Anhang A

Konventionen

Wir geben Darstellungen der Matrizen an, die in dieser Arbeit benutzt wurden.

A.1 σ-Matrizen

Die Pauli–σ–Matrizen sind die Generatoren der $SU(2)$. Sie lauten

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{A.1}$$

und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.2}$$

Sie erfüllen die Relationen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma_k \tag{A.3}$$

und

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \tag{A.4}$$

A.2 γ-Matrizen

Wir geben eine Darstellung der euklidischen γ-Matrizen an. Sie sind durch ihre Vertauschungsrelationen (3.10) festgelegt und haben z. B. die folgende Form mit j aus $\{1, 2, 3\}$

$$\gamma_j^E = -i\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_4^E = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.5}$$

Anhang B

Abschätzung der statistischen Fehler

Der Erwartungswert

$$\langle \ldots \rangle = \tfrac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu \ldots e^{-S_{gauge}} \tag{B.1}$$

wird nicht durch numerische Integration, sondern durch eine Monte-Carlo-Integration mit *importance sampling* gebildet. Es werden Eichfeldkonfigurationen erzeugt, deren Verteilung durch den Boltzman-Faktor in Glg. (B.1) bestimmt ist. Um den Erwartungswert einer Observablen zu bestimmen, wird über verschiedene Konfigurationen C_n gemittelt gemäß

$$\langle \mathcal{O} \rangle_N = \tfrac{1}{N} \sum_n^N \mathcal{O}[C_n] \,. \tag{B.2}$$

Unter dem Mittelwert verstehen wir den Erwartungswert B.2 im Grenzfall vieler Messungen

$$\lim_{N\to\infty} \langle \mathcal{O} \rangle_N = \langle \mathcal{O} \rangle_\infty \,. \tag{B.3}$$

Wir wollen den Fehler unseres laufenden Meßwertes bestimmen und gehen deshalb von einem Mittelwert $\langle \mathcal{O} \rangle_N$ aus, der aus N Messungen gebildet wurde, also von $\mathcal{O}_i$ Einzelmessungen abhängt. Nehmen wir die Schwankungen $(\mathcal{O}_i - \langle \mathcal{O} \rangle)_\infty$ als klein an, können wir die Gauß-Fehlerquadrate zur Abschätzung der Unsicherheit ϵ verwenden

$$\epsilon^2 = \sum_n^N \left(\tfrac{\partial \langle \mathcal{O} \rangle_N}{\partial \mathcal{O}_i} \right)^2 (\mathcal{O}_i - \langle \mathcal{O} \rangle_\infty)^2 \,. \tag{B.4}$$

Mit dem Mittelwert B.2 finden wir, dass

$$\epsilon^2 = \tfrac{1}{N^2}\sum_n^N(\mathcal{O}_i - \langle\mathcal{O}\rangle_\infty)^2 = \tfrac{1}{N}\langle(\mathcal{O} - \langle\mathcal{O}\rangle_\infty)^2\rangle_N =: \tfrac{1}{N}\sigma^2 \,. \tag{B.5}$$

Man zeigt, dass σ^2 die Schwankungsbreite einer Gauß-verteilten Variablen x mit Zentrum x_0 darstellt

$$e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \,. \tag{B.6}$$

Für den Mittelwert endlich vieler Messungen gilt (die einzelnen Ereignisse sind schwach mit dem Mittelwert korreliert, deshalb ist die Schwankungsbreite kleiner)

$$\tfrac{1}{N}\langle(\mathcal{O} - \langle\mathcal{O}\rangle_\infty)^2\rangle_N = \tfrac{1}{N-1}\langle(\mathcal{O} - \langle\mathcal{O}\rangle_N)^2\rangle_N \,. \tag{B.7}$$

Der Fehler ϵ wird damit abschätzbar durch

$$\epsilon^2 = \tfrac{1}{N-1}(\langle\mathcal{O}^2\rangle_N - \langle\mathcal{O}\rangle_N^2) \tag{B.8}$$

und sollte bei ausreichend geringer Korrelation der Konfigurationen (d.h. $\langle\mathcal{O}^2\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^2 = \text{constant}$) wie $1/\sqrt{N}$ verschwinden.

