalen Sprache nachgedacht werden sollte. *Beschreib*-Aufgaben im Rahmen des MMS 2.0 wären z.B. „Beschreiben Sie das Prinzip der vollständigen Induktion in eigenen Worten" (MMS 2.0, S. 13) oder „Beschreiben Sie die Varianten des Induktionsprinzips in eigenen Worten" (MMS 2.0, S. 34). Dabei wurde betont, dass die Beschreibung in eigenen Worten geschehen soll, um das reine Imitieren der formalen Sprache zu vermeiden und stattdessen auf das bekannte, alltägliche Sprachregister zurückzugreifen. Dieses sei nach Wagenschein (1986, S. 102) die Sprache des Verstehens und würde dementsprechend verstehensorientiertes Lernen fördern. Die Fachsprache wird bei Wagenschein (1986, S. 102) eher als Lerngegenstand deklariert, welcher sich aus der Alltagssprache mit dem Lernprozess erst entwickelt.

In diesem Zusammenhang soll nochmals auf Freudenthal (1971, S. 427) verwiesen werden, welcher folgendes behauptet:

> Active mathematics, however, knows many levels of rigor, and good teaching should respect them. It should also respect the fact that rather than being imposed each of these kinds of rigor should naturally develop in the learning process.

Auf die mathematische Fachsprache bezogen könnte dementsprechend angenommen werden, dass anstatt eines Aufdrängens der mathematischen Fach- bzw. Formelsprache, ein Rückgriff auf die Alltagssprache als Sprache des Verstehens trotz der fehlenden Strenge in den Lernprozess eingebunden werden könnte, um eben jenen zu fördern. Das Ziel wäre dabei ein schrittweises Erlernen der mathematischen Fachsprache über die Sprache des Lernenden, wie sie durch den Ausdruck „in eigenen Worten" intendiert wurde.

5.2.2.7 Erstellen von Beweisideen

Nachdem der Wahrheitsgehalt eines Satzes überprüft wurde, wurde die Möglichkeit geboten, eine eigene Beweisidee zu erstellen. Die Idee entspricht der Behauptung von Riss & Schmidt (2011, S. 290), welche betonen, dass Lösungsansätze entwickelt werden müssen, bevor diese abgeleitet werden. An dieser Stelle wird zudem eine weitere Funktion der *Prüfen*-Aufgaben deutlich, nämlich die, auf Beweisideen vorzubereiten. Es wird hervorgehoben, dass das „eigentliche Hauptproblem für Mathematikstudenten […] im Auffinden des richtigen Ansatzes zur Lösung eines mathematischen Problems" (Riss & Schmidt, S. 290) bestehe. Im MMS 2.0 werden Studierende durch *Erstellen*-Aufgaben motiviert, nach einer entsprechenden Vorbereitung durch *Prüfen*-Aufgaben zunächst nach einem Ansatz zu suchen, bevor dieser im Skript korrekt präsentiert wird. Dies würde Studierende anregen, eigene mathematische Ideen in ihr persönliches Skript einzubringen und entspräche direkt der Zielsetzung, Studierende zu eigenen hochschulmathematischen Beiträgen zu motivieren.

5.2.2.8 Ergänzen von Beweisen

Im MMS 2.0 werden die Studierenden an verschiedenen Stellen aufgefordert, Beweise zu ergänzen, indem z.B. Rechnungen durch Zwischenschritte ergänzt oder leichtere Beweisschritte, wie z.B. der Induktionsanfang, eigenständig gezeigt werden sollten (siehe Abbildung 7). Auch damit wird eine

Möglichkeit aufgezeigt, Studierende in Bezug auf das Beweisen unterstützend zu aktivieren.

Beweis zu Satz 1 Die Aussage $A(n)$, die für jede natürliche Zahl n durch Induktion zu beweisen ist, lautet hier:

„Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$."

Zeigen Sie zuerst, dass der Induktionsanfang gilt:

Nun müssen wir noch zeigen, dass auch der Induktionsschluss ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$) stimmt: Nehmen wir also an, wir wüssten, dass die Ungleichung für ein beliebiges, aber festes n für alle $x \geq -1$ richtig ist, und wir wollen sie für $n+1$ zeigen.

Dazu rechnen wir für $x \geq -1$ folgendermaßen:

Ergänzen Sie.

$$(1+x)^{n+1} \overset{(1)}{=} (1+x)^n(1+x)$$

$$\overset{(2)}{\geq}$$

$$\overset{(3)}{=} 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\overset{(4)}{\geq}$$

Abbildung 7: Beispiel für das Ergänzen von Beweisen im MMS 2.0 (S. 16)

Die *Zeigen*-Aufgaben wurden ebenfalls mit der Intention konzipiert, Beweise zu ergänzen. Der Operator *Zeigen* bedeute in der schulischen Mathematik dabei „Aussagen unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen [zu] bestätigen" (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 2) und entspricht dem im MMS 2.0 intendierten, universitären Gebrauch des Operators. Im MMS 2.0 wurde diesbezüglich z.B. die Aufgabe gestellt, den Induktionsanfang zu zeigen, welcher bei Werner (2021) meist eher nebensächlich thematisiert wurde. In dieser Arbeit wird jedoch die Meinung vertreten, dass auch solche von

Dozierenden als leicht empfundenen Beweisschritte trotzdem eine Berechtigung im Vorlesungsskript haben sollten.

5.3 Aufbau: Exploration – Vorlesung – Reflexion

Das Skript verfolgt wie bereits erwähnt einen dreiteiligen Aufbau, der in einen Explorations-, einen Vorlesungs- und einen Reflexionsabschnitt gegliedert ist. Der Aufbau des Skripts erinnert dabei an den methodischen Dreischritt nach Meyer (2012, S. 70f.). Dieser besteht aus einem Einstieg, einer Arbeitsphase und einer Ergebnissicherung und sei „überall dort, wo der Unterricht über klare Aufgabenstellungen gesteuert wird“ (Meyer, 2012, S. 70), vertreten. Dieses Konzept, welches einen klassischen Aufbau für Unterrichtsstunden beschreibt, wird hierbei auf das MMS 2.0 übertragen. Dadurch soll wieder an Methoden der Schule angeschlossen und somit für ein vertrauteres Lernumfeld gesorgt werden. Der Einstieg nach Meyer (2012, S. 70) soll dabei eine Eröffnung der Stunde und somit des Themas im Sinne einer Motivation beinhalten und entspricht im MMS 2.0 der Explorationsphase. Die Arbeitsphase beinhaltet nach Meyer (2012, S. 70) die Konkretisierung, Anwendung und Übung, welche in dem Vorlesungsabschnitt des MMS 2.0 stattfinden soll. Die Ergebnissicherung als Unterrichtsphase beinhaltet unter anderem eine Dokumentation, Präsentation und ggf. Reflexion des Gelernten. Im MMS 2.0 wurde bewusst mehr auf die Reflexion fokussiert, nach der dieser Abschnitt auch benannt wurde. Dies beachtet, dass eine Dokumentation des Gelernten sich bereits durch das gesamte MMS 2.0 zieht, damit Lernen als Prozess sichtbar wird und eine formale Sicherung in der Präsenzvorlesung erfolgen kann.

5.3.1 Exploration

In der Lehrveranstaltung MPB stellt Grieser (2015, S. 96) die Relevanz explorativer Phasen dar, welchen idealerweise viel Zeit eingeräumt werden sollte. Diese Zeit wird während einer traditionell gestalteten Vorlesung grundsätzlich nicht für Studierende bereitgestellt und ist auch bei Werner (2021) nicht in derselben Form vorhanden. Um solche Phasen trotzdem, auch für traditionell gestaltete Vorlesungen, anzubieten, kann eine fakultative Explorationsphase zu Beginn jeden Teilkapitels des Vorlesungsskripts bereitgestellt werden. Das Ziel soll ein motivierender, aber gleichzeitig nicht zu herausfordernder Einstieg in das nächste Thema sein. Dass am Anfang von jedem Fachwissen der motivationale Aspekt stehen sollte, stellt unter anderem Gallin (2011, S. 107) dar. Im MMS 2.0 soll so die zentrale Idee, das zentrale Prinzip oder das zentrale Thema möglichst interessant eingeleitet und darauf aufbauend die eigentlichen Vorlesungsinhalte abgebildet werden. Solch eine Explorationsphase kann Studierende bereits vor dem Bearbeiten der Vorlesung auf die kommenden Inhalte einstimmen. Gleichzeitig stellt diese den Anfang der mathematischen Tätigkeit jedes Teilkapitels und somit einen besonderen Handlungsraum dar. Exemplarisch soll solch eine Explorationsphase im Folgenden vorgestellt werden.

5.3.2 Der Dominoeffekt

Die erste Explorationsphase des MMS 2.0 soll auf das erste Teilkapitel des Analysis-Skripts vorbereiten. Dieses ist vor allem durch den erstmaligen Gebrauch des Beweisprinzips der vollständigen Induktion gekennzeichnet. Aus diesem Grund hat die Exploration auch das Ziel, eine intuitive Grundhaltung für das Prinzip der vollständigen Induktion vorzubereiten. Winter (2016, S. 148) verweist darauf, dass „beim Lernen die intuitiven Momente nicht durch logische und axiomatische Regelungen erdrückt werden“ dürfen, wenn ein intuitives Verstehen angestrebt werden soll.[17] Aus diesem Grund erschien ein eher auf die Intuition ausgerichteter Einstieg per Dominoeffekt sinnvoll, welcher eine Assoziation zu der im Vorlesungsabschnitt thematisierten vollständigen Induktion, hervorrufen soll. Der zugehörige Arbeitsauftrag lautet wie folgt:

[17] Winter (2016, S. 148) betont ebenfalls, dass nach Poincaré (1976, S. 13) die vollständige Induktion nur auf eine intuitive Weise gelernt werden kann.

> Stellen Sie sich eine aufgestellte Reihe von Dominosteinen vor, welche aufsteigend mit natürlichen Zahlen durchnummeriert worden sind. Das heißt der erste Dominostein hat die Nummer 1, der zweite die Nummer 2, der dritte die Nummer 3, usw. Sie dürfen einen Dominostein anstoßen. Beschreiben Sie, was gelten müsste, damit alle Steine umfallen.

Diese Aufgabe soll einen „äußeren Impuls“ geben, der Studierende durch eine lebensweltlich bekannte Situation zum Denken auffordert. Sie wird bewusst alltagssprachlich formuliert, um zugänglicher gestaltet zu sein.

