DIDAKTIK DER
MATHEMATIK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
AN DER FREIEN UNIVERSITÄT BERLIN

Masterarbeit

Differenzierte Förderung der Beweiskompetenz im Geometrieunterricht durch Anleitung und Vereinfachung der Beweisführung, illustriert am Mittenviereck

Johannes Jenkner

Gutachterin:	Dr. Martina Lenze
Semester:	Wintersemester 2021/22
Verfasser:	Johannes Jenkner
Abgabetermin:	22. November 2021

Abstract

Unterschiedliche Förderwerkzeuge können Lernende im Geometrieunterricht beim eigenständigen Aufstellen einer Beweisführung zu einem Satz unterstützen. Erstens trifft „Lokales Ordnen“ eine Vorauswahl der zur Verfügung stehenden Sätze. Dadurch kann eine Beweisführung in eine bestimmte Richtung gelenkt und an ein bestimmtes Anforderungsniveau angepasst werden. Zweitens kann die formale sowie die sprachliche Strenge eines Beweises auf eine Lerngruppe zugeschnitten werden. Drittens können verschiedene Heurismen die Lösungsfindung eines Beweisproblems erleichtern. Nachdem die unterschiedlichen Werkzeuge im ersten Teil vorgestellt werden, werden sie im zweiten Teil anhand des Beweisbeispiel zum Mittenviereck als Parallelogramm diskutiert. Bei diesem Beweis wird eine neue Beweisführung vorgeführt, die ausschließlich auf Winkel– und Kongruenzsätzen basiert. Zum einen wird gezeigt, wie diese Sätze gemäß des „Lokalen Ordnens“ zur Verfügung gestellt und zur Differenzierung genutzt werden können. Sowohl die Konzeption von Arbeitsblättern zum Beweisbeispiel als auch die Einordnung der Aufgabenstellungen in verschiedene Schwierigkeitsgrade werden erörtert. Zum anderen wird demonstriert, wie weitere Unterstützungsmethoden herangezogen werden können, um den Schülerinnen und Schülern eine eigenständige Beweisfindung zu ermöglichen. Schließlich wird eine Reflexion der Differenzierungsmöglichkeiten mithilfe aller vorgestellten Werkzeuge durchgeführt und die Tragweite des didaktischen Konzepts wird kurz besprochen.

Abstract

Various support tools can boost an autonomous establishment of proof of a theorem by students in the geometry classroom. Firstly, „Local arrangement“ pre–selects available theorems for the proof. Thus, the process of proof finding is directed into a certain direction and a line of arguments can be tailored to a specific proficiency level. Secondly, both the formal and the linguistic strictness of proof can be adjusted towards a specific study group. Thirdly, various heuristics can make problem solving easier in relation to proof finding. After all the tools have been presented in the first part, they are discussed in the second part with respect to the proof example of the quadrilateral formed by connecting the midpoints of an outer quadrilateral being a rhomboid. Within this proof example, a novel line of arguments is introduced which is only based on angle and congruence theorems. On the one hand, it is shown how these theorems can be made available according to the principles of „Local arrangement“ and used for differentiation of proficiency levels. Both the conception of exercise sheets on the proof example and the classification of possible assignments into levels of difficulty is discussed. On the other hand, other support tools are demonstrated to render possible an independent proof finding by students. Finally, possibilities to differentiate are discussed with reference to the selection of support tools and the future scope of the didactic concept is considered shortly.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Persönliche Motivation

Eine Beschäftigung mit dem Thema der vorliegenden Arbeit war für mich persönlich aus den hier aufgeführten Gründen durchaus reizvoll. Früher habe ich eine Zeit lang in meiner Freizeit sehr gerne Rätsel, Knobelaufgaben und Denksportaufgaben bzw. sogenannte Kopfnüsse in Zeitschriften, Rätselheften oder bestimmten Materialien zur Schulung des Verstandes bzw. des Scharfsinns gemacht. Es wäre mir ein Anliegen, die aufgekommene Kurzweiligkeit beim Lösen der Aufgaben bzw. mein damaliges Gefühl eines Erfolgserlebnisses an meine Schülerinnen und Schüler weiterzugeben. Insofern habe ich auch in der vorliegenden Arbeit das Bestreben, mich näher mit der von der KMK (2003, S. 8) vorgegebenen allgemeinen mathematischen Kompetenz des Problemlösens (siehe auch Blum & Berlin IQB 2006, S. 39 ff) auseinanderzusetzen. Um anderen Leuten klar zu machen, dass ich ein Problem wirklich durchdrungen hatte, fand ich es damals schon am eindrucksvollsten, meine eigene Expertise durch einen Beweis der Richtigkeit meiner eigenen Lösung zu untermauern. Insofern halte ich eine schlüssige Beweisführung für ein essenzielles Werkzeug, um den eigenen Standpunkt in alltäglichen Auseinandersetzungen zu stärken.

1.2. Curriculare Vorgaben

Bis 1997 lag ein Hauptinteresse der deutschen Bildungsplanung in der Entwicklung und Erprobung von Modellen zur Optimierung der Lehre an Einzelschulen und der Einführung neuer didaktischer Modelle in die Unterrichtspraxis (vgl. Blum & Berlin IQB 2006, S. 8). Solch eine Input-Orientierung hatte teilweise zur Folge, dass Lernende mathematisches Vorgehen als eher stur und stumpfsinnig angesehen haben (z. B. Bauersfeld & Breidenbach 1978). Dann stürzte 1997 die Bereitstellung von Informationen über die mäßigen Ertragslagen deutscher Schulen in den Bereichen Mathematik und Naturwissenschaften das Bildungssystem in eine Krise. Als Konsequenz rückte danach in den Fokus, welche Art an Kompetenzen sich Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer schulischen Ausbildung aneignen und welche konkreten Leistungsniveaus sie erreichen (vgl. Blum & Berlin IQB 2006, S. 9). Kompetenz meint dabei eine Handlungsfähigkeit, in der Wissen und Können

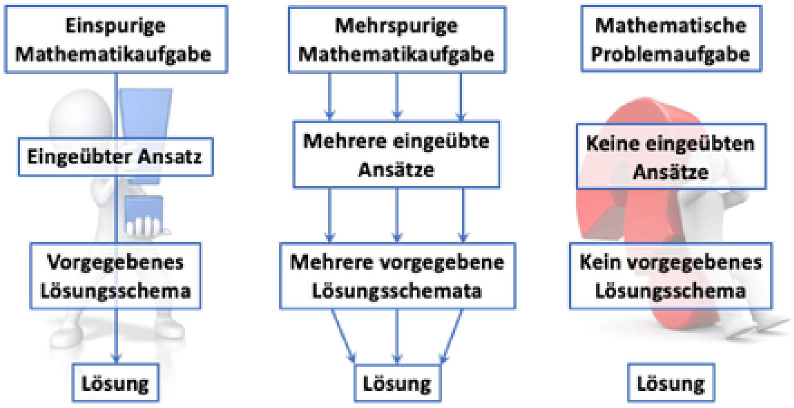


Abbildung 1.1.: Drei Arten von Mathematikaufgaben: Bei einer einspurigen Aufgabe gibt es genau einen Lösungsweg, während bei einer mehrspurigen Aufgabe verschiedene Lösungswege verfolgt werden können. Im Gegensatz zu herkömmlichen Aufgaben (einspurig oder mehrspurig) sind die Ansätze und mögliche Lösungswege bei einer Problemlöseaufgabe für die Schülerinnen und Schüler unbekannt bzw. nicht direkt verfügbar.

mit Motiven und Einstellungen verbunden sind (vgl. Kleinschmidt-Bräutigam 2005, S. 2). Durch diese sogenannte Output- oder Outcome-Orientierung kam das Bestreben auf, mehr Fragestellungen im Problemlösen, die nicht durch ein festes Lösungsschema zu beantworten sind (vgl. Abbildung 1.1), in den Mathematikunterricht zu integrieren. Die Zielvorstellung war, den Lernenden die Möglichkeit zu verschaffen, einen eigenen Lösungsweg zu entdecken, um sich ein Erfolgserlebnis zugute halten zu können. In den Bildungsstandards der KMK[*] wurde festgelegt (KMK 2003), welche Fähigkeiten und Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler zu festgelegten Zeitpunkten haben sollen. Als eine der allgemeinen Kompetenzen wurde das Problemlösen in den Bildungsstandards definiert, um mehr Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, selbstständig Lösungswege zu entwickeln (KMK 2003, S. 8). Deswegen gilt es neben den in Abbildung 1.1 dargestellten ein- und mehrspurigen Aufgaben mit vorher eingeübtem Lösungsweg zunehmend auch Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht zu favorisieren.

Nach Blum & Berlin IQB (2006, S. 21) beziehen sich die Bildungsstandards direkt auf die von Winter (1995) konstatierten Grunderfahrungen, die im Mathematikunterricht vermittelt werden. Die erste Grunderfahrung beleuchtet „Erscheinungen der Welt um uns“, die es zu verstehen gilt. Sie entspricht einer induktiven Sichtweise, bei der eine universelle Regel

[*] Kultusministerkonferenz

von beobachteten Fällen abgeleitet werden soll. Die zweite Grunderfahrung bezieht sich unmittelbar auf eine „deduktiv geordnete Welt“, bzw. eine deduktive Sichtweise, bei der von einer universellen Regel auf Einzelfälle geschlossen werden soll. Schließlich spricht die dritte Grunderfahrung das Problemlösen bzw. die damit verbundenen heuristischen Fähigkeiten an. Wenn Mathematikunterricht sowohl Beweise mit induktiver als auch mit deduktiver Beweisführung lehrt und nebenbei Problemlösefähigkeiten schult, adressiert er also alle drei Grunderfahrungen von Winter (1995).

1.3. Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit zeigt Möglichkeiten für eine differenzierte Förderung von Problemlösekompetenz im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I[*] auf, um eigenständig einen mathematischen Beweis zu führen. In Kapitel 2 werden die grundlegenden mathematikdidaktischen Erkenntnisse bezüglich des Problemlösens und Beweisens im Unterricht präsentiert. Nachdem die zugrunde liegenden Förderkonzepte in Kapitel 3 besprochen werden, wird die Vorgehensweise am Beispiel des Mittenvierecks exemplifiziert. In Kapitel 4 werden die Eigenschaften eines Mittenvierecks sowie Möglichkeiten zum Nachweis dieser Eigenschaften diskutiert und es wird die zentrale Beweisführung dieser Arbeit vorgestellt. Danach wird in Kapitel 5 die Förderung der Beweiskompetenz am Beispiel konkretisiert und einige Differenzierungsmöglichkeiten werden erörtert. Schließlich wird in Kapitel 6 eine Reflexion der neuen mathematikdidaktischen Aspekte durchgeführt sowie kurz auf die Tragweite des neuen Konzepts eingegangen. Im Anhang sind Arbeitsblätter zur zentralen Beweisführung für unterschiedliche Anforderungsniveaus zur Verfügung gestellt und eine fiktive Unterrichtsstunde zur Thematik wird in den Berliner Rahmenlehrplan eingeordnet.

[*] umfasst die Schulstufen der mittleren Bildung und entspricht dem Level 2 der ISCED

2. Didaktischer Hintergrund

2.1. Problemlösen im Geometrieunterricht

2.1.1. Psychologie des Problemlösens

In der allgemeinen Psychologie haben sich zahlreiche Wissenschaftler mit der Begrifflichkeit des Problemlösens beschäftigt. Dabei haben sich viele Definitionen von Problemlösen in wissenschaftlichen Kreisen etabliert, die sich alle leicht voneinander unterschieden. Im Folgenden werden die drei meist zitierten Definitionen wiedergegeben. Dörner (1976) beschäftigt sich in seiner Forschung sehr ausgiebig mit Informationsverarbeitung und Problemlösen und kommt zu folgender Eingrenzung **(1. Definition)**: „Ein Individuum steht einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den wünschenswerten Zielzustand zu überführen.“ Wenige Jahre später kommt Hussy (1984) zu einer Erklärung, auf die sich die Mathematikdidaktik bis heute immer wieder bezieht **(2. Definition)**: „Unter Problemlösen versteht man das Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs– oder Ist–Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Ziel– oder Soll–Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs- und Zielzustand befindet.“ Schließlich hat sich in den letzten Jahrzehnten die Universität Heidelberg in der Forschung über kognitive Problembewältigung einen großen Namen gemacht und Funke (2003) kommt zu folgendem Schluss **(3. Definition)**: „Problemlösendes Denken erfolgt, um Lücken in einem Handlungsplan zu füllen, der nicht routinemäßig eingesetzt werden kann. Dazu wird eine gedankliche Repräsentation erstellt, die den Weg vom Ausgangs- zum Zielzustand überbrückt.“

Allen drei Definitionen ist gemeinsam, dass ein Übergang von einem Zustand in einen anderen angestrebt wird. Dabei gibt es einen oder mehrere Gründe, warum dieser Übergang nicht so leicht vollzogen werden kann. Ein fehlendes Mittel bei Dörner (1976) entspricht einer Barriere bei Hussy (1984) und wird bei Funke (2003) als Lücke paraphrasiert. Nur wenn eine entsprechende Zwischenphase erfolgreich bewältigt wird, kann ein Problem zufriedenstellend gelöst werden.

2.1.2. Problemlösen als Kompetenz im Geometrieunterricht

Wenn Schülerinnen und Schüler im Unterricht durch Problemlöseaufgaben einen Lernerfolg erzielen sollen, dürfen die gestellten Probleme weder zu leicht noch zu schwer sein. In diesem Zusammenhang spricht Bruder (2003) davon, dass die gestellten Aufgaben einen Problemcharakter haben sollen, der in der „Zone der nächsten Entwicklung“ liegt. Geometrie bietet sich als geeignetes Übungsfeld für das Problemlösen an, da sich viele geometrische Probleme in Modellen, Skizzen und Zeichnungen gut veranschaulichen lassen, die Handlungsobjekte überschaubar und die erlaubten Handlungen (etwa Operationen mit Zirkel und Lineal) gut nachvollziehbar sind (vgl. Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 9 f). Um den Schülerinnen und Schülern auch bei unbekannten Lösungswegen eine didaktische Struktur an die Hand zu geben, haben sich zahlreiche Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien im Geometrieunterricht bewährt, deren Verwendung mit den Schülerinnen und Schülern eingeübt werden kann. Außerdem hat sich gezeigt, dass eine bewusste und reflexive Steuerung des eigenen Lernverhaltens und ein Überdenken des gefundenen Lösungsweges einen nachhaltigen Lernerfolg fördert (z. B. Gürtler et al. 2002).

Hinsichtlich der verschiedenen Aktivitäten, die von den Schülerinnen und Schülern im Geometrieunterricht geleistet werden, lassen sich laut Filler (2011) verschiedene Arten von geometrischen Problemen unterscheiden. Je nach Art der vorgesehenen Handlung kann ein geometrisches Problem demnach in eine oder mehrere der folgenden Kategorien eingeordnet werden (vgl. Filler 2011, S. 24 f):

- **Berechnungsproblem:** Es wird die rechnerische Ermittlung einer unbekannten Größe verlangt, die eine Berücksichtigung von bestimmten geometrischen Gesetzmäßigkeiten zwingend erfordert.
- **Beweisproblem:** Es wird nach einem mathematischen Beweis für eine Behauptung in einem geometrischen Kontext gefragt.
- **Konstruktionsproblem:** Es wird die Konstruktion eines bestimmten Objekts (Punkt, Strecke, Winkel, Figur) verlangt.
- **Modellierungsproblem:** Es wird nach der Lösung eines außermathematischen Problems mittels einer Übersetzung in einen innermathematischen geometrischen Kontext gesucht.
- **Anzahlproblem:** Es soll die Anzahl von Objekten (Punkt, Strecke, Winkel, Figur) mit einer bestimmten geometrischen Eigenschaft gezählt werden.

- **Optimierungsproblem:** Es soll eine bestimmte Größe in einem geometrischen Kontext optimiert (z. B. maximiert oder minimiert) werden.

Die vorliegende Arbeit legt den Fokus auf die Aufbereitung von Beweisproblemen für den Geometrieunterricht und untersucht Möglichkeiten für eine differenzielle Förderung von geometrischen Beweisführungen.

2.1.3. Schritte des Problemlösens nach Polya (1979, 1995)

Um Schülerinnen und Schülern den Problemlöseprozess im Unterricht nahe zu bringen, kann ihnen eine strukturelle Hilfe an die Hand gegeben werden. Dazu wird empfohlen, die immanente Struktur eines Problemlöseprozesses zu erkennen und zu verstehen. Aus der Sicht von Polya (1995) ist das Lösen eines Problems ein „Entdeckungs– und Findungsvorgang“, der viele Parallelen zur wissenschaftlichen Arbeitsweise aufweist. Polya (1979, 1995) identifiziert vier fundamentale Schritte im Problemlöseprozess, die im Folgenden kurz beschrieben werden.

Schritt 1: Das Problem verstehen

Am Anfang geht es bei einem Problem zunächst darum, genau herauszufinden, welche Informationen bekannt bzw. unbekannt sind, und daraufhin genau zu erkennen, was zu zeigen (oder zu transformieren) ist. Dabei kann überlegt werden, ob eine Skizze oder ein Diagramm zum besseren Verständnis beitragen können, und ob das Problem in eigenen Worten verständlicher formuliert werden kann. Es kann außerdem hilfreich sein, eine geeignete Schreibweise einzuführen oder das Problem an einem Beispiel zu exemplifizieren. Die anfänglichen Bemühungen zielen also darauf ab, möglichst viel relevantes Wissen über die Problemstellung zusammenzutragen.

Schritt 2: Einen Plan bereitstellen

Nachdem das Problem möglichst detailliert erkannt worden ist, muss überlegt werden, auf welche Weise eine Lösung herbeigeführt werden könnte. Wenn nicht intuitiv klar ist, welches Vorgehen zielführend ist, muss ein Plan entworfen werden, von dem erwartet wird, dass er zur Lösung beiträgt. Um einen möglichst guten Plan zu finden, wird nach denkbaren Verbindungen zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten Ausschau gehalten. Eine intuitive oder bewusste Auswahl von Heurismen kann zu einem guten Plan beitragen. Außerdem kann es von Vorteil sein, das Problem strategisch mithilfe unterschiedlicher Ansätze in Angriff zu nehmen. Sollte es so aussehen, als ob das Problem unlösbar sei, kann jetzt versucht werden, das Problem zu vereinfachen oder Spezialfälle einer vorgegebenen Situation näher zu untersuchen. Manchmal empfiehlt es sich auch, nach verwandten Problemen zu suchen, da diese unter Umständen durch einen ähnlichen Lösungsweg bewältigt werden können und dieser Lösungsweg kopiert werden kann.

Schritt 3: Den bereitgestellten Plan ausführen

Nachdem ein möglichst guter Plan aufgestellt worden ist, soll der Plan erwartungsgemäß auch durchgeführt werden. Es kommt jetzt darauf an, hartnäckig zu sein und alle geplanten Operationen nach und nach in die Tat umzusetzen. Dabei gilt es, jede einzelne Stufe des Plans geduldig und beharrlich zu erklimmen. Um Folgefehler zu vermeiden, empfiehlt es sich, jeden einzelnen Teilschritt zeitnah zu prüfen und seine Richtigkeit zu beweisen. Auf diesem Weg nähert man sich sich allmählich der gesamten Problemlösung und ist stets bestrebt, den Überblick über die bereits durchgeführten und die noch durchzuführenden Operationen zu behalten.

Schritt 4: Rückschau halten

Am Schluss findet eine Reflexion bzw. Rückschau auf die Problembewältigung statt. Jetzt ist es wichtig, das gefundene Ergebnis bzw. die gefundene Antwort auf die Problemstellung zu verifizieren. Dabei werden die gewählten Teilschritte nochmal hinterfragt und untersucht, ob alle Schritte zufriedenstellend ausgeführt worden sind. Schließlich kann nachgeschaut werden, ob das Problem vielleicht auf eine andere Art gelöst werden könnte, die einfacher und passender wäre. Es muss herausgefunden werden, ob die Lösung den gestellten Ansprüchen genügt. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, müssen die vorherigen Schritte nochmal durchlaufen werden, d. h. ein neuer Plan muss aufgestellt und ausgeführt werden.

2.1.4. Heurismen beim Problemlösen

Dörner (1976) unterscheidet zwei unterschiedliche Strukturen innerhalb des kognitiven Apparates eines Menschen. Zum einen umfasst die epistemische Struktur das gespeicherte Wissen, bzw. die „Datenbasis“, eines Menschen. Zum anderen umfasst die heuristische Struktur die übergeordnete Steuerung des kognitiven Geschehens, bzw. das Bewusstwerden der Gedankengänge. Sie beinhaltet auch, dass sich eine Person – bewusst oder unbewusst – an frühere kognitive Prozesse erinnern kann, die eine positive Veränderung herbeigeführt haben. Die heuristische Struktur kann mithilfe von sogenannten Heurismen greifbar gemacht werden, die sich in die drei Teilaspekte der Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien aufspalten.

Ein durch Heurismen geleitetes Vorgehen wird zum Beispiel beim professionellen Schachspiel offensichtlich, bei welchem Schachmeister Heurismen selektiv in Spielsituationen zum Einsatz bringen (Simon & Simon 1962). Die Teilaspekte sind insbesondere auch für das Problemlösen im Mathematikunterricht von großer Bedeutung. Deswegen wird ihre Relevanz für den Mathematikunterricht in der vorliegenden Arbeit besprochen. Im nächsten Kapitel wird dann im Abschnitt 3.3 ein bewusster Kompetenzaufbau im mathematischen Problemlösen in Verbindung mit einem Trainieren der Anwendung von Heurismen beleuchtet.

Erleben eines Heureka–Effekts

Wenn eine knifflige Aufgabe, ein Problem im Alltag oder ein Rätsel in einer Zeitschrift gelöst ist, kann man sich freuen und mit seinem Erfolg zuerst einmal zufrieden zu sein. Jeder hat solch ein Erfolgserlebnis schon einmal gehabt und denkt gerne daran zurück. Insofern streben die Menschen danach, in einem Problemfall am Ende eines Lösungsprozesses sagen zu können (vgl. Bruder 2003, S. 5): Ich hab's geschafft! Dieser Ausruf geht der Überlieferung nach auf den Archimedes von Syrakus zurück, der von seinem König den Auftrag erhielt, eine gefälschte Krone zu entlarven, die nicht aus reinem Gold besteht. Als er den Einfall hatte, den Auftrieb in Wasser zu benutzen, um die gefälschte Krone von einer echten zu unterscheiden, tätigte er – gemäß der Überlieferung – den griechischen Ausruf „Heureka“, was soviel wie „Ich hab's gefunden!“ bedeutet. Die zündende Idee zur Problemlösung hatte Archimedes angeblich gerade dann, als er ein Bad nahm (vgl. Bruder 2002). Auf diese Begebenheit geht der Begriff eines „Heurismus“ zurück, welcher ein Findeverfahren zum Erkennen eines Lösungsweges bezeichnet. Dörner (1976) spezifiziert einen Heurismus etwas genauer und versteht unter ihm eine bestimmte Abfolge elementarer geistiger Operationen, durch die ein Problem gelöst werden kann, aber nicht unbedingt gelöst werden muss.

