

Kapitel 6

Ergebnisse

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer Untersuchung des freien Falls, also des Spezialfalles diagonalen Linkvariablen $U_\mu(x) = 1$. Dieser Fall entspricht der Beschreibung einer verschwindenden QCD-Wechselwirkung, der Kopplungskonstanten $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} = 0$. Wir können hieran einige grundsätzliche Eigenschaften der Gitterpolarisationsfunktion (5.42), (5.43) und (5.44) erarbeiten, ohne dass statistische Fluktuationen unsere Resultate überdecken.

6.1 Der Fall $U_\mu(x) = 1$

In Glg. (4.29) haben wir den allgemeinen Lösungsansatz des Polarisationstensors $\Pi_{\mu\nu}$ im Impulsraum vorgestellt. Diesen Ansatz wollen wir im folgenden rechtfertigen. Wir widmen uns zunächst dem Teil des Ansatzes der die Dirac-Struktur beschreibt.

6.1.1 Impulsauswahl und Tensorstruktur

Wir wählen ein hyperkubisches Volumen, denn wir verwenden als Variable nur den Betrag von \hat{q} und erhöhen damit die Symmetrie (um die Invarianz unseres Operators unter $\pi/2$ Drehungen auch bei endlichem Volumen im statistischen Mittel der Eichfelder). Ferner schränken wir uns auf die nahezu diagonalen Gitterimpulse ein, d.h. wir wählen Impulse

$$\hat{q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \hat{q}_4) \tag{6.1}$$

wobei

$$\hat{q}_\mu = \frac{2}{a} \sin(aq_\mu/2),$$

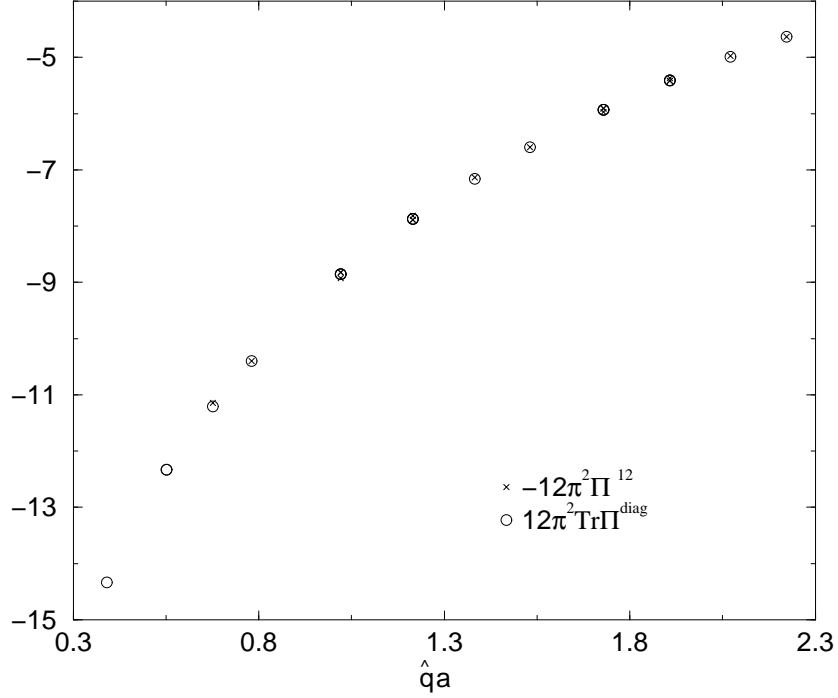


Abbildung 6.1: Der Kurvenverlauf der unverbesserten Polarisationsfunktion auf dem 16^4 -Gitter. Der durch Spurbildung gewonnene Wert ist glatter. Die dimensionslose nackte Masse beträgt $am = 0.032258$ ($\kappa = 0.124$)

$$q_\mu = \frac{2\pi}{aL} m_\mu \quad (6.2)$$

und $|m_\mu - m_\nu| \leq 1$ für alle μ, ν aus $\{1, 2, 3, 4\}$. Zur Motivation der Einschränkung *fast diagonal* vgl. die Abb. (6.1) und Abb. (6.2). In Abb. (6.1) ist die unverbesserte Polarisationsfunktion sowohl durch Spurbildung

$$\Pi^{\text{diag}}(\hat{q}^2) = \sum_{\mu} \Pi_{\mu\mu} / 3\hat{q}^2, \quad (6.3)$$

als auch durch Betrachtung eines nicht-Diagonalelementes

$$\Pi^{12}(\hat{q}^2) = \Pi_{12} / \hat{q}_1 \hat{q}_2 \quad (6.4)$$

gewonnen. Die Abweichungen der Ergebnisse sind klein. Anders der $\Delta_{\mu\nu}^{\delta J \delta J^+}(\hat{q})$ - Term aus der Verbesserung (5.44) in Abb. (6.2). Hier ist der Unterschied der Beiträge deutlich sichtbar. Für diagonale Impulse $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \hat{q}_3 = \hat{q}_4$ stimmen jedoch

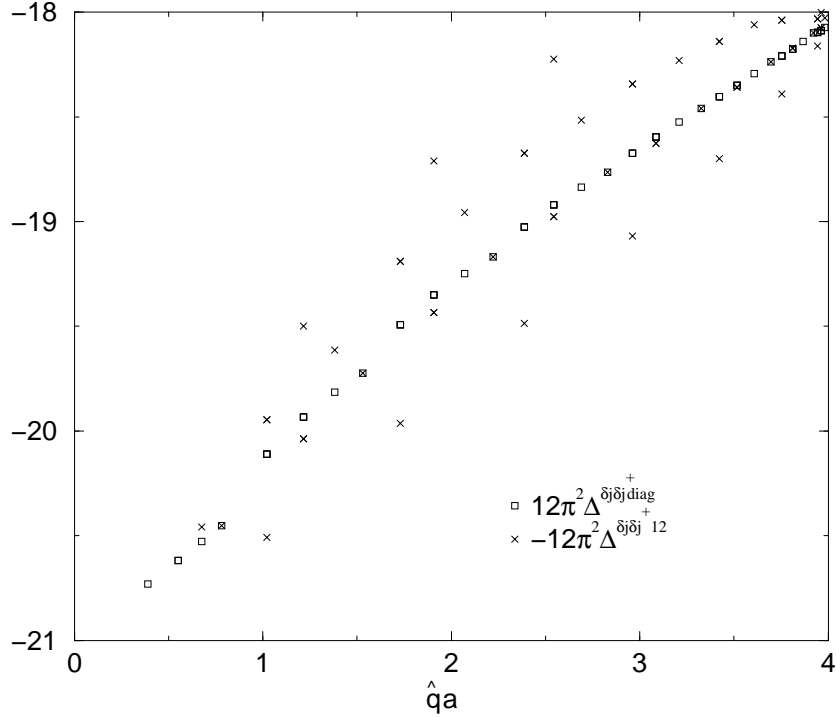


Abbildung 6.2: Der Kurvenverlauf des $\Delta_{\mu\nu}^{\delta J\delta J^+}(\hat{q})$ -Verbesserungstermes mit Ableitungstyp IV. Der über die Spurbildung gewonnene Wert ist wesentlich glatter, und interpoliert zwischen den übereinstimmenden Werten bei $q = 2\pi/(aL)(1, 1, 1, 1)$, $q = 2\pi/(aL)(2, 2, 2, 2), \dots$