Angelehnt ist die Idee des Dominoeffekts, welcher aufgrund der Exploration mit der vollständigen Induktion in Verbindung gebracht wird, an die bereits vorgestellten iMPACt-Arbeitshefte und das ebenfalls schon erwähnte Werk von Grieser (2013b). Der iMPACt-Grundlagenkurs behandelt in einem Kapitel ebenfalls die natürlichen Zahlen, wobei der Schwerpunkt auf der Induktion und Rekursion liegt. Nachdem eine Einführung der natürlichen Zahlen und anderer Zahlenmengen erfolgt, wird das Induktionsprinzip dort als „grundlegende Eigenschaft“ der natürlichen Zahlen und die Varianten für $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \geq a$, wobei a eine ganze Zahl sei und für $\mathbb{Z}$, wobei a und b gegeben sind mit $a < b$ mathematisch-formal vorgestellt. Danach wird das Beweisprinzip der vollständigen Induktion ebenfalls mathematisch-formal gezeigt und mit Anmerkungen zum Benennen der einzelnen Beweisschritte und dem Index abgeschlossen. Bis hierhin ist das Arbeitsheft beinahe identisch mit dem Vorlesungsskript von Werner (2021), wobei bei jenem eine weniger detaillierte Gestaltung vorliegt und die Varianten des Induktionsprinzips erst am Ende des Teilkapitels thematisiert werden. Im iMPACt-Arbeitsheft wird im Anschluss eine Beispielaussage vorgestellt, welche mithilfe der vollständigen Induktion bewiesen wird. Die zugehörige Erläuterung beinhaltet dann den Vergleich des Beweises mit dem Dominoeffekt, wobei jeder Schritt auf diesen übertragen wird. Bei Grieser (2013b, S. 61f.) wird mit weniger Vorarbeit das Beweisprinzip der vollständigen Induktion vorgestellt und im Anschluss kurz auf den Dominoeffekt verwiesen, welcher durch eine Zeichnung zusätzlich veranschaulicht wird.

Um dem vorgestellten Ziel, die Studierenden selbst tätig werden zu lassen und ihr eigenes Lernen mitzugestalten, gerecht zu werden, wurde entschieden, im Gegensatz zu den vorgestellten Ansätzen nicht mit einer formalen Klärung der vollständigen Induktion zu beginnen. Die in den iMPACt-Arbeitsheften und bei Grieser vorgestellte Idee des Dominoeffekts, wurde hingegen als Einstieg in das Teilkapitel gewählt, welcher die Studierenden von Beginn an motivieren soll.

Im MMS 2.0 befindet sich auf der folgenden Seite dann die Auflösung des Dominoeffekts, welche zusätzlich bereits auf die Variable n als Element der natürlichen Zahlen vorbereitet, da diese nun verallgemeinert mit der Nummerierung der Dominosteine assoziiert wird. Die Studierenden werden im Anschluss aufgefordert, die Auflösung mit der eigenen Beschreibung zu vergleichen und Unterschiede aufzuschreiben. Dadurch soll ein erweitertes Bewusstsein für die einzelnen Schritte der Lösung geschaffen und Verständnisschwierigkeiten aufgedeckt werden.

5.3.2 Vorlesung

Der Abschnitt zu der Vorlesung stellt die eigentlichen Vorlesungsinhalte dar. In diesem Fall bestehen diese aus dem ursprünglichen Skript von Werner (2021), werden jedoch auf eine andere Art dargeboten, um beim Durcharbeiten einen Mehrwert für das Lernen an sich, das Bearbeiten der Übungszettel, und die Vorbereitung auf die Klausur, zu leisten. Im Folgenden werden einige Aspekte des Vorlesungsabschnitts des MMS 2.0 erklärt, welche für die Realisierung der in Kapitel 4 beschriebenen Zielsetzung besonders wichtig erscheinen.

5.3.2.1 Überschriften

Das ursprüngliche Skript wurde zunächst durch mehrere Überschriften ergänzt, welche bereits in Kapitel 5.1.5 thematisiert worden sind. Inspiriert wurde die Idee durch das Vorlesungsskript von Weidmann (2004), in welchem eine übersichtlichere Darstellung einzelner Vorlesungsabschnitte durch Zwischenüberschriften empfunden wurde. Im MMS 2.0 richten sich die Zwischenüberschriften nach den in dem jeweiligen Abschnitt fokussierten Definitionen und Sätzen, sodass eine zusätzliche Strukturierung der Vorlesung stattfindet. Durch die verschiedenen Abschnittsüberschriften, können explizit Verknüpfungen zwischen den verschiedenen Textteilen der Vorlesung geschaffen werden. Dabei dient die zusätzliche Übersichtlichkeit in erster Linie der Möglichkeit, dass inhaltliche Zusammenhänge durch die Studierenden erkannt werden könnten. Solche beispielsweise durch Überschriften erzeugten Zusammenhänge werden in der Textlinguistik mit der Begrifflichkeit „globale Textkohärenz“ (Stephany, 2017, S. 47) bezeichnet. Dass durch Titelinformationen verschiedenste Sachverhalte kognitiv zusammengefasst werden und somit einen erheblichen Beitrag zu der Förderung einer solchen Textkohärenz leisten können, zeigt z.B. Schwarz-Friesel (2006, S. 70). Sie stellt zudem heraus, dass globale Kohärenz eine Voraussetzung für weiterführendes Verständnis sei (Schwarz-Friesel, 2006, S. 70).

5.3.2.2 Vom Konkreten zum Abstrakten

Wie bereits herausgestellt, sind traditionell gestaltete Vorlesungen bzw. Vorlesungsskripte durch Definitionen, Sätze und Beweise gekennzeichnet (Rach et al., 2014, S. 208). Dabei sei folgende Reihenfolge üblich: Zunächst werden Begriffe durch eine formale Definition präsentiert, die eventuell durch Beispiele ergänzt wird. Dabei wird sich jedoch hauptsächlich und meist auch sehr knapp darauf beschränkt, die durch die Definition gegebenen Eigenschaften des Begriffs nachzuprüfen. Aufbauend auf der Definition wird die mathematische Theorie weiter vorgestellt.[18]

Bei der Einführung neuer mathematischer Begriffe in der Schule wird meist ein informelleres Format gewählt (Engelbrecht, 2010, S. 143). Lernende bilden so zunächst eine kognitive Struktur des Begriffs aus, welche in der Fachdidaktik auch als *concept image* (Tall & Vinner, 1981, S. 152)

---

[18] Diese Aussagen werden durch das Einarbeiten in die bereits vorgestellten Skripte getroffen (siehe Fußnote 7).

beschrieben wird. Erst dann erfolgt eine Spezifizierung des Konzepts hinter dem Begriff, welche als *concept definition* (Tall & Vinner, 1981, S. 152) tituliert wird und das *concept image* so ergänzen kann. Dabei wird betont, dass die formale Definition im schulischen Unterricht auch gänzlich ausbleiben kann (Rach & Heinze, S. 126). Winter betont in seinem Artikel „Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht" vor allem das Potential von Beispielen als Zugänge zu mathematischen Begriffen (Winter, 1983, S. 175). Um der Akzentverschiebung entgegenzuwirken, wie sie von der Schule zur Hochschule in der Begriffsbildung erfolgt, wird im MMS 2.0 die Reihenfolge der Präsentation mathematischer Inhalte verändert. Im Sinne eines verständnisorientierten Lernens, der die schulischen Methoden ebenfalls im Blick behält, soll das MMS 2.0 zunächst Beispiele vorstellen, bevor allgemeingültige Definitionen eingeführt werden. Auf diese Weise sollen die Beispiele eine Grundlage schaffen, welche ebenfalls das mathematische Lesen formaler Definitionen erleichtern könnten. Die formalen Definitionen wurden im MMS 2.0 sprachlich nicht verändert und vom ursprünglichen Skript übernommen. Ein Beispiel für solch eine veränderte Einführung von Definitionen wäre z.B. die Fakultät. Diese wird bei Werner (2021, S. 6) eher flüchtig innerhalb der Definition des Binomialkoeffizienten vorgestellt. Im MMS 2.0 wird diese jedoch erst durch Beispiele herangeführt, bevor die formale Definition erfolgt (MMS 2.0, S. 17).

Auch die vollständige Induktion wird zunächst per Exploration und dann durch ein konkretes, vollständig angegebenes Beweisbeispiel eingeführt. Körner betont in diesem Zusammenhang (2005, S. 243):

> Wir lernen nicht das Violinspielen, indem wir Violine spielen, oder das Klettern, indem wir klettern. Wir lernen es, indem wir Experten dabei zuschauen, wie sie das machen, und indem wir sie dann imitieren. Übung ist ein wesentlicher Teil des Lernens, aber das Üben ohne Anleitung ist im Allgemeinen nutzlos und oft sogar schädlich.

Bei Blömeke (2016, S. 10f.) wird zudem herausgestellt, dass Modelllernen das mathematikbezogene Kompetenzerleben fördern kann. Es wird aufgrund der anfänglichen Fokussierung vieler Studierender auf das Beweisen z.B. vorgeschlagen, anhand der Auseinandersetzung mit fertigen Beweisen das Beweisen zu lernen (Blömeke, 2016, S. 11). Trotz der Betonung des MMS 2.0 auf Phasen der Eigenaktivität, soll es also auch, wie in der Vorlesung, Phasen geben, welche konkrete Lösungsbeispiele (z.B. für einen Beweis per Vollständige Induktion) vorzeigen. Diese wurden jedoch detaillierter gestaltet als im ursprünglichen Skript (siehe Abbildung 8 und 9). Es wurde versucht, jeden einzelnen Beweisschritt herauszustellen und wiederum durch Absätze zu strukturieren, um Übersichtlichkeit zu schaffen, die das Lernen dieses Beweises unterstützen soll.

Als Beispiel betrachten wir die Aussage

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{I.1.1}$$

die wir durch vollständige Induktion beweisen wollen. Dass der Induktionsanfang stimmt, sieht man, indem man auf beiden Seiten $n = 1$ einsetzt. Nehmen wir nun an, wir wüssten, dass die Formel für ein beliebiges, aber festes n richtig ist, und wir wollen sie dann für $n + 1$ beweisen. Das machen wir in der folgenden Gleichungskette:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

im vorletzten Schritt wurde die Induktionsvoraussetzung benutzt.

Abbildung 8: Beispiel zur vollständigen Induktion bei Werner (2021, S. 6)

Um allgemeingültig zu zeigen, dass die Aussage für wirklich alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, reicht das exemplarische Probieren leider nicht aus.

Wir brauchen einen Beweis.

Beweis zu Beispiel 1

Zuerst überprüfen wir, ob die Aussage für die erste natürliche Zahl, also $n = 1$, gilt. Vielleicht haben Sie dies für Ihre exemplarische Überprüfung der Aussage sogar bereits getan, vollständigerweise wird dies hier trotzdem nochmals aufgeführt:

$$A(1): \sum_{k=1}^{n+1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Im zweiten Schritt setzen wir hypothetisch voraus, dass $A(n)$ gilt und überprüfen, ob dann auch $A(n+1)$ wahr ist. Das heißt, wir möchten die Aussage $A(n+1)$ zeigen unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ wahr ist.