Geistige Beweglichkeit als Voraussetzung

Bruder (2003) zählt fünf Merkmale einer geistigen Beweglichkeit auf, die eine erfolgreiche Anwendung von Heurismen fördern und einen potenziellen Heureka-Effekt möglich machen. Eine Reduktion des Problems **(1. Merkmal)** bedeutet, dass das ursprüngliche Problem vereinfacht und veranschaulicht wird (vgl. auch Bruder & Collet 2011, S. 33). D. h. es können einzelne Teilprobleme gesondert betrachtet werden oder passende Beispiele gefunden und durchdacht werden. Das Beherrschen der Reversibilität **(2. Merkmal)** bedeutet, dass einzelne Gedankengänge umgekehrt werden können. Die sogenannte Aspektbeobachtung **(3. Merkmal)** bringt mit sich, dass Erfolg versprechende Ideen bewusst identifiziert und konsequent weiter verfolgt werden können. Außerdem impliziert die Aspektbeobachtung, dass Querverbindungen und Abhängigkeiten in der angestrebten Vorgehensweise erkannt werden. Die Fähigkeit zum Aspektwechsel **(4. Merkmal)**, d. h. zum Aufnehmen neuer Gedankengänge, ist essentiell, um nicht zu viel Zeit mit Ansätzen und Lösungswegen zu verlieren, die nicht zum Ziel, sondern nur in eine Sackgasse führen. Schließlich gibt es noch das Konzept der Transferierung **(5. Merkmal)**, das die Fähigkeit beschreibt, einen Sachverhalt oder ein Vorgehen in einen anderen Kontext zu stellen bzw. auf eine andere Situation zu übertragen.

Heuristische Hilfsmittel im Mathematikunterricht

Im Gegensatz zu anderen Heurismen haben die Hilfsmittel keinen Verfahrenscharakter, sondern beziehen sich auf visuell erkennbare Instrumente bzw. explizite Darstellungen. Dabei beantworten sie folgende Schlüsselfrage im Problemlöseprozess: „Wie kann ich die Problemstellung veranschaulichen oder anders darstellen" (Bruder & Collet 2011, S. 46). Im Folgenden werden die wichtigsten Hilfsmittel für das mathematische Problemlösen kurz vorgestellt.

- **Tabellen:** Tabellen sind allgemein sehr gebräuchlich zur Darstellung von beliebigen Informationen. Allerdings entfalten sie ihren wahren Wert zur Reduktion und Fokussierung von Informationen in Problemlöseaufgaben erst dann, wenn sie ganz bewusst zum Strukturieren von Informationen eingesetzt werden (Bruder & Collet 2011, S. 56).
- **Wissensspeicher:** Wissensspeicher werden herkömmlich unter dem Namen „Merkheft" oder „Formelheft" geführt, stellen aber im Rahmen der hier vorgestellten Heurismen eine Erweiterung dieser „Hefte" dar. Insbesondere dienen sie als übergeordnetes Hilfsmittel, um neben mathematischen Begriffen, Kalkülen und Formeln auch die Anwendung anderer Heurismen schriftlich festzuhalten und zu strukturieren (Bruder & Collet 2011, S. 61).
- **Lösungsgraphen:** Lösungsgraphen stellen in gewisser Weise eine Erweiterung von Wissensspeichern dar. Genauer gesagt immer dann, wenn Lösungswege mithilfe einer Auflistung der gegebenen und gesuchten Größen sowie deren Verkettung dargestellt werden, spricht man von einem Lösungsgraph. Eine Verkettung einzelner Elemente wird dabei gewöhnlich durch gerichtete Pfeile visualisiert und repräsentiert einen angedachten Lösungsweg. Laut Bruder & Collet (2011, S. 66) bieten sich Lösungsgraphen gerade auch für mehrschrittige mathematische Beweise an.

- **Informative Figur:** Eine informative Figur bezeichnet laut Bruder & Collet (2011, S. 46 ff) eine Skizze, aus der man „möglichst viel ablesen kann“ und in der im Idealfall auch noch „Beziehungen oder Informationen“ stecken, die „man dem Aufgabentext noch nicht entnehmen konnte“. Dabei können je nach Aufgabentyp ganz unterschiedliche Arten von graphischen Darstellungen eine sinnvolle Verwendung finden. Ein klassisches Beispiel stellt ein Koordinatensystem dar, in dem Schnittpunkte von Funktionen meist sehr einfach gefunden werden können. Wenn solch eine Lösung lediglich graphisch bestimmt wird, hat sie meistens eine begrenzte Genauigkeit, die allerdings in vielen realitätsbezogenen Aufgabenstellungen völlig ausreichend ist.
- **Gleichung:** Eine Gleichung stellt unter einem heuristischen Blickwinkel ein ideales Instrument zur Informationsreduktion dar und bietet in der Regel eine höhere Abstraktionsleistung als andere Hilfsmittel (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 67). Auch wenn eine Gleichung bereits in einfachen mathematischen Zusammenhängen sehr hilfreich sein kann, entfaltet sie erst ihr volles Potenzial, wenn die Zusammenhänge komplex sind und viele Bedingungen zu berücksichtigen sind (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 68).

Heuristische Strategien im Mathematikunterricht

Heuristische Strategien beschreiben „grundsätzliche Vorgehensweisen, wie man in einer Problemsituation agieren kann, wenn das Problem im Wesentlichen verstanden wurde“ (Bruder & Collet 2011, S. 68). Zahlreiche Anwendungen zeigen, dass heuristische Strategien dazu beitragen, komplexe Problemstellungen in verschiedenen Bereichen schneller und effektiver zu lösen. Zum Beispiel nutzen professionelle Schachspieler ausgefeilte Strategien, um ihre nächsten Züge zu planen (Simon & Simon 1962).

- **Systematisches Probieren:** Ein Vorgehen gemäß „Versuch und Irrtum“ stellt eine der trivialsten Handlungsweisen im Umgang mit Problemen dar. Solch ein Vorgehen kann, je nach Lösungsraum, auch nur eine sehr geringe „Trefferquote“ bzw. Erfolgswahrscheinlichkeit aufweisen. Wenn dagegen systematisch gesucht bzw. planvoll ausprobiert wird, verbessern sich die Erfolgsaussichten erheblich (z. B. Simon 1977; Ross & Maynes 1983).
- **Vorwärtsarbeiten:** Beim Vorwärtsarbeiten „inspiziert man zunächst das Gegebene und versucht davon ausgehend das Gesuchte zu erreichen“ (Bruder & Collet 2011, S. 76). Die angestellten Überlegungen bestehen also wiederholt darin, welcher Schritt der jeweils nächste sein könnte.

- **Rückwärtsarbeiten:** Das Rückwärtsarbeiten ist gegenläufig zum Vorwärtsarbeiten. Allerdings ist die Suchstrategie dahinter bis auf die umgekehrte Richtung sehr vergleichbar. Im Wesentlichen geht es darum, vom Gesuchten auf vorherige Zwischenschritte zu schliessen. Man versucht, genügend viele Zwischenschritte zu rekonstruieren, bis man beim Gegebenen angekommen ist. Dabei müssen beim Rückwärtsarbeiten Umkehroperationen und Umkehrfunktionen der eigentlichen Rechen– oder Abbildungsvorschriften angewendet werden.
- **Analogieschluss:** Bei Analogieschlüssen wird überprüft, ob „man eine zu einem Problem ähnliche Aufgabe schon einmal erfolgreich gelöst hat und sich daher bei der Lösungsfindung auf eine bereits bekannte Vorgehensweise stützen kann“ (Bruder & Collet 2011, S. 83). Im Mathematikunterricht werden die Schülerinnen und Schülern bei entsprechenden Aufgaben gefragt, welche Eigenheiten einer Aufgabe ihnen bekannt vorkommen bzw. wie sie zuvor bei verwandten Aufgaben vorgegangen sind.
- **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes:** Laut Bruder & Collet (2011, S. 87) ist die Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes unverzichtbar, wenn Einsichten in Erarbeitungsphasen neuer Lerninhalte gewonnen werden sollen. Dabei wird so lange versucht, Informationen umzustrukturieren, zu erweitern oder auszusortieren, bis Analogieschlüsse möglich sind. Eine Möglichkeit ist, mithilfe von Fallunterscheidungen oder einer Problemzerlegung eine Rückführung auf bekannte Teilprobleme zu erreichen. In solch einer Situation kann eine Einführung zusätzlicher Bedingungen das ursprüngliche Problem in mehrere Spezialfälle unterteilen, die hinterher wieder verallgemeinert werden können (vgl. Vorwort in Polya 1995).

Heuristische Prinzipien im Mathematikunterricht

Im Vergleich zu den heuristischen Strategien sind heuristische Prinzipien stärker an die jeweiligen Fachinhalte und die gegebenen Voraussetzungen gebunden. Die hier dargestellten Prinzipien korrespondieren zu Grundsätzen bzw. Leitsätzen im Problemlösen und sie beschreiben, wie bestimmte Lösungsprozesse ablaufen. Die damit verbundenen Vorgehensweisen sind mit den mentalen Beweglichkeitsmerkmalen in Abschnitt 2.1.4 verknüpft. Teilweise können diese Prinzipien für die Lösung spezieller Probleme außerordentlich hilfreich sein (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 87 f). Die relevantesten mathematischen Prinzipien fürs Problemlösen sind die folgenden: das Transformationsprinzip, das Zerlegungs– und Ergänzungsprinzip, die Fallunterscheidung, das Invarianzprinzip, das Symmetrieprinzip sowie das Extremalprinzip.

Spezielle Heurismen in der Geometrie

Neben den allgemeinen heuristischen Strategien können auch inhaltsspezifische heuristische Strategien identifiziert werden, die beim Lösen von geometrischen Problemen helfen (z. B. Filler 2011; Ludwig & Weigand 2018). Die Idee dabei ist, besondere Heurismen so anzuwenden, um sich dann bestimmte Identitäten und Ähnlichkeiten bzw. bestimmte geometrische Lehrsätze (z. B. Satz des Pythagoras, Strahlensätze) zunutze machen zu können. Inhaltsspezifische Strategien umfassen z. B. die im Folgenden aufgezählten Vorgehensweisen für Problemstellungen in der Sekundarstufe I (vgl. Ludwig & Weigand 2018, S. 5). **(1.)** Das Einzeichnen von geeigneten Hilfslinien fördert die Erkennung von kleineren Objekten. **(2.)** Das Suchen bzw. Finden gleich langer Strecken oder gleich großer bzw. einander ergänzender Winkel begünstigt die Entdeckung von Gleichartigkeit. **(3.)** Die Identifikation von rechtwinkligen Dreiecken oder Teildreiecken ermöglicht die Anwendung einer der Sätze aus der Pythagoras–Gruppe oder einer trigonometrischen Identität. **(4.)** Das Erkennen von ähnlichen Vielecken erlaubt die Bestimmung von Streckenverhältnissen. **(5.)** Das Erkennen von parallelen Geraden erlaubt eine Anwendung der Winkelbeziehungen an Geradendoppelkreuzungen oder der Strahlensätze. **(6.)** Die Identifikation von inhaltsgleichen bzw. ergänzungs– oder zerlegungsgleichen Vielecken ermöglicht eine Verknüpfung der entsprechenden Formeln für den Flächeninhalt.

Chinnappan (1998) definiert bestimmte Lösungsschemata in der Geometrie und schreibt ihnen geometrische Lehrsätze (z. B. Satz des Pythagoras, Strahlensätze) zu. Dann zeigt Chinnappan (1998), dass leistungsstarke Schülerinnen und Schüler diese Schemata während des Lösungsprozesses eines geometrischen Problems viel häufiger aktivieren als leistungsschwache. Da die inhaltsspezifischen heuristischen Strategien eng mit den Schemata von Chinnappan (1998) verwandt sind, ist zu erwarten, dass sie auch vermehrt von leistungsstarken Lernenden angewendet werden. Um leistungsschwache Lernende im geometrischen Problemlösen zu unterstützen und zu schulen, werden in Abschnitt 3.3 verschiedene Trainingsformen vorgestellt, die gut im Geometrieunterricht einsetzbar sind.

2.2. Beweisen im Geometrieunterricht

Beweise sind für Mathematikerinnen und Mathematiker essenzieller Teil zur Sicherung und Weiterentwicklung des Wissensbestandes. Grieser (2017) hält sie sogar für das Herzstück der Mathematik. Für Schülerinnen und Schüler ist Beweisen dagegen ein Lerngegenstand, der nicht selten hohe Anforderungen oder sogar eine Überforderung mit sich bringt (vgl. Ufer et al. 2009, S. 30). Dies kann unter anderem dadurch erklärt werden, dass „die spezifischen Regeln für akzeptable Argumentationen in der Mathematik für die meisten Schülerinnen und Schüler nicht transparent sind“ (Ufer et al. 2009, S. 30). Da Schülerinnen und Schüler in der Regel kein Beweisbedürfnis erkennen (z. B. Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 4), sehen viele von ihnen keinen Sinn im Beweisen von mathematischen Zusammenhängen im Unterricht. Außerdem neigen sie dazu, Arbeitshypothesen zu früh als wahr anzunehmen und nicht mehr zu hinterfragen, auch wenn noch nicht alle Alternativhypothesen ausgeschlossen sind (Winter 1983; Kuntze 2004). Es scheint, dass für Schülerinnen und Schüler das Nachmessen oder Überprüfen anhand einer Zeichnung als „Beweis“ für Geometrieprobleme meistens ausreicht (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 4). Demnach ist es eine große Herausforderung für eine Lehrkraft, Beweise unter anderem auch in den Geometrieunterricht zu integrieren und den Schülerinnen und Schülern die nötige Motivation dazu zu vermitteln.

2.2.1. Funktion und Axiomatik von geometrischen Beweisen

Grundsätzlich übernehmen Beweise unterschiedliche Rollen in der Mathematik, die auch auf Problemstellungen in der Geometrie zu übertragen sind. De Villiers (1990) identifiziert die folgenden Funktionen von mathematischem Begründen: Überzeugen, Erklären, Kommunizieren, Entdecken und Zusammenhänge herstellen. G. Wittmann (2018, S. 23) formuliert diese Funktionen in ähnlicher Weise: Verifizierung, Erklärung, Einordnung und Systematisierung, Kommunikation sowie Exploration und Entdeckung. Die Geometrie beschäftigt sich mit dem Vermessen von geometrischen Objekten (Punkt, Strecke, Winkel, Figur) sowie der Charakterisierung, den Eigenschaften und den Beziehungen dieser Objekte (z. B. Filler 2011, S. 3 f). Insbesondere das Herstellen sowie die Einordnung und Systematisierung von Zusammenhängen gelten als essenzielle Funktionen in der Geometrie, weil sie Sätze und geometrische Objekte in Beziehung setzen (vgl. Meyer & Prediger 2009, S. 5).

Wenn die Objekte graphisch dargestellt werden, können sie mit dem Auge untersucht werden. D. h. bestimmte geometrische Größen können nachgemessen oder die Lage der Objekte kann visuell begutachtet werden. Insofern können Vermutungen über geometrische Zusammenhänge umstandslos aus dem Vergleich bestimmter Zeichnungen bzw. Graphiken aufgestellt werden. Allerdings treten beim Vermessen der Objekte immer gewisse Messfehler auf und das menschliche Augenmaß besitzt nur eine begrenzte Genauigkeit. Es bleibt also immer eine Ungewissheit bestehen über die Exaktheit einer aus der Anschauung gewonnenen Vermutung. Hier taucht die Notwendigkeit für einen exakten Beweis auf, der Gewissheit bezüglich der Gültigkeit einer geometrischen Behauptung erzeugt. Ohne diese Gewissheit bleibt ein kognitiver Konflikt bestehen, der laut Reusser (1984) sechs verschiedene Ausprägungen haben kann: Zweifel, Perplexität, logischer Widerspruch, gedankliche Inkongruenz, Verwirrung und Irrelevanz.

Beim Beweisen wird die Gültigkeit einer mathematischen Aussage gemäß zuvor vereinbarter logischer Schlussregeln auf die Gültigkeit anderer, bereits bewiesener Aussagen zurückgeführt (Hock et al. 2016, S. 182). Mit anderen Worten lassen sich alle Folgesätze streng logisch unter ausschließlicher Verwendung bereits bewiesener Ausgangssätze herleiten. Damit das Zusammenspiel von Axiomen und Basissätzen funktioniert, müssen ein paar Grundregeln wie Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit erfüllt sein (z. B. Müller-Philipp & Gorski 2012, S. 66). In der Geometrie wird die Aufstellung von Satzgruppen sowie deren Unterteilung in Axiome und Postulate meist auf die methodologischen* Ansichten des Aristoteles zurückgeführt (vgl. Hock et al. 2016, S. 184). In seinem Werk „Die Elemente“ (Euklid 3. Jh. v. Chr.) unternahm Euklid von Alexandria in der Geometrie den ersten Versuch eines strengen axiomatisch–deduktiven Aufbaus einer mathematischen Theorie (z. B. Jahnke & Ufer 2015, S. 331). Die Redewendung „more geometrico“ (lateinisch: „auf die Art der (euklidischen) Geometrie“) erinnert noch heute an diesen dogmatischen Aufbau bzw. diese dogmatische Argumentation.

Lakatos (1982) schreibt über die Axiomatik Euklids:
Ich nenne ein deduktives System eine „Euklidische Theorie“, wenn die Aussagen an der Spitze (die Axiome) aus völlig bekannten Ausdrücken (Grundausdrücken) bestehen, und wenn es hier unfehlbare Wahrheitswertsetzungen des Wahrheitswerts „wahr“ gibt, der durch die deduktiven Kanäle der Wahrheitsübertragung (Beweise) hinabfließt und das ganze System durchdringt.

2.2.2. Beweisfindung durch Problemlösen

Ein Beweis entspricht einer logisch vollständigen bzw. konsistenten Argumentation (vgl. Grieser 2017, S. 3). Eine mathematische Begründung gehört zur allgemeinen mathematischen Kompetenz des „Mathematischen Argumentierens“ (Blum & Berlin IQB 2006, S. 35 ff). Genauer gesagt fangen Schülerinnen oder Schüler immer dann an, mathematisch zu argumentieren, wenn ein Lösungsverfahren oder ein Ergebnis erklärt, mit einer Rechtfertigung untermauert oder überprüft werden muss (vgl. Blum & Berlin IQB 2006, S. 36). In diesem

*auf einer Methodenlehre beruhend

Kontext ist das Lösungsverfahren in der Regel bereits vorhanden oder mögliche Belege für die Richtigkeit eines Ergebnisses sind bereits verfügbar. D. h. die Schülerinnen oder Schüler müssen argumentativ darlegen, welche Begründung sie als Nachweis einer mathematischen Aussage heranziehen bzw. auswählen.

Wenn es aber darum geht, einen neuen oder unbekannten Beweis zu finden, muss zuerst eine mathematische Satzstruktur ausfindig gemacht werden, auf der der Beweis aufgebaut werden kann. In diesem Fall ist ein strategiegeleitetes Vorgehen zum Aufspüren dieser Struktur gefragt, und es handelt sich um eine mathematische Problemstellung. Am Anfang solch eines Beweisprozesses herrscht ein Ausgangszustand vor, bei dem die Gewissheit bezüglich der Gültigkeit einer Behauptung fehlt. Am Ende wird dann ein Zielzustand angestrebt, bei dem diese Gewissheit vorhanden ist. Insofern kann man den Prozess einer Beweisfindung mit einem Problemlöseprozess gleichsetzen, bei dem der zu liefernde Beweis eine Barriere bzw. eine Lücke im Problemlöseprozess darstellt (siehe auch Abschnitt 2.1.1). Zum Finden eines Beweises gibt es zwar kein allgemeines Rezept, aber es gibt typische Beweismuster und immer wiederkehrende Ideen (vgl. Grieser 2017, S. 3). Strategien oder Vorgehensweisen, die aus dem Problemlösen bekannt sind, können direkt zur Beweisfindung eingesetzt werden. Dementsprechend gehört der Prozess einer kompletten Beweisfindung zur allgemeinen mathematischen Kompetenz des „Problemlösens“ (vgl. Blum & Berlin IQB 2006, S. 39 f).

2.2.3. Methodenwissen zur Beweiskompetenz

In der Fachwissenschaft existieren bestimmte Kriterien, die mathematische Beweise idealerweise erfüllen sollen. Dazu gibt es eine bestimmte Methodik, die beim Beweisen typischerweise angewendet wird und eine Erfüllung der Kriterien sicherstellt. Drei allgemein gebräuchliche methodische Konzepte zum Aufbau von Beweisen werden von Heinze & Reiss (2003) definiert:

1. **Beweisschema:** Das Schema spezifiziert die Argumente, die in jedem einzelnen Schritt eines Beweises zugelassen sind. In der Regel sind dies allgemeingültige deduktive Schlüsse und Axiome. Diese bestehen aus einem Satz von Voraussetzungen, einer Schlussfolgerung sowie einem Argument, das die Schlussfolgerung – gestützt von weiteren gesicherten Aussagen – beweist.
2. **Beweisstruktur:** Die deduktiven Schlüsse müssen vom logischen Aufbau so angeordnet sein, dass sie mit den Voraussetzungen beginnen und bei der Behauptung enden.

Dabei gilt es, die logische Struktur der einzelnen Schlüsse zu erfassen und in formaler Schreibweise wiederzugeben.

3. **Beweiskette:** Aufeinanderfolgende Beweisschritte müssen sich zu einer logischen Kette formieren. Dabei müssen die einzelnen Schritte exakt ineinander greifen und es dürfen keine Lücken entstehen.

Eine Einhaltung dieser drei Konzepte bedingt automatisch die Vollständigkeit bzw. Lückenlosigkeit eines Beweises (vgl. erstes Kriterium von G. Wittmann 2018, S. 2) Als weitere Beweiskriterien führen G. Wittmann (2018, S. 2) zusätzlich noch Minimalität und Formalisierung an. Das Prinzip der Minimalität fordert eine Vermeidung von redundanten Beweisschritten und sorgt somit für eine bestmögliche Übersichtlichkeit und Verständlichkeit eines Beweises. Das Prinzip der Formalisierung ist eine essenzielle Eigenheit eines wissenschaftlichen Beweises (siehe Abschnitt 2.2.4), wird jedoch im Mathematikunterricht häufig nur teilweise oder gar nicht berücksichtigt.

2.2.4. Repräsentationsformen von Beweisen

Wissenschaftliche oder formale Beweise haben in der Mathematik eine lange Tradition und gehen ursprünglich auf griechische Mathematiker in der Antike zurück. Dem gegenüber steht ein rein empirisches Prüfen, bei dem Laien versuchen, die Richtigkeit einer mathematischen Aussage anhand von Einzelfällen abzuleiten. Solch ein erfahrungsbasiertes Austesten wird dem alltagsbezogenen Argumentieren zugeschrieben (z. B. Brunner 2014). Um die Schülerinnen und Schüler langsam an den Formalismus eines akademischen Beweises zu gewöhnen, können zahlreiche Stufen zwischen einem formalen Beweis und einem rein empirischen Prüfen definiert werden (vgl. E. C. Wittmann 2021). Diese Zwischenstufen werden hier unter der Bezeichnung der informellen Beweise zusammengefasst. Im Folgenden sind die formalen und informellen Beweise kurz gegenübergestellt.

Formale Beweise

Boero (1999) sieht den formalen Beweis am Ende einer wissenschaftlichen Arbeitsweise, bestehend aus dem Aufstellen von Hypothesen, der Durchführung von Untersuchungen und dem Überprüfen der Ergebnisse. Formale Beweise sind im fachwissenschaftlichen Sinn stets lückenlos und vollständig, sowie allgemeingültig und unter Einhaltung der üblichen Konventionen abgefasst (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018). Sie basieren auf einem präzise bestimmten System von logischen Schlussregeln und Axiomen (siehe Abschnitt 2.2.3). Welche Argumentation genau als formaler Beweis akzeptiert wird, muss unter Mathematikerinnen und Mathematikern in sozialer Interaktion ausgehandelt werden (vgl. Ufer et al. 2009, S. 31). Es ist anzunehmen, dass die Fähigkeit zur korrekten Erfassung und Trennung von Voraussetzung und Behauptung einer Aussage zentral ist für die Anordnung von deduktiven Schlüssen zu einer Beweiskette sowie für ihre Validierung (vgl. Ufer et al. 2009, S. 38). Häufig haben Schülerinnen und Schüler große Schwierigkeiten, diese einzelnen Elemente zueinander in Beziehung zu setzen und eine geschlossene Beweiskette aufzubauen. Also tun sie sich in der Regel sehr schwer, formale Beweise zu führen.