beide Beiträge überein. Der durch Spurbildung gewonnene Anteil interpoliert besser zwischen diesen Impulswerten, so dass wir die Polarisationsfunktion fortan durch Spurbildung (6.3) aus dem Polarisationsstensor gewinnen und den Hochindex $(\dots)^{\text{diag}}$ unterdrücken

$$\Pi(\hat{q}^2) = -\Pi^{\text{diag}}(\hat{q}^2). \quad (6.5)$$

Wir betrachten die Tensorstruktur in (4.29) für die obige Impulsauswahl als gut erfüllt.

6.1.2 Das Impulsargument der Polarisationsfunktion

Unser Ziel ist es nun, die funktionale Abhängigkeit der *Polarisationsfunktion* vom Impulsübertragsquadrat $\Pi(\hat{q}^2)$ zu motivieren. Wir betrachten nur kleine Impulse für die gilt $m_\nu < L/4$ mit $\nu = 1, 2, 3, 4$. Der naive Impuls ist dann kleiner als

$q_\mu^{\max} = \pi/(a2)$ und der Gitterimpuls ist beschränkt durch $\hat{q}_\mu^{\max} = \sqrt{2}/a$ – eine Abweichung von etwa 10 Prozent. Wir berücksichtigen diese Abweichung durch die Wahl des Argumentes der Polarisationsfunktion $\Pi = \Pi(\hat{q}^2)$. In Abb. (6.3) zeigen wir die Polarisationsfunktion als Funktion der Impulse q sowie \hat{q} . Eine Rechnung für ein unendliches Volumen liefert das Resultat [40, 53]

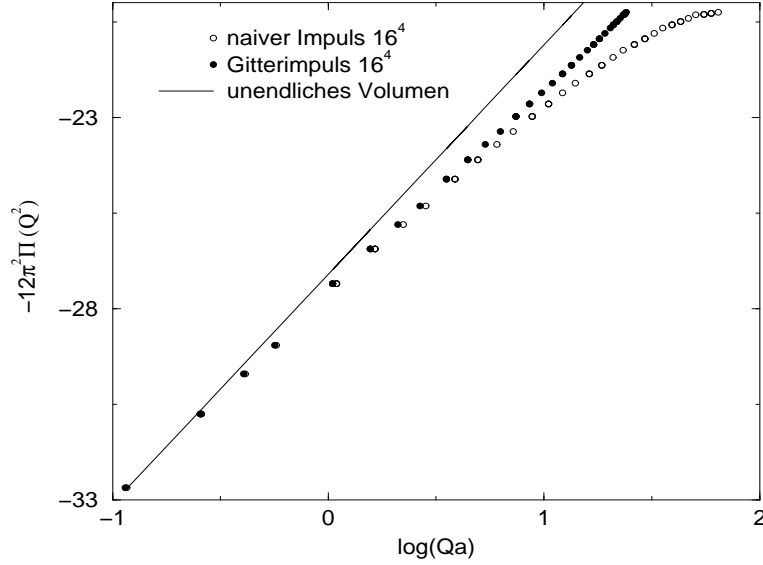


Abbildung 6.3: Der in der Gitterkonstanten a führende Term der verbesserten Gittervakuum polarisation mit $c_{cvc} = 1$ für ein unendlich großes Volumen ist logarithmisch in seinem Argument. Die Kurven bei endlichem Volumen sind die mit Ableitungstyp IV verbesserte Gittervakuum polarisation als Funktion des Gitterimpulses \hat{q} und des naiven Impulses q wie im Text beschrieben. Es sind Impulse bis zu $q_\mu^{\max} = \pi/a$ bzw. $\hat{q}_\mu^{\max} = 2/a$ zugelassen. Die dimensionslose nackte Masse ist $am = 0.032258$ bei $\kappa = 0.124$.

$$\begin{aligned}
 -12\pi^2\Pi(q^2, m) = & 3\left(\ln(a^2 q^2) - 3am(1 - c_{cvc}) \ln(a^2 q^2) \right. \\
 & -3.25275141(5) + 1.19541770(1)c_{cvc} - 7.06903716(4)c_{cvc}^2 \\
 & + am(6.46270704(30) - 5.29413266(6)c_{cvc} \\
 & \left. + 1.67389761(2)c_{cvc}^2\right) + O(a^2), \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

also einen im Impulsargument logarithmischen Verlauf. Wir entscheiden uns aufgrund der Freiheit in der Wahl von $O(a^2)$ -Korrekturen für einen Ansatz $\Pi = \Pi(\hat{q}^2)$, denn dieser zeigt das gewünschte logarithmische Verhalten.

6.1.3 Randbedingungen

Die Eichfelder erfüllen für $U_\mu \equiv 1$ periodische Randbedingungen, während wir für den fermionischen Propagator die Freiheit der Wahl haben. Wir betrachten deshalb den Kurvenverlauf für zwei endliche Volumina (16^4 und 8^4) zur Untersuchung der Bedeutung des Volumens in Abhängigkeit der Randbedingungen in Abb. (6.4). Wir erkennen, dass die Volumenabhängigkeit für antiperiodische Randbedingungen des Propagators weitaus kleiner ist, und entscheiden uns für diese. Für den Fall der nicht-verschwindenden starken Wechselwirkung wählen wir die Randbedingungen ebenfalls periodisch in den Linkvariablen und antiperiodisch für die fermionischen Propagatoren.