Wenn wir uns zuerst überlegen, wie die Aussage $A(n+1)$ konkret aussieht, fällt uns der Beweis eventuell etwas leichter:

$$A(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Nun versuchen wir eine Gleichungskette zu bilden, in der wir zeigen, dass $A(n+1)$ gilt, wenn $A(n)$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &\overset{(3)}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Abbildung 9: Beispiel zur vollständigen Induktion im MMS 2.0 (S. 11)

5.3.2.3 Schulbezug

„Der junge Student sieht sich im Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat, und natürlich vergisst er daher alle diese Dinge rasch und gründlich“ (Klein, 1908, S. 1). Auch heutzutage wird der Fokus der universitären Ausbildung auf eine Theorie gerichtet, welche einen geringen Bezug zu der Schulmathematik aufzuweisen scheint (Hochmuth, 2015, S. 188). In dieser Arbeit wird die Ansicht vertreten, dass das Interesse von Studierenden zu Beginn des Studiums weniger stark absinke, wenn auf Zusammenhänge universitärer Mathematik mit schulischer Mathematik in Vorlesungen oder Vorlesungsskripten hingewiesen wird. Durch diese könnte z.B. Vorwissen aktiviert werden. „Die gezielte Aktivierung bestimmter Wissensbestände unterstützt ein bedeutungsvolles und nachhaltiges Lernen und die Korrektur bzw. Vermeidung von Fehlkonzepten“ (Krause & Stark, 2006, S. 41). Solch eine Aktivierung im Zusammenhang mit einem Bezug zur Schulmathematik könnte z.B. in der bereits vorgestellten Aufgabe des Skizzierens eines Schaubilds von Mengen erreicht werden. Bei dieser Aufgabe würde es sich zudem anbieten, bei späterem Verlauf der Vorlesung nochmals auf die anfängliche Skizze zu verweisen und auf Unterschiede des mitgebrachten Wissens und des durch die universitäre Mathematik gewonnenen Wissens zu verweisen, um eine erwünschte, eventuell nötige „Korrektur von Fehlkonzepten“ zu verstärken. Auch im Zusammenhang mit der Definition des Binomialkoeffizienten und der Fakultät wurde im MMS 2.0 auf die eventuelle schulische Bearbeitung dieser Inhalte verwiesen. Im MMS 2.0 wurden zudem auch Zusammenhänge aus der schulischen Mathematik aufgezeigt, welche durch die universitäre Mathematik erweitert wurden. So wird die binomische Formel, welche einen Spezialfall des binomischen Satzes darstellt, bereits in der Sekundarstufe I vorgestellt (Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin, 2017, S. 56). Der binomische Satz in der Universität gilt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$. Diese besondere Erweiterung des Wissens könnte für Studierende interessant sein, also wird im MMS 2.0 auch explizit darauf hingewiesen, wie z.B. in der folgenden *Prüfen*-Aufgabe: „Prüfen Sie den Binomischen Satz für den Spezialfall $n = 2$. Diesen kennen Sie wahrscheinlich bereits aus der Schule unter dem Namen der Binomischen Formel“ (MMS 2.0, S. 26).

5.3.2.4 Freiwillige Übung

> Es ist zu bedenken, dass es sich bei Professorinnen und Professoren der Mathematik in der Regel um Hochbegabungen mit einer intensiven fachlichen Identifikation und einem eingeübten Habitus handelt. […] Oft

> sind diese Prägungen so weit verinnerlicht, dass kaum noch nachvollzogen werden kann, wie viel Anstrengung Novizen aufbringen müssen, um in diese Gedankenwelt und ihre latenten Normen hineinzuwachsen. (Hefendehl-Hebeker, 2013, S. 7)

Vermutlich kann dadurch erklärt werden, dass viele Gedankengänge, welche für Novizen und Novizinnen keinesfalls selbstverständlich sind, in den Ausführungen der Vorlesungsskripte, aber auch in Vorlesungen übersprungen werden (siehe Abbildung 10). Während viele Studierende somit in der

$$= \binom{n}{n}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0}y^{n+1}$$

Die beiden äußeren Binomialkoeffizienten sind jeweils 1, und für die Binomialkoeffizienten in der Summe gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k};$$

dies kann man mit Hilfe der Fakultäten nachrechnen (tun Sie's!) oder sich mit Hilfe der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten klarmachen (tun Sie's!). Daher vereinfachen sich die zuletzt berechneten Terme zu

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k},$$

und das war zu zeigen. □

Abbildung 10: Beispiel für das Überspringen von Beweisschritten bei Werner (2021, S. 8)

Schule regelmäßig Kompetenz und Autonomie erlebten (Rach & Heinze, 2013, S. 143), bieten sich dafür durch das verständnislose Umgehen von Beweisschritten noch weniger Chancen. Bei Rach und Heinze (2013, S. 143) wird ausgeführt, dass einige Studierende sich diesbezüglich für „eine Mischung aus einfacheren und schwierigeren Übungsaufgaben“ aussprechen, um Erfolgserlebnisse zu konstruieren und das Kompetenzerleben zu begünstigen. Im MMS 2.0 wurde versucht, das Überspringen von Beweisschritten der Vorlesungsskripts für zusätzliche freiwillige Übungsaufgaben zu nutzen (siehe Abbildung 11), welche dementsprechend einen niedrigeren Schwierigkeitsgrad haben und den entsprechenden Beweis vorbereiten. In dem zugehörigen Beweis wurde dann auf diese verwiesen (MMS 2.0, S. 30).

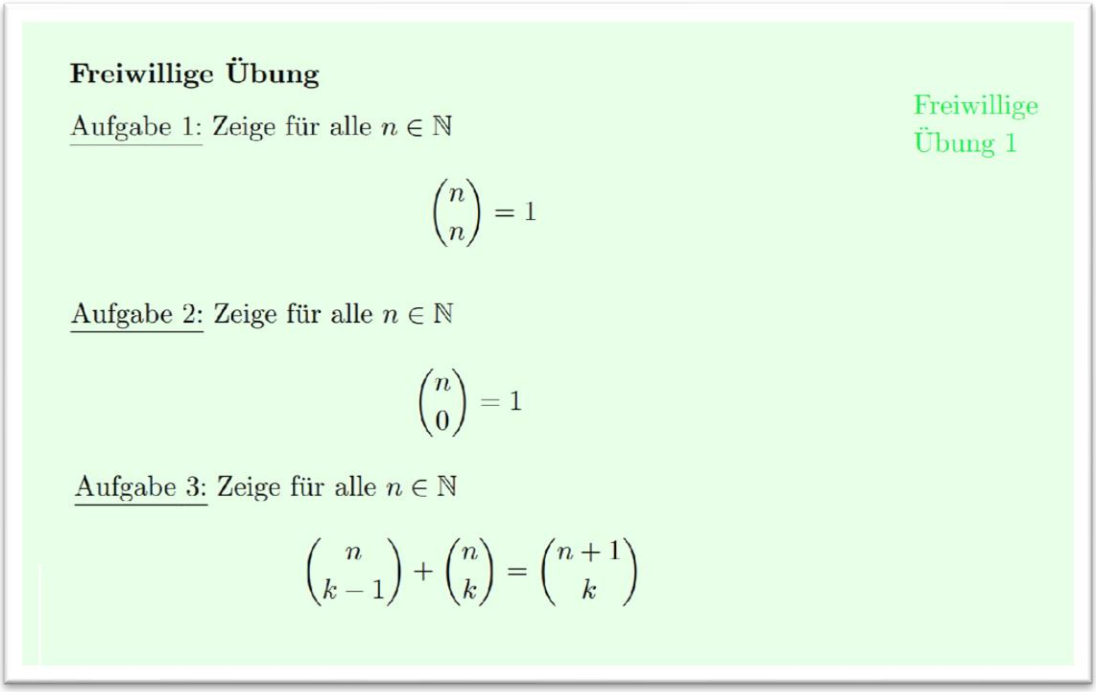


Abbildung 11: Freiwillige Übung im MMS 2.0 (S. 23ff.), Abstände verändert

5.3.2.5 Verpflichtende Übung

Um der Zielsetzung, die Aufgabenzettel als Lerngelegenheit hervorzuheben, direkt zu entsprechen, wurden deren Aufgaben in das MMS 2.0 integriert. In diesem Zusammenhang wurde ein Ansatz von Biehler und Kempen verfolgt, die für die Abgabe der Übungsaufgaben zwei Ausführungen fordern: Die „Entdeckungsnotizen“ der Studierenden und eine „Reinschrift“ der Bearbeitung der Übungsaufgaben (Biehler & Kempen, 2015, S. 129). „In der „Reinschrift“ werden höhere Anforderungen an die logische, formale und sprachliche Darstellung gestellt.“ (Biehler & Kempen, 2015, S. 129). Diese soll im besten Fall die von Hochschuldozierenden erwartete mathematische Leistung widerspiegeln. Die Entdeckungsnotizen sollen dabei eher den Weg zu der Beweisidee darstellen, welcher nicht formal korrekt dargeboten werden muss. Auf diese Weise soll der Unterschied der Phasen des Entdeckens und Begründens gehandhabt werden (Biehler & Kempen, 2015, S. 129), welche auch bei der Bearbeitung der Übungszettel stattfinden sollten. Dem Grundsatz folgend, dass eine Trennung von Lern- und Leistungssituationen für das mathematikbezogene Kompetenzerleben von

Bedeutung sei (Blömeke, 2015, S. 20), wird in dieser Arbeit die Ansicht vertreten, dass das Einsammeln solcher „Entdeckungsnotizen“ sich nicht unbedingt positiv auf das Erleben von Kompetenz der Studierenden auswirken muss. Die Idee, informelle Erkundungen der Übungsaufgaben zu motivieren, wurde jedoch übernommen. Um den Zusammenhang zu mathematischen Inhalten der Vorlesung und deren Relevanz deutlich zu machen, werden die jeweiligen Übungsaufgaben thematisch sortiert an die passende Stelle im Skript integriert. Erhofft wird dadurch eine positivere, stressreduziertere Herangehensweise, welche einerseits den Wert des systematischen Vorarbeitens der Vorlesung auch im Zusammenhang mit den Übungsaufgaben deutlich macht und die Übungsaufgaben andererseits als zwangfreie Lerngelegenheit darbietet. Wie gewohnt kann jedoch eine getrennt formulierte Reinschrift von den Studierenden verfasst und verpflichtend abgegeben werden.

5.3.3 Reflexion

Das ursprüngliche Skript wurde zum Abschluss des ersten Teilkapitels um eine Reflexionsphase ergänzt. Diese soll die Haltung zum individuellen Lernverhalten wie eine Art Rückblick sichtbarmachen, kann jedoch wahlweise auch bereits parallel zur Bearbeitung des Explorations- oder Vorlesungsabschnitts ausgefüllt werden. Dabei soll jedoch nicht unbedingt eine inhaltliche Wiederholung, wie sie beispielsweise in den iMPACt-Arbeitsheften im Rahmen der Wissensspeicher angestrebt wurde, sondern zudem ein Rückblick auf nichtkognitive Aspekte ermöglicht werden, welche ebenfalls eine Rolle für das Lernen spielen und sogar Bestandteile von Kompetenzen sind (Greefrath et al., 2015, S. 28). Das Einnehmen einer solchen reflexiven Haltung soll die Lernleistung der Studierenden nachhaltig positiv beeinflussen (Böttinger & Boventer, 2016, S. 57) und somit auf zukünftiges Lernen vorbereiten.

Die Reflexionsphase wurde in folgende drei Abschnitte unterteilt: „Mein(e) Aha-Moment(e)“, „Meine Herausforderung(en)“ und „Meine Frage(n)“.