Informelle Beweise

Informelle Beweise bezeichnen Begründungen oder Argumentationen, die auf einer eher anschaulichen Betrachtungsweise basieren und bei denen die formale Strenge reduziert ist. Obwohl sie den fachwissenschaftlichen Standards eines formalen Beweises nicht genügen, müssen sie den „mathematischen Kern“ eines Sachverhalts korrekt wiedergeben. Historisch gehen sie auf die Idee der intuitiven Ableitung von Branford (1908) zurück.

E. C. Wittmann & Müller (1988) hat informelle Beweise klassifiziert und in (a) experimentelle und (b) inhaltlich–anschauliche bzw. operative Beweise unterteilt. Experimentelle Beweise (a) basieren auf Beispielen, die für den allgemeinen Fall als repräsentativ gelten (z. B. Bills & Rowland 1999; Brunner 2014). Diese sogenannten „paradigmatischen Beispiele“ stammen ursprünglich von Freudenthal (1979) und sind für die meisten Lernenden leicht nachzuvollziehen (vgl. Einzelfälle in Almeida 2001). Um zu vermeiden, dass die Schülerinnen und Schüler nur ein unvollständiges Verständnis von geometrischen Operationen aufbauen, müssen sie die Eigenschaften und wechselseitigen Beziehungen von den involvierten Objekten eigenständig untersuchen (vgl. E. C. Wittmann 1983, S. 269). Aus dieser Betrachtungsweise stammen die operativen Beweise (b), die über eine inhaltlich–anschauliche Beweisführung verfügen. Sie werden in der Regel enaktiv (in Form von Handlungen) oder ikonisch (unter Rückgriff auf Zeichnungen oder Modelle) geführt (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018). Dabei beruhen sie in der Regel auf einer eher umgangssprachlichen Logik und sind in einer „schlichten und symbolarmen Sprache“ (E. C. Wittmann 2014) verfasst. Inhaltlich–anschauliche Beweise (b) werden gerne im Geometrieunterricht eingesetzt, weil sie die Zusammenhänge häufig in einer sehr verständlichen bildhaften Betrachtungsweise wiedergeben. In vielen Fällen vermögen sie, den Schülerinnen und Schülern ein nachhaltiges Verständnis eines scheinbar unverständlichen Satzes zu vermitteln. Welche Schlüsse in einem inhaltlich–anschaulichen Beweis erlaubt sind, muss den Schülerinnen und Schülern kommuniziert und ggf. mit ihnen diskutiert werden. In der Geometrie bilden anschauliche Begründungen anhand einer Skizze die Grundlage für das Verständnis der symbolischen Repräsentation einer Beweisführung (Stenius 1981)

2.2.5. Beweistypen in der Geometrie

Grundsätzlich können Beweise so wie in anderen mathematischen Teilgebieten auch in der Elementargeometrie unterschiedlich geführt werden (z. B. Filler 2011, S. 13). Ein direkter Beweis versucht, eine unmittelbare und direkte Argumentationskette von den Voraussetzungen bis zur Behauptung aufzubauen. Ein indirekter Beweis oder Widerspruchsbeweis nimmt dagegen das Gegenteil der Behauptung an und zeigt, dass dieses Gegenteil zu einem Widerspruch führt und deswegen nicht wahr sein kann. Wenn sich ein Beweis auf ein bestimmtes geometrisches Objekt bezieht, ist das Führen von Existenz– und Eindeutigkeitsbeweisen üblich (z. B. Filler 2011, S. 13). Unabhängig davon gibt es in der Elementargeometrie bestimmte Arten, geometrisch zu argumentieren, die auch in der Sekundarstufe I unterrichtetet werden. Die ersten vier Arten sind sogenannte Standardbeweise in der Geometrie (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 29 f). Der Zerlegungs– bzw. Ergänzungsbeweis komplementiert diese Standardbeweise durch das Erkennen von unter– oder übergeordneten Objekten.

- **Berechnungsbeweis:** Ein geometrischer Zusammenhang wird durch die algebraische Umformung einer Gleichung für richtig oder falsch befunden.
- **Kongruenzbeweis:** Eine geometrische Figur wird durch die Kongruenzsätze für Dreiecke untersucht.
- **Ähnlichkeitsbeweis:** Eine geometrische Figur wird durch die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke untersucht.
- **Abbildungsbeweis:** Eine Kongruenz- oder Ähnlichkeitsabbildung wird angewendet. Der Beweis stützt sich dann auf die Eigenschaften dieser Abbildung.
- **Zerlegungs- bzw. Ergänzungsbeweis:** Eine Figur wird in Einzelteile bzw. Teilfiguren zerlegt oder mithilfe von Teilfiguren zu einer größeren Figur erweitert. Der Beweis stützt sich dann auf die Eigenschaften der Teilfiguren oder der neuen größeren Figur.

2.2.6. Anleitung zum Beweisen im Unterricht

Aktive Einbindung der Schülerinnen und Schüler

Im sozialen Kontext des Mathematikunterrichts sind bei der Beweisführung sowohl die Lehrkraft als auch die Schülerinnen und Schüler beteiligt, die jeweils unterschiedliche Funktionen und Ziele einnehmen bzw. verfolgen. Generell können mathematische Begründungen nur dann in der Klassengemeinschaft als Beweis gelten, wenn sie von der Mehrheit akzeptiert und somit zum allgemein gültigen Wissen ausgezeichnet werden (Knipping 2003, S. 30). In der universitären Mathematik gliedert sich ein Beweisprozess in die Phasen Satzfindung, Beweisfindung und Beweisakzeptanz. In der Schulmathematik liegt eine andere Situation vor. Die Satzfindung erfolgt durch Anleitung der Lehrkraft, wird im Unterricht inszeniert und kann somit nicht unbedingt einer intrinsischen Motivation der Lernenden zugeschrieben werden (Heinze & Reiss 2010).

Die Beweisfindung wird meistens im Frontalunterricht durchgeführt, und es ergibt sich die Schwierigkeit, dass auch die zugehörigen Explorationsphasen im Plenum stattfinden. Dadurch besteht die Gefahr, dass einzelne Schülerinnen und Schüler sich nicht lang genug mit den einzelnen Beweisschritten auseinandersetzen können. Um diese Gefahr zu umgehen, wird beim Vermitteln einer Beweisfindung eine Unterrichtsform mit stärkerer Einbindung und Beteiligung von mehr Schülerinnen und Schülern gefordert (Knipping 2003, S. 35). Reiss (2002) gibt zu bedenken, dass die Fähigkeit zur korrekten Beurteilung gültiger und fehlerhafter Argumentationen als eine wichtige Voraussetzung für das eigenständige Beweisen gilt. Demnach können Musterbeweisführungen sowie falsche oder lückenhafte Beweisführungen zur Schulung eines „Beweisverständnisses“ im Unterricht eingesetzt werden. Außerdem kann dieses Verständnis schnell gefördert werden, wenn sich die Lernenden eigenständig Zeichnungen zu einem Beweisproblem anfertigen oder sich mit vorgegebenen Zeichnungen intensiv beschäftigen (Kautschitsch 2015).

Die Schreibweise des Zwei–Spalten–Beweises

Um den Schülerinnen und Schülern das Ordnen der Beweisbausteine und das Zusammensetzen der Beweisführung weiter zu erleichtern, kann die Schreibweise des Zwei–Spalten–Beweises (z. B. Herbst 2002; Brockmann-Behnsen 2021) im Unterricht eingeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler halten die einzelnen Beweisschritte in der richtigen Reihenfolge in einer Tabelle fest, wobei sie in die erste Spalte schreiben, was sie in diesem Schritt genau machen, und in die zweite Spalte, warum sie diesen Schritt machen dürfen. Brockmann-Behnsen (2021) plädiert dafür, dass sich die Schülerinnen und Schüler außerdem immer wieder fragen, wozu sie einen Schritt machen bzw. was sie mit einem bestimmten Schritt in der Beweisführung bezwecken. Die Tabelle eines Zwei–Spalten–Beweises dient den Schülerinnen und Schülern als Orientierungshilfe und gibt ihnen eine Beweistruktur an die Hand. Im Sinne der Einteilung von Heurismen nach (Bruder & Collet 2011) stellt die Tabelle des Zwei–Spalten–Beweises eine Form eines heuristischen Hilfsmittels dar (siehe Abschnitt 2.1.4). Ein Zwei–Spalten–Beweis kann während unterschiedlicher Phasen im Arbeitsablauf einer Problemlösung (Polya 1979, 1995) integriert werden (z. B. „Einen Plan bereitstellen", „Den bereitgestellten Plan ausführen" oder „Rückschau halten" in Abschnitt 2.1.3).

3. Didaktisches Förderkonzept

3.1. Lokales Ordnen zur Reduktion des Umfangs von Beweisen

Die Sachverhalte in der euklidischen Geometrie, mithilfe derer die geometrischen Begründungen vorgenommen werden, sind sehr umfangreich im Vergleich zu anderen inhaltlichen Bereichen des Mathematikunterrichts (z. B. Becker 1984, S. 100). Deswegen empfiehlt es sich unter anderem, „sinnvoll abgegrenzte Einheiten geringeren Umfangs“ aus der euklidischen Geometrie herauszulösen, um die logischen Beziehungen innerhalb eines überschaubaren Teilbereichs zu klären (Becker 1984, S. 100). Folglich kann eine Reduktion des Umfangs einer Beweisfindung mithilfe einer Vorauswahl an Beweismitteln vorgenommen werden, um den Schülerinnen und Schülern den Durchblick durch die Beweisstruktur zu erleichtern. Zu diesem Zweck können bestimmte Sätze und Axiome vorausgewählt und zur Beweisfindung zur Verfügung gestellt werden.

Grundsätzlich ist eine Einsicht in die gegenseitigen Abhängigkeiten von Begriffen und Sätzen entscheidend für ein tieferes Verständnis von komplexen Zusammenhängen. Deswegen ist es das Ziel, solch eine Einsicht in die deduktive sachlogische Struktur im Unterricht zu erlauben. Eine Möglichkeit, dieses Ziel zu gewährleisten, bietet unter anderem das sogenannte „Lokale Ordnen“ (Becker 1984, S. 101 ff). Diese Art einer Auswahl und Ordnung der Beweisgrundlage bezeichnet das Komplement zum globalen Ordnen oder vollständigen Axiomatisieren (Freudenthal 1963). Ein Beispiel für vollständiges Axiomatisieren ist die gesamte euklidische Geometrie, die auf den Axiomen Euklids aufgebaut ist und von vielen Mathematikerinnen und Mathematikern analysiert worden ist (Siefkes 1992). Dagegen besteht die Idee des „Lokalen Ordnens“ darin, ein überschaubares mathematisches Feld – wie zum Beispiel das Haus der Vierecke (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 122 ff) – möglichst so aufzubereiten, dass der Zugang zur inneren Struktur und Logik dieses Feldes für Schülerinnen und Schüler entsprechend ihres Könnens ermöglicht wird (vgl. Freudenthal 1973, S. 128 f). Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler ein Beziehungsgefüge von einzelnen Beweisbausteinen herstellen, auf dessen Grundlage sie den angestrebten Beweis erarbeiten können (vgl. Filler 2019, S. 2).

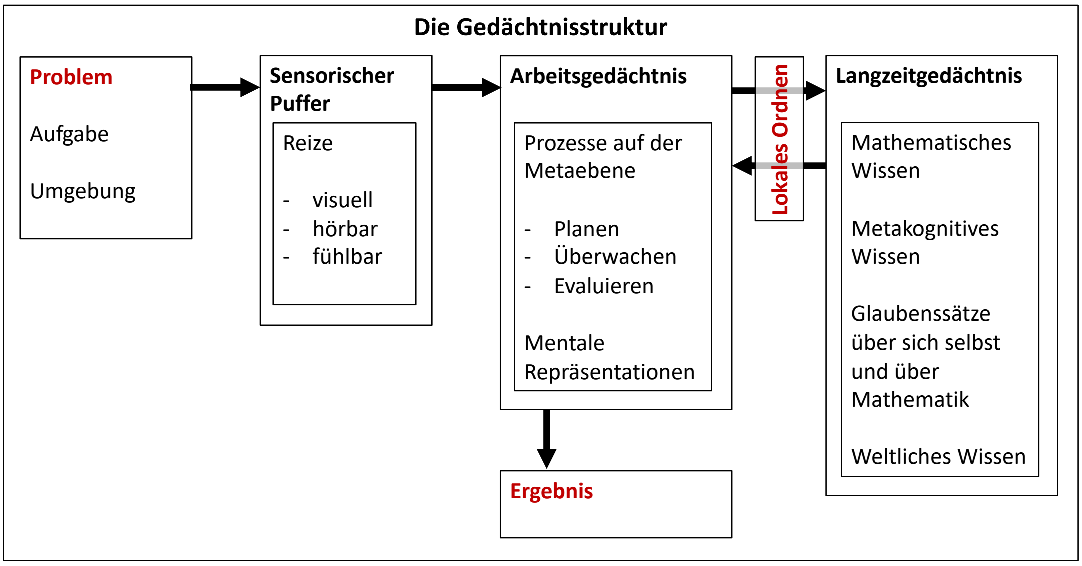


Abbildung 3.1.: Gedächtnisprozesse beim Problemlösen (vgl. Schoenfeld 2016, S. 19): „Lokales Ordnen“ stellt eine Vorauswahl an Beweisbausteinen zur Verfügung und entlastet den Zugriff auf das Langzeitgedächtnis.

Die verwendeten Sätze werden in zwei disjunkte Klassen eingeteilt: Die Klasse der Folgesätze wird mithilfe der Klasse der Basissätze bewiesen (vgl. Becker 1984, S. 105). Also hängen die Folgesätze von den Basissätzen ab, während die Basissätze weitestgehend unabhängig voneinander sind. Für einzelne Sätze können auch teilweise unbekannte oder unbewiesene Voraussetzungen benutzt werden. Um ein umfassendes Verständnis trotzdem sicherzustellen, muss sich die Satzauswahl an der Vorbildung und am Begriffsvermögen der Schülerinnen und Schüler orientieren (vgl. Jahnke & Ufer 2015, S. 333–334). Gegebenenfalls können einzelne Sätze nochmal im Unterricht besprochen werden, um die Schülerinnen und Schüler von ihrer Richtigkeit zu überzeugen. Um zu differenzieren, kann der Umfang der zur Verfügung gestellten Sätze variiert werden. Dabei erhöhen ein „Mehr“ an verfügbaren Basissätzen und ein „Weniger“ an verfügbaren Folgesätzen die Kombinationsmöglichkeiten in der Beweisführung und steigern somit den Handlungsspielraum der Schülerinnen und Schüler beim Ordnen der Beweismittel. Allerdings wird das Beweisproblem durch die zusätzlichen Kombinationsmöglichkeiten komplexer, so dass in den meisten Fällen das Auffinden der richtigen Beweiskette erschwert wird. Also gilt in der Regel: Je mehr Basissätze und je weniger Folgesätze, desto schwieriger die Beweisfindung.

Ursprünglich geht das „Lokale Ordnen“ auf Freudenthal (1963) zurück, der selber über seine eigene Motivation schreibt:

Es blieb eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war.

3.1.1. Geleistete Hilfestellung im Problemlöseprozess

„Lokales Ordnen“ hilft den Schülerinnen und Schülern beim Problemlösen, indem die Menge an Bausteinen und deren Verknüpfungen so weit reduziert wird, dass die gestellten Anforderungen in der „Zone der nächsten Entwicklung“ der Lernenden liegen (vgl. Bruder 2003). Dabei kann die kognitive Unterstützung, die das „Lokale Ordnen“ bietet, direkt im Modell des Gedächtnisses veranschaulicht werden. Das „Lokale Ordnen“ greift unmittelbar an der Schnittstelle zwischen dem Arbeitsgedächtnis und dem Langzeitgedächtnis an (Abbildung 3.1). Indem die Schülerinnen und Schüler eine vorgegebene Satzstruktur an die Hand bekommen, können sie bereits gelerntes Wissen aus dem Langzeitgedächtnis gezielt abzurufen. Ein langwieriges „Stöbern“ im Langzeitgedächtnis, welches Wissen für das Beweisproblem von Bedeutung ist, entfällt also größtenteils. Trotz einer getroffenen Vorauswahl an zur Verfügung stehenden Sätzen werden die Lernenden immer noch gezwungen, bestimmte Sätze bewusst auszuwählen und in ihre Beweiskette einzubauen. Das „Lokale Ordnen“ unterstützt den Schritt „Einen Plan bereitstellen“ in Polyas Unterteilung des Problemlöseprozesses (siehe Abschnitt 2.1.3). Schließlich wird die Gefahr eines Zirkelschlusses, bei dem das zu Begründende fälschlicherweise zu Beginn des Problemlöseprozesses verwendet wird (vgl. Meyer & Prediger 2009, S. 11), beim „Lokalen Ordnen“ durch das Bereitstellen der Basissätze und der Vorgabe einer Beweisstruktur minimiert.

3.2. Möglichkeiten zur Reduktion der Strenge von Beweisen

Dem Anspruch nach ist ein Beweis dann vollkommen streng, wenn er nur Axiome, Definitionen und zuvor bewiesene Sätze benutzt und unter vollständigem Ausschluss der Anschauung nur Deduktionsschritte vollzieht, die den spezifizierten Schlussregeln entsprechen (Jahnke & Ufer 2015, S. 332). Um eigene Ansätze und Ideen von Lernenden bei der Beweisführung zu unterstützen, wird jedoch empfohlen, diese Strenge in vielen Unterrichtssituationen abzumildern (z. B. E. C. Wittmann 2021). Der Grad der Strenge kann dabei in sehr unterschiedliche Richtungen variieren. Becker (1984, S. 97) führt den Gültigkeitsbereich, die sprachliche Normierung und die „beweistheoretische axiomatische Vollständigkeit“ an, um die Strenge einer Beweisführung herabzusetzen. Solch eine Reduktion der Strenge bewirkt im Wesentlichen einen Übergang von den formellen zu den informellen Beweisen (siehe

Abschnitt 2.2.4). Dadurch kann eine Beweisführung für die Schülerinnen und Schüler derart erleichtert werden, dass bereits gemachte Erfahrungen mit Begründungen im Alltag in den Beweis mit eingebracht werden können.

3.2.1. Modifikation des Gültigkeitsbereiches

Beweisbeispiele unterstützen eine induktive Beweisführung, die vom Speziellen auf das Allgemeine schließt (vgl. Vorwort in Polya 1995). Sie können allgemein dabei helfen, den Gültigkeitsbereich eines mathematischen Satzes auszuloten und Vertrauen in einen mathematischen Satz zu gewinnen (Meyer & Prediger 2009, S. 9) . Wenn aber nicht ausreichend viele Beispiele betrachtet werden, laufen Schülerinnen und Schüler Gefahr, einem Einzelbeispiel vorschnell Evidenz zuzubilligen und sich gar nicht erst auf die Suche nach einem Gegenbeispiel zu begeben (z. B. Almeida 2001). Dadurch kann es zu einem fehlenden Beweisbedürfnis kommen, weil die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit einer Beweisführung verkennen (Winter 1983).

Wenn keine Gegenbeispiele gefunden werden, dann kann eine Aussage verallgemeinert werden. Bills & Rowland (1999) unterscheiden eine empirische und strukturbasierte Verallgemeinerung eines mathematischen Satzes, die beide von einzelnen Beispielen ausgehen. Die empirische Verallgemeinerung stützt sich auf die übereinstimmende Aussage einer Stichprobe mit hinreichend vielen Beispielen, während die strukturbasierte Verallgemeinerung ein bestimmtes Beispielmuster erkennt und zum Schlussfolgern verwendet. In beiden Fällen müssen die Schülerinnen und Schüler nachvollziehen können, wie eine gemachte Einschränkung wieder aufgehoben werden kann bzw. wie eine Verallgemeinerung vollzogen werden kann.

Grundsätzlich kann eine zweckmäßige Einschränkung des Gültigkeitsbereichs das Erkennen von wesentlichen Mustern begünstigen und eine induktive Beweisführung unterstützen (vgl. Bills & Rowland 1999). Dadurch wird eine Beweisführung für Schülerinnen und Schüler evidenter und leichter zu durchschauen.

3.2.2. Modifikation der Sprache

Führer (2002) ist der Ansicht, dass Geometrieunterricht die Fach– und die Umgangssprache im Unterricht verschmelzen statt gegeneinander absetzen sollte und geometrisches Begriffswissen in den Alltag integrieren sollte. Die sprachliche Ausdrucksweise trägt entscheidend zu einer erfolgreichen Problemlösung bei (Maier & Schweiger 1999, S. 73–84). Die Sprachmittel, die bei einer mündlichen Begründung genutzt werden, unterscheiden sich deutlich von denen, die in Schriftprodukten anzufinden sind (Hein 2021, S. 259–260). In der Regel werden Begründungen immer zuerst mündlich formuliert, bevor sie aufgeschrieben werden. Diese Reihenfolge bringt bereits eine bestimmte Anpassung der Sprache im Rahmen der Beweisfindung mit sich. Grundsätzlich kann das Formulieren einzelner Argumentationsschritte, aus denen ein vollständiger Beweis entsteht, zunächst auch in der Umgangssprache erfolgen (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 26). Die Fachterminologie und der sprachliche Formalismus eines Beweises (siehe Abschnitt 2.2.4) können danach schrittweise integriert werden. Dabei gilt es zu beachten, dass formale Darstellungen nur dann förderlich für das Denken der Schülerinnen und Schüler sind, wenn sie mit inhaltlichen Vorstellungen verbunden bleiben (Weigand, Filler, Hölzl et al. 2018, S. 26).

Eine intuitive Beweisfindung, die von den Schülerinnen und Schülern ausgeht, geschieht durch eigensprachliche Ressourcen wie z. B. Deiktika* (Hein 2021, S. 334). Dabei werden logische Elemente und logische Beziehungen mithilfe verschiedener Sprachmittel wahrgenommen, identifiziert und zur Argumentation einzelner Beweisschritte genutzt. Die Eigenheiten solch einer „Beweissprache“ mit verdichtenden Sprachmitteln können gemeinsam in einer Lerngruppe erarbeitet werden. Zum Teil nutzen die Lernenden solche Sprachmittel in Eigeninitiative, und zum Teil übernehmen sie diese in ihre eigenen Verbalisierungen (vgl. Hein 2021, S. 334–336).

3.2.3. Modifikation der axiomatischen Vollständigkeit

Eine Abschwächung der axiomatischen Vollständigkeit bzw. Lückenlosigkeit kann durch eine Verwendung von nicht bewiesenen Annahmen, unreflektierten Voraussetzungen, anschaulichen Gegebenheiten oder nicht geprüften Eigenschaften geschehen (Becker 1984, S. 97). Im einfachsten Fall können bestimmte Hilfssätze vorgegeben werden, die im Beweis verwendet, aber im Unterricht nicht bewiesen werden. Eine weitere Möglichkeit, die Vollständigkeit zu umgehen, stellen stillschweigende Annahmen über beweisrelevante Voraussetzungen dar, die mit den Schülerinnen und Schülern gemacht werden. So können zum Beispiel ähnliche oder kongruente Figuren mit dem bloßen Auge erkannt werden, ohne die Ähnlichkeit oder Kongruenz explizit nachzuweisen. Genauso können bestimmte Abstände oder Winkel ausgemessen werden, ohne dass ihr genauer Wert geometrisch oder algebraisch bestimmt wird. In vielen Fällen wird für einen Beweis lediglich eine anschauliche Begründung im

*unterschiedliche Bezugnahme auf Personen, Gegenstände, Orte und Zeiten wie *ich, du, jenes, dieses, hier, dort, heute, morgen, ...*

Unterricht herangezogen. Welcher Grad der Anschaulichkeit als akzeptabel gilt, hängt vom Entwicklungsniveau der Schülerinnen und Schüler ab und muss situationsbedingt mit der Lerngruppe vereinbart werden (vgl. Jahnke & Ufer 2015, S. 333–334).