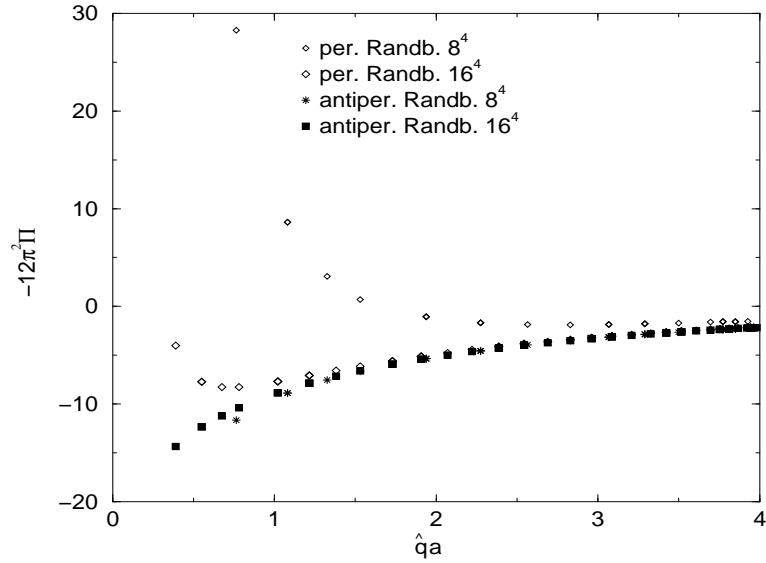


Abbildung 6.4: Der Kurvenverlauf der unverbesserten Vakuumpolarisation auf dem Gitter für zwei Volumina und periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen. Die dimensionslose nackte Masse beträgt in allen vier Fällen $am = 0.032258$ (bei $\kappa = 0.124$)

6.2 QCD-Wechselwirkung

Wir haben Daten für verschiedene Massen und Kopplungen generiert. Für die Parameter vgl. Tabelle D.5. Bevor wir die Resultate betrachten, wollen wir auch hier

einige allgemeine Überlegungen anstellen. Allem voran werfen wir einen Blick auf den Einfluss des Volumens auf unsere Resultate.

6.2.1 Volumeneffekte

Wir vergleichen dazu die Abhängigkeit der Polarisationsfunktion auf dem Gitter für $\kappa = 0.1345$ und $\beta = 6.0$ eines 16^4 - und eines 32^4 -Volumens. Der Wert $\kappa = 0.1345$ ist das kleinste κ zu dem wir bei diesem β Matrixinversionen durchgeführt haben. Falls

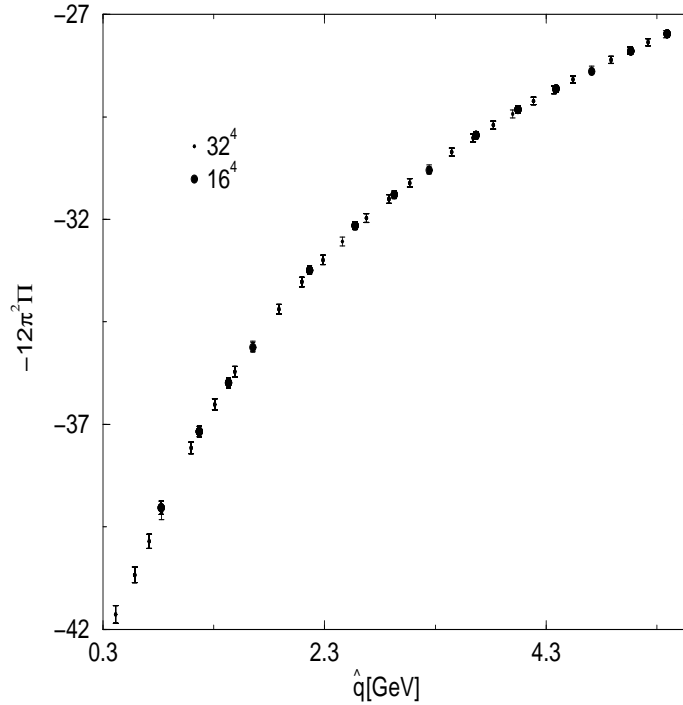


Abbildung 6.5: Die Volumenabhängigkeit der mit Ableitungstyp IV verbesserten Polarisationsfunktion auf dem Gitter für $\kappa = 0.1345$ und $\beta = 6.0$. Beide Kurvenverläufe stimmen innerhalb der statistischen Fehlergrenzen überein. Lediglich für den kleinsten Impuls auf dem 16^4 -Gitter ist beim Übergang zum größeren Volumen eine leichte Tendenz nach unten erkennbar.

signifikant, sollten Volumeneffekte am ehesten hier auftreten, da die langreichweitigen Effekte wie $1/\text{Quarkmasse}$ unterdrückt werden. Im wechselwirkenden Fall sorgt das *confinement* dafür, dass die Wechselwirkung auf ein sehr begrenztes Volumen beschränkt bleibt. Diese Eigenschaft wird uns nützlich sein und Effekte – hervorge-

rufen durch ein endliches Volumen – verkleinern. Abb. (6.5) zeigt, dass die Daten im Rahmen der Fehlergrenzen übereinstimmen.

6.2.2 Operatorverbesserung

Wir wollen entscheiden, welchen der Ableitungstypen aus Abb. (5.3) wir für den

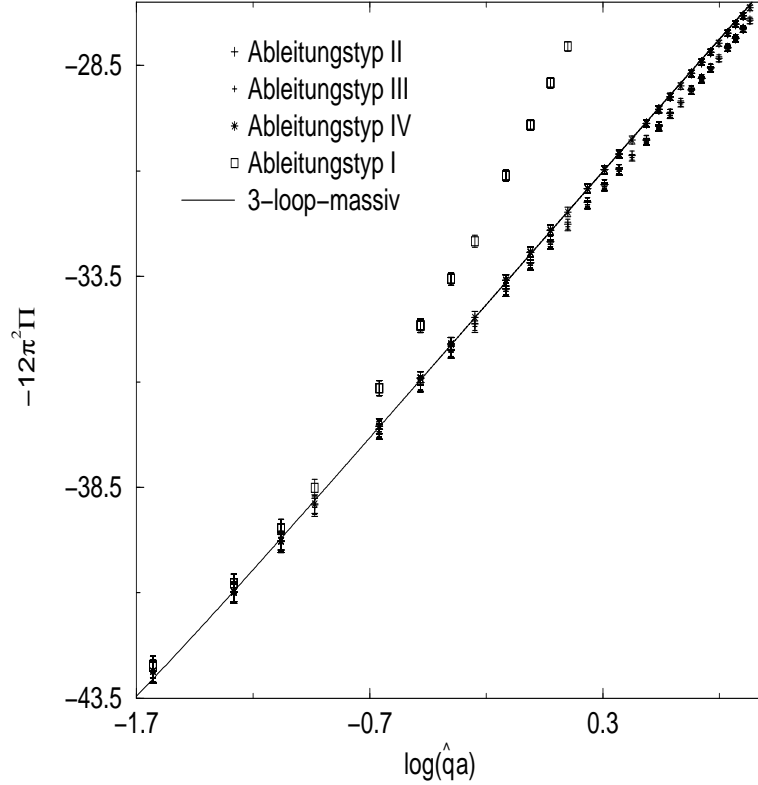


Abbildung 6.6: Die verbesserte Polarisationsfunktion mit verschiedenen Definitionen der Ableitung für $\kappa = 0.1352$, $\beta = 6.4$ mit $c_{cvc} = 1$ und die störungstheoretische Kurve.