Jeder der drei Abschnitte muss sich dabei – je nach Interpretation der Studierenden – nicht auf mathematische Inhalte beziehen. Möglich sind auch das Dokumentieren von Erfolgen oder Herausforderungen bei Lernstrategien sowie organisatorische Fragen.

5.3.3.1 Mein(e) Aha!-Moment(e)

> Sobald Einsicht und Verstehen ins Spiel kommen, reicht es nicht mehr aus, beim lernenden Menschen nur die fachlichen Kompetenzen zu fördern, sondern man muss sich – gemäß Weinert – auch um seine motivationalen und emotionalen Grundlagen kümmern. (Gallin, 2010, S. 107)

Studierende haben sich grundsätzlich für ein Mathematikstudium entschieden, weil ihnen das Fach in der Schule vermutlich gefiel und sie gute Leistungen erbracht haben (Kaenders et al., 2015, S. 149). Somit erwarten sie auch, dass das Studium ihnen Freude bereiten wird. Wie bereits ausgeführt, verliert ein großer Teil der Studierenden jedoch vor allem am Studienanfang an intrinsischer Motivation. Schon über kleine Erfolgserlebnisse kann jedoch die Motivation und das mathematische Selbstbewusstsein gestärkt werden (Blömeke, 2016, S. 10). Aus diesem Grund werden die Studierenden dazu ermutigt, solche individuellen Erfolgserlebnisse, welche im MMS 2.0 als „Aha!-Momente" betitelt wurden, zu verschriftlichen. Dies hat eine Sichtbarmachung der positiven Seiten des geleisteten Lernens zur Folge und soll die Studierenden ermutigen und motivieren.

5.3.3.2 Meine Herausforderung(en)

Bei der Bearbeitung des MMS 2.0 werden den Studierenden vermutlich neben Erfolgserlebnissen auch Herausforderungen begegnen. Dass Herausforderungen für den Lernprozess notwendig und Fehler, Irrtümer oder Umwege trotz der formalen Gestaltung der Vorlesung auch in der Mathematik vorkommen, soll in dem Abschnitt „Meine Herausforderung(en)" sichtbar werden. Dabei wird folgende Ansicht von Mason et al. (2010, S. viii) vertreten: „being stuck is an honourable state and an essential part of improving thinking". Die Sichtbarmachung solcher Herausforderungen könnte innerhalb der Reflexion dabei zu Einsichten führen, an welcher Stelle und eventuell auch warum diese Herausforderungen entstanden sind. Somit könnte das Aufzeigen individueller Herausforderungen auch als individuelle Lerngelegenheit gesehen werden.

5.3.3.3 Meine Frage(n)

Nach Stefanou et al. (2004, S. 101) soll das Fragenstellen eine Strategie darstellen, die kognitive Autonomie zu fördern. Bei Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016, S. 255) werden „Fragen als Wegbereiter zur Entdeckung“ erfasst. Auch Neber (2006, S. 51) stellt die Relevanz des eigenständigen Fragenstellens heraus, welches „die Konstruktion von Wissen, […] lernorientierte Motivation und […] metakognitive Fertigkeiten“ fördern soll. Aus diesen Gründen wurde im MMS 2.0 ebenfalls Raum für Fragen gelassen, welche beim Bearbeiten der Vorlesung auftreten könnten. Dieser soll die fragend-entdeckende Haltung der Studierenden fördern. Durch die geleistete Vorarbeit sollen sich Studierende gleichzeitigt ermutigt fühlen, Dozierende, Tutor/-innen, Kommilitonen und Kommilitoninnen auf gegebenenfalls entstandene Ungereimtheiten anzusprechen und vorher bereits überlegte Fragen zu stellen.

6. Manual an Hochschuldozierende

Dieser Teil der Arbeit richtet sich explizit an die Hochschuldozierenden der Mathematik. Angesichts der Fortgeschrittenheit der Arbeit dürfte die Veränderung herkömmlicher Vorlesungsskripte im Sinne des MMS 2.0 durchaus als sinnhaft erachtet werden. Um bei Dozierenden einerseits eine mögliche Überarbeitung ihrer Skripte anzuregen, andererseits aber auch Ideen vorzustellen, wie so eine Überarbeitung erfolgen könnte, wird im Folgenden eine Idee präsentiert, kurze Anleitungen für das Überarbeiten von Vorlesungsskripten zu erstellen, welche z.B. in der Universität ausgeteilt werden könnten. Ein solches Manual wurde zudem exemplarisch erstellt (siehe Abbildung 12). Dieses soll eine kurze und prägnante Anweisung darstellen, welche möglichst leicht integrierbare Ideen vorstellt, um eine realistische Anregung für Dozierende darzubieten. Trotz der leichteren Realisierbarkeit der im Manual vorgestellten, exemplarisch ausgewählten Maßnahmen, kann auf Grundlage dieser Arbeit auch so ein Beitrag zu einem lernförderlichen Vorlesungsskript geleistet werden. Nicht vorgestellt wurde in der Arbeit bisher die grundsätzliche Annahme, dass die Mathematikdidaktik bereitwillige Mathematikdozierende bei solchen Veränderungen unterstützen sollte, die im Manual ebenfalls deutlich wird.

An alle Mathematikhochschuldozierenden, die Lust haben, das eigene Vorlesungsskript lernförderlicher zu gestalten!

Mit diesen 8 Maßnahmen, können Sie Ihr Skript didaktisch aufpeppen:

1. *Erstellen von Absätzen!*
   Erstellen Sie Absätze zwischen Definitionen, Sätzen, Beispielen, Hinweisen, Beweisen, Beweisschritten usw. Dies schafft eine überschaubare Struktur.

2. *Erstellen von Überschriften für einzelne Absätze!*
   Erstellen Sie einschlägige Überschriften für alle Absätze und erhöhen Sie so die Übersichtlichkeit Ihres Vorlesungsskripts.

3. *Ränder nutzen!*
   Kennzeichnen wichtiger Vorlesungsinhalte am Rand des Skripts ermöglicht das schnelle Zurückgreifen auf eben jene.

4. *Ein bisschen Farbe schadet nicht!*
   Durch das Hervorheben der Definitionen und Sätze in unterschiedlichen Farben, stechen diese noch mehr hervor.

5. *Arbeitsaufträge ausformulieren!*
   Impulse wie „Warum?“ oder „Tun Sie dies!“ in Ihrem Skript könnten als ausformulierte Arbeitsaufträge zu Eigenaktivität anregen. Die Verwendung von Operatoren würde sich anbieten, z.B.: Erklären Sie…

6. *Platz lassen!*
   Um ihre Arbeitsaufträge für die Vor- und Nachbereitung einer Vorlesung nutzen zu können, könnte nach solchen Impulsen Platz für ein direktes Bearbeiten im Skript gelassen werden.

7. *Integrieren Sie die Übungen zusätzlich in Ihr Skript!*
   Auf diese Weise könnten Übungen für Studierende eher als Lerngelegenheit wahrgenommen und genutzt werden.

Sie möchten Ihr Skript lernförderlich gestalten, wissen aber nicht wie?

Die Mathematikdidaktik Ihrer Hochschule hat jede Menge Ideen, Angebote der mathematischen Lehre umzugestalten.

Lassen Sie sich beraten!

Abbildung 12: Manual an Mathematikhochschuldozierende

7. Reflexion der Arbeit

Im Folgenden werden einige Aspekte der entstandenen Arbeit reflektiert.

7.1 Probleme und Grenzen des MMS 2.0

Bei der Konzeption des MMS 2.0 und dessen Begründung sind einige Probleme und Grenzen aufgefallen, welche im Folgenden dargestellt werden.

Obwohl das Skript eine Nutzbarmachung der Ressource „Vorlesungsskript“ im Sinn hatte, weist die hohe Seitenzahl des ersten Teilkapitels bereits eine Schwachstelle des MMS 2.0 aus. Diese entsteht in erster Linie durch die vielen Handlungsräume, welche zwar Raum für direkt auf die Inhalte bezogenen Lernvorgänge schaffen, gleichzeitig aber das Skript erheblich in die Länge ziehen. Die so entstehende überdurchschnittliche Länge des MMS 2.0 könnte auf Studienanfänger/-innen ebenfalls einschüchternd wirken und die lernförderliche Nutzung des Angebots beeinträchtigen.

Auch die bunte Gestaltung könnte den Einsatz des MMS 2.0 verringern. Diese sollte in erster Linie das Ziel verfolgen, Übersichtlichkeit und Attraktivität zu bieten, um die Nutzung des Angebots zu optimieren. Jedoch wurden die damit entstehenden Druckkosten nicht bedacht, welche bei Studierenden ohne entsprechende Rückgriffmöglichkeiten auf digitale Formate, anfallen würden. Zusätzlich wurde bei der Konzeption des Skripts nicht auf Studierende geachtet, die eine Rot-Grün-Schwäche aufweisen. Eventuell könnte so eine soziale Benachteiligung stattfinden. Eine mögliche Lösung für dieses Problem würde das Ändern des MMS 2.0 in verschiedene Grautöne bieten.

Die vorgestellten Möglichkeiten des MMS 2.0 sind kein Garant für verbesserte Studienleistungen von Studienanfängern und /-anfängerinnen. Wie lernförderlich und didaktisch-präzise die Vorschläge des MMS 2.0 umgesetzt werden, ist immer noch dem didaktischen Potential der

Hochschuldozierenden unterworfen. Diese konzipieren letztendlich immer noch die Vorlesungsskripte für eigene Veranstaltungen und sind somit für eben jene selbst verantwortlich. Die exemplarischen Ausführungen dieser Arbeit können dabei Möglichkeiten und Ideen vorzeigen, wie solch eine veränderte Ausrichtung eines Vorlesungsskripts aussehen könnte. Ohne entsprechendes Hintergrundwissen in Bezug auf didaktische Herangehensweisen muss jedoch auch mit dem Vorschlag eines innovativen Vorlesungsskripts nicht unbedingt eine verbesserte Ausrichtung der Angebote auf die Bedürfnisse von Studierenden stattfinden. Vorgeschlagen wird hier ein intensiver Austausch von Dozierenden der Mathematik und Mathematikdidaktik, welcher grundsätzlich zu einer verbesserten Hochschullehre führen könnte (siehe Kapitel 6).

Ungeklärt ist auch die Frage, ob sich Anpassungen des MMS 2.0 für Studierende höheren Fachsemesters ebenfalls als geeignet erweisen könnten. Studierende höheren Fachsemesters sollten mit den wissenschaftlichen Konzepten eines mathematischen Universitätsmoduls und auch zugehörigen Vorlesungsskripten vertraut sein. Der Einsatz eines innovativen Vorlesungsskripts in höheren Fachsemestern könnte durch den erneuten Wechsel der Darbietung mathematischer Inhalte zu Verwirrung führen.

7.2 Weitere Möglichkeiten des MMS 2.0

Im Rahmen dieser Arbeit wurde bloß ein erstelltes Teilkapitel des MMS 2.0 exemplarisch vorgestellt. Bei der Konzeption wurden jedoch weitere Ideen gesammelt, von denen im Folgenden einige vorgestellt werden sollen.