3.3. Förderung von Problemlösekompetenz

Die Fähigkeiten zum Problemlösen, die auch beim Beweisen gewinnbringend eingesetzt werden können, können auf unterschiedliche Arten mit den Schülerinnen und Schülern eingeübt werden. Dabei lassen sich unterschiedliche Vorgehensweisen bzw. unterschiedliche Arten von Trainings unterscheiden.

3.3.1. Implizites Training

Polya (1995, S. 18) empfiehlt einer Lehrkraft, den Schülerinnen und Schülern bestimmte Fragen und Anregungen so oft vorlegen, „wie sie dies ungezwungen tun kann". Ziel ist es dabei, einen bestimmten Heurismus implizit ins Unterrichtsgeschehen einzuflechten und anhand des aktuellen Schulstoffes mitzutrainieren. Polya (1995, S. 18 ff) formuliert einen Fragenkatalog, der die Schülerinnen und Schüler in den einzelnen Schritten des Problemlösens (siehe auch Abschnitt 2.1.3) unterstützt bzw. sie in eine richtige Richtung zur Lösungsfindung schubst. Der Fragenkatalog ist umfassend, aber Schoenfeld (2016) findet, dass die Lehrkraft zumindest die folgenden drei Fragen immer wieder stellen sollte: **(1.)** Kannst du genau beschreiben, welchen Schritt du gerade machst? **(2.)** Wie passt der Schritt in die Lösungsfindung? **(3.)** Wie fährst du mit dem Ergebnis des Schrittes fort? Lee & Chen (2015) belegen, dass Schülerinnen und Schüler eindeutig von solch einem fragenbasierten Unterricht profitieren. Die gestellten Fragen sollen die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, ihre Problemlöseideen sowie die im Unterricht beobachteten Zusammenhänge einzelner Teilschritte zu erläutern (McGivney & DeFranco 1995; Lee & Chen 2015). Solch ein Prozess einer fragenden Anleitung kann die Lernmotivation steigern und das Denken aktivieren, was zur Entwicklung von metakognitiven Fähigkeiten führt (vgl. Lee & Chen 2015, S. 1550). Hensberry & Jacobbe (2012) untersuchen die Verwendung von strukturierten Lerntagebüchern zur Einübung der von Polya (1995, S. 18 ff) vorgeschlagenen Fragestellungen zum Problemlösen. Einer der Gründe für das Führen eines Tagebuchs besteht laut Hensberry & Jacobbe (2012) darin, die Schülerinnen und Schüler zu zwingen, sich immer wieder die gleichen Fragen bezüglich ihres Vorgehens zu stellen. Jedes Mal, bevor sie ein Problem lösen bzw. nachdem sie es gelöst haben, müssen sie bestimmte Fragen beantworten. Ziel ist es, dass die Schülerinnen und Schüler bei wiederholtem Gebrauch des Tagebuchs die Fragen von Polya (1995, S. 18 ff) verinnerlichen und eine Angewohnheit zur Selbstreflexion während des Problemlösens entwickeln (vgl. Hensberry & Jacobbe 2012, S. 80 f).

3.3.2. Explizites Training

König (1992, S. 24) ist der Auffassung, dass ein explizites Training das implizite komplementiert und einen nachhaltigen Lernerfolg sichert. Er empfiehlt eine methodologische Vermittlung von ausgewählten Heurismen und ein „zielgerichtetes Aneignen und Anwenden im Unterricht“ (König 1992, S. 24).

Bruder (2003); Bruder & Collet (2011) stellen ein umfangreiches Trainingskonzept für den Unterrichtseinsatz mit vielen praktischen Beispielen zusammen. Dafür identifiziert sie bestimmte Schritte, die Schülerinnen und Schülern helfen, nach und nach zu einem eigenständigen Problemlösen zu gelangen: **(1.)** Lernende gewöhnen sich allmählich an heuristische Methoden und Techniken, indem sie Lösungen schrittweise vorgeführt bekommen (Reflexion von Lösungen). **(2.)** Lernende nutzen markante Beispiele, um einzelne Heurismen näher kennenzulernen und sich deren wesentliche Eigenschaften bewusst zu machen (Bewusstmachen von Heurismen). Dabei bearbeiten Lernende ausgewählte Beispiele unterschiedlicher Schwierigkeit, die den bekannten Beispielen aber sehr ähnlich sind. Sie sollen die Lösungen eigenständig herausfinden, erhalten aber Anleitung auf Nachfrage. **(3.)** Beispiele aus anderen mathematischen Gebieten und der Lebenswelt werden ausgewählt und den Lernenden präsentiert. Ziel ist die Anwendung einer bekannten heuristischen Methode oder Technik in einem fremden Kontext (Kontexterweiterung der Strategieanwendung). **(4.)** Lernende entwerfen eigenständig einen „Schlachtplan“ zur Lösung von komplexen Problemlöseaufgaben und versuchen, ihre eigene Auswahl von Heurismen zu rechtfertigen und zu diskutieren (Fixieren des Problemlösemodells).

Angelehnt an das Selbstregulationsmodell von Zimmerman (2000) schlagen Gürtler et al. (2002) ein Training zur Vermittlung von Selbstregulationsstrategien im Kontext mathematischer Aufgabenstellungen vor. Solch ein Training vermittelt sowohl Elemente des Selbstregulationszyklus (Zielsetzung, Volition, Motivation, Ergebniseinschätzung und Reflexion) als auch mathematische Strategien (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Invarianzprinzip) und verwendet heuristische Hilfsmittel. Eine aktive Aufgabenanalyse und Strategieplanung ist dabei im Vergleich zu einem passivem Anwenden eines Lösungsschemas zu präferieren (Gürtler et al. 2002, S. 230). Grundsätzlich zeigt Gürtler et al. (2002) eine Bedeutung der Selbstregulation nicht nur für die allgemeine schulische Entwicklung sondern eben auch für eine nachhaltige Entwicklung von mathematischer Problemlösekompetenz.

3.3.3. Heuristische Lösungsbeispiele

Nach Sweller et al. (1998) existiert ein „Lösungsbeispiel–Effekt“, der den Aufbau von kognitiven und meta–kognitiven Schemata erleichtert, die bei der Bearbeitung neuer Aufgaben helfen können. Gerade bei Problemstellungen in der Geometrie kann die kognitive Belastung dadurch signifikant reduziert werden und im Problemlšeprozess kann viel Zeit gespart werden (z. B. Paas & Van Merriënboer 1994). Die bereitgestellten Beispiele sind idealerweise selbsterklärend, um als Analogieschluss (siehe Abschnitt 2.1.4) in einer ähnlichen Problemstellung zu dienen (Chi et al. 1989). Das Lernen mithilfe ausgearbeiteter Lösungsbeispiele führt erwiesenermaßen zu guten Ergebnissen und kann auch leicht in den konkreten Unterricht integriert werden (Reiss & Renkl 2002).

Wenn in einem ausgearbeiteten Lösungsbeispiel angedachte heuristische Strategien und Hilfsmittel expliziert werden, hat das Durcharbeiten solch eines Beispiels einen ähnlichen Effekt wie ein explizites Training (siehe Abschnitt 3.3.2). In diesem Fall steht nicht nur der Lösungsalgorithmus im Vordergrund, sondern die Aufeinanderfolge geeigneter heuristischer Schritte (Reiss & Renkl 2002). Die vorgeführten Schritte erlauben eine Anleitung zum eigenständigen Handeln sowie zu dessen Reflexion und bieten somit eine wirksame Hilfe basierend auf Lern– und Gedächtnistheorien (Sweller et al. 1998). Gleichzeitig tragen sie zu einer erhöhten Transparenz und Strukturierung des Problemlöseprozesses bei. Lernende mit einem unzureichenden Verständnis des Beweisens profitieren mehr von solch einem heuristischen als von einem gewöhnlichen Lösungsbeispiel und sind in Folge eher in der Lage einen Beweis eigenständig durchzuführen (Reiss et al. 2008).

4. Beweis des Mittenvierecks mit Satzsystem

Im Folgenden wird eine Sachanalyse zum Mittenviereck durchgeführt, wobei die einzelnen Eigenschaften eines Mittenvierecks erläutert werden. Dabei werden auch die bekannten Beweise zu diesen Eigenschaften kurz präsentiert. Danach wird eine neue Beweisführung zum Parallelogramm vorgeführt, die nur auf Winkel– und Kongruenzsätzen basiert, und schließlich wird dazu ein in sich geschlossenes Satzsystem vorgestellt.

4.1. Bisherige Betrachtungen zum Mittenviereck

4.1.1. Geometrische Analyse

Ein anschauliches Beispiel für Parallelität im Geometrieunterricht stellt das Mittenviereck dar, das man erhält, wenn die vier Seitenmitten eines beliebigen äußeren Vierecks als Eckpunkte genommen und zu einem neuen Viereck verbunden werden (siehe Abbildung 4.1).

Der französische Wissenschaftler Pierre Varignon war im Jahr 1710 der erste, der einen präzise formalisierten Beweis zum Mittenviereck vorlegte (z. B. Oliver 2001; Zeuge 2018). Demnach wird der Seitensatz vom Mittenviereck heute auch unter der Bezeichnung Satz von Varignon geführt.

Ein Mittenviereck hat mehrere faszinierende Eigenschaften, die von Schülerinnen und Schülern im Geometrieunterricht entdeckt werden dürfen (vgl. Royster 2011):

1. Ein Mittenviereck hat stets paarweise parallele Seiten, d. h. es ergibt sich immer ein Parallelogramm.
2. Die Fläche eines Mittenvierecks ist halb so groß wie die Fläche des dazugehörigen (konvexen) Ausgangsvierecks.
3. Der Umfang eines Mittenvierecks ist genauso groß wie die Summe der Diagonalen im Ausgangsviereck.

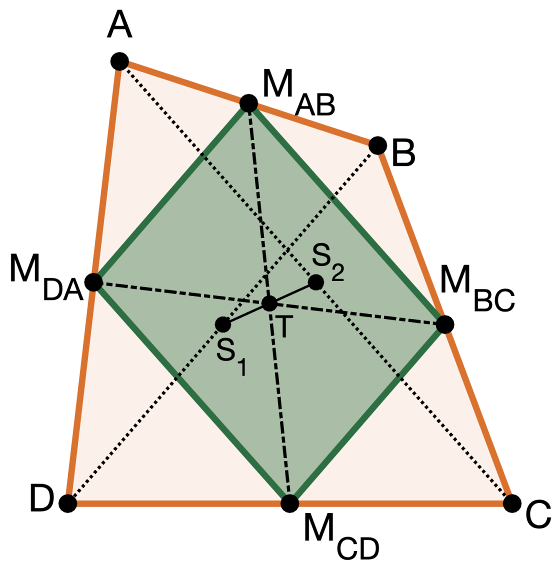


Abbildung 4.1.: Exemplarisches Ausgangsviereck mit eingezeichnetem Mittenviereck. Die Punkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} bezeichnen die Seitenmitten des Ausgangsvierecks bzw. die Eckpunkte des Mittenvierecks. Die Seite $M_{AB}M_{BC}$ des Mittenvierecks ist parallel zur Seite $M_{CD}M_{DA}$, während die Seite $M_{DA}M_{AB}$ parallel zur Seite $M_{BC}M_{CD}$ ist. Die Punkte S_1 und S_2 sind die Mittelpunkte der Diagonalen des Ausgangsvierecks. Der Punkt T ist der Mittelpunkt des Mittenvierecks und liegt genau in der Mitte der Verbindungslinie von S_1 nach S_2.

Ausgangsviereck	Mittenviereck	Ausgangsviereck	Mittenviereck
Quadrat	Quadrat	Gleichschenkliges Trapez	Raute
Rechteck	Raute	Raute	Rechteck
Drachenviereck	Raute	Parallelogramm	Parallelogramm

Tabelle 4.1.: Paare besonderer Ausgangs– und Mittenvierecke

4. Für bestimmte Arten von Ausgangsvierecken ergeben sich besondere Mittenvierecke (siehe Tabelle 4.1).

5. Der Mittelpunkt des Mittenvierecks ist gleichzeitig der Eckenschwerpunkt des Ausgangsvierecks (Krauter & Bescherer 2013, S. 76–77).

Wenn die Seiten eines Vierecks jeweils nicht nur in zwei, sondern in drei gleich große Abschnitte aufgeteilt werden, kann das Parallelogramm nach Wittenbauer konstruiert werden, welches ähnliche Eigenschaften wie das Mittenviereck aufweist (vgl. Royster 2011, S. 26–27).

4.1.2. Bekannte Beweisansätze

Nachweis des Parallelogramms

Das Ausgangsviereck eines Mittenvierecks kann durch eine seiner Diagonalen in zwei Dreiecke aufgeteilt werden. Für beide dieser Dreiecke kann dann der Satz vom Mittendreieck bzw. von der Mittenparallele im Dreieck angewendet werden (z. B. Deissler 2005, S. 56). Mithilfe der beiden Mittenparallelen in den Dreiecken kann wiederum gezeigt werden, dass die Seiten eines Mittenvierecks zu den beiden Diagonalen des Ausgangsvierecks parallel sind. Wenn jeweils zwei Seiten zu derselben Diagonalen parallel sind, dann sind sie auch zueinander parallel (transitive Relation). Als Konsequenz muss das Mittenviereck ein Parallelogramm sein. Die Parallelität beim Mittendreieck kann direkt mithilfe der Umkehrung des 1. Strahlensatzes bewiesen werden (z. B. Benölken et al. 2018, S. 300–301). Analog dazu hat Varignon seinen ursprünglichen Beweis formuliert, in dem er angibt, dass eine Gerade, die zwei Seiten eines Dreiecks im gleichen proportionalen Verhältnis schneidet, parallel zur dritten Seite des Dreiecks ist (Oliver 2001).

Nachweis der Fläche

Gau & Tartre (1994) und Palatnik (2017) stellen einen Kongruenzbeweis für ein Mittenviereck vor, bei dem sich die verbleibenden Ecken bzw. Dreiecke des Ausgangsvierecks, die nicht vom Mittenviereck abgedeckt werden, im Mittenviereck wieder finden und zusammen das Mittenviereck ausfüllen (vgl. Palatnik & Sigler 2019). Dieser Zusammenhang impliziert, dass das Mittenviereck genau den halben Flächeninhalt des Ausgangsvierecks hat (vgl. Royster 2011, S. 24–25).

Nachweis des Umfangs

Der Umfang eines Vierecks ist immer größer als die Summe der eigenen Diagonalen. Die Diagonalen des Ausgangsvierecks sind jedoch länger als die des Mittenvierecks. Mithilfe des 2. Strahlensatzes lässt sich leicht zeigen, dass die einzelnen Seiten eines Mittenvierecks jeweils halb so lang wie eine der beiden Diagonalen des Ausgangsvierecks sind. Daraus ergibt sich die Länge des Umfangs zur Summe der Diagonalen des Ausgangsvierecks.

Nachweis besonderer Arten

Die besonderen Arten von Mittenvierecken (Tabelle 4.1) lassen sich im Unterricht z. B. sehr anschaulich über Kongruenzsätze beweisen (z. B. Kuntze 2004; Kuzle & Hollendung 2016). Sobald das Ausgangsviereck ein Parallelogramm darstellt (dies beinhaltet ein Rechteck, eine Raute und ein Quadrat) können insgesamt acht kongruente Dreiecke in der geometrischen Konfiguration identifiziert werden (vgl. Gau & Tartre 1994; Kuzle & Hollendung 2016). D. h. die entsprechenden Beweise können über Kongruenzsätze für Dreiecke durchgeführt werden und folgende Paare von Ausgangs– und Mittenvierecken können über eine entsprechende Argumentation bewiesen werden: Rechteck & Raute, Raute & Rechteck sowie Quadrat &

Quadrat. Darüber hinaus ist es aber auch beim Drachenviereck und beim gleichschenkligen Trapez möglich, mit Kongruenzsätzen zu argumentieren.

Nachweis des Eckenschwerpunkts

Eine anschauliche Begründung zum Mittelpunkt des Mittenvierecks liefern Krauter & Bescherer (2013, S. 76–77). Demnach kann man sich das Ausgangsviereck als ein System von vier gleich schweren Massepunkten A, B, C und D und masselosen Flächen und Kanten denken. Einerseits liegt der Schwerpunkt der beiden Massepunkte A und B in der Mitte der Seite AB, während der Schwerpunkt der beiden Massepunkte C und D in der Mitte der Seite CD liegt. Andererseits liegt der Schwerpunkt von B und C in der Mitte von BC, während der Schwerpunkt von D und A in der Mitte von DA liegt. Deswegen muss der gemeinsame Schwerpunkt aller vier Massepunkte A, B, C und D, auch Eckenschwerpunkt genannt, genau in der Mitte beider Diagonalen des Mittenvierecks liegen. Als Konsequenz müssen sich die Diagonalen des Mittenvierecks gegenseitig halbieren, was nur in einem Parallelogramm der Fall sein kann.

4.1.3. Didaktische Überlegungen

Contreras (2014) und Kuzle & Hollendung (2016) stellen jeweils ein Unterrichtskonzept zur Entdeckung des Mittenvierecks vor. Dabei empfehlen sie den Einsatz einer Dynamischen Geometriesoftware (DGS), mit der die Schülerinnen und Schüler das ursprüngliche Viereck sowie das darin enthaltene Mittenviereck dynamisch in unterschiedliche Erscheinungsformen ziehen und zeitgleich untersuchen können. Contreras (2014) spricht sich dafür aus, dass die Schülerinnen und Schüler selber Teilprobleme identifizieren und eigene Fragen stellen. Kuzle & Hollendung (2016) beschreiben zwei Beweisvarianten zum Mittenviereck, die den Schülerinnen und Schüler im Unterricht nahegebracht werden können. Allerdings sind beide Varianten sehr ähnlich, da sie beide direkt oder indirekt auf der Umkehrung des 1. Strahlensatzes basieren. Als Hilfestellung für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sprechen sich Kuzle & Hollendung (2016) für eine Unterstützung durch das Stellen vieler Fragen bzw. durch das sogenannte Prinzip der minimalen Hilfe (Zech 1998) aus. Palatnik & Sigler (2019) nutzen die Beweise zum Mittenviereck, um die Bedeutung von Hilfslinien und die Fokussierung von Lernenden auf diese Linien zu diskutieren. Dabei demonstrieren sie, wie das Einzeichnen der Diagonalen des Ausgangsvierecks sowie einiger paralleler Hilfslinien die Lernenden beim Auffinden einer Beweisführung unterstützen.

4.2. Beweisidee zum Parallelogramm

Der Kongruenzbeweis von Gau & Tartre (1994) und Palatnik (2017) identifiziert insgesamt acht Dreiecke innerhalb des Ausgangsvierecks, die paarweise kongruent sind ($AM_{AB}M_{DA}$ und $S_1M_{DA}M_{AB}$, $BM_{BC}M_{AB}$ und $S_1M_{CD}M_{DA}$, $CM_{CD}M_{BC}$ und $S_1M_{BC}M_{CD}$, $DM_{DA}M_{CD}$ und $S_1M_{AB}M_{BC}$ in Abbildung 4.2 a)). Wenn man von diesen Dreiecken jeweils zwei benachbarte Dreiecke zu einem Viereck zusammenfasst, bleiben vier Vierecke innerhalb des Ausgangsvierecks übrig. Zwei dieser Vierecke liegen auf der Diagonalen des Ausgangsvierecks ($M_{AB}BM_{BC}S_1$ und $M_{DA}S_1M_{CD}D$ in Abbildung 4.2 a)). Sie sind kongruent zueinander und ähnlich zum Ausgangsviereck. Diese beiden Vierecke dienen als Ausgangspunkt bzw. Ansatz für die Beweisführung und werden im Folgenden als „kongruente Vierecke auf der Diagonalen" bezeichnet.

Zunächst kann überprüft bzw. nachgewiesen werden **(1. Ziel)**, dass die „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen" gerade die halbe Seitenlänge des Ausgangsvierecks aufweisen. Dazu können die anderen beiden Vierecke betrachtet werden ($AM_{AB}S_1M_{DA}$ und $S_1M_{BC}CM_{CD}$ in Abbildung 4.2 a)). Sie bestehen jeweils aus einem Paar von kongruenten Dreiecken, d. h. sie sind Parallelogramme. Sobald nachgewiesen ist, dass diese Vierecke Parallelogramme sind, wird offensichtlich, dass die mittleren Eckpunkte die Seiten des Ausgangsvierecks in zwei gleich große Hälften teilen und die „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen" die halbe Seitenlänge des Ausgangsviereck haben.

Schließlich kann überprüft bzw. nachgewiesen werden **(2. Ziel)**, dass das Mittenviereck ($M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ in Abbildung 4.2 a)) ein Parallelogramm bildet. Dazu kann gezeigt werden, dass zwei Seiten jeweils parallel zu der einen Diagonalen des Ausgangsvierecks und somit auch parallel zueinander sind (transitive Relation). Am einfachsten gelingt solch ein Nachweis, wenn bewiesen wird, dass die jeweiligen Seiten des Mittenvierecks zusammen mit der halben Diagonalen des Ausgangsvierecks ein Parallelogramm aufspannen ($AM_{DA}M_{AB}S_1D$ und $S_1M_{BC}M_{CD}D$ in Abbildung 4.2 a)). In gleicher Weise kann bewiesen werden, dass diese Seiten gleich lang sind. Auch die anderen beiden Seiten des Mittenvierecks können als parallel verifiziert werden. Dies ist z. B. möglich über eine analoge Beweisführung mit der anderen Diagonalen des Ausgangsvierecks (vgl. Abbildung 4.2 b)) oder über die Beobachtung, dass sie jeweils die Diagonalen ($M_{AB}M_{BC}$ und $M_{DA}M_{CD}$ in Abbildung 4.2 a)) der beiden zueinander parallelen „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen" bilden.

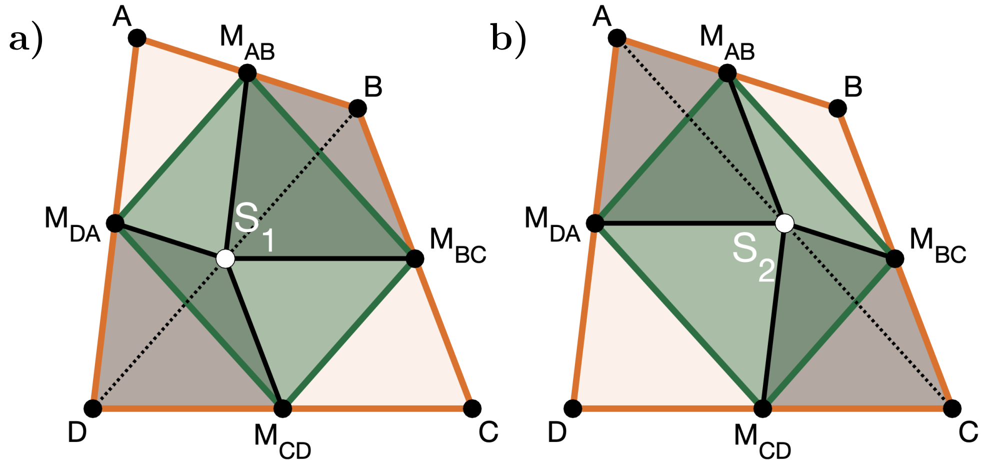


Abbildung 4.2.: Ausgangsviereck mit eingezeichnetem Mittenviereck (in Grün) und den beiden „kongruenten Vierecken auf der Diagonalen“ (in Grau): Die Versionen a) und b) repräsentieren die zwei möglichen geometrischen Aufteilungen. Als Hilfslinie zur Beweisführung ist zusätzlich eine Diagonale in das Ausgangsviereck eingezeichnet, die jeweils von den Punkten S_1 bzw. S_2 halbiert wird.