Verbesserungsterm bevorzugen. Im wechselwirkenden Fall ist der Verbesserungskoeffizient c_{cvc} unbestimmt. Wir arbeiten durchweg mit dem störungstheoretischen Resultat $c_{cvc} = 1$.

Einen Überblick gibt die Abb. (6.6). Der Ableitungstyp I besitzt allem Anschein nach große höhere Korrekturen in der Gitterkonstanten a . Die Ableitungstypen II und III besitzen eine geringere Symmetrie als der *clover*-Term. Wir arbeiten des-

halb mit dem Ableitungstyp IV. Der Unterschied zwischen Ableitungstyp I und IV ist lediglich von der Ordnung $O(a^3)$. In Abb. (6.7) ist die mit unserer Wahl der

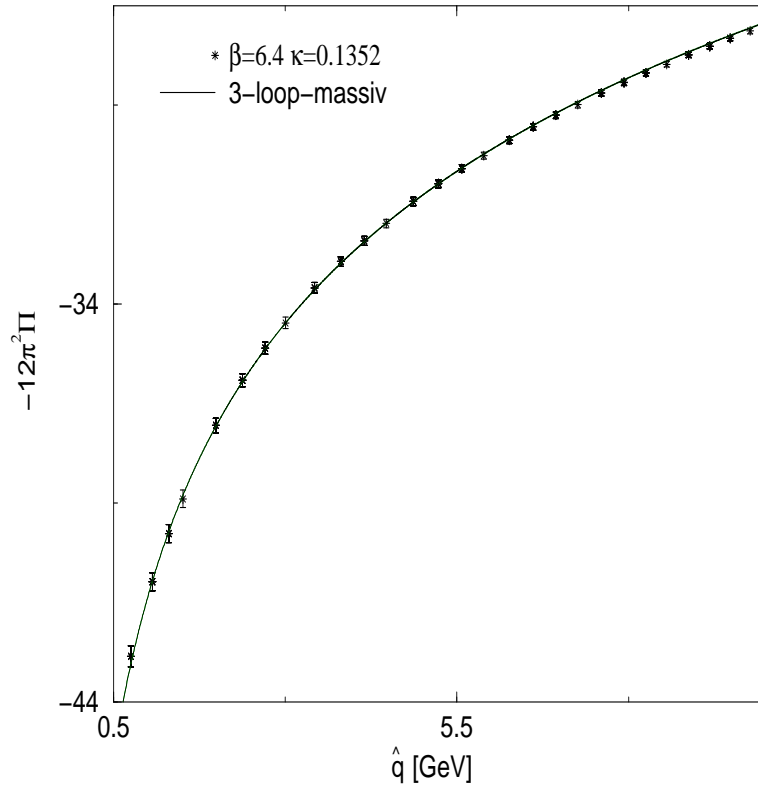


Abbildung 6.7: *3-loop-Störungstheorie und Gitterdaten für $\kappa = 0.1352$ und $\beta = 6.4$. Die dimensionslose nackte Quarkmasse beträgt $ma = 0.0148289$, die $\overline{\text{MS}}$ -renormierte Quarkmasse ist $m^{\overline{\text{MS}}} = 0.074(1)\text{GeV}$. Das ist etwas weniger als die Strange-Quarkmasse.*

Ableitung verbesserte Vakuumpolarisation mit der 3-loop-massiven-Störungstheorie gezeigt. Die Gitterdaten stimmen in einem erstaunlich großen Energiebereich mit dem Resultat der Störungstheorie überein.

6.2.3 Skalenabhängigkeit der Störungstheorie

Die Störungstheorie ist im $\overline{\text{MS}}$ -Schema renormiert, und die Polarisationsfunktion hängt von der Skala μ ab. Die Störungstheorie ist allgemein am zuverlässigsten für Skalen μ in der Größenordnung des Impulsübertrages des betrachteten Prozesses

$\mu^2 \sim q^2$. Man kommt für eine solche Wahl schon mit wenigen Ordnungen in α_s

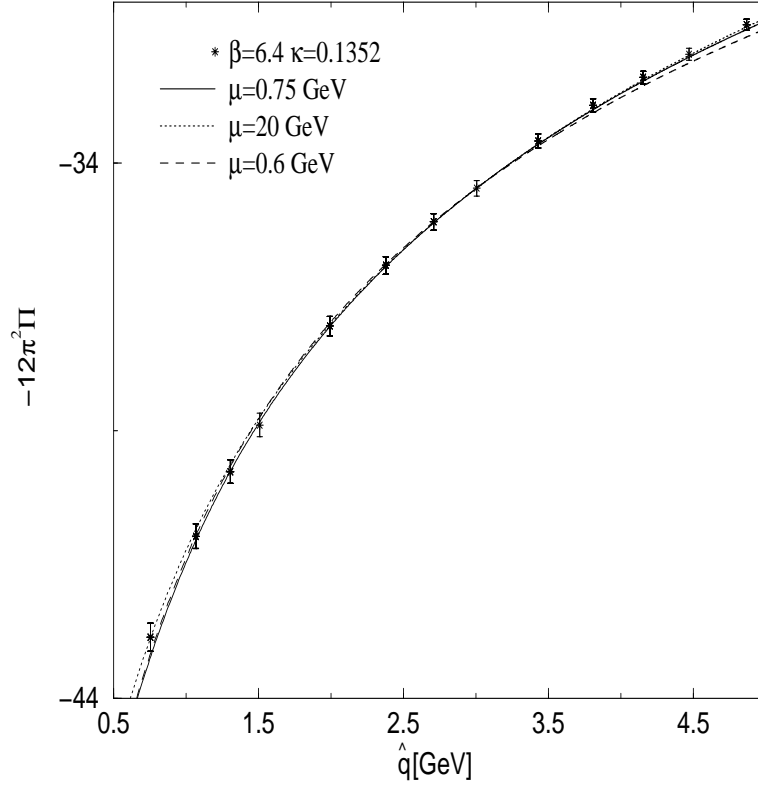


Abbildung 6.8: Die μ -Abhängigkeit der Störungstheorie und Gitterdaten für $\kappa = 0.1352$ und $\beta = 6.4$.

aus, und die μ -Abhängigkeit ist schwach. In Abb. (6.8) ist das störungstheoretische Resultat für μ -Werte vom etwa zweifachen der Skala Λ_{QCD} bis hin zur Größenordnung des oberen Impuls-*cut-off* gezeigt. Wir finden, dass die 3-*loop*-Störungstheorie für $\mu \lesssim 700$ MeV zusammenbricht, da das Resultat unterhalb etwa dieser Schwelle eine starke funktionale Abhängigkeit von der Skala zeigt.