7.2.1 Wie man beweist, dass…

Im MMS 2.0 wurden den Studierenden zwei Glossare zur Verfügung gestellt, wobei das eine das griechische Alphabet abbildet und das andere um mathematische Symbole und Bezeichnungen durch die Studierenden ergänzt werden kann. Es könnte jedoch auch darüber nachgedacht werden, stattdessen oder ggf. ergänzend eine Übersicht zu verschiedenen im Rahmen der Vorlesung erlernten Beweistechniken zu erstellen[19]. Dies würde sich vermutlich besonders für Einstiegsvorlesungen anbieten, in welchen grundlegende Beweisprinzipien vorgestellt werden. Houston (2012, S. 316ff.) stellt in seinem Buch z.B. eine glossarähnliche Zusammenfassung mit dem Titel „Wie man beweist, dass…“ zusammen. In Bezug auf die Analysis 1 könnte an solch einer Stelle eine Übersicht erstellt werden, welche einen schnellen Rückgriff erlaubt, der sich zudem nachhaltig positiv auf das Bearbeiten von Übungszetteln auswirken könnte.

7.2.2 Vorgegebene Visualisierungen

In der Arbeit wurde auf den Operator *Skizzieren* als Arbeitsauftrag eingegangen, wobei auf das Potential von eigens angefertigten Visualisierungen gedeutet wurde. An dieser Stelle soll auf das Potential von bereits von Lehrenden vorgegebenen Visualisierungen hingewiesen werden, welche sich an mehreren Stellen der Vorlesung anbieten würden. Deren fehlender Einsatz wird z.B. bei Körner (2015, S. 207) kritisiert. Visualisierungen könnten dann im Rahmen eines Arbeitsauftrags beispielsweise von den Studierenden beschrieben, und in Zusammenhang zu mathematisch formalen Inhalten gebracht werden. Ammann (2019, S. 27) z.B. ergänzt die mathematisch formale Definition von injektiven, surjektiven und bijektiven Abbildungen durch schematische Darstellungen solcher Abbildungen. Visualisierungen könnten dabei mit entsprechenden Arbeitsaufträgen im Sinne eines Darstellungswechsels eingesetzt werden, indem durch *Vergleich*-Aufgaben Zusammenhänge zwischen der formalen Definition und den Visualisierungen gebildet und Vorstellungen aufgebaut werden. Dadurch könnte die anfangs herausfordernde mathematische Formelsprache zunächst entlastet werden. Diese Methodik wird für die schulische Mathematik beispielsweise im Sinne eines sprachsensiblen Unterrichts für das Arbeiten mit

[19] Im ursprünglichen Skript würde sich solch ein Glossar beispielsweise für die neu eingeführten Beweisprinzipien Beweis per vollständige Induktion, Beweis per Kontraposition, Beweis durch Widerspruch, Beweis per Fallunterscheidung u.v.m. anbieten.

mathematischen Textaufgaben empfohlen (z.B. Prediger & Wessel, 2011, S. 166ff.). Hier werden verwendbare Potentiale auch traditionell gestalteter Vorlesungsskripte sichtbar.

An dieser Stelle sei ebenfalls die Idee von Alcock (2017, S. 145f.) hervorgehoben, welche vor ihren Vorlesungen Concept Maps austeilt, die den grundlegenden Aufbau der Vorlesung aufzeigen. Eine weitere Möglichkeit im Zusammenhang mit dem Einsatz von Visualisierungen wäre, solch eine Concept Map von den Studierenden im Rahmen eines innovativen Skripts parallel zur Vorlesung ergänzen zu lassen, indem z.B. die Pfeile beschriftet oder Beispiele sowie Gegenbeispiele ergänzt werden sollen. Dies könnte vernetztes Lernen ermöglichen.

7.2.3 Prüfen von Beweisen

Der Operator Prüfen könnte ebenfalls an vielen anderen Stellen eingesetzt werden, welche ebenfalls lernförderlich sein könnten. Wie bereits erwähnt wurde herausgestellt, dass Studierende oft Schwierigkeiten aufweisen, zu entscheiden ob Aussagen oder Beweise gültig sind und sich oftmals am Grad ihrer Formalität orientieren. Tatsächlich sei es jedoch wichtig, in der Mathematik auch Kontrollstrategien zur Überprüfung der Gültigkeit von Beweisen zu erlernen. Mason et al. (2012, S. 102) sprechen in diesem Zusammenhang von einem „inneren Feind“, welcher jeden mathematischen Schritt kritisch hinterfragen sollte. So könnte es sich eventuell anbieten, Aufgabenstellungen mit dem Operator *Prüfen* auch im Zusammenhang mit Beweisen in die Handlungsräume einzufügen.

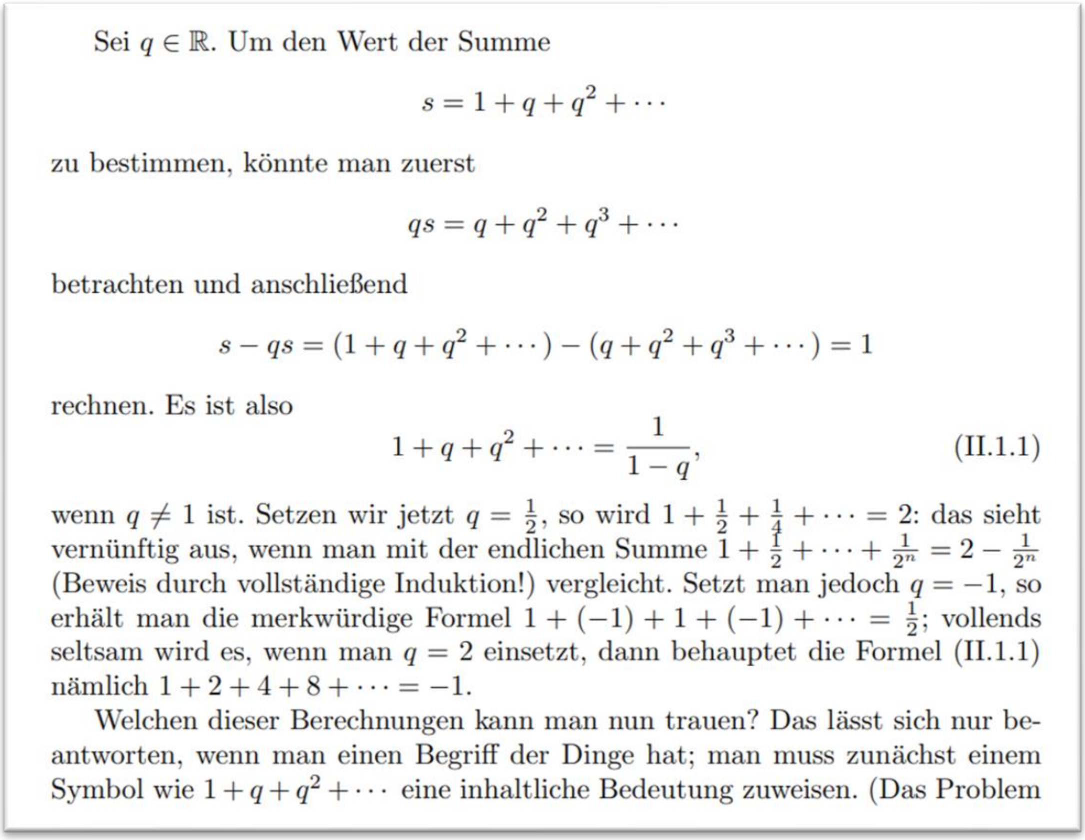
7.2.4 Beispiele im Allgemeinen

Hervorzuheben ist an dieser Stelle auch die Funktion der Beispiele, anhand derer mathematische Aussagen im MMS 2.0 überprüft werden sollen. Beispiele haben den Vorteil, dass eine intuitive Vorstellung von den zu beweisenden Aussagen und eine lernförderliche Beziehung zum symbolischen Kalkül aufgebaut werden kann. Dass die Studierenden ein Gefühl für mathematische Aussagen kriegen, soll für den Arbeitsbeginn besonders relevant sein. Gleichzeitig wirkt die Symbolik nicht mehr so abschreckend und mögliche Ängste vor abstrakter Mathematik können gemindert werden. Eine mögliche Übertragung der Strategie, Beispiele zu mathematischen Aussagen zu bilden, auf das Bearbeiten von mathematischen Problemen oder allgemeinen Übungsaufgaben, könnte sich zudem positiv auf das eigenständige Bearbeiten der Übungszettel auswirken. Vor allem das Auseinandersetzen mit Anfangs- oder Spezialfällen wird in der Literatur betont (Mason et al., 2012, S. 2). In dem exemplarisch überarbeiteten Teilkapitel des MMS 2.0 fällt das Potential von Anfangsbeispielen besonders bei Aussagen auf, die mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion bewiesen werden können. Allein durch das exemplarische Überprüfen der Aussage für $n = 1$ ist der Induktionsanfang bereits gezeigt. Durch solch ein Heranführen an Beweise könnten diese nicht mehr so herausfordernd erscheinen.

Dem Beweisen gehen in der mathematischen Forschung andere Abschnitte voraus, welche das Aufstellen von Beispielen grundsätzlich beinhalten. Modellhaft werden die Phasen Exploration, das Generieren einer Vermutung und der Beweis festgehalten, wobei das Verstehen und Erkennen solcher Phasen die Stufe der „Reflexive Literacy“[20] fördern kann (Bauer & Hefendehl-Hebeker, 2019, S. 35).

[20] Näheres zu diesem Ansatz, der jedoch grundsätzlich für das Mathematiklehramtsstudium ausgeführt wurde, findet sich bei Bauer und Hefendehl-Hebeker (2019).

7.2.5 Alternative Explorationen



Sei $q \in \mathbb{R}$. Um den Wert der Summe

$$s = 1 + q + q^2 + \cdots$$

zu bestimmen, könnte man zuerst

$$qs = q + q^2 + q^3 + \cdots$$

betrachten und anschließend

$$s - qs = (1 + q + q^2 + \cdots) - (q + q^2 + q^3 + \cdots) = 1$$

rechnen. Es ist also

$$1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \tag{II.1.1}$$

wenn $q \neq 1$ ist. Setzen wir jetzt $q = \frac{1}{2}$, so wird $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$: das sieht vernünftig aus, wenn man mit der endlichen Summe $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ (Beweis durch vollständige Induktion!) vergleicht. Setzt man jedoch $q = -1$, so erhält man die merkwürdige Formel $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \frac{1}{2}$; vollends seltsam wird es, wenn man $q = 2$ einsetzt, dann behauptet die Formel (II.1.1) nämlich $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$.