Die gesamte Beweiskette basiert auf dem gemachten Ansatz sowie auf dem Nachweis, dass verschiedene Vierecke Parallelogramme sind. Über den Nachweis von sekundären Parallelogrammen innerhalb eines Ausgangsvierecks kann somit bewiesen werden, dass das Mittenviereck auch ein Parallelogramm ist.

4.3. Vorgeschlagene Satz– und Beweisstruktur

Um den Schülerinnen und Schülern eine geordnete Struktur an möglichen Komponenten mit auf den Weg zu geben, wird im Folgenden ein System von Basis– und Folgesätzen zum Nachweis des Mittenvierecks als Parallelogramm vorgestellt. Die Abhängigkeiten der einzelnen Sätze bzw. die Struktur der gesamten Beweisführung ist in Abbildung 4.3 wiedergegeben. Die Basissätze geben die Grundbausteine einer möglichen Beweisführung vor, während die Folgesätze hilfreiche „Zwischenstationen“ in der Beweisführung repräsentieren (vgl. Becker 1984, S. 105). Um den Schwierigkeitsgrad der Beweisführung zu variieren, können einzelne Basis– oder Folgesätze hinzugefügt oder weggelassen werden (siehe Abschnitt 3.1). Eine Verwendung der einzelnen Folgesätze fördert die Übersichtlichkeit des gesamten Beweises, während es prinzipiell auch möglich ist, den gesamten Beweis ausschließlich mit den Basissätzen zu führen.

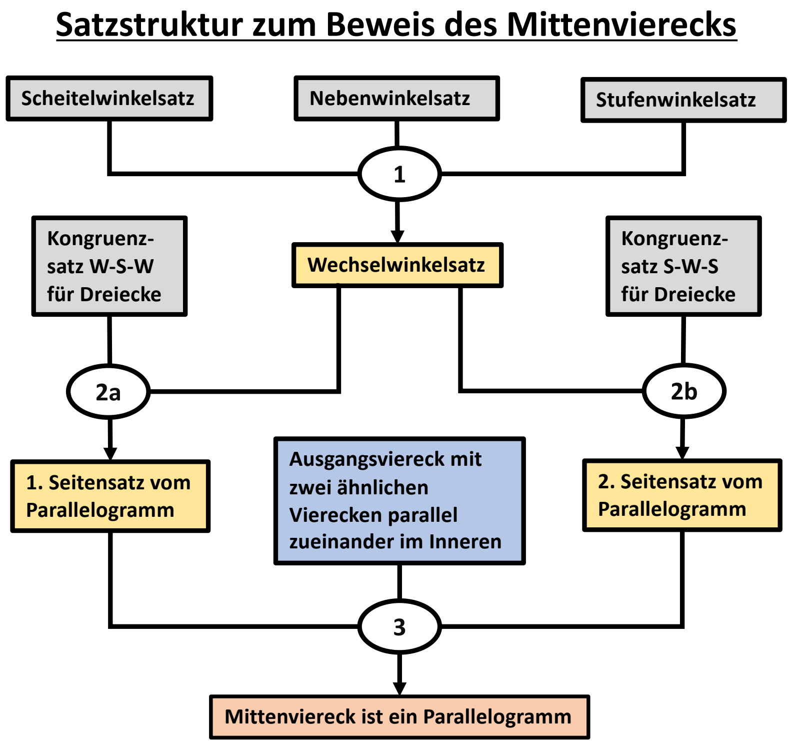


Abbildung 4.3.: Zusammenspiel der einzelnen Sätze zum Nachweis des Mittenvierecks als Parallelogramm: Die Basissätze sind in Grau, während die Folgessätze in Gelb dargestellt sind. Insgesamt gibt es drei verschiedene Ebenen innerhalb der Beweisstruktur (1, 2, 3), wobei sich die zweite Ebene in zwei verschiedene Äste (2a, 2b) aufteilt. Der vorgegebene Beweisansatz ist in Blau dargestellt, wird aber erst in der 3. Ebene benötigt.

4.3.1. Der Ansatz

Um den Schülerinnen und Schülern einen Einstieg in die Beweisführung zu ermöglichen, muss ein Ansatz gemacht werden. Da die Vorerfahrungen mit Beweisen in der Sekundarstufe I nur sehr gering sind, wird ein Ansatz meistens vorgegeben. Beim vorliegenden Beweis besteht der Ansatz darin, dass zwei Vierecke, die zum Ausgangsviereck ähnlich und zueinander kongruent sind, diagonal im Ausgangsviereck angeordnet werden können und die Seiten dieser beiden Vierecke zueinander parallel sind (vgl. „kongruente Vierecke auf der Diagonalen“ im Abschnitt 4.2). Generell bleibt es der Lehrkraft überlassen, solch einen Ansatz auf einer Skizze bereits vorzugeben (siehe Abbildung 4.2), oder die Schülerinnen und Schüler dazu anzuleiten, den Ansatz mit Bleistift und Papier selber zu entdecken.

4.3.2. Die Basissätze

Die folgende Auswahl bietet insgesamt fünf Sätze, d. h. drei Winkelsätze und zwei Kongruenzsätze, auf denen die Beweisführung aufgebaut werden soll. Allerdings werden nicht alle zwingend benötigt. Der Nebenwinkelsatz kann z. B. auch weggelassen werden.

- **Scheitelwinkelsatz:** Schneiden sich zwei Geraden, dann sind die gegenüberliegenden Winkel an dem Schnittpunkt gleich groß und heißen Scheitelwinkel.

- **Nebenwinkelsatz:** Zwei auf einer Seite einer Geraden liegenden Winkel haben die Winkelsumme von 180° und heißen Nebenwinkel.
- **Stufenwinkelsatz:** Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf derselben Seite der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Stufenwinkel.
- **Kongruenzsatz W-S-W für Dreiecke:** Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bei beiden Dreiecken übereinstimmen.
- **Kongruenzsatz S-W-S für Dreiecke:** Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

4.3.3. Die Folgesätze

In der vorliegenden Beweisführung, die den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden soll, werden insgesamt drei Folgesätze in Betracht gezogen. Im Gegensatz zu den Basissätzen, die unabhängig voneinander sind, können bei den Folgesätzen Abhängigkeiten bestehen. Dies ist auch hier der Fall, da der zweite und der dritte Folgesatz (Position 2.a und 2.b) vom ersten (Position 1.) abhängen.

1. **Wechselwinkelsatz:** Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann heißen die Winkel auf der gegenüberliegenden Seite der beiden Schnittpunkte Wechselwinkel und sind gleich groß.

2.a **Erster Seitensatz vom Parallelogramm:** Wenn die gegenüberliegenden Seiten in einem Viereck parallel sind, dann sind die gegenüberliegenden Seiten auch gleich lang und das Viereck ist ein Parallelogramm.

2.b **Zweiter Seitensatz vom Parallelogramm:** Wenn zwei gegenüberliegende Seiten in einem Viereck sowohl parallel als auch gleich lang sind, dann sind auch die anderen beiden Seiten parallel und gleich lang und das Viereck ist ein Parallelogramm.

4.3.4. Angedachte Beweisführung

Die einzelnen Beweisschritte können je nach Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler unterschiedlich differenziert bzw. umfänglich sein. Eine Möglichkeit, die ganze Beweisführung in einzelne Schritte aufzugliedern, stellt ein Spaltenbeweis dar, der in Tabelle 4.2 abgebildet ist.

Nr.	Verwende ich einen Satz, wenn ja welchen?	Was mache ich genau in diesem Schritt?	Warum darf ich diesen Schritt machen?
1.		Ein (kleines) Viereck wird zweimal nebeneinander gesetzt, so dass sich eine Ecke berührt und die Seiten paarweise parallel zueinander sind.	Ich darf die Vierecke selber so konstruieren.
2.		Die Vierecksseiten, die sich nicht berühren, werden so verlängert, dass ein äußeres Viereck mit derselben Form entsteht.	Die Seiten des äußeren Vierecks sind parallel zu den Seiten der inneren Vierecke.
3.	Scheitelwinkel–satz, Stufen–winkelsatz	Ich leite den **Wechselwinkelsatz** her.	Eine Kombination aus Scheitel– und Stufenwinkel ergibt einen Wechselwinkel.
4.	Wechselwinkel–satz, Kongruenzsatz W-S-W	Ich leite den **1. Seitensatz vom Parallelogramm** her, indem ich zweimal den Wechselwinkelsatz anwende und mit dem Kongruenzsatz zwei kongruente Dreiecke identifiziere mit der Diagonale des Parallelogramms als gemeinsame Seite.	Zwei Paare von parallelen Seiten sind vorgegeben.
5.	1. Seitensatz vom Parallelo-gramm	Ich beweise, dass die Ecken der kleinen Vierecke genau in der Mitte der Seiten des äußeren Vierecks liegen.	Ich kann zeigen, dass die zwei angrenzenden Vierecke ($AM_{AB}S_1M_{DA}$ und $S_1M_{BC}CM_{CD}$ in Abbildung 4.2 a))), Parallelogramme sind.
6.	Wechselwinkel–satz, Kongruenzsatz S-W-S	Ich leite den **2. Seitensatz vom Parallelogramm** her, indem ich einmal den Wechselwinkelsatz anwende und mit dem Kongruenzsatz zwei kongruente Dreiecke identifiziere mit der Diagonale des Parallelogramms als gemeinsame Seite.	Ein Paar von parallelen und gleich langen Seiten ist vorgegeben.
7.	2. Seitensatz vom Parallelo-gramm	Ich zeige, dass zwei gegenüberliegende Seiten des Mittenvierecks halb so lang sind wie die Diagonale des äußeren Vierecks und beide parallel dazu.	Ich kann zeigen, dass die zwei inneren Vierecke ($M_{DA}M_{AB}S_1D$ und $DS_1M_{BC}M_{CD}$ in Abbildung 4.2 a))), Parallelogramme sind.
8.	2. Seitensatz vom Parallelo-gramm	Ich zeige, dass das Mittenviereck ein Parallelogramm ist.	Ein Paar von parallelen und gleich langen Seiten ist durch Schritt 7. schon vorgegeben.

Tabelle 4.2.: Spaltenbeweis zum Nachweis des Mittenvierecks als Parallelogramm

Herleitung des Wechselwinkelsatzes

Der Wechselwinkelsatz bildet einen Grundbaustein in der gesamten Beweisführung und stellt die erste Ebene der Folgesätze dar (siehe Abschnitt 4.3.3). Aus der geometrischen Anschauung ist leicht ersichtlich, dass ein Wechselwinkel eine Kombination aus Scheitelwinkel und Stufenwinkel oder eine Verkettung von zwei Nebenwinkeln und einem Stufenwinkel darstellt. Also kann der Wechselwinkelsatz über die Sätze von Scheitel–, Neben– und Stufenwinkel hergeleitet werden (z. B. Müller-Philipp & Gorski 2012). Diese Herleitung ist unkompliziert, soll den Schülerinnen und Schülern aber als ein anspornender Einstieg in das Entdecken eigener Beweisfindungen dienen.

Herleitung der Sätze vom Parallelogramm

Die beiden Sätze vom Parallelogramm stellen die zweite Ebene der Folgesätze dar (siehe Abschnitt 4.3.3). Der erste Seitensatz vom Parallelogramm kann am einfachsten hergeleitet werden durch den Wechselwinkelsatz sowie einen Nachweis der Kongruenz der beiden Dreiecke, die durch eine der Diagonalen eines Parallelogramms voneinander getrennt werden. Die Kongruenz der beiden Dreiecke wird dabei über zwei Winkel sowie eine Seite nachgewiesen. Solch eine Beweisführung ist in Stenius (1981, S. 135) beschrieben. Der zweite Seitensatz vom Parallelogramm kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden. Wieder wird der Wechselwinkelsatz angewendet und die Kongruenz derjenigen Dreiecke gezeigt, die die Wechselwinkel enthalten. Die Kongruenz der Dreiecke wird beim zweiten Seitensatz über die Gleichheit zweier Seiten und eines Winkels nachgewiesen. Eine Skizze zu diesem Beweis des zweiten Seitensatzes zeigen Palatnik & Sigler (2019, S. 208) und geben einige Erläuterungen dazu.

Nachweis von Parallelogrammen

Aufgrund des gemachten Ansatzes (siehe Abschnitt 4.3.1), bei dem zwei parallel angeordnete „kongruente Vierecke auf der Diagonalen“ vorgegeben werden, sind viele vorgegebene Linien sowohl parallel als auch gleich lang. Aus diesem Grund lassen sich zahlreiche Parallelogramme identifizieren, mit denen in weiterer Folge argumentiert werden kann. Ein Nachweis als Parallelogramm erfolgt direkt mithilfe der Folgesätze, also mit den beiden Seitensätzen vom Parallelogramm (siehe Abschnitt 4.3.3). Alternativ können leistungsstarke Schülerinnen und Schüler dazu aber auch einen eigenen Nachweis aus den Basissätzen, d. h. aus den Winkel– und Kongruenzsätzen (siehe Abschnitt 4.3.2), kreieren. Schließlich ermöglicht eine Abfolge von nachgewiesenen Parallelogrammen den gewünschten Nachweis des Mittenvierecks als Parallelogramm.

5. Förderwerkzeuge zur Beweisführung beim Mittenviereck

Im Folgenden werden die in Kapitel 3 vorgestellten Förderkonzepte diskutiert im Hinblick auf den Beweis zum Mittenviereck als Parallelogramm. Zum einen wird dabei die Herabsetzung der Komplexität eines formalen Beweises (vgl. Abschnitt 2.2.4) durch Reduktion des Umfangs und der Strenge erläutert. Zum anderen werden verschiedene Heurismen zum Problemlösen (siehe Abschnitt 2.1.4), für die bereits Trainingskonzepte entworfen sind (siehe Abschnitt 3.3), unterstützend in die Beweisführung mit eingeflochten. Die einzelnen Förderwerkzeuge sind in drei modellhaften Arbeitsblättern im Anhang A exemplifiziert.

5.1. Reduktion des Umfangs durch Vorauswahl der Sätze

Eine sorgfältige Auslese der zur Verfügung gestellten Sätze stellt ein zentrales Element des „Lokalen Ordnens“ dar (siehe Abschnitt 3.1). Durch diese Auslese kann die Beweisführung in eine bestimmte Richtung gelenkt werden, und gleichzeitig kann die Komplexität und der Schwierigkeitsgrad der Beweisführung auf eine Lerngruppe zugeschnitten werden. Um dies zu erreichen, können alle Sätze, die in den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3 aufgelistet sind, verschiedenartig in der Aufgabenstellung offeriert werden. Dabei gibt es im Wesentlichen drei verschiedene Anforderungsniveaus zur Differenzierung, die die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich stark bei der Beweisfindung unterstützen:

i. **Niedriges Anforderungsniveau:** Alle zur Verfügung stehenden Basis– und Folgesätze werden benutzt und selektiv für die einzelnen Beweisschritte innerhalb der Aufgabenstellung bereitgestellt.

ii. **Mittleres Anforderungsniveau:** Die Basissätze werden einheitlich zur Verfügung gestellt und unter ihnen wird nicht weiter selektiert. Bei den Folgesätzen wird der Wechselwinkelsatz in der Aufgabenstellung ausgelassen.

iii. **Hohes Anforderungsniveau:** Die Basissätze werden einheitlich zur Verfügung gestellt und die Folgesätze werden komplett in der Aufgabenstellung ausgelassen.

Je nachdem, welche der drei Varianten gewählt wird, haben es die Schülerinnen und Schüler mit einem entsprechenden Schwierigkeitsgrad zu tun. Die drei Anforderungsniveaus können zur weiteren Ausdifferenzierung der Problemlösung dann noch mit flankierenden Maßnahmen (siehe Abschnitt 5.2) kombiniert werden. Eine Möglichkeit, Arbeitsblätter mit Teilaufgaben für die drei verschiedenen Anforderungsniveaus zu konzipieren, wird im Anhang A gezeigt. Je niedriger das Anforderungsniveau ist, desto mehr Unterscheidung von Problemlöseschritten wird vorgegeben und desto mehr Teilaufgaben tauchen auf den entsprechenden Arbeitsblättern auf.

Für das niedrige Anforderungsniveau (i.) wird das erste Lernziel, nämlich die Einsicht, dass das Mittenviereck mit den beiden „kongruenten Vierecken auf der Diagonalen" in Beziehung steht (vgl. Abschnitt 4.2), in drei vorgegebenen Etappen bewältigt. Genauer gesagt wird zuerst der Wechselwinkelsatz hergeleitet, dann wird der Wechselwinkelsatz zum Beweis des 1. Seitensatzes vom Parallelogramm genutzt, und zum Schluss wird gezeigt, dass die „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen" genau die halbe Seitenlänge des Ausgangsvierecks haben. Beim mittleren Anforderungsniveau (ii.) wird das erste Lernziel nur noch in zwei Etappen bewältigt, während beim hohen Anforderungsniveau (iii.) gar keine Unterteilung in Etappen mehr vorgegeben wird. Zuerst wird die Herleitung zum Wechselwinkelsatz ausgelassen und danach auch die Herleitung zum 1. Seitensatz vom Parallelogramm. Beim zweiten Lernziel, nämlich dem eigentlichen Nachweis des Mittenvierecks als Parallelogramm, verhält es sich genauso mit den Anforderungsniveaus wie beim ersten. Für das niedrige Anforderungsniveau (i.) wird der hergeleitete Wechselwinkelsatz zur Verfügung gestellt, während er für die höheren Anforderungsniveaus (ii. und iii.) nicht mehr angegeben wird. Im Gegensatz zum mittleren Anforderungsniveau wird der 2. Seitensatz vom Parallelogramm beim hohen Anforderungsniveau auch nicht mehr explizit aufgeführt.

Eine Angabe Folgesätze hilft in der Regel bei der Beweisfindung, während eine Angabe von zusätzlichen Basissätzen, die vielleicht nicht unbedingt gebraucht werden, eine Beweisfindung eher erschweren. Insofern korreliert die Komplexität der geforderten Beweisfindung eher positiv mit der Anzahl der in einer Teilaufgabe angegebenen Basissätzen und eher negativ mit der Anzahl der dort angegebenen Folgesätzen (vgl. Abschnitt 3.1). Deswegen gilt, je höher das Anforderungsniveau ist, desto weniger Kombinationsmöglichkeiten der Basissätze und desto weniger Struktur innerhalb der Beweiskette wird vorgegeben. Gleichzeitig gilt, je höher das Anforderungsniveau ist, desto eigenständiger müssen sich die Schülerinnen und Schüler die Beweisstruktur erarbeiten. Dadurch bekommen sie mehr Freiheiten, eigene

Problemlösungen in den Beweis mit einzubauen. Allerdings stellen die höheren Freiheitsgrade der Kombinationsmöglichkeiten einzelner Sätze eine große Hürde im Problemlöseprozess von Lernenden dar, die im Problemlösen und Beweisen noch unerfahren sind (vgl. Abschnitt 3.1).

5.2. Flankierende Maßnahmen zur Reduktion der Strenge

Wie in Abschnitt 3.2 erläutert, kann eine Reduktion der Strenge auf dreierlei Arten geschehen, nämlich entweder durch eine Modifikation des Gültigkeitsbereichs, der Sprache oder der axiomatischen Vollständigkeit. Diese drei Arten werden im Folgenden nochmal in Bezug auf das Mittenviereck diskutiert.

5.2.1. Modifikation des Gültigkeitsbereichs

Die Konfiguration eines Ausgangsvierecks mit eingezeichnetem Mittenviereck vereinfacht sich deutlich, sobald das Ausgangsviereck auch ein Parallelogramm darstellt. In diesem Fall sind die acht von Gau & Tartre (1994) und Palatnik (2017) identifizierten Dreiecke (siehe Abschnitt 4.2) nicht nur paarweise kongruent, sondern allesamt kongruent zueinander. Gleichzeitig halbieren sich die beiden Diagonalen im Ausgangsviereck, so dass die Punkte S_1 bzw. S_2, die für die beiden möglichen Versionen charakteristisch sind (vgl. Abbildung 5.1), zusammenfallen. Im Fall eines Rechtecks (siehe Abbildung 5.1) sind die beiden Diagonalen gleich lang, die acht kongruenten Dreiecke sind rechtwinklig, das Mittenviereck ist eine Raute (vgl. Tabelle 4.1), und die Konfiguration gestaltet sich besonders übersichtlich.

Der große Vorteil einer Rechteckskonfiguration ist, dass es insgesamt vier „kongruente Vierecke auf den beiden Diagonalen“ gibt ($\mathsf{AM_{AB}SM_{DA}}$, $\mathsf{M_{AB}BM_{BC}S}$, $\mathsf{SM_{BC}CM_{CD}}$ und $\mathsf{M_{DA}SM_{CD}D}$ in Abbildung 5.1 c)). Beide Diagonalen können in dieselbe Zeichnung eingetragen und für dieselbe Beweisfindung genutzt werden. Infolgedessen ergeben sich viel mehr Kombinationsmöglichkeiten der zur Verfügung gestellten Basis– und Folgesätze (siehe Abschnitte 4.3.2 und 4.3.3) als bei einem unregelmäßigen Ausgangsviereck. Die Schülerinnen und Schüler tun sich daher leichter, auf eine geschlossene und in sich konsistente Beweisfindung zu stoßen. Zum Beispiel können sie direkt mit den beiden bereitgestellten Kongruenzsätzen nachweisen, dass die acht Dreiecke in der Zeichnung alle kongruent sind. Außerdem ist es möglich, die beiden Seitensätze vom Parallelogramm auf alle vier „kongruenten Vierecke auf den beiden Diagonalen“ anzuwenden.

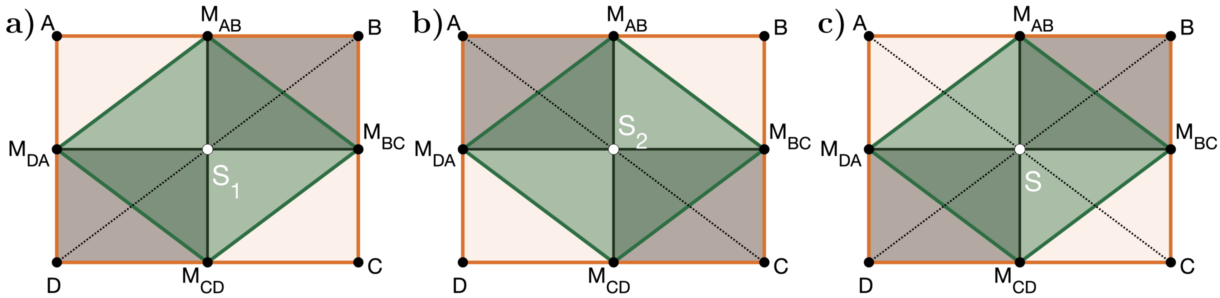


Abbildung 5.1.: Rechteckiges Ausgangsviereck mit eingezeichnetem Mittenviereck (in Grün) und den beiden „kongruenten Vierecken auf der Diagonalen" (in Grau): Die Versionen a) und b) repräsentieren dieselben zwei möglichen geometrischen Aufteilungen wie in Abbildung 4.2, sind aber hier aufgrund der Rechtecksform des Ausgangsvierecks identisch. Dementsprechend kann Version c) mit denselben Vorgaben wie in Version a), aber mit beiden Diagonalen eingezeichnet, für eine Beweisfindung herangezogen werden.