Die Polarisationsfunktion ist logarithmisch divergent in der Gitterkonstanten a im Gitterregularisierungsschema und in der Skala μ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema. Die vom Renormierungsschema abhängige Konstante ist im Gitterschema nur auf *tree-level*-Niveau bekannt und wird im wechselwirkenden (QCD-) Fall willkürlich festgelegt: Wir fordern exakte Übereinstimmung für den Impuls $q = \frac{2\pi}{aL}(2, 2, 2, 2)$, der ein verlässlicher Bezugspunkt sein sollte, da er im Sinne der Störungstheorie groß ($q \approx 3$ GeV) und im Sinne der Gitterrechnung klein ist ($q_\mu = \frac{\pi}{a8}$, $\mu = 1, 2, 3, 4$).

6.2.4 Chirale Extrapolation

Dass eine chirale Extrapolation der Daten die Glaubwürdigkeit erhöht, erkennt man schon im freien Fall. Wir betrachten dazu nochmals die *tree-level*-Polarisationsfunktion für unendliches Volumen (6.6). Die führende $O(a)$ -Korrektur ist proportional zum Faktor am . Dass dieses im freien Fall die einzige $O(a)$ -Korrektur ist, erscheint plausibel, denn der Kontinuumpolarisationstensor ist ein Lorentz-Tensor zweiter Stufe. Ein dimensionsloser Korrekturterm proportional zu aq zerstört dieses Transformationsverhalten schon auf $O(a)$ -Niveau. Die Verbesserung der Wirkung (5.12)

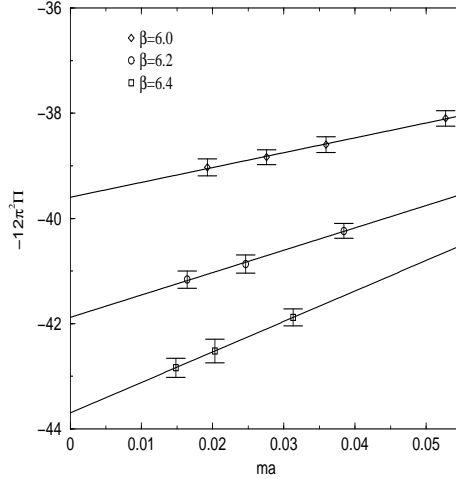


Abbildung 6.9: Chirale Extrapolation für einen Impuls $q = \frac{2\pi}{aL}(1, 0, 0, 0)$ und drei β -Werte mit $c_{cvc} = 1$.

im Kapitel 5, die die Operatorverbesserung erzeugt, besteht aus einem einzigen Operator der alle $O(a)$ -Effekte (am , $a\Lambda$) eliminiert. Wir gehen demnach davon aus, dass mit dem am -Term auch alle anderen Effekte der Ordnung a eliminiert sind. Im freien Fall und für unendliches Volumen ist diese Korrektur proportional zu $\log(aq)$ (vgl. (6.6)). Wir nehmen an, dass ein solcher Term auch mit QCD-Wechselwirkung gegeben ist und machen einen Ansatz für die Polarisationsfunktion

$$-12\pi^2\Pi(\hat{q}^2, m) = maM((a\hat{q})^2, g) + B(\hat{q}^2, m = 0, g) + O(m^2). \quad (6.7)$$

Dieser Ansatz ist eine Verallgemeinerung des Resultates (6.6) für nicht-verschwindende QCD-Wechselwirkung. Die höheren Terme in der Quarkmasse m sind vernachlässigbar wie die Abb. (6.9) für einen Impuls $q = \frac{2\pi}{aL}(1, 0, 0, 0)$ beispielhaft zeigt. Wir passen Glg. (6.7) für jeden Impuls und jedes β an die Daten an und erhalten

die Funktionen $M((a\hat{q})^2, g)$ und $B(\hat{q}^2, m = 0, g)$. Der Glg. (6.6) entnehmen wir, dass im freien Fall für den $O(a)$ -führenden Term von $M(a\hat{q}^2)$ gilt

$$M((a\hat{q})^2, g = 0, c_{cvc} = 0) - M((a\hat{q})^2, g = 0, c_{cvc} = 1) = -9 \log((a\hat{q})^2). \quad (6.8)$$

In Abb. (6.10) erkennt man, dass dieses Verhalten bei endlichem Volumen und bei Mitnahme der vollen $O(a)$ -Korrekturen näherungsweise richtig bleibt, und auch im wechselwirkenden Fall haben wir ein qualitativ ähnliches Verhalten. In Abb. (6.11)

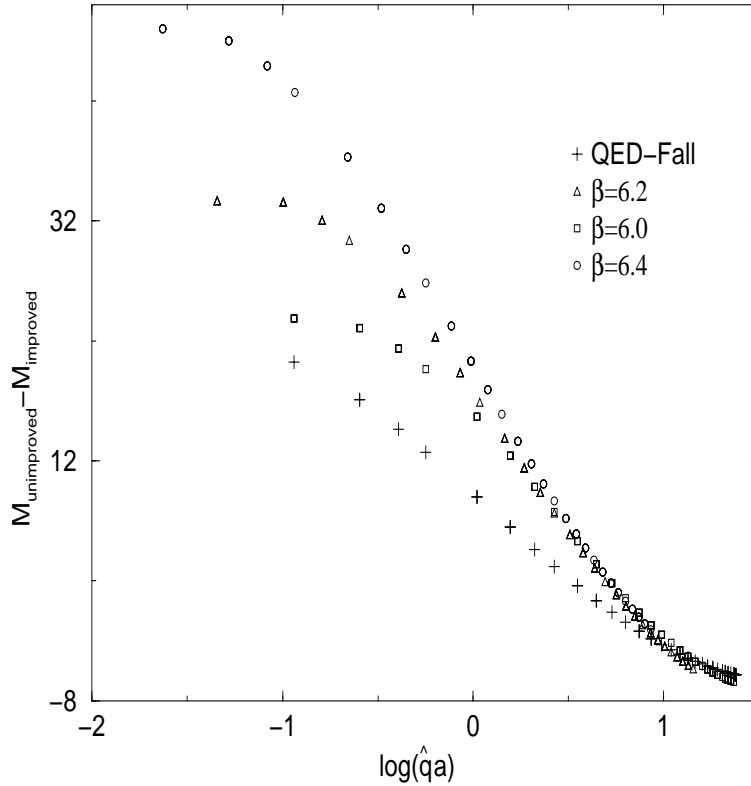


Abbildung 6.10: Die Differenz der Steigungen M mit unverbessertem und verbessertem Vektorstrom ($c_{cvc} = 0$ und $c_{cvc} = 1$).