Welchen dieser Berechnungen kann man nun trauen? Das lässt sich nur beantworten, wenn man einen Begriff der Dinge hat; man muss zunächst einem Symbol wie $1 + q + q^2 + \cdots$ eine inhaltliche Bedeutung zuweisen. (Das Problem

Abbildung 13: Ausschnitt aus einer möglichen Exploration bei Werner (2021, S. 17)

Bei der Auseinandersetzung mit Grieser ist aufgefallen, dass postuliert wurde, „schöne“ Probleme seien interessanter und motivierender, weshalb eben solche für die Lehrveranstaltung ausgewählt wurden. Da ein Vorlesungsskript in seiner Funktion als Sicherung der Vorlesung trotz der unüblichen Form des MMS 2.0 bestehen soll, können nicht gezielt „schöne“ Definitionen, Sätze oder Beweise ausgewählt werden. Das Ergebnis sollte trotzdem die wichtigsten inhaltlichen Elemente der Vorlesung wiedergeben. An dieser Stelle soll somit betont werden, dass die Exploration als motivierende Phase, vermutlich am aufwendigsten zu gestalten ist, da es herausfordernd sein kann, sich für fest vorgegebene Themen geeignete Explorationen zu überlegen. Trotzdem wurden in traditionellen Vorlesungsskripten, wie z.B. bei Werner (2021, S. 17), bereits existierende mathematische Explorationen gefunden (siehe Abbildung 13). Diese wurden jedoch nicht als solche ausgelegt, da keine, für die Exploration so wichtige, Eigenaktivität durch Studierende initiiert wird. Trotzdem können solche Ausschnitte aus traditionellen Vorlesungsskripten für innovative Skripte im Rahmen einer Explorationsphase verwertet werden (siehe Abbildung 14).

Exploration

Sei $q \in \mathbb{R}$. Wir möchten den Wert der Summe $s = 1 + q + q^2 + \cdots$ bestimmen und rechnen deshalb folgendes:

$$\begin{aligned} s &= 1 + q + q^2 + \cdots \\ \iff qs &= q + q^2 + q^3 + \cdots \\ \iff s - qs &= (1 + q + q^2 + \cdots) - (q + q^2 + q^3 + \cdots) = 1 \\ \iff s(1-q) &= 1 \\ \iff s &= \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

wobei $q \neq 1$.

Es gilt also: $s = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$ für $q \neq 1$.

Setze für q verschiedene exemplarische Werte aus $\mathbb{R}$ ein und überprüfe die Gleichung. Deute deine Ergebnisse.

Abbildung 14: Veränderte Exploration von Werner (2021, S. 17) im Sinne einer Explorationsphase

8. Fazit

In der vorliegenden Arbeit wurde auf verschiedene Herausforderungen für Studierende aufmerksam gemacht, die bei dem Übergang von der Schule an die Hochschule entstehen können. Obwohl bereits einige Unterstützungsmaßnahmen entwickelt wurden, welche Studierenden das mathematische Lernen in der Transitionsphase erleichtern sollen, bestehen immer noch Forderungen nach weiteren Hilfestellungen, welche auf bestehende Veranstaltungen übertragen werden könnten. Diese Arbeit versucht eine solche zu bieten und entwickelt die Idee des MMS 2.0 als innovatives Vorlesungsskript, wobei sich dessen Zielsetzungen in vier Punkten definieren lassen. Das MMS 2.0 soll (1) Beiträge der Studierenden zur Hochschulmathematik motivieren, (2) die Aufgabenzettel als Lerngelegenheit hervorheben, (3) die Studierenden in den Mittelpunkt des mathematischen Lernens rücken und (4) die Anforderungen des Selbststudiums explizit vermitteln.

Als besonders wichtig für das Erreichen einer grundlegenden Motivation von Beiträgen der Studierenden ist zunächst eine übersichtliche Organisation von Vorlesungsinhalten. Diese beinhaltet vor allem eine vertiefende Ausschilderung der Inhalte, also eine Erweiterung des Inhaltsverzeichnisses und des Vorlesungsabschnitts durch sinnvolle Überschriften, Nutzen von Randnotizen und ggf. farbliche Kennzeichnungen inhaltlicher Zusammengehörigkeit. Auch Hinweise der Dozierenden sollten eine eigene Berechtigung haben und ausgeschildert werden. Die veränderte Organisation würde sich zudem auch leicht in bereits existierende Vorlesungsskripte integrieren lassen.

Das MMS 2.0 ist in seiner Konzeption als zentraler Ort des Lernens gedacht, bei dem Vorlesungsinhalte und Übungsaufgaben zusammenkommen. Durch immer wieder auftretende Aufgabenstellungen und freiwillige Übungen besteht die Hoffnung, dass die in das MMS 2.0 integrierten Übungszettel ebenfalls mehr als Lerngelegenheit genutzt und Studierende durch die so aufgewiesene direkte Verbindung von Vorlesungsinhalten und Übungen beide Angebote seitens der Universität für sich nutzbarer machen können.

Die Studierenden werden durch das Angebot der Handlungsräume innerhalb des Skripts stets angehalten, mathematisch aktiv zu werden. Dabei sollte der gesamte Aufbau des Skripts mit Exploration, Vorlesung und Reflexion an die Bedürfnisse von Studierenden angepasst werden, welche sich besonders auf die Grundbedürfnisse nach Kompetenz und Selbstbestimmung bezogen haben. Besonders die Exploration und Reflexion als neu eingeführte Elemente eines Vorlesungsskripts, machen die Studierenden zum Mittelpunkt des mathematischen Lernens. Die Exploration hat dabei motivierende und interesseweckende Intentionen, während die Reflexion auch das Auseinandersetzen mit eigenen Stärken und Schwächen ermöglicht.

Durch fakultativ zu bearbeitende Arbeitsaufträge, welche durch Operatoren ausgezeichnet sind, wurde versucht, die Anforderungen eines lernförderlichen Selbststudiums für Studierende sichtbar zu machen. Teilweise konnten dabei bereits existierende Impulse der Dozierenden selbst in das MMS 2.0 integriert werden.

Die Möglichkeiten für eine lernförderliche Überarbeitung des Skripts sind mannigfaltig und somit noch lange nicht ausgeschöpft. Die Auswahl, die im MMS 2.0 getroffen wurde, kann in erster Linie didaktisch begründet werden und beachtet eine gewisse Umsetzbarkeit für Dozierende. Diese wird unter anderem bereits durch die Ideen des MMS 2.0 offeriert, bereits existierende Vorlesungsskripte zu überarbeiten. Gänzlich neu müssten die Inhalte einer Vorlesung nicht gestaltet werden. Es bietet sich an mehreren Stellen an, Impulse der Dozierenden durch gezieltere Arbeitsaufträge und Handlungsräume für Studierende attraktiver zu gestalten. An dieser Stelle soll zudem betont werden, dass das im Rahmen dieser Arbeit entstandene Skript bloß eine *Idee* darstellt, ein Vorlesungsskript lernförderlich umzugestalten. Diese Idee kann nach Belieben verändert und ausgeweitet werden.

Das MMS 2.0 ist der Versuch das Skript einer Mathematikvorlesung didaktisch zu verbessern und so lernförderlicher zu gestalten, bewegt sich jedoch innerhalb dieser Arbeit auf einer theoretischen Basis. Ob sich das MMS 2.0 in der Praxis bewährt, bleibt noch zu erproben und empirisch zu belegen. Dafür braucht es vor allem Mathematikhochschuldozierende, welche bereit sind ihre Skripte entsprechend anzupassen und ihre Erfahrungen und Ergebnisse zu teilen. Erhofft wird durch diese Arbeit eine Ermutigung dazu, solch eine Veränderung des eigenen Vorlesungsskripts zu wagen.

Die vorgestellten Möglichkeiten des MMS 2.0 stellen ebenfalls kein Garant für verbesserte Studienleistungen oder eine geringere Abbruchsquote von Studienanfängerinnen und -anfängern. Letztendlich ist das didaktische

Potenzial und die didaktischen Fähigkeiten des Dozierenden ausschlaggebend auf die Umsetzung der Vorschläge des MMS 2.0. Das MMS 2.0 allein kann nicht etwaige didaktische Lücken von Dozierende schließen. Dies bleibt der Dozierenden(aus)bildung bzw. den Dozierenden selbst überlassen, sollte jedoch ggf. durch die Hochschulmathematikdidaktik unterstützt werden.

Anhang

Freie Universität Berlin

Fachbereich Mathematik und Informatik

Mein Skript

zum Selbstlern- und Präsenzstudium

Analysis 1

Vorname:

Name:

Matrikelnummer:

Zur Bedienung dieses Skripts

Liebe Studierende!

Dieses Skript unter dem Titel „Mein Mathe-Skript 2.0“ soll Ihnen als fakultatives Angebot den Studieneinstieg erleichtern und weist deswegen einige Besonderheiten auf. Im Folgenden werden diese erläutert.

Das Skript weist eine *Dreiteilung* auf. Diese besteht aus folgenden Abschnitten: **Exploration, Vorlesung, Reflexion**. Nutzen Sie den Abschnitt „Meine Reflexion“, um Aha!-Momente, Schwierigkeiten und Fragen zum jeweiligen Vorlesungsabschnitt zu notieren.

Das Bearbeiten aller Abschnitte ist *freiwillig*. Lediglich die **Verpflichtende Übung** entspricht der im Rahmen des Tutoriums abzugebenden Übung.

Das Skript ist mit vier Farben versehen, wobei jede Farbe eine eigene Bedeutung hat. Die Farbe **Rot** markiert Definitionen, die Farbe **Blau** mathematische Sätze und die Farben **Grau** und **Grün** zeigen an, dass Sie selbst tätig werden sollen. Für den jeweiligen Tätigkeitsbereich wurde explizit Raum für die Bearbeitung im Skript gelassen. In den grauen Arealen werden Arbeitsaufträge passend zur Exploration, Vorlesung und Reflexion gegeben. In den grünen Arealen befinden sich zusätzliche Übungen (freiwillige und verpflichtende Übungen).

Grundsätzlich sind **alle** lernförderlichen Handlungen erlaubt. Das heißt: Wenn Sie etwas markieren möchten, markieren Sie! Wenn Sie etwas notieren möchten, notieren Sie! Wenn Sie etwas durchstreichen möchten, streichen Sie durch! etc.

Hinweis: Dieses Zeichen markiert einen Hinweis.

Inhaltsverzeichnis

Das griechische Alphabet

Name	groß	klein
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
My	M	μ
Ny	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Glossar für Symbole und Bezeichnungen

Erstellen Sie während der Bearbeitung des Skripts eine Übersicht mit den wichtigsten benutzten Symbolen und Bezeichnungen sowie deren Bedeutung. (Auf mögliche Ergänzungen wird mit → Glossar verwiesen.)

Symbol/Bezeichnung	**Bedeutung**
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
n	Element von $\mathbb{N}$
$A(n)$	

Kapitel 1

Reelle Zahlen

1.1 Natürliche Zahlen

1.1.1 Exploration: Dominoeffekt

Stellen Sie sich eine aufgestellte Reihe von Dominosteinen vor, welche aufsteigend mit natürlichen Zahlen durchnummeriert worden sind. Das heißt der erste Dominostein hat die Nummer 1, der zweite die Nummer 2, der dritte die Nummer 3, usw. Sie dürfen einen Dominostein anstoßen. Beschreiben Sie, was gelten müsste, damit alle Steine umfallen.