Anhang C

Die Borel-Transformation

Es sei $A[a]$ eine divergente oder nicht-divergente Reihe

$$A[a] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n, \tag{C.1}$$

so ist ihre Borel-Transformierte $B[b]$ definiert als

$$B[b] = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \tfrac{b^n}{n!}. \tag{C.2}$$

Damit gilt formal

$$\int_0^{\infty} db B[b] e^{-b/a} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{A_n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} db\, b^{n-1} e^{-b/a} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{A_n}{(n-1)!} (n-1)!\, a^n \tag{C.3}$$

$$= A[a]. \tag{C.4}$$

Zwei Beispiele:
Zunächst eine Borel-summierbare divergente Reihe:

$$A[a] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n! a^{n+1} = \int_0^{\infty} db \sum_{n=0}^{\infty} (-b)^n\, e^{-b/a} = \int_0^{\infty} db \tfrac{e^{-b/a}}{1+b}. \tag{C.5}$$

Auf dem Integrationsweg von $0 \to \infty$ liegt kein Pol. Hingegen weist die Reihe

$$A[a] = \sum_{n=0}^{\infty} n! a^{n+1} = \int_0^{\infty} db \sum_{n=0}^{\infty} (b)^n\, e^{-b/a} = \int_0^{\infty} db \tfrac{e^{-b/a}}{1-b} \tag{C.6}$$

einen Pol bei $b_0 = 1$ auf der positiven reellen Achse auf. Ist $A[a]$ die Störungsreihe einer Observablen in der QED (oder QCD), so nennt man einen solchen Pol Renormalon. Das Integral bekommt dann einen Sinn, wenn man einen Integrationsweg vorschreibt

$$D_{\pm}[a] = \int_0^{\infty} db \tfrac{e^{-b/a}}{1-b\pm i\epsilon}. \tag{C.7}$$

Die Zweideutigkeit ist durch das Residuum quantifizierbar

$$D_{+}[a] - D_{-}[a] \sim exp\left(\tfrac{-b_0}{a}\right) . \tag{C.8}$$

Anhang D

Tabellen

μ	1-*loop*	2-*loop*	3-*loop*	4-*loop*
	$[\Delta Z_m^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu)]^{-1}$			
2.00 GeV	0.760(10)	0.704(9)	0.718(10)	0.721(10)
2.12 GeV ($1/a$ at $\beta = 6.0$)	0.752(10)	0.697(8)	0.711(9)	0.714(10)
2.90 GeV ($1/a$ at $\beta = 6.2$)	0.716(8)	0.667(7)	0.677(7)	0.679(8)
3.85 GeV ($1/a$ at $\beta = 6.4$)	0.689(7)	0.644(6)	0.652(5)	0.653(6)
	$\alpha_s^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu)$			
2.00 GeV	0.268(10)	0.195(6)	0.201(6)	0.202(7)
2.12 GeV ($1/a$ at $\beta = 6.0$)	0.261(9)	0.191(5)	0.196(6)	0.197(6)
2.90 GeV ($1/a$ at $\beta = 6.2$)	0.228(7)	0.170(5)	0.174(5)	0.175(5)
3.85 GeV ($1/a$ at $\beta = 6.4$)	0.205(6)	0.156(3)	0.159(4)	0.159(4)

Tabelle D.1: *Einige Werte für* $[\Delta Z_m^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu)]^{-1}$ *und* $\alpha_s^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu) \equiv (g^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu))^2/4\pi$*. Die Fehler stammen aus der Unsicherheit bei der Bestimmung von* $\Lambda^{\overline{\mathrm{MS}}}$ *[37].*

β	Y
6.0	0.972(6)
6.2	1.060(3)
6.4	1.082(5)

Tabelle D.2: *Quarkmassen-Konversionsfaktoren.*

β	$Z_S^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu = 1/a)$
6.0	0.790(5)
6.2	0.803(5)

Tabelle D.3: *Renormierungskonstanten der Quarkmasse für Wilson-Fermionen.*

Name	Knoten	Boards	Topologie	max. Rechenleistung/GFLOPs
Q1	1	1	$2 \times 2 \times 2$	0.4
Q16	128	16	$32 \times 2 \times 2$	6.4
QH1	128	16	$8 \times 4 \times 4$	6.4
QH2	256	32	$4 \times 8 \times 8$	12.8
QH4	512	64	$8 \times 8 \times 8$	25.6

Tabelle D.4: *Die Boards lassen sich zu unterschiedlichen Maschinen-Geometrien zusammenfügen. Die Ränder des dreidimensionalen Gitters sind verbunden: Es sind periodische Randbedingungen implementiert.*

β	κ	V	# Konf.	c_{SW}	κ_c
6.0	0.1333	16^4	44	1.769	0.1352008
6.0	0.1339	16^4	44	1.769	0.1352008
6.0	0.1342	16^4	44	1.769	0.1352008
6.0	0.1345	16^4	44	1.769	0.1352008
6.0	0.1345	32^4	16	1.769	0.1352008
6.0	0.1550	16^4	49	0	0.15713(3)
6.2	0.1344	24^4	50	1.614	0.1358030
6.2	0.1349	24^4	37	1.614	0.1358030
6.2	0.1352	24^4	50	1.614	0.1358030
6.4	0.1346	32^4	49	1.526	0.1357443
6.4	0.1350	32^4	28	1.526	0.1357443
6.4	0.1352	32^4	50	1.526	0.1357443

Tabelle D.5: *Die von uns erzeugten Datensätze und ihre Parameter.*