zeigen wir, dass die Impulsabhängigkeit der Steigung M nach der Operatorverbesserung mit dem Verbesserungskoeffizienten $c_{cvc} = 1$ gering ist. Der Vergleich der Steigung M mit ($c_{cvc} = 1$) und ohne ($c_{cvc} = 0$) Operatorverbesserung in Abb. (6.12) zeigt den Effekt des Verfahrens für das 32^4 -Gitter: Im Energiebereich von ca. 2 - 10 GeV wird die Impulsabhängigkeit auf etwa 10 Prozent der Änderung ohne Verbesse-

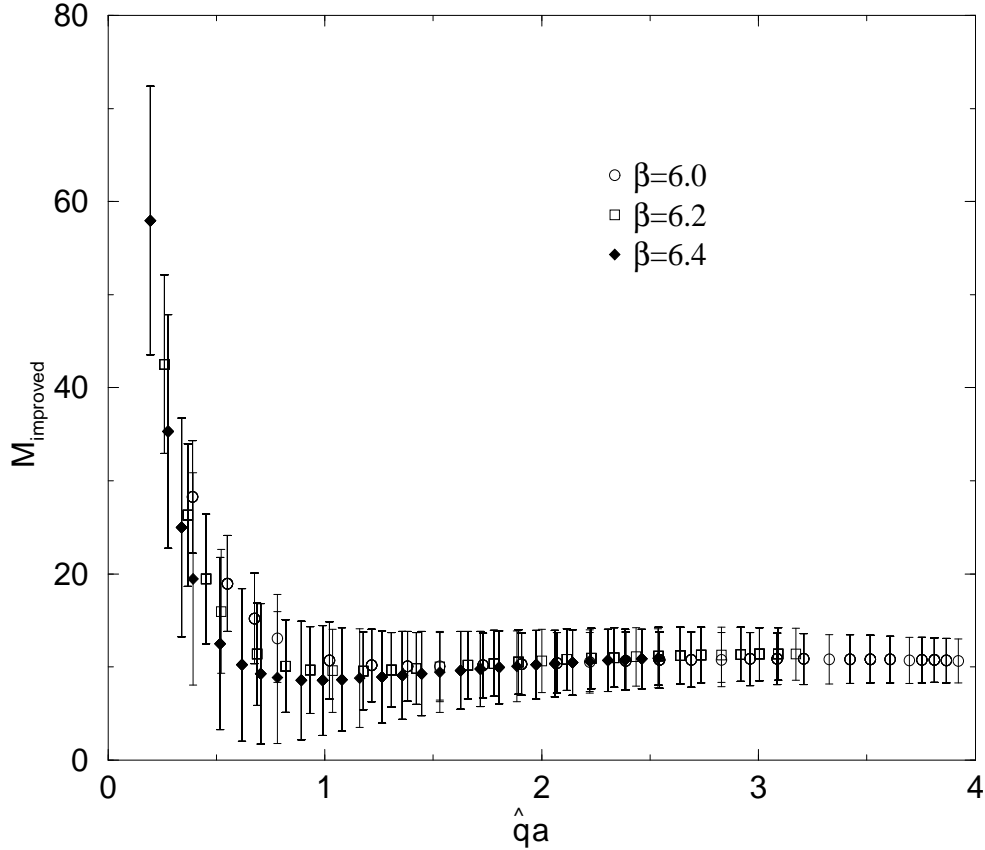


Abbildung 6.11: Die Steigung M nach Verbesserung des erhaltenen Vektorstroms mit $c_{\text{vvc}} = 1$. Die Impulsabhängigkeit ist in einem weiten Energiebereich gering. Terme der Ordnung $O(am)$ leisten dort im wesentlichen einen konstanten Beitrag.

rung reduziert. Insbesondere Anteile proportional zu $\log((\hat{q}a)^2)$ sind mit Operatorverbesserung offenbar verringert. Wir werten dieses Resultat als ein Zeichen für den Erfolg des Verbesserungsverfahrens. Unser Interesse gilt dem Achsenabschnitt B , welcher die chirale Extrapolation der Funktion $-12\pi^2\Pi(\hat{q}^2, m)$ ist. Wir vergleichen die Gitterdaten mit der vollen Operatorproduktentwicklung der Polarisationsfunktion (2.17). Im masselosen Grenzfall verbleibt als nicht-perturbativer Beitrag lediglich das Gluon-Kondensat $F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a$. Die Skala μ der störungstheoretisch bestimmten Wilson-Koeffizienten wird als die inverse Gitterkonstante $\mu = 1/a$ gewählt. Wieder fordern wir willkürlich eine exakte Übereinstimmung der Gitterdaten und der Operatorproduktentwicklung für den Impuls $q = \frac{2\pi}{aL}(2, 2, 2, 2)$. Einen Überblick gibt

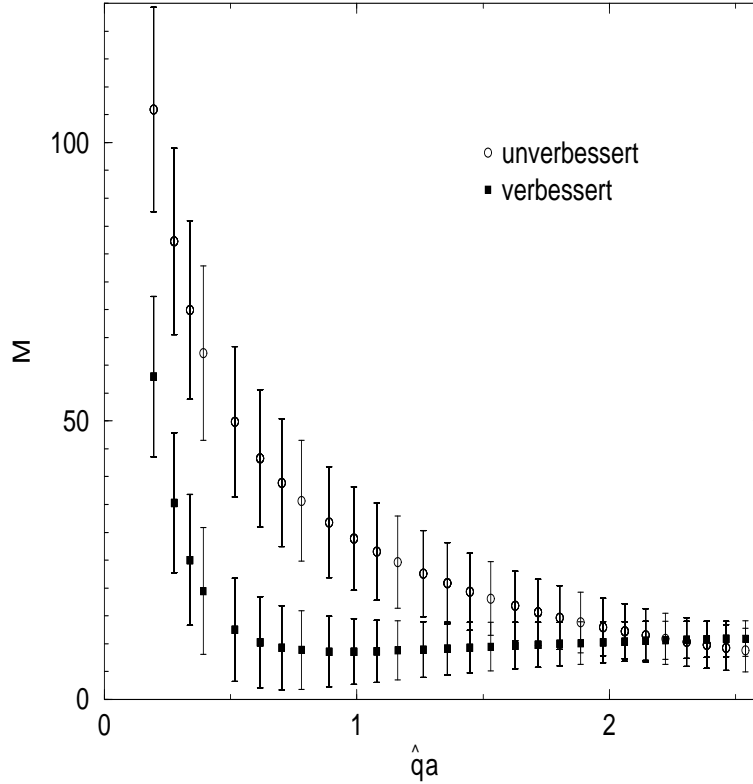


Abbildung 6.12: Die Steigung M mit ($c_{cvc} = 1$) und ohne ($c_{cvc} = 0$) Operatorverbesserung bei $\beta = 6.4$ auf einem 32^4 -Gitter.

die Abb. (6.13). Wir betrachten den Niedrigenergiebereich, so dass die Gitterimpulse selbst des 16^4 -Gitters so klein sind, wie am Beginn dieses Kapitels erläutert ($q_\mu < \frac{\pi}{a^2}$) in Abb. (6.14). Bis auf den kleinsten Impulswert beobachten wir innerhalb der Fehlergrenzen eine Übereinstimmung der Gitterdaten und der OPE der Vakuumpolarisation mit störungstheoretisch bestimmten Wilson-Koeffizienten. Die Abweichung für diesen einen Impulswert könnte durch Volumeneffekte der Gitterdaten hervorgerufen worden sein. Auch könnten in diesem Energiebereich bereits höhere Beiträge der OPE eine Rolle spielen. Es ist jedoch kein signifikanter Unterschied in Form eines $1/q^2$ Terms zu sehen. Eine Dominanz des Niedrigenergiebereiches $1 \text{ GeV} \lesssim q \lesssim 5 \text{ GeV}$ durch solche Beiträge scheint der Abb. (6.14) zufolge ausgeschlossen.

