

# Quantum Field Theory of Particles with Braid Group Statistics in 2+1 Dimensions

Inauguraldissertation

eingereicht am Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin von Jens Mund

Oktober 1998

ERSTGUTACHTER: Professor Dr. Robert Schrader  
ZWEITGUTACHTER: Professor Dr. Bert Schroer

# Contents

Introduction	1
Algebraic Quantum Field Theory and Plektons	3
Overview of the Results and Structure of the Thesis	10
Chapter 1. Plektons in Algebraic QFT	14
1.1. The Field Bundle	14
1.2. Statistics of Plektonic ‘Fields’	18
1.3. Single Particle Space of Plektons	22
1.4. Charge Conjugation and $P_1CT$ -Theorem	23
Chapter 2. Structure of the Space of Scattering States	27
2.1. Construction and Properties of Particle States	27
2.2. Structure of the Space of Scattering States	31
Chapter 3. Poincaré Covariance of the Scattering States	41
3.1. Ray Representation of the Poincaré Group	41
3.2. Representation of the $P_1CT$ -Transformation	43
Chapter 4. Anyons	47
4.1. Field Algebra for Anyons	47
4.2. Algebraic $P_1CT$ and Spin-Statistics Theorems	58
4.3. Scattering States: Covariance and Tomita Operators	63
Chapter 5. Can there be Free Fields for Anyons?	68
5.1. What is a “Free Field”?	69
5.2. Free Fields and Modular Localization	70
5.3. No-Go via Jost-Schroer Theorem	74
Appendix A. Mathematical Supplements	78
A.1. The (Cylinder) Braid Group	78
A.2. The Universal Covering Group of the Poincaré Group	79
A.3. Calculations Concerning the Tomita Operator	81
Summary and Outlook	88
Bibliography	90
Zusammenfassung der Ergebnisse	93



## Zusammenfassung der Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit befaßt sich im Rahmen der lokalen Quantenphysik mit relativistischen Teilchen und Feldern in drei Raumzeit-Dimensionen, deren Statistik durch eine Darstellung der Zopfgruppe zu beschreiben ist – sogenannten Plektonen bzw., falls die Darstellung Abelsch ist, Anyonen.

Insbesondere wurde die Frage nach der Existenz von freien anyonischen Feldern untersucht. In unserem Zusammenhang sollen hierunter Operatoren verstanden werden, die mit den ‘lokalen’ Feldalgebren affiliert sind und nur Einteilchenvektoren aus dem Vakuum erzeugen. (Lokalisierbarkeit bezieht sich hier auf Gebiete, die sich entlang eines raumartigen Weges ins Unendliche erstrecken.) Unter einer schwachen Regularitätsbedingung an die Felder konnten dann Vertauschungsrelationen hergeleitet werden, die sich nicht mit der Zopfgruppenstatistik vertragen.

Desweiteren wurden modellunabhängige Aussagen bezüglich des PCT-Operators und des Zusammenhangs von Spin und Statistik erhalten. Unter der Annahme, daß die Observablenalgebra das Bisognano-Wichmann-Theorem erfüllt, wurde ein ‘PCT’-Theorem für Plektonen hergeleitet. (Die PCT-Transformation beinhaltet in drei Dimensionen eine räumliche Spiegelung (P) nur an der  $x_2$ -Achse.) Für Anyonen wird gezeigt, daß sich die Bisognano-Wichmann-Eigenschaft sogar, in ‘getwisteter’ Form, auf die Feldalgebra übertägt. Insbesondere stimmt der PCT-Operator bis auf einen Twistoperator mit der modularen Konjugation der Feldalgebra zu einem Standard-Keilgebiet überein. Hieraus konnte das Spin-Statistik-Theorem für Anyonen hergeleitet werden.

Ferner wurde zur Klärung der Struktur des Hilbertraums der Streuzustände von Plektonen und Anyonen beigetragen. Diese ist bekannterweise [FM91, FGR96] fixiert durch die relevanten Darstellungen der Zopfgruppe und durch die Fusionsregeln, nach denen die von den Streuzuständen getragenen Ladungen bestimmt sind. Es wurden Mølleroperatoren  $W^+$  und  $W^-$  vom Raum der aus- und der einlaufenden Streuzustände in einen Referenz-Hilbertraum angegeben, welche die physikalische Strahldarstellung der Poincarégruppe auf den Streuzustandsräumen in eine kanonische Strahldarstellung im Referenz-Hilbertraum übersetzen. Ein neues Ergebnis betrifft den ‘einlaufenden freien PCT-Operator’, d.h. das Produkt des PCT-Operators mit der  $S$ -Matrix  $S = (W^+)^* W^-$  : Auch der hierzu via  $W^-$  äquivalente Konjugationsoperator im Referenz-Hilbertraum konnte angegeben werden.

Im Falle von Anyonen sind die Fusionsregeln trivial und die relevanten Darstellungen der Zopfgruppe sind einfach durch einen Satz von komplexen (‘Statistik’-) Phasen charakterisiert. Daher lieferten uns in diesem Fall die obigen Ergebnisse explizite Formeln für die Strahldarstellung der Poincarégruppe und den einlaufenden freien PCT-Operator. In Anbetracht der Bisognano-Wichmann-Eigenschaft haben wir hiermit insbesondere zu jedem Keilgebiet das Produkt des Tomita-Operators mit der  $S$ -Matrix bestimmt, also den ‘einlaufenden freien’ Tomita-Operator der anyonischen Feldalgebra.

# CURRICULUM VITAE

von Jens Mund, geboren am 12. Mai 1962 in Monrovia, Liberia:

1968–1972 Grundschule Grafing bei München

1972–1982 Gymnasium Grafing, Abitur

1983–84 Zivildienst im Krankenhaus München-Schwabing

Okt. 1985 Beginn des Studiums der Physik (Diplom) an der  
Albert–Ludwigs–Universität Freiburg

Okt. 1987 Vordiplom in Physik

März 1989 Fortsetzung des Studiums an der Freien Universität Berlin

Nov. 1992 Physikdiplom an der FUB

Aug. 1993 - Wissenschaftl. Mitarbeiter am Fachbereich Physik der FU Berlin

Dez. 1997 im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 288  
“Differentialgeometrie und Quantenphysik”

## DANKSAGUNG

Ich danke Herrn Professor Robert Schrader für die geduldige Betreuung dieser Arbeit und für die Einarbeitung in das Thema. Herrn Professor Bert Schroer verdanke ich viele anregende Diskussionen und insbesondere die Idee, die zum ‘No-Go’-Theorem 5.12 geführt hat. Für zahlreiche wertvolle Diskussionen und die Einführung in das Gebiet der modularen Theorie danke ich Dr. Hans-Werner Wiesbrock. Besonderer Dank gebührt Dr. Martin Schmidt, der mir mit seinem Wissen und seiner Geduld in einigen mathematischen Fragen eine große Hilfe war.

Der gesamten Arbeitsgruppe Schrader/Schroer/Karowski bin ich dankbar für das angenehme Arbeitsklima und dafür, daß ich im Bedarfsfall immer hilfs- und diskussionsbereite Ansprechpartner fand. Hier seien Dr. Arnd Zapletal, Boris Tschirschwitz, Dr. Florian Nill und Dr. Carl Phillip Staskiewicz besonders hervorgehoben.

Die Anfertigung dieser Arbeit wurde ermöglicht durch eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 288, “Differentialgeometrie und Quantenphysik”.