Die einfachere Rechteckskonfiguration kann für sich untersucht werden und danach kann gegebenenfalls schrittweise überlegt werden, was passiert, wenn das Ausgangsviereck nur ein unregelmäßiges Viereck darstellt. Insofern bietet sich eine Einschränkung auf ein besonderes Mittenviereck an, um eine vorübergehende Modifikation des Gültigkeitsbereichs für eine erfolgreiche Beweisfindung einzusetzen.

5.2.2. Modifikation der Sprache

Um den Schülerinnen und Schülern einen Einstieg in eine eher formale Argumentation bzw. eine „Beweissprache" mit verdichtenden Sprachmitteln zu gewähren, werden Ausdrücke aus der Alltagsspache in die Formulierung der Problemstellung eingebunden. D. h. einzelne Elemente aus der Fach– und aus der Alltagssprache werden gemäß den Empfehlungen von Führer (2002) gemeinsam verwendet. Die Anteile der beiden Sprachen richtet sich dabei nach den sprachlichen Fähigkeiten der Lerngruppe. Vor allen Dingen auf dem Arbeitsblatt für das niedrige Anforderungsniveau (siehe Anhang A), finden sich zu der Verschmelzung von Fach– und Alltagssprache zahlreiche Beispiele. Mathematische Sätze werden zum Teil in die Sprache der Schülerinnen und Schüler übersetzt, wobei einige Fachbegriffe erhalten bleiben. Fachbegriffe wie „Winkel", „Schnittpunkt", „Gerade" und „Parallelogramm" werden in eine der Alltagssprache angepassten und leicht verständlichen Sprache eingebettet. Generell wird Fachterminologie nicht verwendet, wenn sie für die Lernenden noch unbekannt ist oder zu abstrakt erscheint.

Insbesondere wird versucht, das Textverstehen der Lernenden durch die folgenden sprachlichen Instrumente zu unterstützen (vgl. Maier & Schweiger 1999, S. 76):

- kurze Satzteile ohne zu starke Nominalisierungen und Satzschachtelungen
- überwiegende Vermeidung von Passiv-Konstruktionen
- Vermeidung von unnötigen Floskeln und von redundanten Bemerkungen
- bewusste graphische Gestaltung des Textes auf dem Arbeitsblatt durch ein übersichtliches Layout sowie Abbildungen und Piktogramme zu den mathematischen Sätzen

Je schneller eine Aufgabe durch ein gutes Textverständnis durchdrungen wird, desto größer ist die Motivation zu ihrer Lösung.

Die Sprache in den Aufgabenstellungen kann auch dazu benutzt werden, einen direkten Bezug zu den Schülerinnen und Schülern herzustellen. Dazu wird für das niedrige Anforderungsniveau (siehe Anhang A) vor allem die indirekte Rede verwendet, und die mathematischen Sätze werden fiktiven Personen wie Marius, Claudia, Lena und Tonio in den Mund gelegt. Die Lernenden werden dann dazu aufgefordert, auf die Aussagen der einzelnen Personen einzugehen und die Behauptungen argumentativ zu belegen. D. h. die Schülerinnen und Schüler werden bereits durch die gewählten Formulierungen der Aufgabenstellung in das Beweisproblem einbezogen.

5.2.3. Modifikation der axiomatischen Vollständigkeit

Der gemachte Ansatz mit den beiden „kongruenten Vierecken auf der Diagonalen“ (vgl. Abschnitt 4.2) übernimmt eine entscheidende Rolle beim Beweis zum Mittenviereck (siehe Abschnitt 4.3.1). Allerdings wird die axiomatische Vollständigkeit an dieser Stelle der Beweiskette herabgesetzt. Für die Richtigkeit von diesem Ansatz ist kein exakter mathematischer Beweis in der angedachten Beweisführung vorgesehen. Stattdessen dürfen sich die Lernenden aktiv mit der geometrischen Anordnung der vorgegebenen Vierecke auseinandersetzen (siehe Anhang A). Für das niedrige und das mittlere Anforderungsniveau gibt es dafür eine enaktive Aufgabenstellung, bei der zwei gleiche Vierecke ausgeschnitten und entsprechend des Ansatzes angeordnet werden sollen. Für das hohe Anforderungsniveau gibt es eine anspruchsvollere Aufgabe, bei dem die Flächeninhalte der Vierecke in Beziehung gesetzt werden sollen. Auf diese Weise überzeugen sich die Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle von der Richtigkeit des Ansatzes ohne eine strenge Axiomatik zu befolgen.

Aufgrund der Vorgabe bestimmter Beweisschritte für das niedrige und das mittlere Anforderungsniveau dürfen einzelne Schritte gegebenenfalls auch ausgelassen und die mathematischen Aussagen trotzdem weiterverwendet werden. In solch einer Weise können die Schülerinnen und Schüler eigenständig steuern, die axiomatische Vollständigkeit an ihr Beweisvermögen anzupassen. Sobald einzelne Folgesätze vorgegeben sind, ist es möglich diese in der Beweisfindung zu nutzen, auch wenn ein Nachweis dieser Folgesätze nicht zufriedenstellend gelungen ist.

5.3. Didaktische Hilfestellungen aus dem Problemlösen

5.3.1. Anfertigen einer Skizze

Die „Informative Figur“ im Abschnitt 2.1.4 beinhaltet in der Regel eine oder mehrere Zusatzinformationen, die essenziell für die Beweisführung sind. Wenn eine Beweisführung nicht ohne diese Zusatzinformation auskommt, ist es notwendig, diese „Informative Figur“ zu erstellen. Contreras (2014) ist der Meinung, dass auch beim Mittenviereck unbedingt eine Skizze per Hand oder mit einer Dynamischen Geometriesoftware (DGS) anzufertigen ist. Die graphischen Zusatzinformationen sind didaktisch wertvoll aus zweierlei Sicht: zum einen um bereits Gelerntes zu reaktivieren oder um eine Definition zu konkretisieren, zum anderen um die Aufmerksamkeit der Lernenden auf bestimmte Aspekte der Problemstellung zu lenken (Palatnik & Sigler 2019).

Beim vorliegenden Beweis sollen die Schülerinnen und Schüler eine Skizze an die Hand bekommen, in der ein paar wichtige Hilfsinformationen vermerkt sind. Diese Skizze soll den gemachten Ansatz beinhalten mit den beiden „kongruenten Vierecken auf der Diagonalen“ (siehe Abschnitte 4.2 und 4.3.1). Es sind allerdings unterschiedliche Stufen einer Bereitstellung zusätzlicher Information möglich. Zum Beispiel ist es möglich, den Schülerinnen und Schülern eine der sechs Versionen der Skizzen in Abbildung 5.2 zur Verfügung zu stellen. Mit den Versionen a), b) und c) bekommen sie die beiden „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen“, die die Beweisführung entscheidend unterstützen. Allerdings bedarf es in Version a) und Version b) noch zu zeigen, dass vier Ecken der „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen“ mit den Ecken des Mittenvierecks zusammenfallen. Schließlich haben die Versionen d), e) und f) bereits das Mittenviereck eingezeichnet. Hier wird sofort offensichtlich, dass das Mittenviereck mit den „kongruenten Vierecken auf der Diagonalen“ in Beziehung steht. In Version f) ist die vollständige Information gegeben und alle parallelen und gleich langen Linien sind markiert. Auch wenn die Beweisführung mit allen Versionen

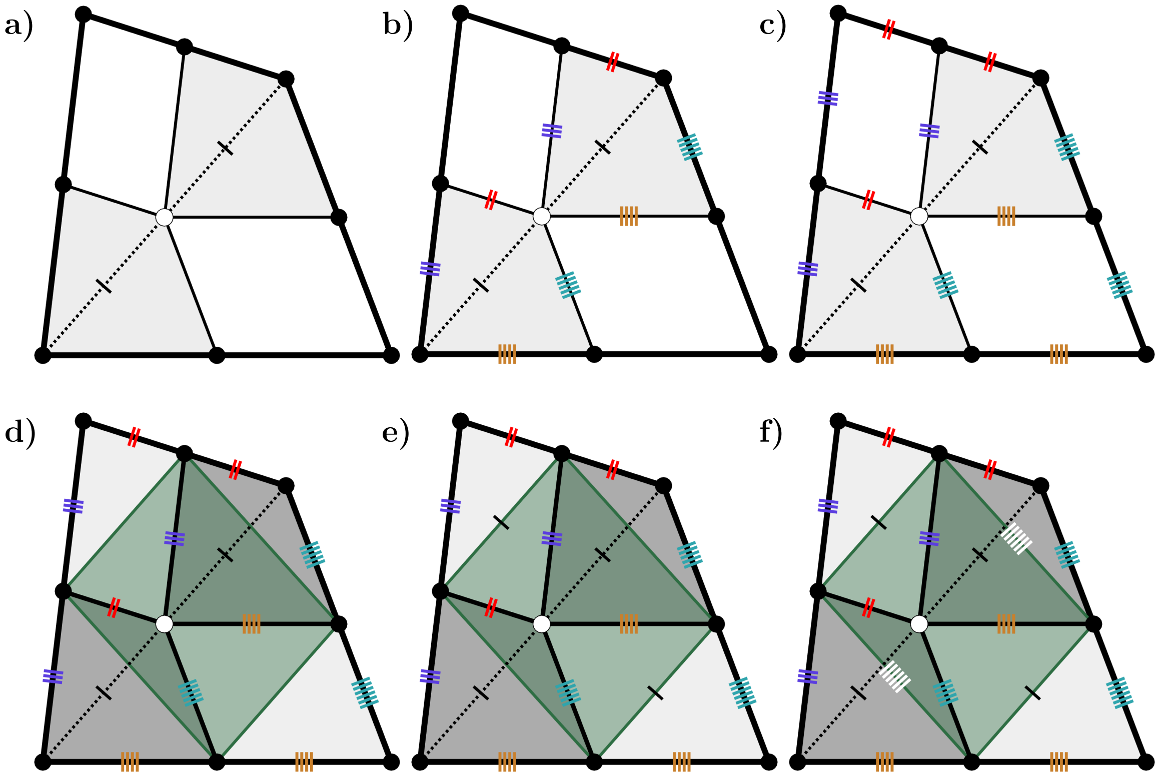


Abbildung 5.2.: Sechs Stufen einer informativen Skizze mit unterschiedlichem Maß an Hilfsinformation. Gleich lange und parallele Linien sind jeweils mit farblichen Strichen markiert. Versionen a), b) und c) haben die beiden „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen“ mit der dazugehörigen Diagonalen eingezeichnet. Versionen d), e) und f) zeigen zusätzlich das Mittenviereck (in Grün). Je höher die Version ist, desto mehr Linien sind als parallel und gleich lang gekennzeichnet.

durchgeführt werden kann, bildet die gezeigte Reihenfolge (a–f) einen Teil des schrittweise Vorarbeitens (vgl. heuristische Strategien in Abschnitt 2.1.4) innerhalb der Beweiskette ab.

Grundsätzlich gilt: Je mehr Zusatzinformation auf einer Skizze bereitgestellt wird, desto weniger zusätzliche Unterstützung ist nötig zum Einstieg in die Beweisfindung (vgl. Lee & Chen 2015). Dabei können Schülerinnen und Schüler Zeichnungen sowohl in kognitiver, logischer als auch struktureller Hinsicht zur Beweisfindung nutzen (Kautschitsch 2015).

5.3.2. Notation als Spalten–Beweis

Das Konzept eines Zwei–Spalten–Beweises (siehe Abschnitt 2.2.6) verfolgt ähnliche Ziele wie ein Lerntagebuch mit einem Polya–Fragenkatalog Hensberry & Jacobbe (vgl. 2012), da die Schülerinnen und Schüler dazu gebracht werden, über Sinn und Zweck einzelner

Beweisschritte nachzudenken (siehe Abschnitt 3.3.1). Die verwendete Tabelle wird dabei als ein heuristisches Hilfsmittel (siehe Abschnitt 2.1.4) zum Beweisen eingesetzt.

Um die Tabellenstruktur des Zwei–Spalten–Beweises mit den Basis– und Folgesätzen zusammenzubringen, kann eine dritte Spalte hinzugefügt werden, in der die Schülerinnen und Schüler die Verwendung eines vorgegebenen Satzes vermerken können. Somit kann solch ein Drei–Spalten–Beweis die Schüler und Schülerinnen zum Reflektieren über den Sinn und Zweck der Einbindung von einzelnen Sätzen anregen. Ein ausführlicher Spalten–Beweis zum Mittenviereck als Parallelogramm ist in Tabelle 4.2 zu sehen.

Zur Vereinfachung der Beweisführung können einzelne Einträge in solch einer Tabelle auch schon vorausgefüllt sein, so dass nur noch die Lücken ausgefüllt werden müssen. Auf diese Weise kann die gesamte Beweisfindung auch in eine Art Beweispuzzle übergeführt werden, bei dem nur noch die fehlenden Teile gefunden und korrekt eingefügt werden müssen.

5.3.3. Unterstützende Fragen durch die Lehrkraft

McGivney & DeFranco (1995) sprechen sich dafür aus, dass Lehrkräfte Fragen stellen, die die Lernenden zum Nachdenken anregen, aber nicht zu viel über die Problemlösung verraten. Zum einen können allgemeine Fragen zur Problemlösung gestellt werden, wie sie Polya (1995) und Schoenfeld (2016) vorschlagen (siehe Abschnitt 3.3.1). Zu anderen können spezifische Fragen zur Geometrie des Mittenvierecks gestellt werden. Insbesondere können die Lernenden am Anfang der Beweisfindung unterstützt werden, um den gemachten Ansatz (siehe Abschnitt 4.3.1) gut nachvollziehen zu können.

Durch einen Diskurs im Geometrieunterricht kommen Fragen auf, die die Lernenden anregen und gleichzeitig herausfordern. Dabei kann die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler dazu motivieren, ihre Ideen verständlich zu kommunizieren, zu erörtern und vor den anderen zu rechtfertigen (McGivney & DeFranco 1995, S. 555). Die Interaktion zwischen der Lehrkraft und den Schülerinnen und Schülern sowie unter den Schülerinnen und Schülern trägt dazu bei, dass unterschiedliche Aspekte einer Problemlösung offen diskutiert werden und begünstigt eine schnelle Problemlösung (McGivney & DeFranco 1995, S. 555).

Zum Verständnis der „kongruenten Vierecke auf der Diagonalen“ (vgl. Abschnitt 4.2) können z. B. die folgenden Fragen gestellt werden: **(1.)** Welchen Flächeninhalt hat ein kleines Viereck, das die halbe Seitenlänge hat wie ein großes Viereck von z. B. 25 cm^2?

(2.) Wie viele kleine Vierecke passen in ein großes Viereck von z. B. 25 cm^2, wenn sie dieselbe Form und die halbe Seitenlänge wie das große Viereck haben? **(3.)** Zwei kleine Vierecke, die genau gleich sind, berühren sich nur in einem Eckpunkt. Wie sieht das große Viereck aus, das die beiden kleinen Vierecke aufspannen, wenn ihre Seiten verlängert werden?

Als verbale Unterstützung zur Beweisfindung (siehe Abschnitt 4.3.4) können z. B. die folgenden Fragen gestellt werden: **(1.)** Welche Linien sind in der Skizze parallel und welche sind gleich lang? **(2.)** Welche kongruenten Vielecke kannst du in der Skizze erkennen? Wie kannst du diese Vielecke zur Beweisfindung nutzen? **(3.)** Unter welchen Umständen ist ein Viereck ein Parallelogramm? **(4.)** Wie viele Parallelogramme kannst du in der Skizze identifizieren?

5.3.4. Winkelsumme im n–Eck als heuristisches Lösungsbeispiel

Um den Schülerinnen und Schülern in kurzer Zeit eine Idee verschaffen, wie sie bei der Beweisfindung vorgehen könnten, empfiehlt sich das Durcharbeiten eines Lösungsbeispiels. Idealerweise werden dabei nicht nur fachliche Aspekte besprochen, sondern auch heuristische Strategien und Hilfsmittel vorgeführt (siehe Abschnitt 3.3.3).

Um einen Einstieg in die vorliegende Beweisfindung zu ermöglichen, kann z. B. der Beweis der Innenwinkelsumme in einem Viereck oder in Folge auch in einem beliebigen n–Eck dienen. Dabei wird zuerst der Beweis zur Innenwinkelsumme im Dreieck durchgeführt und danach für Vierecke und höhere n–Ecke wiederverwendet. Mit anderen Worten wird einleitend bewiesen, dass sich die Innenwinkel im Dreieck zu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ aufsummieren (siehe Abbildung 5.3) und danach wird demonstriert, warum die Innenwinkelsumme 360° im Viereck bzw. $(n - 2) \cdot 180°$ im n–Ecke betragen muss (siehe Abbildung 5.4). Letzteres geschieht entweder durch Aneinanderreihung mehrerer Dreiecke, so dass das gewünschte n–Eck entsteht, oder durch Zerlegung eines n–Ecks in einzelne Dreiecke. Die Verwendung der Innenwinkelsumme im Dreieck wird von Reiss & Renkl (2002) und Reiss et al. (2008) als heuristisches Lösungsbeispiel unter anderem deshalb empfohlen, weil es den Lernenden die Möglichkeit bietet, in einfacher Weise mit den Winkelsätzen zu experimentieren.

Satzsystem des Lösungsbeispiels

Das Lösungsbeispiel hat diejenigen Winkelsätze, die dann auch beim Nachweis des Mittenvierecks als Parallelogramm benötigt werden, als Basissätze: den Scheitelwinkelsatz, den

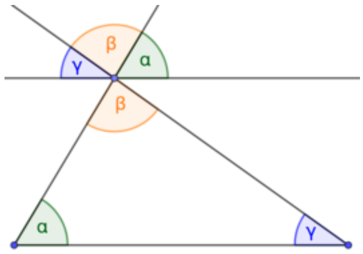


Abbildung 5.3.: Darstellung des Beweises zur Innenwinkelsumme im Dreieck: Auf den Winkel β wird der Scheitelwinkelsatz angewendet und auf die Winkel α und γ wird der Stufenwinkelsatz angewendet. Am Ende wird mit dem Nebenwinkelsatz argumentiert, dass die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ betragen muss.

Nebenwinkelsatz und den Stufenwinkelsatz (vgl. Abschnitt 4.3.2). Es kommt mit einem einzigen Folgesatz aus, nämlich mit dem Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck. Die Herleitung des Folgesatzes bedarf einer Kombination aller drei Winkelsätze (vgl. Abbildung 5.3).

Eignung als Lösungsbeispiel

Das Durcharbeiten des ausgewählten Beweisbeispiels zur Innenwinkelsumme verfolgt mehrere Ziele gleichzeitig:

1. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, wie sie die Winkelsätze miteinander kombinieren können, ohne einen Nachweis des Wechselwinkelsatzes vorwegzunehmen.

2.a Die Schülerinnen und Schüler finden heraus, wie sie Hilfslinien in sinnvoller Weise in eine Skizze einzeichnen können.

2.b Die Schülerinnen und Schüler eignen sich die Gewohnheit an, nach gleichartigen Objekten in einer Skizze Ausschau zu halten.

3. Die Schülerinnen und Schüler werden sich bewußt, wie sie einen Folgesatz aufstellen und wiederverwenden können.

Also kann das Lösungsbeispiel die Schülerinnen und Schüler sowohl in fachlicher Hinsicht (1.), in Bezug auf Probemlösekompetenzen (2.a, 2.b) und in Bezug auf Beweiskompetenzen (3.) von Nutzen sein und sie auf die Beweisführung beim Mittenviereck vorbereiten.

Vorführung von Heurismen

Insbesondere werden beim Lösungsbeispiel einige der typischen heuristischen Strategien aus der Geometrie angewendet (siehe Abschnitt 2.1.4). Beim Beweis der Innenwinkelsumme muss eine zu der Gegenseite parallele Hilfslinie durch einen der Eckpunkte des Dreiecks gezeichnet werden (vgl. Abbildung 5.3). Nur wenn diese Hilfslinie parallel zu der Gegenseite gezogen wird, kann der Stufenwinkelsatz angewendet werden. Sobald die Hilfslinie in der

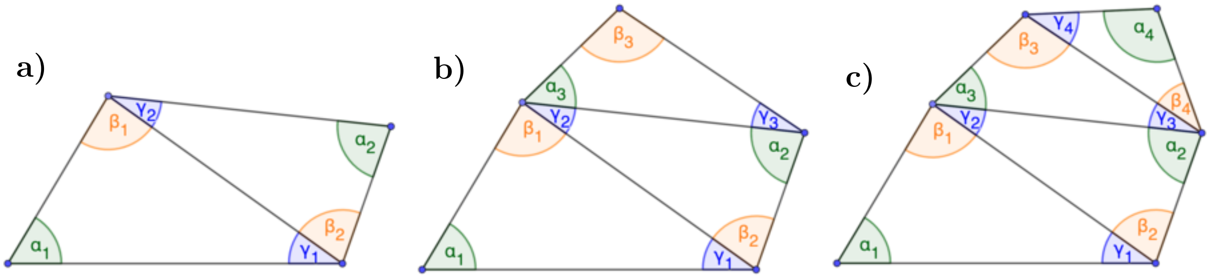


Abbildung 5.4.: Beweisbeispiel für die Innenwinkelsumme in einem n–Eck: Ein Viereck (a) kann immer in zwei, ein Fünfeck (b) in drei und ein Sechseck (c) kann immer in vier Dreiecke aufgespalten werden. Die Innenwinkelsumme des n–Ecks ergibt sich aus der entsprechenden Anzahl der Dreiecke multipliziert mit der Winkelsumme im Dreieck.

Skizze auftaucht und die Seiten des Dreiecks verlängert werden, können die gleich großen Scheitel– und Stufenwinkel gesehen werden. Es ist möglich, diese Winkel dann auch ohne Kenntnis des zugrunde liegenden Winkelsatzes mit dem bloßen Auge zu identifizieren.

Bei der Anwendung auf Vierecke bzw. beliebige n–Ecke müssen die Schülerinnen und Schüler die Zerlegung eines Vielecks in einzelne Dreiecke bzw. die Ergänzung einzelner Dreiecke zu einem Vieleck erkennen (vgl. Abbildung 5.3). Beim Beweis des Mittenvierecks spielt dieses Zerlegungs– und Ergänzungsprinzip (vgl. heuristische Prinzipien in Abschnitt 2.1.4) ebenfalls eine entscheidende Rolle.

Schließlich stellt das Aufstellen und anschließende Wiederverwenden eines Folgesatzes eine Ausprägung des Vorwärtsarbeitens dar (vgl. heuristische Strategien in Abschnitt 2.1.4), bei welchem man sich schrittweise vom Gegebenen zum zu Beweisenden vorarbeitet. Ohne das Aufstellen der Innenwinkelsumme im Dreieck kann das vorliegende Beweisbeispiel nicht auf die angedachte Weise durchexerziert werden. Auf diese Weise kann demonstriert werden, wie das Erreichen eines beweisrelevanten Folgesatzes außerordentlich förderlich zur Schließung einer gesamten Beweiskette sein kann.

6. Differenzierungsaspekte, Fazit und Ausblick

6.1. Möglichkeiten zur Differenzierung

Die in Kapitel 5 vorgestellten Förderwerkzeuge zur Beweisführung können in unterschiedlicher Weise im Unterricht eingesetzt und kombiniert werden. Die Förderung kann dabei einheitlich für eine ganze Lerngruppe durchgeführt oder spezifisch auf einzelne Teilgruppen zugeschnitten werden.