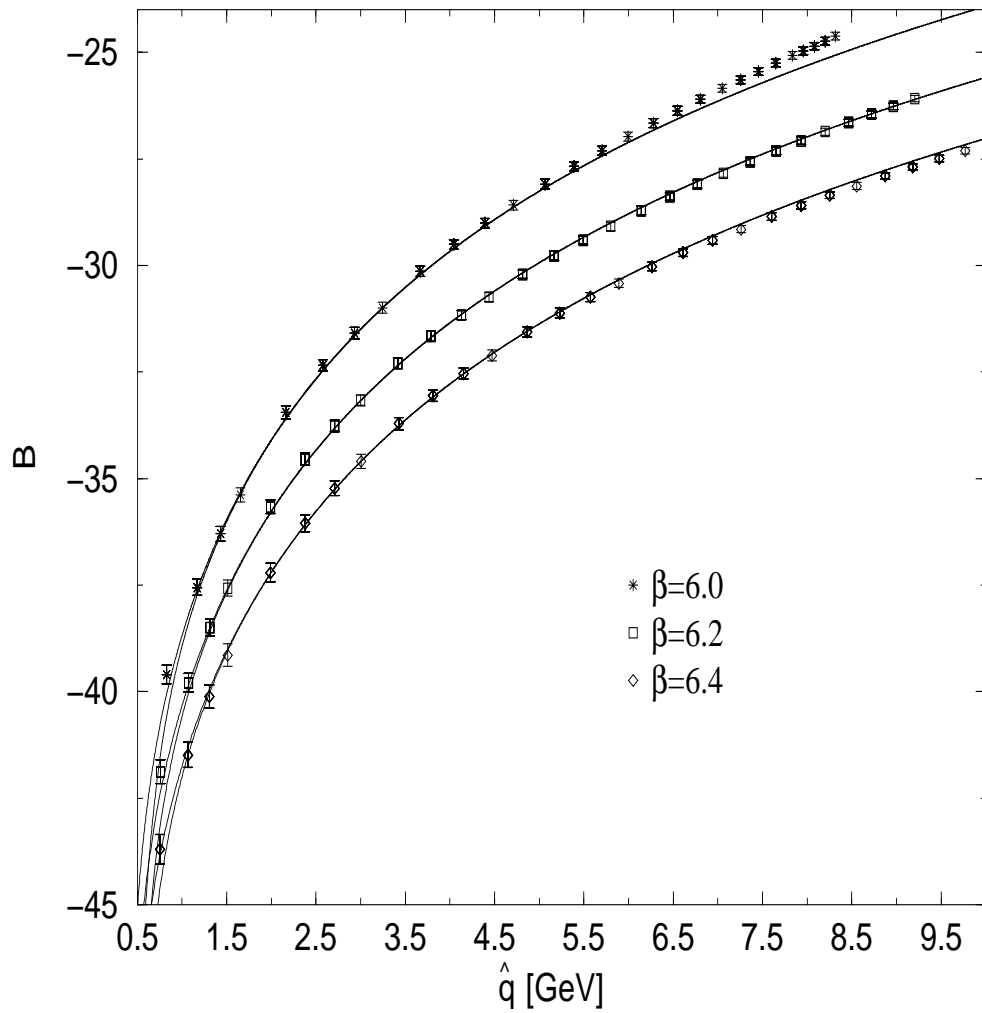


Abbildung 6.13: Die Funktion B für drei β -Werte nach der Verbesserung des erhaltenen Vektorstroms mit $c_{vc} = 1$. Die Störungstheorie ist um den im chiralen Limes führenden nicht-perturbativen Beitrag proportional zu $1/\hat{q}^4$ – den des Gluon-Kondensates – ergänzt.

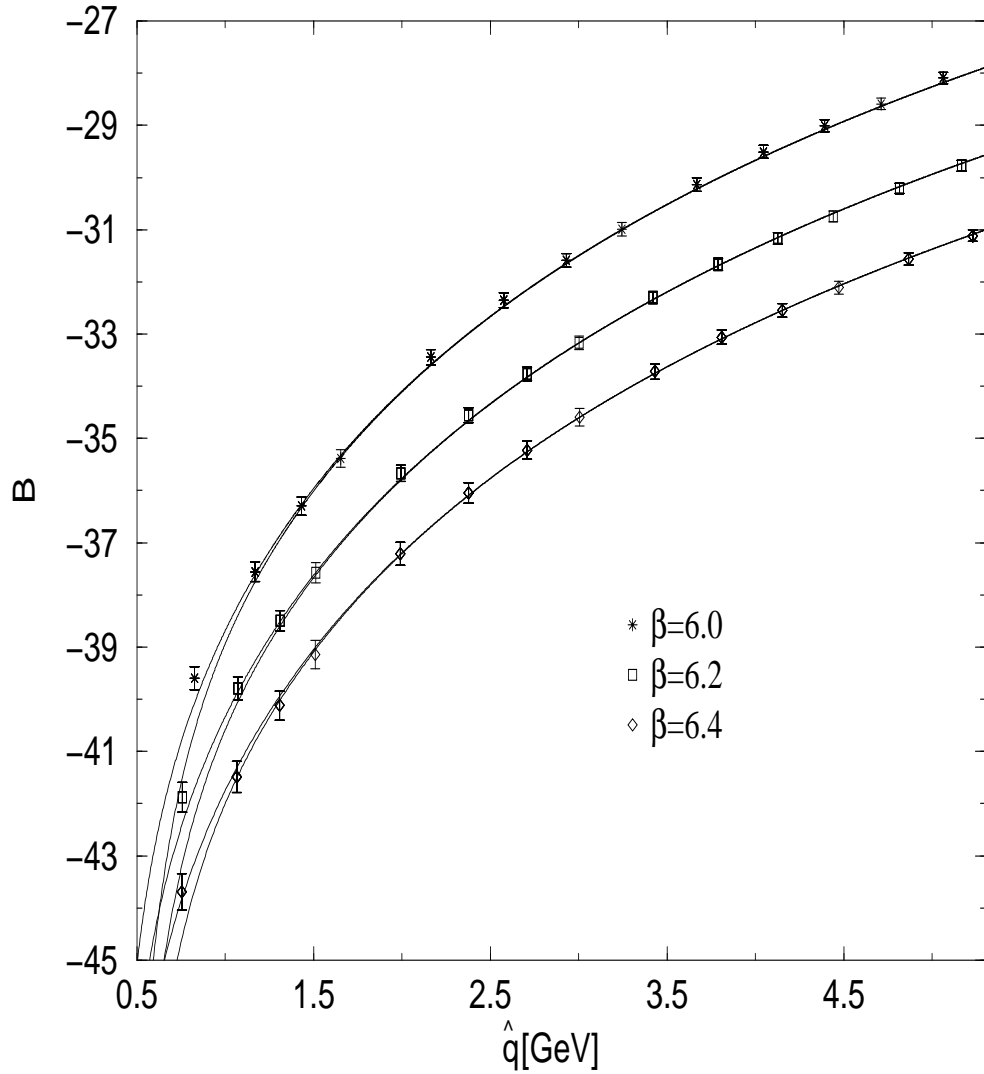


Abbildung 6.14: Der Niedrigenergiebereich der Abb. (6.13). Die chiral extrapolierten Gitterdaten der Polarisationsfunktion für drei β -Werte und die 3-loop-Störungstheorie sowie das Gluon-Kondensat als führenden nicht-perturbativen Beitrag. Letzteres hat eine phänomenologische Unsicherheit [20, 21]. Die beiden Kurven zu jeder Kopplung korrespondieren zur jeweils oberen und unteren Schranke.

6.3 Diskussion der $O(a)$ -Verbesserung

Wir haben auf unseren Operator das Verbesserungsverfahren – bestehend aus der Verbesserung des Operators und der Wirkung – angewandt. Wir wollen in diesem Abschnitt die jeweilige Auswirkung der beiden Verfahren für einen β -Wert beispielhaft untersuchen. Der κ -Wert wird so gewählt, dass die renormierte Quarkmasse in beiden Fällen etwa gleich groß ist, vgl. Abschnitt 3.13. Im Wilson-Fall wählen wir $\kappa = 0.155$, mit Sheikholeslami-Wohlert-Wirkung $\kappa = 0.1342$. Die dimensionslose renormierte Quarkmasse beträgt ohne *clover*-Verbesserung $am^{\overline{\text{MS}}} = 0.0345$ und mit *clover*-Verbesserung $am^{\overline{\text{MS}}} = 0.0335$. In Abb. (6.15) sind die *3-loop*-Störungstheorie und das Gitterresultat für die Fälle

- keine Verbesserung
- *clover*-Verbesserung
- Operatorverbesserung
- *clover*- und Operatorverbesserung

gezeigt. Auch wenn diese beispielhafte Untersuchung keine Aussagen über das Verhalten für verschiedene Gitterkonstanten und im chiralen Limes zulässt, läßt sich erkennen, dass die Operatorverbesserung im *clover*-Fall eine weitaus wichtigere Rolle spielt. Das ist plausibel, denn beide Verbesserungskoeffizienten c_{SW} und c_{cvc} sind von der Größenordnung $O(1)$, womit das Ergebnis nicht-störungstheoretisch von ihnen abhängt. Es ist nicht auszuschließen, dass wir schon mit einem unverbesserten Operator und Wilson-Fermionen ein ähnliches Resultat wie in Abb. (6.14) erzielt hätten. Unsere systematische Vorgehensweise jedoch erhöht das Gewicht der Untersuchung.

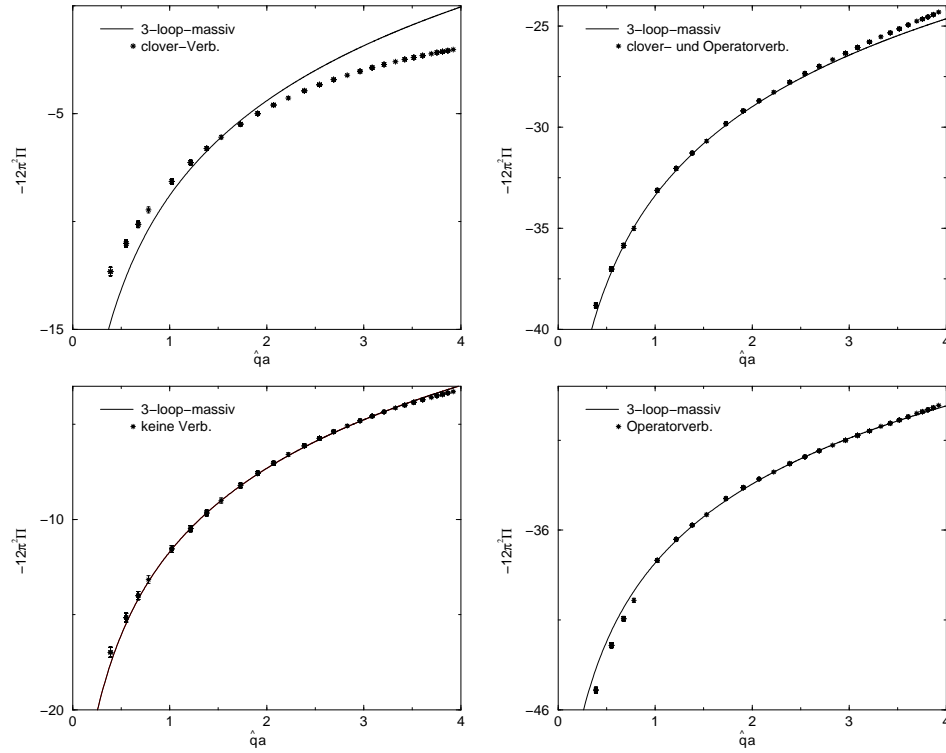


Abbildung 6.15: *Oben links: clover-Verbesserung, Oben rechts: clover- und Operatorverbesserung, Unten links: keine Verbesserung, Unten rechts: Operatorverbesserung. Die Daten werden jeweils mit der 3-loop-massiven-Störungstheorie verglichen. Die dimensionslose renormierte Quarkmasse beträgt ohne clover-Verbesserung $am^{\overline{\text{MS}}} = 0.0345$ bei $\kappa = 0.155$ und mit clover-Verbesserung der Wirkung $am^{\overline{\text{MS}}} = 0.0335$ bei $\kappa = 0.1342$. Alle Daten entstanden bei $\beta = 6.0$.*