1.1.2 Auflösung: Dominoeffekt

Um wirklich sicher zu sein, dass alle Dominosteine umkippen, muss Folgendes gelten: Zuerst muss sichergestellt sein, dass der erste Dominostein umkippt.
Damit ist es aber noch nicht getan. Im zweiten Schritt muss noch überprüft werden, ob für einen beliebigen, aber festen Dominostein der umfällt, garantiert auch sein Nachfolger umfällt. Da das für alle k Dominosteine gelten muss, kann dies für die Dominosteine mit den Nummern n und $n+1$ überprüft werden. Dafür muss hypothetisch vorausgesetzt werden, dass der Stein mit der Nummer n umfällt und dann überprüft werden, ob auch der Stein mit der Nummer $n+1$ umfällt.

Skizzieren Sie die hier beschriebene Situation. Vergleichen Sie die Auflösung des Dominoeffekts mit der durch Sie vollführten Beschreibung in der Exploration.

1.1.3 Vorlesung

Natürliche Zahlen

„Im Anfang war die Zahl " – so hätte Doktor Faust die Analysisvorlesung begonnen, und heute soll es nicht anders geschehen. Wir nehmen den Standpunkt ein, dass wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kennen; dazu mehr im nächsten Abschnitt, wo der Unterschied zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen deutlich gemacht werden soll. Zuerst soll das System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen etwas näher betrachtet werden.

→ Glossar

Natürliche Zahlen

In dieser Vorlesung ist

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

und

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$$

Hinweis: Diese Konvention ist uneinheitlich, denn für einige Autoren ist auch 0 eine natürliche Zahl.

Skizzieren Sie ein Schaubild der Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$, welche Sie bereits aus der Schule kennen könnten.

Vollständige Induktion

In diesem Kapitel lernen Sie zunächst ein Beweisprinzip kennen, mit welchem Sie eine Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen können. Dafür fangen wir mit einem Beispiel an.

Beispiel 1 Wir betrachten die folgende Aussage $A(n)$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten soll.

Glossar ←

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Prüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage exemplarisch, indem Sie für n natürliche Zahlen einsetzen.

Um allgemeingültig zu zeigen, dass die Aussage für wirklich alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, reicht das exemplarische Probieren leider nicht aus.

Wir brauchen einen Beweis.

Beweis zu Beispiel 1

Zuerst überprüfen wir, ob die Aussage für die erste natürliche Zahl, also $n = 1$, gilt. Vielleicht haben Sie dies für Ihre exemplarische Überprüfung der Aussage sogar bereits getan, vollständigerweise wird dies hier trotzdem nochmals aufgeführt:

$$A(1): \sum_{k=1}^{n+1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Im zweiten Schritt setzen wir hypothetisch voraus, dass $A(n)$ gilt und überprüfen, ob dann auch $A(n+1)$ wahr ist. Das heißt, wir möchten die Aussage $A(n+1)$ zeigen unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ wahr ist.

Wenn wir uns zuerst überlegen, wie die Aussage $A(n+1)$ konkret aussieht, fällt uns der Beweis eventuell etwas leichter:

$$A(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Nun versuchen wir eine Gleichungskette zu bilden, in der wir zeigen, dass $A(n+1)$ gilt, wenn $A(n)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Prüfen Sie die einzelnen Schritte der Gleichungskette.

(1):

(2):

(3):

Vergleichen Sie den Dominoeffekt mit dem hier vorgestellten Beweisprinzip.

Fassen Sie die Kernidee des Beweises in ein bis zwei Sätzen zusammen.

Das Prinzip des Beweises, wie wir ihn in dem ersten Beispiel durchgeführt haben, wird Prinzip der vollständigen Induktion genannt und kann verallgemeinert formuliert werden:

Prinzip der vollständigen Induktion. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $A(n)$ *eine Aussage über die natürliche Zahl* n. *Es gelte der „Induktionsanfang"* $A(1)$ *sowie für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *der „Induktionsschluss"*

Wenn $A(n)$ *gilt, dann gilt auch* $A(n+1)$.

Dann trifft die Aussage $A(n)$ *für jede natürliche Zahl* n *zu.*

Vollständige Induktion

Beim Induktionsschluss nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*.

Beschreiben Sie das Prinzip der vollständigen Induktion in eigenen Worten.

Bernoullische Ungleichung

Satz 1: *Bernoullische Ungleichung*

Satz (Bernoullische Ungleichung). *Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jede natürliche Zahl n gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.1}$$

Prüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Bernoullischen Ungleichung exemplarisch.

Erstellen Sie eine erste Beweisidee für die Bernoullische Ungleichung.

Beweis zu Satz 1

Die Aussage $A(n)$, die für jede natürliche Zahl n durch Induktion zu beweisen ist, lautet hier:

„Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.“

Zeigen Sie zuerst, dass der Induktionsanfang gilt:

Nun müssen wir noch zeigen, dass auch der Induktionsschluss $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$ stimmt: Nehmen wir also an, wir wüssten, dass die Ungleichung für ein beliebiges, aber festes n für alle $x \geq -1$ richtig ist, und wir wollen sie für $n+1$ zeigen.

Dazu rechnen wir für $x \geq -1$ folgendermaßen:

Ergänzen Sie die Rechnung.

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\overset{(1)}{=} (1+x)^n(1+x) \\
&\overset{(2)}{\geq} \\
&\overset{(3)}{=} 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\overset{(4)}{\geq}
\end{aligned}
$$

Erklären Sie die einzelnen Schritte.

(1):

(2):

(3):

(4):

Hinweis: Zu (2): Das Multiplizieren beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl kehrt die Ungleichung um! Beachten Sie, dass $1 + x \geq 0$ ist und sich deswegen das Ungleichheitszeichen in diesem Fall nicht umkehrt.

Fakultät und Binomialkoeffizient

Für den nächsten Satz brauchen wir die *Binomialkoeffizienten.* Vielleicht kennen Sie diese bereits aus der Schule. Wir wiederholen an dieser Stelle deren Bedeutungen und widmen uns dafür zunächst dem Begriff der Fakultäten. Dazu schauen wir uns zunächst Beispiele an:

Beispiele 2

Das Element (wir nennen es a) einer 1-elementigen Menge kann auf 1 Art angeordnet werden: $\{a\}$.

Die 2 Elemente (wir nennen sie a und b) einer 2-elementigen Menge können auf 2 Arten angeordnet werden: $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, auf wie viele verschiedene Arten die 3 Elemente einer 3-elementigen Menge angeordnet werden können.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, auf wie viele verschiedene Arten die 4 Elemente einer 4-elementigen Menge angeordnet werden können.

Für das Bestimmen der *Fakultäten* $n!$ (lies „n Fakultät“; engl. “n factorial”) setzt man für $n \in \mathbb{N}$

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

sowie

$$0! := 1.$$

Man beachte, dass $n!$ die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge angibt.

Fakul-täten

→ Glossar

Das bedeutet, dass die Anzahl der Möglichkeiten, auf wie viele verschiedene Arten die 3 Elemente einer 3-elementigen Menge angeordnet werden können, 3! und auf wie viele verschieden Arten die 4 Elemente einer 4-elementigen Menge angeordnet werden können, 4! entspricht.

Erklären Sie in eigenen Worten, warum $n!$ die Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge angibt.

Nun widmen wir uns den Binomialkoeffizienten. Dazu überlegen wir uns auch zunächst ein paar Beispiele:

Beispiele 3

Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, aus 4 Objekten 3 Stück auszuwählen, ohne die Reihenfolge zu beachten.

Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, aus 4 Objekten 2 Stück auszuwählen, ohne die Reihenfolge zu beachten.

Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, aus 4 Objekten 1 Stück auszuwählen, ohne die Reihenfolge zu beachten.

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies „n über k“; engl. “n choose k”) gibt an, auf wie viele Weisen man aus n Objekten k Stück auswählen kann, ohne die Reihenfolge zu beachten.

Binomial-koeffizient

Mit anderen Worten ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, ..., n\}$. Diese Anzahl kann explizit mit Hilfe der *Fakultäten* bestimmt werden.

Es gilt für $n,k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \overset{(1)}{=} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \overset{(2)}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

→ Glossar

die erste Formel gilt sogar für $k > n$.

(1): Zur Begründung der ersten Gleichung beachten wir, dass es n Möglichkeiten gibt, das erste Element einer k-elementigen Teilmenge auszuwählen, dass es danach noch $n-1$ Möglichkeiten gibt, das zweite Element auszuwählen, dass es danach noch $n-2$ Möglichkeiten gibt, das dritte Element auszuwählen usw., bis man noch $n-k+1$ Möglichkeiten für das k-te Element hat.

Das sind insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ Möglichkeiten.

Doch **Achtung!** Damit haben wir Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, seperat gezählt; also ist diese Anzahl noch durch $k!$ zu teilen.

(2): Erklären Sie die zweite Gleichung durch Einsetzen der Fakultäten.

Erklären Sie, warum die Formel auch in den Grenzfällen $k = 0$ oder $n = 0$ stimmt, wo das verbale Argument etwas hinkt.

Freiwillige Übung

Freiwillige Übung 1

Aufgabe 1: Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = 1$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Satz 2:
Binomischer Satz

Satz (Binomischer Satz). *Für reelle Zahlen x und y und jede natürliche Zahl n gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.2}$$

Prüfen Sie den Binomischen Satz für den Spezialfall $n = 2$. Diesen kennen Sie wahrscheinlich bereits aus der Schule unter dem Namen der Binomischen Formel.

Um den binomischen Satz allgemeingültig zu zeigen, brauchen wir einen Beweis.

Erstellen Sie eine erste Beweisidee für den binomischen Satz.

Beweis zu Satz 2

Für den Beweis verwenden wir vollständige Induktion über n.

Zeigen Sie zuerst den Induktionsanfang $A(1)$:

Nun zum Induktionsschluss von n auf $n+1$.

Ergänzen Sie den folgenden Satz.

Wir nehmen an, dass...

Dafür rechnen wir:

Ergänzen Sie die Rechnung ggf. durch Zwischenschritte.

$$(x+y)^{n+1} \overset{(1)}{=} (x+y)^n(x+y)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}(x+y)$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$\overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n+1-k}$$

$$\overset{(5)}{=} \binom{n}{n} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0} y^{n+1}$$

$$\overset{(6)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},$$

und das war zu zeigen.

Erklären Sie die einzelnen Schritte.

(1):

(2):

(3):

(4):

(5):

(6):

Hinweis: Zu (6): Diesen Schritt haben Sie bereits fast in der freiwilligen Übung auf Seite 23 gezeigt.

Verpflichtende Übung

Verpflichtende Übung 1

Aufgabe 1

Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \textit{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Varianten des Induktionsprinzips

Beispiel 4 Im Folgenden möchten wir uns eine Variante des Induktionsprinzips verdeutlichen, durch die wir die Existenz der Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ begründen:

Sei $A(n)$ die Aussage

„n kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden“.

Dabei wird auch ein Produkt mit genau einem Faktor zugelassen.

Prüfen Sie exemplarisch den Wahrheitsgehalt der Aussage. Vergleichen Sie die Aussage mit den bereits bewiesenen Aussagen in Hinblick auf eine Beweisidee.

Beweis zu Beispiel 4

Wir möchten die Aussage für alle $n \leq 2$ zeigen, das heißt wir fangen auch mit dem Induktionsanfang bei 2 an. Hier ist $A(2)$ offenbar richtig, denn 2 ist ja eine Primzahl.