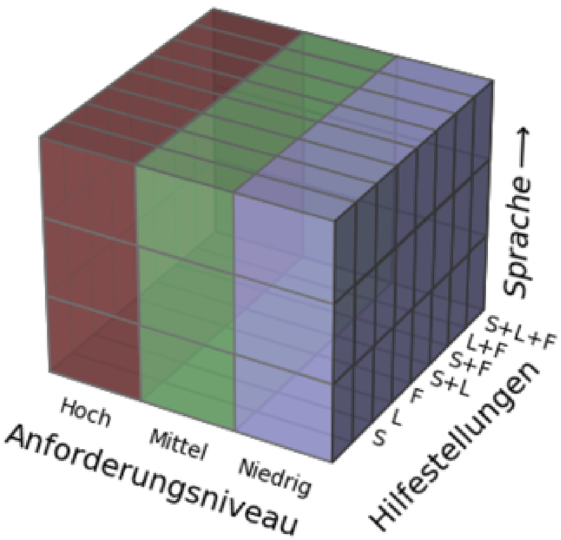


Abbildung 6.1.: 3–dimensionaler Würfel mit möglichen Differenzierungskombinationen: Das Anforderungsniveau (Niedrig, Mittel, Hoch) wird mit verschiedenen didaktischen Hilfestellungen kombiniert („S“ steht für eine bereitgestellte Skizze mit hilfreichen Informationen, „L“ steht für ein bereitgestelltes Lösungsbeispiel, „F“ steht für eine verbale Unterstützung mit gezielten Fragen im Unterricht) und auf verschiedenen Sprachniveaus bereitgestellt (z.B. reine Alltagssprache, gemischte Alltags– und Fachsprache, reine Fachsprache).

In erster Linie werden zunächst das Anforderungsniveau bezüglich des Beweisumfangs (siehe Abschnitt 5.1) sowie das Sprachniveau in der Aufgabenstellung (siehe Abschnitt 5.2) festgelegt. Danach kann überlegt werden, welche didaktischen Hilfestellungen (siehe Abschnitt 5.3) angeboten werden sollen, um den Schülerinnen und Schülern die Beweisfindung bzw. Beweisführung zusätzlich zu erleichtern. Eine einfache Übersicht der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten zur Differenzierung bietet Abbildung 6.1. Bezüglich der Hilfestellungen kann entschieden werden, ob eine „Informative Skizze“ in der Aufgabenstellung bereits vorgegeben wird, ob vorher ein Lösungsbeispiel durchgearbeitet bzw. besprochen wird und wie viel verbale Unterstützung durch gezielte Fragen im Unterricht geleistet wird. Dadurch ergeben sich zahlreiche Kombinationsmöglichkeiten, aus denen für eine Unterrichtplanung ausgewählt werden darf. Zusätzlich zu dem im Würfel (siehe Abbildung 6.1) gezeigten Möglichkeiten kann auch noch über eine Anpassung des Gültigkeitsbereichs (vgl. Abschnitt 5.2.1) und einen Einsatz des Spalten–Beweises (vgl. Abschnitt 5.3.2) nachgedacht werden. Möglich ist auch die Inanspruchnahme eines Lerntagebuchs (vgl. Abschnitt 3.3.1), um eine Reflexion und Überprüfung der eigenen Beweisfindung zusätzlich zu unterstützen. Es wird davon ausgegangen, dass die Fülle an Fördermöglichkeiten, die zur Differenzierung im Unterricht genutzt werden können, an dieser Stelle offensichtlich wird.

6.2. Didaktische Schlussfolgerungen

Die in den Kapiteln 2 und 3 vorgestellten allgemeinen didaktischen Konzepte sind in Kapitel 5 auf eine Beweisführung zum Mittenviereck als Parallelogramm angewendet worden. Mit Blick auf die Bearbeitung möglicher Aufgaben im Unterricht (vgl. Anhang A) können folgende Zusammenhänge festgestellt werden:

- Das Prinzip des „Lokalen Ordnens“ lässt sich in unterschiedlicher Ausprägung auf ein Beweisbeispiel in der Geometrie anwenden und trägt zur Ausformung des Schwierigkeitsgrades der Aufgabenstellung bei.
- Das „Lokale Ordnen“ unterstützt die Schülerinnen und Schüler beim Anwenden der heuristischen Strategie des Vorwärtsarbeitens.
- Die Möglichkeiten zur Differenzierung im Unterricht sind mannigfaltig und decken ein großes Spektrum an Schwierigkeitsgraden ab.
- Heuristische und nicht–heuristische Hilfestellungen können eine Differenzierung nach dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung komplementieren.
- Eine Sprache in den Aufgabenstellungen, die Schülerinnen und Schülern gerecht wird, stellt eine Grundvoraussetzung zur erfolgreichen Bewältigung einer Beweisaufgabe dar.
- Ein anderes Beweisbeispiel kann als heuristisches Lösungsbeispiel dienen und eine Bewältigung der vorliegenden Beweisaufgabe erleichtern, wenn es zweckbestimmt gewählt wird.

Abschließend muss an dieser Stelle zugegeben werden, dass die in dieser Arbeit vorgestellte Beweisfindung bisher nur theoretisch untermauert worden ist und einer praktischen Erprobung im Mathematikunterricht noch bedarf.

6.3. Ausblick

Die vorliegende Arbeit liefert eine Ausarbeitung zu verschiedenen Förderkonzepten zur Unterstützung des eigenständigen Beweisens eines mathematischen Satzes im Geometrieunterricht. Die einzelnen Konzepte werden erläutert und anhand einer Beweisführung zum Mittenviereck illustriert. Es bleibt abzuwarten, inwieweit Mathematiklehrkräfte, die an unterschiedlichen Schulformen unterrichten, das vorgestellte Gesamtkonzept annehmen und in ihrem Unterricht ausprobieren. Das „Lokale Ordnen“ stellt eine hilfreiche Methodik dar, um das Beweisen im Mathematikunterricht einfacher und für die Schülerinnen und Schüler besser zugänglich zu machen. Leider wird es bisher kaum zur Lösung von Beweisproblemen im Unterricht eingesetzt. Es besteht jedoch die Hoffnung, dass Beweisprobleme durch eine Anwendung der vorgestellten Didaktik künftig besseren Anklang finden und häufiger in den Geometrieunterricht der Sekundarstufe I[*] integriert werden. Die unterschiedlichen Anforderungsniveaus mitsamt den vorgestellten Förderwerkzeugen sind so konzipiert, dass sie sich ab der Sekundarstufe I in Klassenstufe 8 bis zur Sekundarstufe II[**] in Klassenstufe 11 oder 12 in den Mathematikunterricht integrieren lassen. Schließich kann gemutmaßt werden, inwieweit eine Reduktion des Umfangs und der Strenge künftig in den Bildungsstandards der KMK[***] als Methode zur Schulung der Beweiskompetenz mit aufgenommen werden.

Zusätzlich führt die vorliegende Arbeit eine neue Beweisführung zum Mittenviereck vor, die lediglich auf Winkel– und Kongruenzsätzen basiert und somit bereits in der unteren Sekundarstufe I durchgeführt werden kann (vgl. Abschnitt 4.2). Es besteht die Hoffnung, dass sich junge Schülerinnen und Schüler dieser Beweisführung stellen und beim Erkunden des Mittenvierecks einen Heureka–Effekt erleben (vgl. Abschnitt 2.1.4). Dadurch könnte ihnen die Faszination des Mittenvierecks als Parallelogramm bereits in den unteren Klassenstufen nahegebracht werden.

[*] umfasst die Schulstufen der mittleren Bildung und entspricht dem Level 2 der ISCED
[**] umfasst die Jahrgangsstufen der weiterführenden Bildung und entspricht dem Level 3 der ISCED
[***] Kultusministerkonferenz

Literaturverzeichnis

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32* (1), 53–60.

Bauersfeld, H. & Breidenbach, W. (1978). *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Schroedel.

Becker, G. (1984). *Der Geometrieunterricht*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, Julius (1. Januar 1984).

Benölken, R., Gorski, H.-J. & Müller-Philipp, S. (2018). Fragestellungen der euklidischen Geometrie. In *Leitfaden Geometrie* (S. 289–350). Springer.

Bills, L. & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Research in Mathematics Education*, *1* (1), 103–116.

Blum, W. & Berlin IQB. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret: Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Cornelsen Scriptor. Zugriff auf `https://books.google.de/books?id=EtYfSgAACAAJ`

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, *7* (8).

Branford, B. (1908). A study of mathematical education including the teaching of arithmetic. *Oxford: Clarendon Press.* Zugriff auf `https://archive.org/stream/astudymathemati00brangoog#page/n10/mode/2up` (zugegriffen am 1. Juli 2021)

Brockmann-Behnsen, D. (2021). Zwei–Tore–Regel und Zwei–Spalten–Beweis. In *Kompetenzsteigerung im Argumentieren durch ein gezieltes Training im Unterricht: Ergebnisse der Langzeitstudie HeuRekAP* (S. 118–121). Waxmann Verlag.

Bruder, R. (2002). Lernen, geeignete Fragen zu stellen. In *Heuristik im Mathematikunterricht* (Bd. 115, S. 4–8). Friedrich Verlag.

Bruder, R. (2003, Januar). Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. *Material im Rahmen des BLK–Programms „Sinus“.*

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen Lernen im Mathematikunterricht.* Cornelsen. Zugriff auf `https://books.google.de/books?id=ejTKbwAACAAJ`

Brunner, E. (2014). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *35* (2), 229–249.

Chi, M. T., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive science*, *13* (2), 145–182.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *36* (3), 201–217.

Contreras, J. N. (2014). Pose and solve Varignon converse problems. *The Mathematics Teacher*, *108* (2), 98–106.

Deissler, R. (2005). Einführung in die geometrie. *Vorlesung SS 2005 PH-Freiburg*, 1–71.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung.* Stuttgart: Kohlhammer.

Euklid. (3. Jh. v. Chr.). Die Elemente (im Original $\Sigma\tau o\iota\chi\tilde{\iota}\alpha$ Stoicheia).

Filler, A. (2011). Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung Didaktik der Elementargeometrie. *Humboldt-Universität zu Berlin. Institut für Mathematik*, 1–11.

Filler, A. (2019). Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie, Teil 7: Argumentieren, Beweisen, lokales Ordnen. *Humboldt-Universität zu Berlin. Institut für Mathematik*, 1–10.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht*, *9* (4), 44–45.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Klett Stuttgart.

Freudenthal, H. (1979). Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht. *Dörfler/Fischer*, 183–200.

Führer, L. (2002). Über einige Grundfragen künftiger Geometriedidaktik. *math. did. Jg*, *25* (2002), 55–77.

Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken.* Stuttgart: Kohlhammer.

Gau, Y. D. & Tartre, L. A. (1994). The Sidesplitting Story of the Midpoint Polygon. *The Mathematics Teacher*, *87* (4), 249–256.

Grieser, D. (2017). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik* (2. Aufl. 2017 Aufl.). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Gürtler, T., Perels, F., Schmitz, B. & Bruder, R. (2002). Training zur Förderung selbstregulativer Fähigkeiten in Kombination mit Problemlösen in Mathematik. In *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (S. 222–239).

Hein, K. (2021). Logische Strukturen beim Beweisen und ihre Verbalisierung. In (Bd. 46). Springer.

Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.*

Heinze, A. & Reiss, K. (2010). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In *Teaching and learning proof across the grades* (S. 191–203). Routledge.

Hensberry, K. K. & Jacobbe, T. (2012). The effects of Polya's heuristic and diary writing on children's problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *24* (1), 59–85.

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in american school geometry: Evolution of the two–column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, *49* (3), 283–312.

Hock, T., Heitzer, J. & Schwank, I. (2016). Axiomatisches Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37* (1), 181–208.

Hussy, W. (1984). *Denkpsychologie: Ein Lehrbuch. Band 1. Geschichte, Begriffs- und Problemforschung, Intelligenz.* Stuttgart: Kohlhammer.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. Zugriff auf https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_12 doi: 10.1007/978-3-642-35119-8_12

Kautschitsch, H. (2015). Zur Rolle von Zeichnungen beim Beweisen im Mathematikunterricht. In *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 143–161). Springer.

Kleinschmidt-Bräutigam, M. (2005). Standards und Kompetenzen - mehr als neue Begriffe. Eine Lesehilfe für die neuen Rahmenpläne. In *Grundschulunterricht* (Bd. 52, S. 2–5). Landesinstitut für Schule, Soest.

KMK. (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Wolters Kluwer Deutschland GmbH. Zugriff auf https://www.kmk.org

Knipping, C. (2003). Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis – Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *24* (1), 65–66. Zugriff auf https://doi.org/10.1007/BF03338969 doi: 10.1007/BF03338969

König, H. (1992). Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. *Der Mathematikunterricht*, *38* (3), 24–38.

Krauter, S. & Bescherer, C. (2013). Figuren in der Ebene und im Raum. In *Erlebnis Elementargeometrie* (S. 60–104). Springer.

Kuntze, S. (2004). Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *25* (3), 245–268. Zugriff auf https://doi.org/10.1007/BF03339325 doi: 10.1007/BF03339325

Kuzle, A. & Hollendung, K. (2016). Sätze entdecken, erforschen und beweisen: Systematisch und dynamisch zum Satz von Varignon. In *Problemlösen Lernen in der Geometrie* (Bd. 196, S. 13–17). Seelze: Friedrich.

Lakatos, I. (1982). Unendlicher Regreß und Grundlagen der Mathematik. In *Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie* (S. 3–22). Springer.

Lee, C.-Y. & Chen, M.-J. (2015). Effects of Polya Questioning Instruction for Geometry Reasoning in Junior High School. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11* (6), 1547–1561.

Ludwig, M. & Weigand, H.-G. (2018). Problemlösen. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 67–83). Springer.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). Mathematik und Sprache: Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. *Mathematiik für Schule und Praxis*, *1*.

McGivney, J. M. & DeFranco, T. C. (1995). Geometry proof writing: A problem-solving approach a la Polya. *The Mathematics Teacher*, *88* (7), 552–555.

Meyer, M. & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *51* (30), 1–7.

Müller-Philipp, S. & Gorski, H.-J. (2012). Axiomatik. In *Leitfaden Geometrie* (S. 64–96). Springer.

Oliver, P. N. (2001). Pierre Varignon and the Parallelogram Theorem. *The Mathematics Teacher*, *94* (4), 316–319.

Paas, F. G. & Van Merriënboer, J. J. (1994). Variability of worked examples and transfer of geometrical problem-solving skills: A cognitive-load approach. *Journal of educational psychology*, *86* (1), 122.

Palatnik, A. (2017). Proof without words: Varignon's theorem. *The College Mathematics Journal*, *48* (5), 354–354.

Palatnik, A. & Sigler, A. (2019). Focusing attention on auxiliary lines when introduced into geometric problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50* (2), 202–215.

Polya, G. (1979). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehre* (Birkhäuser, Hrsg.). Springer Basel AG.

Polya, G. (1995). *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme (Titel der englischen Originalausgabe: How to solve it.* Tübingen und Basel: Francke.

Reiss, K. (2002). Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. *Projektserver SINUS*.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A. & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, *40* (3), 455–467.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34* (1), 29–35.

Reusser, K. (1984). *Problemlösen in wissenschaftstheoretischer Sicht: problematisches Wissen, Problemformulierung und Problemverständnis* (Unveröffentlichte Dissertation).

Ross, J. A. & Maynes, F. J. (1983). Experimental problem solving: An instructional improvement field experiment. *Journal of Research in Science Teaching*, *20* (6), 543-556. Zugriff auf `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/tea.3660200606` doi: https://doi.org/10.1002/tea.3660200606

Royster, D. C. (2011, Oct). Quadrilateral Geometry. *Lecture notes.* Zugriff auf `http://www.ms.uky.edu/~droyster/courses/fall11/MA341/Classnotes/Lecture%2019.pdf`

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, *196* (2), 1–38.

Siefkes, D. (1992). Geometrie und Zahlen axiomatisieren. In *Formalisieren und Beweisen* (S. 181–197). Springer.

Simon, H. A. (1977). Scientific Discovery and the Psychology of Problem Solving. In D. Reidel Publishing Company (Hrsg.), *Models of Discovery. Boston Studies in the Philosophy of Science* (Bd. 54). Niederlande: Springer, Dordrecht.

Simon, H. A. & Simon, P. A. (1962). Trial and error search in solving difficult problems: Evidence from the game of chess. *Behavioral Science*, *7* (4), 425–429. Zugriff auf `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bs.3830070402` doi: https://doi.org/10.1002/bs.3830070402

Stenius, E. (1981). Anschauung und formaler Beweis. *Studia Leibnitiana*, 133–146.

Sweller, J., Van Merrienboer, J. J. & Paas, F. G. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10* (3), 251–296.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30* (1), 30–54. Zugriff auf https://doi.org/10.1007/BF03339072 doi: 10.1007/BF03339072

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., … Wittmann, G. (2018). Beweisen und Argumentieren. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 35–54). Springer.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., … Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (3. Auflage).* Springer.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *4* (1), 59–95.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *21* (61), 37–46.

Wittmann, E. C. (1983). Anwendungen des operativen Prinzips im Geometrieunterricht. In L. Montada, K. Reusser & G. Steiner (Hrsg.), *Kognition und Handeln* (S. 267–276). Klett.

Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *Mathematica Didactica*, *37*, 213–232.

Wittmann, E. C. (2021). When is a proof a proof? In *Connecting mathematics and mathematics education* (S. 61–76). Springer.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis. *Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Bielefeld*, 237–257.

Wittmann, G. (2018). Beweisen und Argumentieren. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 21–42). Springer.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Zeuge, W. (2018). *Nützliche und schöne Geometrie.* Springer.

Zimmerman, B. J. (2000). Self-efficacy: An essential motive to learn. *Contemporary Educational Psychology*, *25* (1), 82-91. Zugriff auf https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X99910160 doi: https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1016

Anhang

A. Arbeitsblätter zur Beweisführung beim Mittenviereck

Zur Illustration des Unterrichtskonzepts zur Beweisführung mit didaktischen Unterstützungsmaßnahmen wird ein von der Lehrkraft assistierter Beweis präsentiert. Als hauptsächliches Beispiel dient dabei der Beweis des Mittenvierecks als Parallelogramm. Die Beweisidee dazu wird in Abschnitt 4.2 beschrieben. In diesem Anhang werden auf den nachfolgenden Seiten drei Versionen des Arbeitsblattes vorgestellt, mit denen solch ein Beweis auf unterschiedlichen Anforderungsniveaus im Unterricht durchgeführt werden kann. Ein Einstieg in die Faszination des Mittenvierecks, bzw. in das eigenständige Entdecken der Parallelogramme im Unterricht, wird nicht auf den Arbeitsblättern behandelt und bleibt dem Einfallsreichtum der Lehrkraft überlassen.

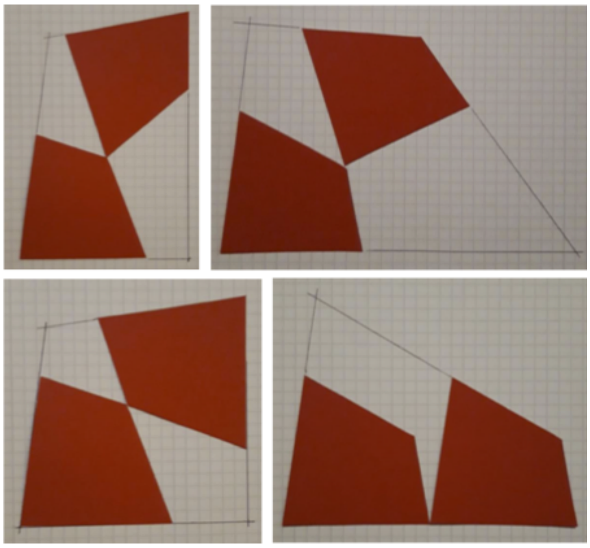
Die erste Aufgabe dient direkt zum Verständnis des gemachten Beweisansatzes. In diesem Ansatz setzt man zwei zum Ausgangsviereck ähnliche Vierecke diagonal in das Ausgangsviereck. Ziel der ersten Aufgabe ist die Einsicht in die Ähnlichkeit der dargestellten Vierecke. Danach teilen die nachfolgenden Aufgaben den gesamten Beweis in einzelne Beweisschritte auf. Schließlich dient dann die letzte Aufgabe zur Reflexion des gesamten Vorgehens. Die Schülerinnen und Schüler sollen alle gemachten Beweisschritte nochmal in einer Tabelle zusammenstellen und in eigenen Worten ausdrücken, wie sie eine Argumentationskette aufbauen können.

Die Differenzierung der Schwierigkeit findet hauptsächlich über die Anzahl der Folgesätze statt, die in der Beweisführung mitangegeben werden. Je mehr Folgesätze bzw. je mehr vorgegebene Zwischenschritte in den Aufgaben vorkommen, desto einfacher wird die Beweisführung. Aus diesem Grund gliedert sich das Arbeitsblatt für das niedrige Anforderungsniveau in die meisten Teilaufgaben, während das Aufgabenblatt für das hohe Anforderungsniveau die wenigsten Teilaufgaben beinhaltet. Gleichzeitig müssen die Schülerinnen und Schüler im niedrigen Anforderungsniveau nur aus zwei oder drei Basissätzen innerhalb eines Teilbeweises auswählen, während sie im hohen Anforderungsniveau aus bis zu fünf Basissätzen gleichzeitig auswählen.

Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

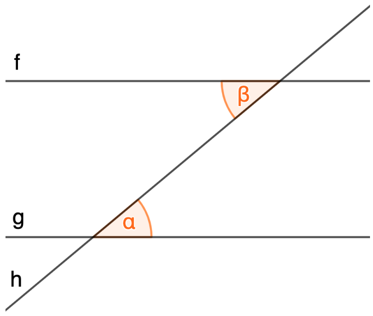
Aufgabe 1.a:

Schneide **zwei beliebige kongruente Vierecke** aus einem bunten Papier aus und lege sie so auf ein weißes Blatt Papier, dass sich **zwei ihrer Ecken berühren**. Wenn du die äußeren Seiten verlängerst, soll ein großes Viereck, wie rechts 4–mal gezeigt, herauskommen.



Finde heraus, wie du die **beiden kongruenten Vierecke** anordnen musst, damit das große Viereck dieselbe Form hat wie die beiden kleinen, d.h. **ähnlich zu den kleinen** ist. Beachte dabei, dass sich zwei der Ecken der beiden kleinen Vierecke auf jeden Fall berühren müssen.

Aufgabe 1.b:



Marius hat ein gutes visuelles Vorstellungsvermögen und stellt folgende Behauptung auf:

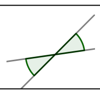
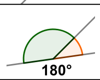
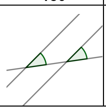
„Wenn eine Gerade (h) zwei andere zueinander parallele Geraden ($f \parallel g$) schneidet, dann sind die Winkel auf den gegenüberliegenden Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß.“

Claudia fügt hinzu:

„Ja, das stimmt. Das sind doch die **Wechselwinkel**, die ich hier in der Zeichnung nachgemessen habe, und die tatsächlich gleich groß sind ($\alpha = \beta$). Aber ich verstehe noch nicht, warum diese beiden Winkel immer gleich sein müssen.“

Kannst du zeigen, dass die **Wechselwinkel** von Claudia **immer gleich groß sind**? Verwende die Sätze unten in der Tabelle und begründe, warum Marius mit seiner Behauptung recht hat.

Zur Erleichterung deiner Begründung darfst du gerne die zusätzlichen Winkel in der Abbildung oben markieren und beschriften, die du für deine Begründung verwendest.

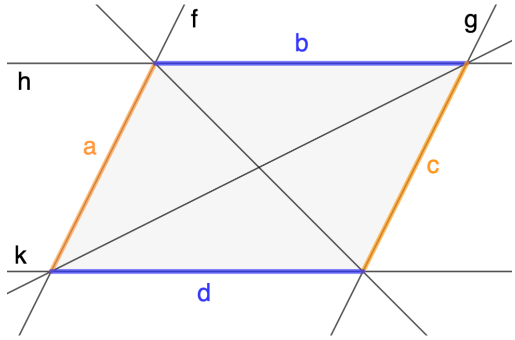
Satz	Bedeutung
Scheitelwinkel-satz 	Schneiden sich zwei Geraden, dann sind die gegenüberliegenden Winkel an dem Schnittpunkt gleich groß und heißen Scheitelwinkel.
Nebenwinkel-satz  180°	Zwei auf einer Seite einer Geraden liegenden Winkel haben die Winkelsumme von 180° und heißen Nebenwinkel.
Stufenwinkel-satz 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf denselben Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Stufenwinkel.

Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 2.a:

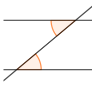
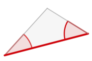
Lena beschäftigt sich gerne mit eckigen Figuren und stellt folgende Behauptung auf:

„Wenn ich ein Viereck zeichne, bei dem die gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel sind ($f \parallel g$ und $h \parallel k$), dann sind die gegenüberliegenden Seiten auch paarweise gleich lang ($a = c$ und $b = d$), und das Viereck ist ein Parallelogramm.



Begründe mithilfe der Sätze unten in der Tabelle, dass Lena recht hat.

Zur Erleichterung deiner Begründung darfst du gerne diejenigen Linien und Winkel in der Abbildung rechts markieren und beschriften, die du für deine Begründung verwendest.

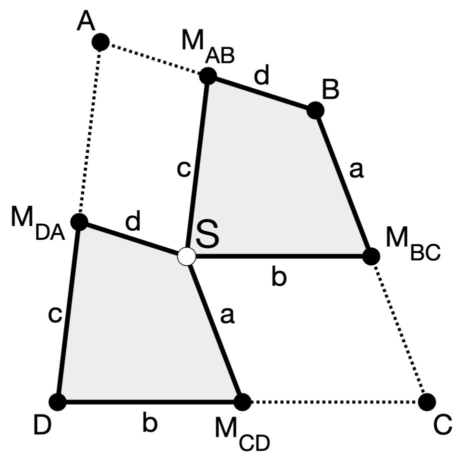
Satz	Bedeutung
Wechselwinkelsatz *(von Marius und Claudia)* 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf den gegenüberliegenden Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Wechselwinkel.
Kongruenzsatz W-S-W für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

Aufgabe 2.b:

Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und ihre Seiten sind **parallel zueinander**.

In solch einer Anordnung ist das große gepunktete Viereck ABCD **ähnlich zu den beiden kleinen Vierecken** (siehe Aufgabe 1.a).

Begründe mithilfe von Lenas Behauptung (siehe Aufgabe 2.a), dass die Punkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} genau in der Mitte der Seiten des großen gepunkteten Vierecks ABCD liegen.

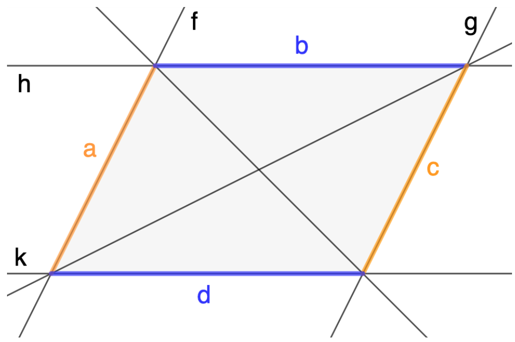


Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 3.a:

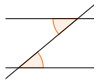
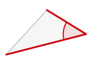
Tonio kann Lenas Beobachtung (siehe Aufgabe 2.a) bestätigen, aber er stellt eine weitere Behauptung über Parallelogramme auf:

„Wenn ich ein Viereck zeichne, in dem zwei Seiten sowohl parallel als auch gleich lang sind, ($f \parallel g$ und $a = c$), dann sind auch die anderen beiden Seiten parallel und gleich lang ($h \parallel k$ und $b = d$), und das Viereck ist ein Parallelogramm.“



Begründe mithilfe der Sätze unten in der Tabelle, dass Tonio recht hat.

Zur Erleichterung deiner Begründung darfst du gerne diejenigen Linien und Winkel in der Abbildung oben markieren und beschriften, die du für deine Begründung verwendest.

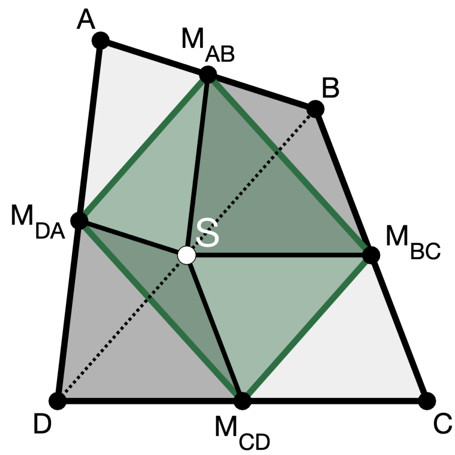
Satz	Bedeutung
Wechselwinkelsatz *(von Marius und Claudia)* 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf den gegenüberliegenden Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Wechselwinkel.
Kongruenzsatz S-W-S für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

Aufgabe 3.b:

Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und ihre Seiten sind **parallel zueinander**.

In solch einer Anordnung kann das **Mittenviereck** $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ eingezeichnet werden.

Begründe mithilfe von Tonios Behauptung (siehe Aufgabe 3.a), dass das **Mittenviereck** ein Parallelogramm ist.



Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 4.a:

Überlege dir nochmal, welche Aussagen du hier auf dem Arbeitsblatt in welcher Reihenfolge verwendet hast. Schreibe die einzelnen Schritte, die du gemacht hast, um am Ende das Mittenviereck als Parallelogramm zu begründen, in die Tabelle unten. Trage in den Spalten der Tabelle ein, welche Aussagen du in den einzelnen Schritten verwendet hast und was du warum in den einzelnen Schritten gemacht hast.

- Scheitelwinkelsatz
- Nebenwinkelsatz
- Stufenwinkelsatz
- Kongruenzsatz für Dreiecke: W-S-W
- Kongruenzsatz für Dreiecke: S-W-S
- Marius & Claudias Behauptung zu Wechselwinkeln
- Lenas Behauptung zum Parallelogramm
- Tonios Behauptung zum Parallelogramm

Nr.	Verwende ich einen der Sätze links, wenn ja welche?	Was mache ich genau in diesem Schritt?	Warum darf ich diesen Schritt machen?
1.	Nein.	Ein Viereck wird zweimal nebeneinander gezeichnet, so dass sich eine Ecke berührt und die Seiten parallel zueinander sind.	Ich darf die Vierecke selber so konstruieren.
2.	Nein.	Die äußeren Seiten werden so verlängert, dass ein großes Viereck mit derselben Form entsteht.	Die Seiten des äußeren Vierecks sind parallel zu den Seiten der inneren Vierecke.
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

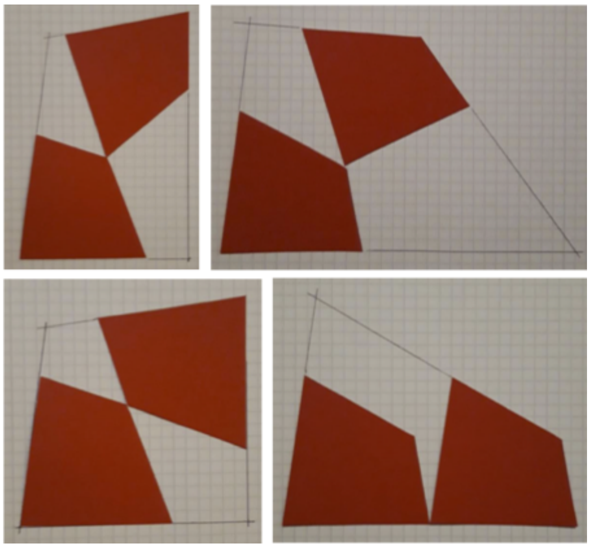
Aufgabe 4.b:

Schreibe einen kurzen Brief an deine Eltern, in dem du davon erzählst, welche kleinen Schritte du hier auf dem Arbeitsblatt gemacht hast, um dem Geheimnis des Mittenvierecks auf die Spur zu kommen.

Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 1:

Schneide **zwei beliebige kongruente Vierecke** aus einem bunten Papier aus und lege sie so auf ein weißes Blatt Papier, dass sich **zwei ihrer Ecken berühren**. Wenn du die äußeren Seiten verlängerst, soll ein großes Viereck, wie rechts 4–mal gezeigt, herauskommen.



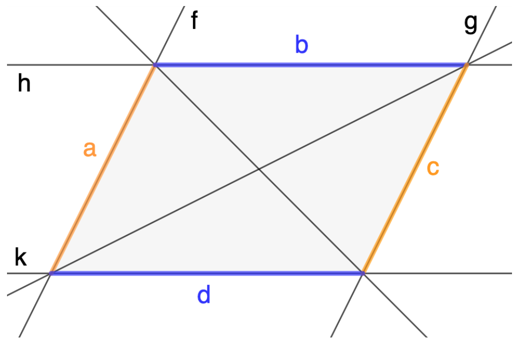
Finde heraus, wie du die **beiden kongruenten Vierecke** anordnen musst, damit das große Viereck dieselbe Form hat wie die beiden kleinen, d.h. **ähnlich zu den kleinen** ist. Beachte dabei, dass sich zwei der Ecken der beiden kleinen Vierecke auf jeden Fall berühren müssen.

Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

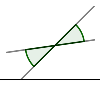
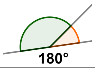
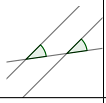
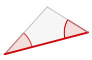
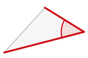
Aufgabe 2.a:

Begründe den folgenden **<u>1. Seitensatz vom Parallelogramm</u>** mithilfe der Sätze, die unten in der Tabelle stehen:

Wenn die gegenüberliegenden Seiten in einem Viereck paarweise parallel sind, dann sind die gegenüberliegenden Seiten auch paarweise gleich lang und das Viereck ist ein Parallelogramm.



Zur Erleichterung deiner Begründung darfst du gerne diejenigen Linien und Winkel in der Abbildung rechts farblich markieren und beschriften, die du für deine Begründung verwendest.

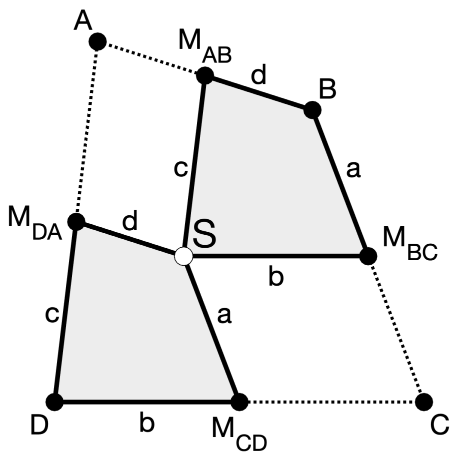
Satz	Bedeutung
Scheitelwinkel-satz 	Schneiden sich zwei Geraden, dann sind die gegenüberliegenden Winkel an dem Schnittpunkt gleich groß und heißen Scheitelwinkel.
Nebenwinkel-satz 	Zwei auf einer Seite einer Geraden liegenden Winkel haben die Winkelsumme von 180° und heißen Nebenwinkel.
Stufenwinkel-satz 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf denselben Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Stufenwinkel.
Kongruenzsatz W-S-W für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bei beiden Dreiecken übereinstimmen.
Kongruenzsatz S-W-S für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

Aufgabe 2.b:

Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und ihre Seiten sind **parallel zueinander**.

In solch einer Anordnung ist das große gepunktete Viereck ABCD **ähnlich zu den beiden kleinen Vierecken** (siehe Aufgabe 1).

Begründe mithilfe des **<u>1. Seitensatzes vom Parallelogramm</u>** (siehe Aufgabe 2.a), dass die Punkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} genau in der Mitte der Seiten des großen gepunkteten Vierecks ABCD liegen.

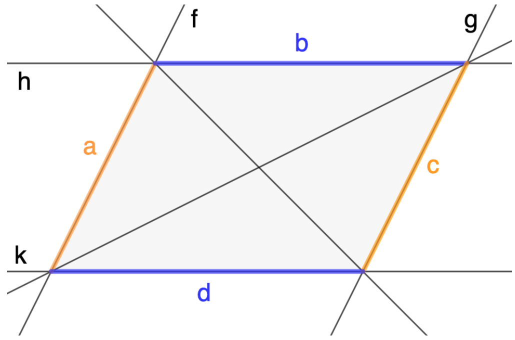


Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

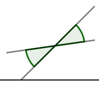
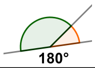
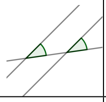
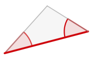
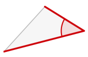
Aufgabe 3.a:

Begründe den folgenden **<u>2. Seitensatz vom Parallelogramm</u>** mithilfe der Sätze, die unten in der Tabelle stehen:

Wenn zwei Seiten in einem Viereck sowohl parallel als auch gleich lang sind, dann sind auch die anderen beiden Seiten parallel und gleich lang und das Viereck ist ein Parallelogramm.



Zur Erleichterung deiner Begründung darfst du gerne diejenigen Linien und Winkel in der Abbildung rechts farblich markieren und beschriften, die du für deine Begründung verwendest.

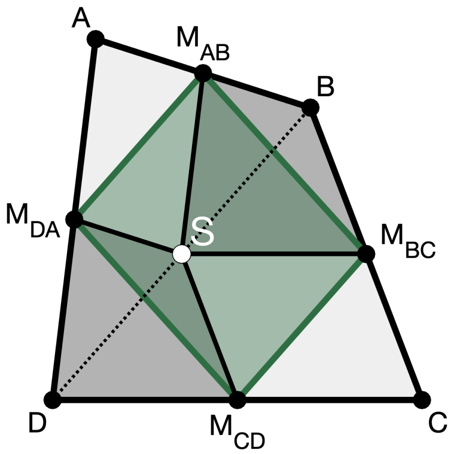
Satz	Bedeutung
Scheitelwinkelsatz 	Schneiden sich zwei Geraden, dann sind die gegenüberliegenden Winkel an dem Schnittpunkt gleich groß und heißen Scheitelwinkel.
Nebenwinkelsatz 	Zwei auf einer Seite einer Geraden liegenden Winkel haben die Winkelsumme von 180° und heißen Nebenwinkel.
Stufenwinkelsatz 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf denselben Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Stufenwinkel.
Kongruenzsatz W-S-W für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bei beiden Dreiecken übereinstimmen.
Kongruenzsatz S-W-S für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

Aufgabe 3.b:

Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und ihre Seiten sind **parallel zueinander**.

In solch einer Anordnung kann das **Mittenviereck** $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ eingezeichnet werden.

Begründe mithilfe des **<u>2. Seitensatzes vom Parallelogramm</u>** (siehe Aufgabe 3.a), dass das **Mittenviereck** ein Parallelogramm ist.



Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 4.a:

Überlege dir nochmal, wie du hier auf dem Arbeitsblatt vorgegangen bist. Schreibe die einzelnen Schritte zur Begründung des Mittenvierecks als Parallelogramm in die Tabelle unten. Erläutere jeweils, welche Sätze du in den einzelnen Schritten verwendet hast und was du warum in den einzelnen Schritten gemacht hast.

- Scheitelwinkelsatz
- Nebenwinkelsatz
- Stufenwinkelsatz
- Kongruenzsatz für Dreiecke: W-S-W
- Kongruenzsatz für Dreiecke: S-W-S
- 1. Seitensatz vom Parallelogramm
- 2. Seitensatz vom Parallelogramm

Nr.	Verwende ich einen der Sätze links, wenn ja welche?	Was mache ich genau in diesem Schritt?	Warum darf ich diesen Schritt machen?
1.	Nein.	Ein Viereck wird zweimal nebeneinander gezeichnet, so dass sich eine Ecke berührt und die Seiten parallel zueinander sind.	Ich darf die Vierecke selber so konstruieren.
2.	Nein.	Die äußeren Seiten werden so verlängert, dass ein großes Viereck mit derselben Form entsteht.	Die Seiten des äußeren Vierecks sind parallel zu den Seiten der inneren Vierecke.
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

Aufgabe 4.b:

Versuche, eine durchgängige Beweiskette zum Mittenviereck als Parallelogramm zu finden, wenn du dir die Tabelle mit den einzelnen von dir durchgeführten Schritten nochmal anschaust. Beschreibe diese Beweiskette in eigenen Worten. Erläutere gegebenenfalls, wo du noch Lücken oder Schwächen in dieser Kette erkennst.

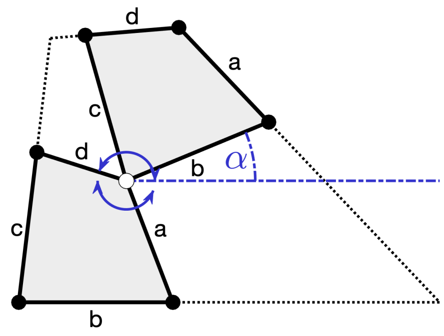
Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 1:

Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und berühren sich **im weißen Punkt**.

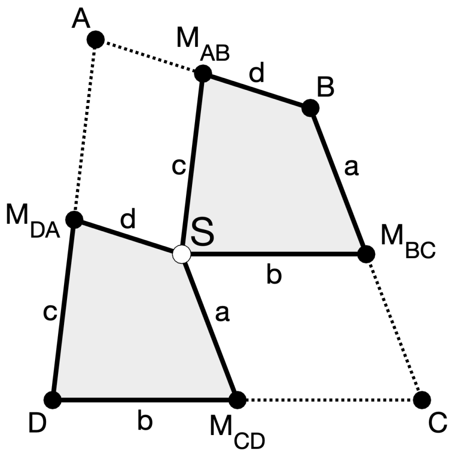
Wenn die Seiten der grauen Vierecke wie in der Abbildung rechts verlängert werden, entsteht das große gepunktete Viereck.

Bestimme die **Größe des Winkels α rechts vom weißen Punkt**, bei dem das große gepunktete Viereck **genau 4–mal so groß** ist wie eines der beiden grauen Vierecke.



Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

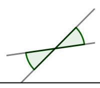
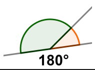
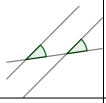
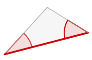
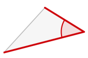
Aufgabe 2:



Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und ihre Seiten sind **parallel zueinander**.

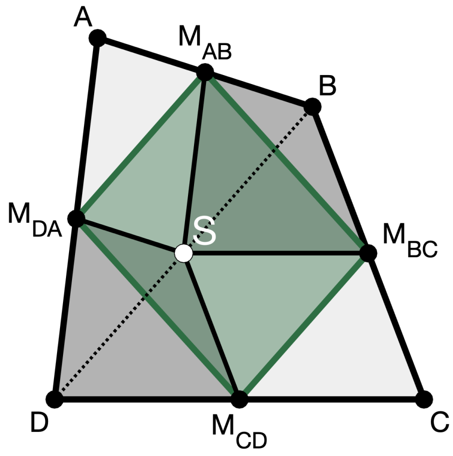
In solch einer Anordnung ist das große gepunktete Viereck ABCD **4–mal so groß** wie eines der beiden grauen Vierecke (siehe Aufgabe 1).

Begründe mithilfe der Sätze, die unten in der Tabelle stehen, dass die Punkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} genau in der Mitte der Seiten des großen gepunkteten Vierecks ABCD liegen.

Satz	Bedeutung
Scheitelwinkel-satz 	Schneiden sich zwei Geraden, dann sind die gegenüberliegenden Winkel an dem Schnittpunkt gleich groß und heißen Scheitelwinkel.
Nebenwinkel-satz 	Zwei auf einer Seite einer Geraden liegenden Winkel haben die Winkelsumme von 180° und heißen Nebenwinkel.
Stufenwinkel-satz 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf denselben Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Stufenwinkel.
Kongruenzsatz W-S-W für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bei beiden Dreiecken übereinstimmen.
Kongruenzsatz S-W-S für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

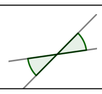
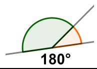
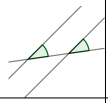
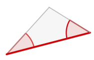
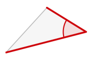
Aufgabe 3:



Die zwei grauen Vierecke in der Abbildung rechts sind **gleich groß** und ihre Seiten sind **parallel zueinander**.

In solch einer Anordnung kann das **Mittenviereck** $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ eingezeichnet werden.

Begründe mithilfe der Sätze, die unten in der Tabelle stehen, dass das **Mittenviereck** ein Parallelogramm ist.

Satz	Bedeutung
Scheitelwinkel-satz 	Schneiden sich zwei Geraden, dann sind die gegenüberliegenden Winkel an dem Schnittpunkt gleich groß und heißen Scheitelwinkel.
Nebenwinkel-satz 	Zwei auf einer Seite einer Geraden liegenden Winkel haben die Winkelsumme von 180° und heißen Nebenwinkel.
Stufenwinkel-satz 	Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, dann sind die Winkel auf denselben Seiten der beiden Schnittpunkte gleich groß und heißen Stufenwinkel.
Kongruenzsatz W-S-W für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bei beiden Dreiecken übereinstimmen.
Kongruenzsatz S-W-S für Dreiecke 	Zwei Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bei beiden Dreiecken übereinstimmen.

Warum ist das Mittenviereck immer ein Parallelogramm?

Aufgabe 4:

Versuche, eine durchgängige Beweiskette zum Mittenviereck als Parallelogramm zu finden, wenn du dir alle von dir gemachten Schritte hier auf dem Arbeitsblatt nochmal anschaust. Stelle diese Beweiskette in einem von dir gewählten Diagramm dar und beschreibe die Kette in eigenen Worten. Erläutere gegebenenfalls, wo du noch Lücken oder Schwächen in dieser Kette erkennst.

B. Einordnung der Beweisführung zum Mittenviereck in den Berliner Rahmenlehrplan

Für die Beweisaufgabe zum Mittenviereck können, so wie in Tabelle B.1 dargestellt, Kompetenzen des Berliner Rahmenlehrplans (RLP) definiert werden.

Standards des RLP	Stand der Kompetenzentwicklung	angestrebte Kompetenzentwicklung
inhaltsbezogen **(Niveaustufe G)** [**L3**] **Raum und Form** • Beziehungen zwischen geometrischen Objekten für Argumentationen nutzen	*Die Schülerinnen und Schüler können* • Beziehungen zwischen geometrischen Objekten beschreiben (Sätze über Winkel und Dreiecke)	*Die Schülerinnen und Schüler geben neue geometrische Argumentationen mithilfe von bekannten Sätzen an. Sie tun dies schrittweise, indem sie* • bekannte geometrische Beziehungen in einem neuen Kontext nutzen • Winkelsätze und Sätze über Dreiecke auf Parallelogramme anwenden und mit den Parallelogrammen weiter argumentieren
prozessbezogen [**K1**] **Mathematisch argumentieren** • mehrschrittige Argumentationen zur Begründung und zum Beweisen mathematischer Aussagen entwickeln	*Die Schülerinnen und Schüler können* • Begründungen nachvollziehen und zunehmend selbstständig entwickeln	*Die Schülerinnen und Schüler stellen eigenständig Beweise auf und erkennen die Beweisstruktur. Sie tun dies schrittweise, indem sie* • einzelne mathematische Sätze miteinander verknüpfen • eine mehrschritte Beweiskette zu Parallelogrammen und zum Mittenviereck aufbauen
[**K2**] **Probleme mathematisch lösen** • Lösungsstrategien (z. B. Vorwärtsarbeiten) entwickeln und nutzen	*Die Schülerinnen und Schüler können* • mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bei der Bearbeitung von Problemen anwenden	*Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine Strategie zur Erstellung einer Beweiskette. Sie tun dies schrittweise, indem sie* • einzelne Beweismittel in unterschiedlicher Reihenfolge miteinander verknüpfen • sich in mehreren Etappen von den Beweismitteln zum zu Beweisenden vorarbeiten

Tabelle B.1.: Einordnung in den Berliner Rahmenlehrplan (RLP) anhand von zu vermittelnden Standardkompetenzen