Nehmen wir nun an, dass für eine gegebene Zahl n alle natürlichen Zahlen $2, ..., n$ in Primfaktoren zerlegt werden können.Wir müssen das mithilfe dieser Annahme auch für $n + 1$ begründen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $n + 1$ ist eine Primzahl
2. $n + 1$ ist keine Primzahl

Im ersten Fall steht die Primfaktorzerlegung (mit einem einzigen Faktor) schon da.

Im zweiten Fall kann man $n+1$ als Produkt zweier Zahlen schreiben, die weder 1 noch $n + 1$ sind: $n + 1 = k_1k_2$. Also sind k_1 und k_2 zwischen 2 und n, und nach Induktionsvoraussetzung können k_1 und k_2 beide als Primzahlprodukte geschrieben werden. Daher trifft das auch für ihr Produkt $n + 1$ zu.

Erklären Sie die Fallunterscheidung in ihren eigenen Worten.

1.

2.

Wir stellen fest, dass das Induktionsprinzip variiert verwendet werden kann.

Varianten des Induktionsprinzips

Die Variante des Induktionsprinzips, in der der Induktionsanfang für eine Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ und der Induktionsschluss für ein beliebiges $n \geq N$ durchgeführt wird, zeigt die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \geq N$.

Manchmal ist die folgende Spielart der Induktion nützlich, in der man den Induktionsschluss durch

Wenn $A(k)$ für alle $k \leq n$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

ersetzt.

Beschreiben Sie die Varianten des Induktionsprinzips in eigenen Worten.

1.1.4 Meine Reflexion

Mein(e) Aha!-Moment(e):

Mein(e) Schwierigkeit(en):

Meine Frage(n):

Literaturverzeichnis

Ablauf der Tutorien und Aufgaben von Tutoren. (o. D.). Freie Universität Berlin. Online verfügbar unter: https://www.mi.fu-berlin.de/public/stellen/tutorentaetigkeit/aufgabentutor/index.html

Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Alcock, L. (2017). *Wie man erfolgreich Mathematik studiert. Besonderheiten eines nicht-trivialen Studiengangs.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Ammann, B. (2019). Vorlesungsskript Analysis I. Wintersemester 2018/19. Regensburg. Online verfügbar unter: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/ammann/lehre/2018w_analysisI/analysis.pdf, zuletzt geprüft am 18.10.2021.

Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2007). *Mathematik Methodik*. Berlin: Cornelsen.

Bauer, T (2013a). *Analysis-Arbeitsbuch: Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. (2013b). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. & Hefendehl-Hebeker, L. (2019). *Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien. Anforderungen, Ziele und Ansätze zur Gestaltung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T (Hrsg.). (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* 1. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Biehler, R. & Kempen, L. (2015). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für* *eine hochschulspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121–135). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Biehler, R. (2018). Die Schnittstelle Schule - Hochschule – Übersicht und Fokus. *Der Mathematikunterricht 64* (5), 3–15.

Blömeke, S. (2016). Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G- Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 3–13).Wiesbaden: Springer Spektrum.

Böttinger, C. & Boventer, C. (2016). Methodische Innovationen in der Veranstaltung „Arithmetik“ für das Lehramt Grundschule. In In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 51–66). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Das Präsidium der Freien Universität Berlin (2013). *FU-Mittelungen 39/2013*, Berlin: Kulturbuch-Verlag GmbH.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2000). Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being. *American Psychologist, 55* (1), 86–78.

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren.* Online verfügbar unter: https://duepublico2.uni-due.de/receive/duepublico_mods_00028564 (Stand: 20.09.2021).

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41* (2), 143–154.

Fend, H. (1998). Qualität und Qualitätssicherung im Bildungswesen. Wohlfahrtsstaatliche Modelle und Marktmodelle. *Zeitschrift für Pädagogik,* Beiheft, *41*, 55-72.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1. Stuttgart: Klett.

Friedrich, H. F. & Mandl, H. (2006). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In Mandl, H. & Friedrich, H. F. (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien.* Göttingen, Bern, Wien, Toronto, Seattle, Oxford, Prag: Hogrefe.

Gallin, P. (2011). Mathematik als Geisteswissenschaft. Der Mathematikschädigung dialogisch vorbeugen. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M.

Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven* (S. 105–116). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Hoever, G., Kürten, R. & Neugebauer, C. (2015). Vorkurse und Mathematiktests zu Studienbeginn – Möglichkeiten und Grenzen. In Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik* Mathematik (S. 19–32). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2013a). Mathematisches Problemlösen und Beweisen – ein neuer Akzent in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, S. Schreiber, R. Göller, R. Biehler, B. Büchler, R. Hochmuth & H.-G. Rück, *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr. Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung 20.02-23.03.2013*

Grieser, D. (2013b). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen – Eine Entdeckungsreise in die Mathematik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2015). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine hochschulspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 87–102). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2016). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 661–675). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gueduet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 237–254.

Gunesch, R. (2013). Verbesserung des Vorlesungserfolgs durch mathematikspezifische Vorlesungs-Videoaufzeichnung und Bereitstellung im Web. In A. Hoppenbrock, S. Schreiber, R. Göller, R. Biehler, B. Büchler, R. Hochmuth & H.-G. Rück, *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr. Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung 20.02-23.03.2013*

Halverscheid, S. & Müller, N. C. (2013). Experimentelle Aufgaben als grundvorstellungsorientierte Lernumgebungen für die Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 117–134). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heitzer, J. (2015). Das Aachener Schul-Hochschul-Projekt iMPACt. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 3–18). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 1–15). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Helmke, A. & Schrader, F.-W. (2006). Lehrerprofessionalität und Unterrichtsqualität. Den eigenen Unterricht reflektieren und beurteilen. *Schulmagazin 5 bis 10, 9*, 5–12.

Hochmuth, R. (2015). Mathematischer Forschungsbezug in der Sek-II-Lehramtsausbildung?. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine hochschulspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 185–198). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Houston, K. (2012). *Wie man mathematisch denkt. Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Höfner, G. (2018). *Mathematik-Fundament für Studierende aller Fachrichtungen.* Berlin: Springer Spektrum.

Kaenders, R., Kvasz, L. & Weiss-Pidstrygach, Y. (2015). Mehr Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit in Schule und Universität. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine hochschulspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 149–163). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Klein, F. (1908*). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leipzig: B. G. Teubner.

Körner, T. W. (2005). Ein Lob der Vorlesungen. *DMV-Mitteilungen 13,* (4), 241–246.

Körner, H. (2015). Mathematik in Schule und Hochschule – welche Mathematik für Lehramtsstudierende?, In Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 199–210). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krause, U.-M. & Stark, R. (2006). Vorwissen aktivieren. In Mandl, H. & Friedrich, H. F. (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 38–49). Göttingen, Bern, Wien, Toronto, Seattle, Oxford, Prag: Hogrefe.

Kultusministerkonferenz (2012). Operatoren für das Fach Mathematik an den deutschen Schulen im Ausland. Online verfügbar unter: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/Auslandsschulwesen/Kerncurriculum/Auslandsschulwesen-Operatoren-Mathematik-10-2012.pdf, zuletzt geprüft am: 18.10.2021.

Langemann, D. (2015). Begriffssysteme und Differenzlogik in der mathematischen Lehre am Studienbeginn. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine hochschulspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 69–85). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2012). *Mathematisch Denken. Mathematik ist keine Hexerei*. Berlin: De Gruyter Oldenbourg.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. London: Pearson.

Meyer, H. (2012). *Leitfaden Unterrichtsvorbereitung.* (6. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Moser-Fendel, J. & Wessel, L. (2019). Relevante Fakten am Übergang Schule–Hochschule in Mathematik. *GDM-Mitteilungen, 107*, 8–21.

Neber, H (2006). Fragenstellen. In H. Mandl, H. F. Friedrich (Hrsg.), Handbuch Lernstrategien (S. 50–58). Göttingen, Bern, Wien, Toronto, Seattle, Oxford, Prag: Hogrefe.

Püschl, J. (2019). *Kriterien guter Mathematikübungen. Potentiale und Grenzen in der Aus- und Weiterbildung studentischer Tutorinnen und Tutoren.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger, E. Özdil (Hrsg.), Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland (S. 163–184). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Rach, S. & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich?. Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34*, 121–147.

Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester.* Münster, New York: Waxmann.

Rach, S., Heinze, A. & Ufer, S. (2014). Welche mathematischen Anforderungen erwarten Studierende im ersten Semester des Mathematikstudiums?. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*, 205–228.

Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Basel: Birkhäuser.

Renkl, A. & Nückles, M. (2005). Lernstrategien der externen Visualisierung. In: H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 135-147). Göttingen, Bern, Wien, Toronto, Seattle, Oxford, Prag: Hogrefe.

Riss, U. V. & Schmidt, V. A. (2011). Wissen und Handeln der Mathematiker. Philosophische Analyse und Betrachtung ihrer Relevanz für die Industrie. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven* (S. 283–296). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roos, A.-K. (2020). *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität. Verständnisschwierigkeiten von Mathematik an der Hochschule am Beispiel des Extrempunktbegriffs.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schmitt, A. (2010). Analysis I. Vorlesung an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2009/2010. Berlin. Online verfügbar unter: http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/skript.pdf, zuletzt geprüft am 18.10.2021.

Schwarz-Friesel, M. (2006). Kohärenz versus Textsinn: Didaktische Facetten einer linguistischen Theorie der textuellen Kontinuität. In M. Scherner & A. Ziegler (Hrsg.), *Angewandte Textlinguistik. Perspektiven für den Deutsch- und Fremdsprachenunterricht* (S. 63–75). Tübingen: Gunter Narr.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2017). *Teil C Mathematik. Jahrgangsstufen 1-10*.

Stefanou, C. R., Perencevich, K. C., DiCintio, M. & Turner, J. C. (2004). Supporting Autonomy in the Classroom: Ways Teachers Encourage Student Decision Makind and Ownership. *Educational Psychologist, 39* (2), 97–110.

Stephany, S. (2017). Textkohärenz als Einflussfaktor beim Lösen mathematischer Textaufgaben. In D. Leiss, M. Hagena, A. Neumann & K. Schwippert (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen* (S. 43–61). Münster, New York: Waxmann.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Thomas, M. O. J., Klymchuk, S. (2012). The school–tertiary interface in mathematics: teaching style and assessment practice. *Mathematics Education Research Journal, 24*, 283–300.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 11* (10), 1–16.

Wagenschein, M. (1968). Verstehen lernen. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Weinheim: Beltz.

Weidmann, J. (2004). Analysis I. Wintersemester 2001/2002. Vorlesungsskript. Online verfügbar unter: https://www.uni-frankfurt.de/52168215/ana1_ohne15_0102.pdf, zuletzt geprüft am 18.10.2021.

Werner, D. (2021). Analysis I und II. Vorlesungsskript FU Berlin, SS 2020 und WS 2020/21. Online verfügbar unter: http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/skripte/ana1skript.pdf, zuletzt geprüft am: 18.10.2021.

Wild, K.-P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23* (2), 191–206.

Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* 3. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum.