

Kapitel 5

$O(a)$ -Verbesserung

Wir widmen uns in diesem Kapitel der $O(a)$ -Verbesserung der Gittereichtheorie. Wie sich zeigen wird, haben diese Beiträge auf unseren Operator einen großen Einfluss. Es gibt jedoch noch andere Fehlerquellen in unserer Gitterrechnung, die wir kurz diskutieren wollen.

5.1 Gitterfehler

Wir schneiden die Impulse nicht nur am oberen Ende ab, wodurch unsere Theorie frei von Divergenzen wird, sondern führen durch ein endliches Volumen auch einen kleinsten möglichen Impuls ein. Die Gittereffekte, hervorgerufen durch ein endliches Volumen, werden jedoch nicht systematisch untersucht. Erfahrungen mit der Rho-Meson-Korrelationsfunktion, die eine unserem Fall sehr ähnliche Struktur hat, zeigen, dass diese Effekte klein sind. Wir überzeugen uns davon stichprobenartig, indem wir die Daten für eine feste Masse und Kopplungskonstante und zwei Volumina betrachten. In Abb. (6.5) zeigt sich keine Änderung des Kurvenverlaufs bei Verdopplung der Kantenlängen des untersuchten Volumens. Wegen der obigen Argumente ¹ wird keine Extrapolation der Ergebnisse nach unendlichem Volumen durchgeführt.

Die Gitterkonstante a als einzige dimensionsbehaftete Größe in Gitterrechnungen, wird durch Vergleiche mit dem Experiment oder phänomenologischen Resultaten bestimmt. Eine mögliche Variante ist es, durch den Vergleich von r_0 mit

¹Eine weiteres Argument ist die Tatsache, dass eine Verdopplung der Kantenlänge die benötigte Rechenzeit versechzehnfacht (auf ca. 32 Monate auf der QH2b mit 256 Knoten für 3 κ -Werte und je 50 Konfigurationen).

experimentellen (oder phänomenologischen) Daten aus dem kopplungsabhängigen Verhältnis r_0/a [32] die Gitterkonstante a zu bestimmen (vgl. Abschnitt 3.12). Die Simulationen in dieser Arbeit sind in der *quenched*-Näherung durchgeführt, welche die Beiträge von Quark-Antiquark-*loops* vernachlässigt. Wir müssen mithin davon ausgehen, dass die von uns verwandte Längenskala etwas von der wahren Längenskala abweicht (vgl. Abschnitt 3.12). Dieses ist ein allgemeines Problem von *quenched*-Gitterrechnungen, bei denen die Resultate mit dem Experiment verglichen werden (experimentell sind die Quark-Antiquark-Beiträge natürlich vorhanden), da die Gitterresultate eine schwer abzuschätzende (und hoffentlich kleine) Korrektur erfahren. In jüngster Zeit sind die verfügbaren Rechenleistungen ausreichend hoch um die volle Theorie zu simulieren. Es hat sich dabei herausgestellt, dass die Korrekturen im Allgemeinen im Bereich von bis zu zehn Prozent liegen. Andererseits ist es für die Vakuumpolarisation möglich, die phänomenologischen Ergebnisse der Kontinuumsstheorie mit $N_f = 0$ (N_f : Zahl der freien Fermionen) anzupassen, so dass wir, abgesehen von der Längenskala, keine Fehler durch die Valenzquarkapproximation machen sollten. Die $O(a)$ -Effekte sind also das Hauptproblem.

5.2 Effektiver Kontinuumslikes

Zur Konstruktion einer $O(a)$ -verbesserten Vakuumpolarisation werden wir erst einige allgemeine Überlegungen anstellen. Betrachten wir dabei zunächst die Wirkung. Sie besitzt Korrekturen in der Gitterkonstanten a . Addiert man die nächsten Terme in der Taylorentwicklung in dieser Gitterkonstanten hinzu, so erreicht man das Kontinuumsergebnis auch für endlich Gitterabstände a beliebig genau, wenn man, Konvergenz vorausgesetzt, hinreichend viele Terme in der Entwicklung mitnimmt. Wir haben also eine effektive Kontinuumsstheorie, deren Geltungsbereich wir auf große Skalen a durch Hinzunahme von Korrekturtermen erweitern können.² Wir versuchen, durch Hinzunahme geeigneter Terme die Konvergenz der Gitterresultate nach dem Kontinuumslikes zu beschleunigen [46, 47, 48, 49, 50, 51]. Wir betrachten die Wirkung

$$S = \int d^4x \{ \mathcal{L}_0(x) + a\mathcal{L}_1(x) + a^2\mathcal{L}_2(x) + \dots \} \quad (5.1)$$

und schränken uns auf den Term \mathcal{L}_1 ein, der die nächste Korrektur zur naiven Wirkung \mathcal{L}_0 darstellt. Zur Konstruktion kommen nur aus Feldvariablen gebildete Operatoren in Betracht, die sowohl die richtige Dimension, als auch die geforderten

²In Analogie zum Standardmodell als effektive Niedrigenergie-Theorie einer umfassenden Theorie.

Symmetrien besitzen. Man kann zeigen, dass die folgenden Operatoren eine Basis des führenden Verbesserungsterms der Wirkung darstellen

$$\mathcal{O}_1 = \bar{\psi} i\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{O}_2 = \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu \psi, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{O}_3 = m \operatorname{tr} \{F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{O}_4 = m \left\{ \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \gamma_\mu \psi \right\}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{O}_5 = m^2 \bar{\psi} \psi, \quad (5.6)$$

mit den kovarianten Ableitungsoperatoren

$$D_\mu \psi(x) = \frac{1}{2a} [U_\mu(x) \psi(x+a\mu) - U_\mu^+(x-a\mu) \psi(x-a\mu)],$$

$$\bar{\psi}(x) \overleftarrow{D}_\mu = \frac{1}{2a} [\bar{\psi}(x+a\mu) U_\mu^+(x) - \bar{\psi}(x-a\mu) U_\mu(x-a\mu)].$$

Allgemeiner betrachten wir Feldkorrelationsfunktionen von n Feldern

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (5.7)$$

mit Feldoperatoren, die eine analoge Entwicklung wie die Wirkung (5.1) besitzen

$$\phi = \phi_0 + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots \quad (5.8)$$

Nehmen wir die Bildung des Erwartungswertes als kontinuierlich an, so sind die führenden Terme dieser Korrelationsfunktionen

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \rangle$$

$$- a \int d^4 y \langle \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \mathcal{L}_1(y) \rangle$$

$$+ a \sum_{k=1}^n \langle \phi_0(x_1) \dots \phi_1(x_k) \dots \phi_0(x_n) \rangle + O(a^2). \quad (5.9)$$

Der erste Korrekturterm in (5.9) verschwindet, wenn wir eine verbesserte Wirkung $\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + a\mathcal{L}_1$ einführen, so dass $\mathcal{L}'_1 = 0$. In einem zweiten Schritt wird der Feldoperator – in unserem Fall der erhaltene Vektorstrom – verbessert. Es verbleiben noch Korrekturen der $O(a)$ durch die diskrete Bildung des Erwartungswertes.

5.3 Verbesserung der Wirkung

Wir wollen jetzt die Wirkung verbessern, indem wir Operatoren (5.2) bis (5.6) zur Wirkung hinzufügen. Neben den Symmetrieforderungen an die Operatoren setzen wir die Bewegungsgleichungen der Felder ein. Wir erhalten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2 + 2\mathcal{O}_5 &= 0, \\ \mathcal{O}_4 + 2\mathcal{O}_5 &= 0.\end{aligned}\tag{5.10}$$

In Korrelationsfunktionen kommt es vor, dass zwei Felder dasselbe Ortsargument besitzen, was die Gültigkeit der Beziehungen (5.10) verletzt. Zur Illustration: die Felder im Propagator erfüllen die Bewegungsgleichung fast überall:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\langle \psi(y)\bar{\psi}(x) \rangle = \delta(x - y).\tag{5.11}$$

Nutzen wir die Beziehungen (5.10) dennoch, bezeichnen wir dieses Verfahren als *on shell improvement* der Wirkung. Wir gehen zu Gitterrepräsentanten der Felder \mathcal{O}_k über, also $\hat{\mathcal{O}}_k$, welche die Glgn. (5.10) nur noch bis auf Terme der $O(a)$ erfüllen. Wir eliminieren die Operatoren \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_4 und erhalten

$$\delta S = a^5 \sum_x \left\{ c_1 \hat{\mathcal{O}}_1(x) + c_3 \hat{\mathcal{O}}_3(x) + c_5 \hat{\mathcal{O}}_5(x) \right\}$$

mit Konstanten c_1 , c_3 und c_5 . Die Operatoren \mathcal{O}_3 und \mathcal{O}_5 sind ohnehin schon Bestandteil von \mathcal{L}_0 . Durch geeignete Renormierung der Ladung und der Kopplungskonstanten

$$\begin{aligned}\tilde{g}_0^2 &= g_0^2(1 + b_g a m_q), \\ \tilde{m}_q &= m_q(1 + b_m a m_q)\end{aligned}$$

reduzieren wir die Verbesserung der Wirkung auf

$$S^{\text{SW}} = S_{\text{Wilson}} + a^5 \sum_x c_{\text{SW}} \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (ig F_{\mu\nu}(x)) \psi(x).\tag{5.12}$$

Sie wird Sheikholeslami-Wohlert-Wirkung genannt. Die Verbesserung der Wirkung besteht demnach aus *einem* Operator mit *einem* Verbesserungskoeffizienten $c_{\text{SW}}(g^2)$. Wir werden diesem Argument später wiederbegegnen, wenn es darum geht die Qualität der $O(a)$ -Verbesserung abzuschätzen. Der Gluon-Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ist noch geeignet zu wählen. Er lautet in Abhängigkeit von der Plaquette-Variablen $U_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{8a^2 ig} \{ U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x) \}\tag{5.13}$$

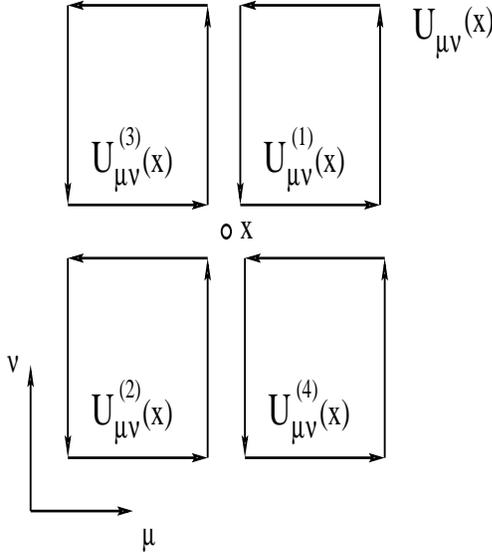


Abbildung 5.1: Die clover-leaf-Definition der Plaquette-Variablen. Sie ist durch einen hohen Grad an Symmetrie ausgezeichnet.

wobei

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(x) &= U_\mu(x)U_\nu(x+a\mu)U_\mu^+(x+a\nu)U_\nu^+(x) \\
&+ U_\mu^+(x-a\mu)U_\nu^+(x-a\mu-a\nu)U_\mu(x-a\mu-a\nu)U_\nu(x-a\nu) \\
&+ U_\nu(x)U_\mu^+(x-a\mu+a\nu)U_\nu^+(x-a\mu)U_\mu(x-a\mu) \\
&+ U_\nu^+(x-a\nu)U_\mu(x-a\nu)U_\nu(x+a\mu-a\nu)U_\mu^+(x). \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Eine grafische Darstellung der symmetrischen Definition der Plaquette-Variablen ist in Abb. (5.1) gegeben. Aufgrund der grafischen Form heißt diese Definition auch *clover-leaf*-Definition der Feldstärke. Die Wirkung (5.12) geht auf eine Arbeit von Sheikholeslami und Wohlert aus dem Jahr 1985 zurück [26]. Da die damaligen Rechenleistungen eine systematische Untersuchung der $O(a)$ -Effekte nicht zuließen, gewann sie erst weit später eine praktische Bedeutung. Der Verbesserungskoeffizient c_{SW} ist inzwischen nichtstörungstheoretisch bestimmt worden. Als Kriterium dient die Erfüllung der (*non-singlet*) PCAC-Relation

$$\partial_\mu A_\mu = 2mP \tag{5.15}$$

zwischen Axialvektorstrom

$$A_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\frac{1}{2}\tau^a\psi(x) \tag{5.16}$$

und pseudoskalarer Dichte

$$P^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\frac{1}{2}\tau^a\psi(x). \quad (5.17)$$

Für die *quenched*-Theorie und für von uns in dieser Arbeit verwandte Werte der Kopplungskonstanten ist die Abhängigkeit von der Kopplungskonstante gut beschrieben durch den Ausdruck [48]

$$c_{\text{sw}}(g^2) = \frac{1 - 0.656g^2 - 0.152g^4 - 0.054g^6}{1 - 0.922g^2} \quad (5.18)$$

im Bereich $0 \leq g \leq 1$. Der Verbesserungsterm in der Wirkung (5.12) ist lokal. Das macht ihn leicht numerisch implementierbar, so dass in Simulationen eine Verlängerung der Inversionsdauer von nur ca. 15 Prozent zu erwarten ist. Die $O(a^2)$ -Verbesserung der Wirkung ist in [26] ebenfalls erarbeitet worden. Die Vielzahl von Verbesserungstermen macht die Methode jedoch unpraktikabel.

5.4 Verbesserung des erhaltenen Vektorstroms

In diesem Abschnitt wollen wir den $O(a)$ -Verbesserungsterm des erhaltenen Vektorstroms auf möglichst kanonische Weise gewinnen. Das allgemeine nicht-störungstheoretische Verfahren ist in [52] erarbeitet worden. Die Ward-Identitäten (4.27) und (4.28) sollen auch mit dem verbesserten Vektorstrom exakt erfüllt sein. Wir haben im letzten Kapitel einen Weg kennengelernt, der es uns gestattet, den erhaltenen Vektorstrom durch Funktionalableitung nach den Eichfeldern der QED zu gewinnen. Aus diesem Grund wählen wir die Linkvariablen wiederum als Elemente aus dem Tensorproduktraum $U(1) \times SU(3)$. Wir verbessern die Wirkung bezüglich der *colour-SU(3)*-Wechselwirkung wie im Abschnitt 5.3 erläutert. Außerdem addieren wir einen analogen Verbesserungsterm mit der QED-Feldstärke. Entwickeln wir diese wie im Abschnitt 4.4 in Potenzen der Eichfelder, können wir den erhaltenen Vektorstrom und seinen Verbesserungsterm durch Funktionalableitung nach den Eichfeldern erhalten. Wir betrachten jetzt die Wirkung

$$S^{U(1) \times SU(3)} = S^{\text{SW}} + a^5 \sum_x c_{cvc} \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} (ie F_{\mu\nu}^{QED}(x)) \psi(x). \quad (5.19)$$

mit der Sheikholeslami-Wohlert-Wirkung (5.12) und dem QED-Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^{QED} = \frac{1}{8a^2 ie} (Q_{\mu\nu}(x) - Q_{\nu\mu}(x)). \quad (5.20)$$

Die Plaquette-Variablen sind wie im Falle der starken Wechselwirkung (5.13) auf symmetrische Weise konstruiert (vgl. Abb. (5.1))

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}(x) &= Q_\mu(x)Q_\nu(x+a\mu)Q_\mu^+(x+a\nu)Q_\nu^+(x) \\
&+ Q_\mu^+(x-a\mu)Q_\nu^+(x-a\mu-a\nu)Q_\mu(x-a\mu-a\nu)Q_\nu(x-a\nu) \\
&+ Q_\nu(x)Q_\mu^+(x-a\mu+a\nu)Q_\nu^+(x-a\mu)Q_\mu(x-a\mu) \\
&+ Q_\nu^+(x-a\nu)Q_\mu(x-a\nu)Q_\nu(x+a\mu-a\nu)Q_\mu^+(x). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Der *clover*-Term ist jedoch nur eine mögliche Variante. Allgemein sind alle Konstruktionen des Feldstärketensors aus den Linkvariablen $Q_\mu(x)$ erlaubt, solange für den Kontinuumstensor $F_{\mu\nu}^{\text{cont}}$ gilt

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{cont}} + \text{O}(a). \tag{5.22}$$

Um die Feynman-Regeln durch Funktionalableitung nach den Feldvariablen A_μ berechnen zu können, entwickeln wir die Linkvariablen in diesen

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}^{(1)}(x) &= Q_\mu(x)Q_\nu(x+a\mu)Q_\mu^+(x+a\nu)Q_\nu^+(x) \\
&= e^{iea[A_\mu(x)+A_\nu(x+a\mu)-A_\mu(x+a\nu)-A_\nu(x)]} \\
&= 1 + iea^2[\partial_\mu^+ A_\nu(x) - \partial_\nu^+ A_\mu(x)] + \text{O}(a^4) \tag{5.23}
\end{aligned}$$

mit der Vorwärtsableitung

$$\partial_\mu^+ f(x) = \{f(x+a\nu) - f(x)\}/a. \tag{5.24}$$

Analog dazu folgt für die verbleibenden Beiträge zur Plaquette-Variablen $Q_{\mu\nu}(x)$

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}^{(2)}(x) &= Q_\mu^+(x-a\mu)Q_\nu^+(x-a\mu-a\nu)Q_\mu(x-a\mu-a\nu)Q_\nu(x-a\nu) \\
&= 1 + iea^2(\partial_\mu^- A_\nu(x-a\nu) - \partial_\nu^- A_\mu(x-a\mu)) + \text{O}(a^4) \tag{5.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}^{(3)}(x) &= Q_\nu(x)Q_\mu^+(x-a\mu+a\nu)Q_\nu^+(x-a\mu)Q_\mu(x-a\mu) \\
&= 1 + iea^2(\partial_\mu^- A_\nu(x) - \partial_\nu^+ A_\mu(x-a\mu)) + \text{O}(a^4) \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}^{(4)}(x) &= Q_\nu^+(x-a\nu)Q_\mu(x-a\nu)Q_\nu(x+a\mu-a\nu)Q_\mu^+(x) \\
&= 1 + iea^2(\partial_\mu^+ A_\nu(x-a\nu) - \partial_\nu^- A_\mu(x)) + \text{O}(a^4) \tag{5.27}
\end{aligned}$$

mit der Rückwärtsableitung

$$\partial_\mu^- f(x) = \{f(x) - f(x-a\mu)\}/a. \tag{5.28}$$

Die grafischen Repräsentationen der einzelnen Beiträge $Q_{\mu\nu}^{(i)}(x)$ sind dabei wiederum der Abb. (5.1) zu entnehmen. Mit einer analogen Entwicklung des zweiten Beitrags

$Q_{\nu\mu}(x)$ in (5.20) gelangen wir zum bezüglich μ und ν symmetrisierten Feldstärketensor

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{QED} = & 1/4\{[\partial_\mu^+ A_\nu(x) - \partial_\nu^+ A_\mu(x)] \\
& +[\partial_\mu^+ A_\nu(x - a\nu) - \partial_\nu^- A_\mu(x)] \\
& +[\partial_\mu^- A_\nu(x - a\nu) - \partial_\nu^- A_\mu(x - a\mu)] \\
& +[\partial_\mu^- A_\nu(x) - \partial_\nu^+ A_\mu(x - a\mu)]\} + O(a^2).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Setzen wir diesen in (5.19) ein, so erhalten wir nach Ausführung der Funktionalableitung den Verbesserungsterm zum erhaltenen Vektorstrom

$$\delta J_\mu(x) = \frac{\delta S_F^{U(1)\times SU(3)}[U,\psi,\bar{\psi}]}{\delta(ieA_\mu(x))} \Big|_{A_\mu=0} = a \frac{c_{cvc}}{2} i \Delta_\nu^{sym,\mu} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x) \tag{5.30}$$

mit der bezüglich μ symmetrisierten Ableitung

$$\begin{aligned}
\Delta_\nu^{sym,\mu} f(x) = \\
\frac{1}{4a}(f(x + a\nu) + f(x + a\nu + a\mu) - f(x - a\nu) - f(x - a\nu + a\mu)).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Dieses Ergebnis ist plausibel, denn der erhaltene Vektorstrom $J_\mu(x)$ ‘‘lebt’’ auf der Mitte zwischen zwei Gitterpunkten x und $x + \mu$. Man wird dieses Verhalten auch für seinen Verbesserungsterm erwarten. Der Verbesserungs-Koeffizient ist im allgemeinen eine Funktion der Kopplungskonstanten. Das störungstheoretische Ergebnis ist $c_{cvc} = 1$. Wir bekommen mit störungstheoretischem Verbesserungskoeffizienten c_{cvc} als Ergebnis den erhaltenen Vektorstrom mit Verbesserung

$$\begin{aligned}
J_\mu(x) = & \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) U_\mu(x) \psi(x + a\mu) \right\} \\
& + i \frac{1}{2} a \Delta_\nu^{sym,\mu} \left\{ \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Es besteht bei dieser Herleitung des Verbesserungsterms eine Abhängigkeit zwischen der Definition des Feldstärketensors (5.20) und der zu erwartenden Ortsableitung (5.31) im Verbesserungsterm. Mit anderen Worten: Es spiegelt sich hier die $O(a^2)$ -Ambiguität bei der Wahl der $O(a)$ -Korrektur zum erhaltenen Vektorstrom wieder. Um ein Gefühl für den Zusammenhang zwischen der Feldstärkedefinition und dem Verbesserungsterm zu erhalten, betrachten wir in (Abb. (5.3)) einige weitere ausgesuchte Fälle.

Typ	Ableitung im Orts- und Impulsraum
I)	
	$\Delta f_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4a}(f_{\mu\nu}(x+a\nu) + f_{\mu\nu}(x+a\nu+a\mu) - f_{\mu\nu}(x-a\nu) - f_{\mu\nu}(x-a\nu+a\mu))$
	$\sum_x e^{iqx+iq_\mu a/2} a \Delta f_{\mu\nu}(x) = (-i) \sum_x e^{iqx} 2 \cos(q_\mu a/2) \cos(q_\nu a/2) \sin(q_\nu a/2) f_{\mu\nu}(x)$
II)	
	$\Delta f_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{a}(f_{\mu\nu}(x) - f_{\mu\nu}(x-a\nu))$
	$\sum_x e^{iqx+iq_\mu a/2} a \Delta f_{\mu\nu}(x) = (-i) \sum_x e^{iqx} e^{iq_\mu a/2} e^{iq_\nu a/2} 2 \sin(q_\nu a/2) f_{\mu\nu}(x)$
III)	
	$\Delta f_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{a}(f_{\mu\nu}(x+a\nu+a\mu) - f_{\mu\nu}(x+a\mu))$
	$\sum_x e^{iqx+iq_\mu a/2} a \Delta f_{\mu\nu}(x) = (-i) \sum_x e^{iqx} e^{-iq_\mu a/2} e^{-iq_\nu a/2} 2 \sin(q_\nu a/2) f_{\mu\nu}(x)$
IV)	
	$\Delta f_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{a}(f_{\mu\nu}(x+a\nu/2+a\mu/2) - f_{\mu\nu}(x-a\nu/2+a\mu/2))$
	$\sum_x e^{iqx+iq_\mu a/2} a \Delta f_{\mu\nu}(x) = (-i) \sum_x e^{iqx} 2 \sin(q_\nu a/2) f_{\mu\nu}(x)$

Tabelle 5.1: Der Zusammenhang zwischen der Plaquetten-Definition und der Ableitung im Verbesserungsterm des erhaltenen Vektorstroms im Orts- und Impulsraum. Alle resultierenden Ableitungen führen auf Verbesserungsterme, die die Ward-Identitäten (4.27) und (4.28) erfüllen, denn $f_{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$ ist antisymmetrisch bei Vertauschung von μ und ν .

5.5 Ward-Identität mit Verbesserungsterm

Wir wollen die Ward-Identitäten (4.27) und (4.28) auch mit verbessertem Vektorstrom erfüllen. Wir setzen in der allgemeinen Operatoridentität Glg. (4.30) den Operator $\mathcal{O} = J_\nu(y)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
& \langle J_\nu(y) \Delta_\mu^{back} J_\mu^+(x) \rangle_{\psi\bar{\psi}} \tag{5.33} \\
& = - \left\langle \left(\frac{J_\nu(y)(\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y))}{\partial\bar{\psi}(x)} \overset{\leftarrow}{\partial} \psi(x) \right) - \left(\bar{\psi}(x) \frac{\partial J_\nu(y)(\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y))}{\partial\psi(x)} \right) \right\rangle_{\psi\bar{\psi}}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite bleibt unberührt, wenn wir in dem Strom $J_\nu(y)$ lokale Terme hinzufügen. Glg. (5.33) gilt also auch mit verbessertem Strom $J_\nu^{(imp)}(y)$. Verschwindet die Rückwärtsableitung des Verbesserungstermes zu $J_\mu(x)$, gilt die Glg. (5.33) auch mit verbesserten Strömen. Um die Ward-Identität auch im vorderen Index ν wie in Glg. (4.35) zu garantieren, müssen wir demzufolge die Ward-Identität für den verbesserten erhaltenen Vektorstrom erfüllen. Im Ortsraum bedeutet dieses, dass die Rückwärtsableitung des Verbesserungsterms verschwinden muß. Alle Ableitungen in Abb. (5.3) erfüllen dieses Kriterium. Römisch Eins ist die grafische Darstellung der Feldstärke mit der *clover*-Definition der Plaquette-Variablen und der daraus

resultierenden Ableitung (5.31), die gefüllten Kreise bedeuten “plus”, die ungefüllten “minus”. Römisch Zwei und Drei sind naive Definition der Feldstärke. Römisch Vier und Römisch Eins unterscheiden sich nur durch Terme $O(a^3)$. Die in Römisch Vier verwandte Ableitung ist aber nur auf einem Gitter halber Gitterweite (Gitterkonstante $a/2$ anstelle von a) definiert. Die resultierenden Ableitungen führen auf Verbesserungsterme, die die Ward-Identitäten (4.27) und (4.28) erfüllen, wie wir mit Hilfe von Tabelle 5.1 erkennen können, denn $f_{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$ ist antisymmetrisch bei Vertauschung von μ und ν .

Das Matrixelement proportional zum Operator $J_\nu^{(2)}(x)$ wird nicht verbessert, denn es ist seinerseits eine $O(a)$ -Korrektur zum Matrixelement der JJ^+ -Korrelationsfunktion.

5.6 Polarisationsensor im Ortsraum

Wir tragen nun alles zusammen und gehen von unserem unverbesserten Resultat für die Vakuumpolarisation Glgn. (4.42) und (4.43) aus und setzen die verbesserte Variante des Vektorstroms Glg. (5.32) ein. Ferner drücken wir unter Verwendung des Wick-Theorems die entstehenden Matrixelemente durch Propagatoren aus und werten nur die *connected*-Beiträge.

Betrachten wir jedoch zuerst die Propagatoren. Unser Rechner-Algorithmus stellt Inversionen der dimensionslosen Matrix K bereit, für die gilt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} K^{-1}(x/a, y/a) = G^{cont}(x, y) \quad (5.34)$$

wobei $G^{cont}(x, y)$ der Kontinuumspropagator und $K^{-1}(x/a, y/a, Ma) = G(n, m)$ der dimensionslose Gitterpropagator ist, durch den wir alle fermionischen Freiheitsgrade ausdrücken. Es werden insgesamt fünf Matrixinversionen für jede Eichfeldkonfiguration vorgenommen. Wir verfügen über die Propagatoren $G(n, 0)$ und $G(n, \nu)$ für alle Richtungen ν und alle Gitterpunkte $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ mit n_i aus $0, \dots, L - 1$. Wir formen die Propagatoren vom Typ $G(\nu, n)$ um

$$G(\nu, n) = \gamma_5 G^+(n, \nu) \gamma_5, \quad (5.35)$$

wobei das Transponieren sich auf Farb- und Spin-Raum bezieht.

Den Vektorstrom schreiben wir als einen unverbesserten Anteil und einen Verbesserungsteil

$$J_\mu^{(imp)}(x) = J_\mu(x) + \delta J_\mu(x). \quad (5.36)$$

Die Auswertung der Gln. (4.42) und (4.43) wollen wir an einem Beispiel skizzieren. Der JJ^+ Anteil an der Korrelationsfunktion $\Pi_{\mu\nu}^{(a)}(q)$ lautet

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(a)}(\hat{q}) = & - \sum_{x,y} a^4 e^{iqx+iq_\mu a/2-iq_\nu a/2} \\ & \times \left\langle \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x+a\mu)(r+\gamma_\mu)U_\mu^+(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)(r-\gamma_\mu)U_\mu(x)\psi(x+a\mu)] \right. \\ & \left. \frac{1}{2} [\bar{\psi}(0+a\nu)(r+\gamma_\nu)U_\nu^+(0)\psi(0) - \bar{\psi}(0)(r-\gamma_\nu)U_\nu(0)\psi(0+a\nu)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Zur Auswertung betrachten wir den ersten der vier Summanden in spitzen Klammern in Glg. (5.37)

$$\frac{1}{4} \langle \bar{\psi}_\alpha^a(x+a\mu) [(r+\gamma_\mu)U_\mu^+(x)]_{\alpha\beta}^{ab} \psi_\beta^b(x) \bar{\psi}(0+a\nu)_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}} [(r+\gamma_\nu)U_\nu^+(0)]_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{a}\tilde{b}} \psi(0)_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}} \rangle. \quad (5.38)$$

Unter Beachtung den Vertauschungsrelationen für Grassmannfelder folgt daraus

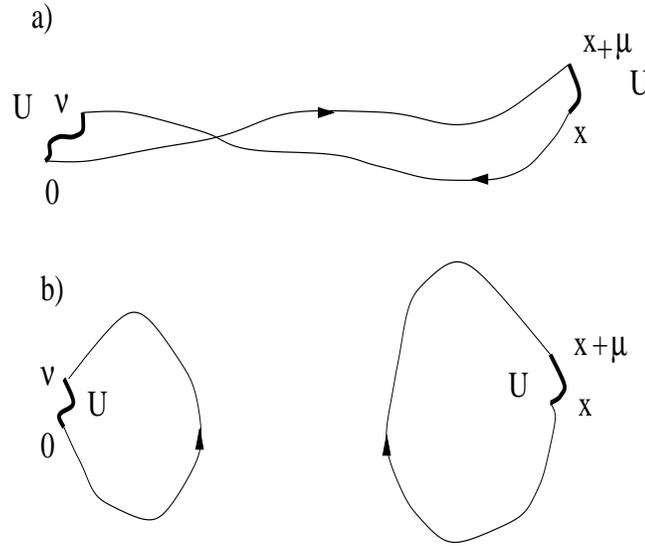


Abbildung 5.2: Die JJ^+ -Korrelationsfunktion hat connected- und disconnected-Anteile. Die Diagramme korrespondieren zu den Ausdrücken in Glg. (5.41). Wir berücksichtigen nur Anteile wie in Diagramm a) was mit der Valenzquarkapproximation konsistent ist.

$$-\frac{1}{4} \langle [(r+\gamma_\mu)U_\mu^+(x)]_{\alpha\beta}^{ab} \psi_\beta^b(x) \bar{\psi}(0+a\nu)_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}} [(r+\gamma_\nu)U_\nu^+(0)]_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{a}\tilde{b}} \psi(0)_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}} \bar{\psi}_\alpha^a(x+a\mu) \rangle. \quad (5.39)$$

Wir verwenden das Wick-Theorem und finden mit dem Propagator ³

$$\langle \psi(x)_\alpha^a \bar{\psi}(y)_\beta^b \rangle_{\psi\bar{\psi}} = G(x,y)_{\alpha\beta}^{ab} \quad (5.40)$$

³Der Erwartungswert ist rein fermionisch.

die Beiträge

$$-\frac{1}{4}\langle \text{Tr}[(r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x)G(x, 0 + a\nu) (r + \gamma_\nu) U_\nu^+(0)G(0, x + a\mu)] - \text{Tr}[(r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x)G(x, x + a\mu)]\text{Tr}[(r + \gamma_\nu) U_\nu^+(0)G(0, 0 + a\nu)] \rangle_{gauge}. \quad (5.41)$$

Die beiden Zeilen sind in der Abb. (5.2) diagrammatisch dargestellt. Die Erwartungswerte sind lediglich über die Eichfelder zu führen, wie in Glg. (4.41) gegeben. Die untere Zeile in Glg. (5.41) ist der sogenannte *disconnected*-Beitrag. Es ist mit der Valenzquarkapproximation konsistent, nur die *connected*-Beiträge zu werten.⁴ Eine analoge Behandlung der übrigen Terme und der Übergang zum dimensionslosen Propagator ergibt für die JJ^+ -Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(a)}(\hat{q}) &= \sum_n \frac{a^{-2}}{4} e^{iqna+iq_\mu a/2-iq_\nu a/2} \\ &\times \langle \text{Tr}[(1 + \gamma_\nu)U_\nu^+(0)\gamma_5 G^+(n + \mu, 0)\gamma_5(1 + \gamma_\mu)U_\mu^+(an)G(n, \nu)] \\ &- \text{Tr}[(1 - \gamma_\nu)U_\nu(0)\gamma_5 G^+(n + \mu, \nu)\gamma_5(1 + \gamma_\mu)U_\mu^+(an)G(n, 0)] \\ &- \text{Tr}[(1 + \gamma_\nu)U_\nu^+(0)\gamma_5 G^+(n, 0)\gamma_5(1 - \gamma_\mu)U_\mu(an)G(n + \mu, \nu)] \\ &+ \text{Tr}[(1 - \gamma_\nu)U_\nu(0)\gamma_5 G^+(n, \nu)\gamma_5(1 - \gamma_\mu)U_\mu(an)G(n + \mu, 0)] \rangle. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Der Strom $J^{(2)}$ liefert

$$\Pi_{\mu\nu}^{(b)}(\hat{q}) = \frac{a^{-2}}{2} \langle \text{Tr}[(1 - \gamma_\nu)U_\nu(0)\gamma_5 G^+(0, \nu)\gamma_5 + (1 + \gamma_\nu)U_\nu^+(0)G(0, \nu)] \rangle \delta_{\mu\nu}. \quad (5.43)$$

Nach partieller Integration liefert die Operatorverbesserung die folgenden Beiträge zur Korrelationsfunktion der Vektorströme. Wir erhalten Terme $J\delta J^+$, $\delta J J^+$ und $\delta J\delta J^+$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{J\delta J^+}(\hat{q}) &= -\sum_{n\lambda} \frac{a^{-2}}{4} e^{iqna+iq_\mu a/2} \\ &c_{cvc} a\hat{q}_\lambda \Phi_{\nu\lambda} \langle \text{Tr}[(1 + \gamma_\mu)U_\mu^+(an)G(n, 0)\sigma_{\nu\lambda}\gamma^5 G^+(n + \mu, 0)\gamma^5] \\ &- \text{Tr}[(1 - \gamma_\mu)U_\mu(an)G(n + \mu, 0)\sigma_{\nu\lambda}\gamma^5 G^+(n, 0)\gamma^5] \rangle \\ \Delta_{\mu\nu}^{\delta J J^+}(\hat{q}) &= \sum_{n\sigma} \frac{a^{-2}}{4} e^{iqna-iq_\nu a/2} \\ &c_{cvc} a\hat{q}_\sigma \Phi_{\mu\sigma} \langle \text{Tr}[(1 + \gamma_\nu)U_\nu^+(0)\gamma^5 G^+(n, 0)\gamma^5 \sigma_{\mu\sigma} G(n, \nu)] \\ &- \text{Tr}[(1 - \gamma_\nu)U_\nu(0)\gamma^5 G^+(n, \nu)\gamma^5 \sigma_{\mu\sigma} G(n, 0)] \rangle \\ \Delta_{\mu\nu}^{\delta J\delta J^+}(\hat{q}) &= -\sum_{n\lambda\sigma} \frac{a^{-2}}{4} e^{iqna} \\ &c_{cvc}^2 a\hat{q}_\sigma a\hat{q}_\lambda \Phi_{\mu\sigma} \Phi_{\nu\lambda} \langle \text{Tr}[\sigma_{\mu\sigma} G(n, 0)\sigma_{\nu\lambda}\gamma^5 G^+(n, 0)\gamma^5] \rangle. \end{aligned} \quad (5.44)$$

⁴Abseits dessen würde eine Berechnung dieser Beiträge die Inversion der Fermionmatrix für alle Gitterpunkte bedeuten, was einen enormen Rechenaufwand bedeutet.

Die von der Definition des Feldstärketensors abhängigen Phasen $\Phi_{\mu\sigma}$ lauten (vgl. Abb. (5.3)):

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad a\hat{q}_\sigma\Phi_{\mu\sigma} &= 2 \sin(aq_\sigma/2) \cos(aq_\sigma/2) \cos(aq_\mu/2) \\ a\hat{q}_\lambda\Phi_{\nu\lambda} &= 2 \sin(aq_\lambda/2) \cos(aq_\lambda/2) \cos(aq_\nu/2) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad a\hat{q}_\sigma\Phi_{\mu\sigma} &= 2 \sin(aq_\sigma/2) e^{(+iaq_\sigma/2+iaq_\mu/2)} \\ a\hat{q}_\lambda\Phi_{\nu\lambda} &= 2 \sin(aq_\lambda/2) e^{(-iaq_\lambda/2-iaq_\nu/2)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad a\hat{q}_\sigma\Phi_{\mu\sigma} &= 2 \sin(aq_\sigma/2) e^{(-iaq_\sigma/2-iaq_\mu/2)} \\ a\hat{q}_\lambda\Phi_{\nu\lambda} &= 2 \sin(aq_\lambda/2) e^{(+iaq_\lambda/2+iaq_\nu/2)} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \text{IV)} \quad a\hat{q}_\sigma\Phi_{\mu\sigma} &= 2 \sin(aq_\sigma/2) \\ a\hat{q}_\lambda\Phi_{\nu\lambda} &= 2 \sin(aq_\lambda/2) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Wir haben unsere Programme überprüft, indem wir die Ward-Identität Glg. (4.27) für eine Einzelkonfiguration getestet haben. Die Ausdrücke (5.44) sind bis auf die Summe über n und den Exponentialfaktor programmiert.

Die Vorgehensweise zur Ableitung des Verbesserungstermes war bis jetzt halbwegs zwingend. Die Diskussion und Entscheidung für eine der Ableitungen aus Tabelle 5.1 werden wir auf den Abschnitt 6 verschieben. Wir finden dort, dass der Operator durch den Verbesserungsterm des erhaltenen Vektorstroms große Korrekturen in höherer Ordnung in a erhält. Schon im freien Fall, da wir keine QCD-Wechselwirkung haben, ist der Verbesserungsterm (5.45) von großen Beiträgen höherer Ordnung begleitet. Wir nutzen unsere Freiheit in der Wahl der Beiträge von $O(a^3)$ und wählen

$$a\hat{q}_\sigma\Phi_{\mu\sigma} = 2 \sin(aq_\sigma/2).$$

5.7 Fouriertransformierte im freien Fall $g = 0$

Bei verschwindender Wechselwirkung $g = 0$ (also $U_\mu(x) = 1$), können Propagatoren und Eichfelder durch ihre Fouriertransformierten ausgedrückt werden. Für den Propagator schreiben wir

$$G(x, y) = \frac{1}{a^4V} \sum_p \tilde{G}(p) \exp ip(x - y) \quad (5.49)$$

mit der Fouriertransformierten des Feynman-Propagators im Impulsraum

$$S_F(p)_{\alpha\beta} = \tilde{G}(p) = \left[\frac{-i \sum_\mu \frac{1}{a} \gamma_\mu \sin p_\mu a + m(p)}{\sum_\mu \frac{1}{a^2} \sin^2 p_\mu a + m^2(p)} \right] \quad (5.50)$$

und der im Wilson-Formalismus impulsabhängigen Masse

$$m(p) = m + \frac{2r}{a} \sum_{\mu} \sin^2(p_{\mu}a/2). \quad (5.51)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(a)}(\hat{q}) &= -\frac{1}{a^4V} \sum_p \text{Tr} \left[V_{\nu}^{(1)}(2p-q) \tilde{G}(p) V_{\mu}^{(1)}(2p-q) \tilde{G}(p-q) \right], \\ \Pi_{\mu\nu}^{(b)}(\hat{q}) &= -\frac{1}{a^4V} \sum_p \text{Tr} \left[V_{\mu\nu}^{(2)}(2p) \tilde{G}(p) \right], \\ \Delta_{\mu\nu}^{J\delta J^+}(\hat{q}) &= -\frac{1}{a^4V} \sum_{p\lambda} \frac{ic_{cvc}}{2} a\hat{q}_{\lambda} \Phi_{\nu\lambda} \text{Tr} \left[V_{\mu}^{(1)}(2p-q) \tilde{G}(p-q) \sigma_{\nu\lambda} \tilde{G}(p) \right], \\ \Delta_{\mu\nu}^{\delta J J^+}(\hat{q}) &= +\frac{1}{a^4V} \sum_{p\sigma} \frac{ic_{cvc}}{2} a\hat{q}_{\sigma} \Phi_{\mu\sigma} \text{Tr} \left[V_{\nu}^{(1)}(2p-q) \tilde{G}(p) \sigma_{\mu\sigma} \tilde{G}(p-q) \right], \\ \Delta_{\mu\nu}^{\delta J \delta J^+}(\hat{q}) &= -\frac{1}{a^4V} \sum_{p\sigma\lambda} \frac{c_{cvc}^2}{4} a\hat{q}_{\sigma} a\hat{q}_{\lambda} \Phi_{\mu\sigma} \Phi_{\nu\lambda} \text{Tr} \left[\sigma_{\mu\sigma} \tilde{G}(p-q) \sigma_{\nu\lambda} \tilde{G}(p) \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Wir haben den Photon-Gittervertex

$$V_{\mu}^{(1)}(p+p') = -i \left[\gamma_{\mu} \cos((p_{\mu} + p'_{\mu})a/2) - i \sin((p_{\mu} + p'_{\mu})a/2) \right] \quad (5.53)$$

und den Photon-Photon-Gittervertex

$$V_{\mu\nu}^{(2)}(p+p') = -a \left[\cos((p_{\mu} + p'_{\mu})a/2) - i\gamma_{\mu} \sin((p_{\mu} + p'_{\mu})a/2) \right] \delta_{\mu\nu} \quad (5.54)$$

eingeführt. Der Verbesserungsterm vom Vertex (5.53) lautet für einen einlaufenden Vierer-Photonenimpuls \hat{q}

$$V_{\mu}^{(1),imp}(\hat{q}) = -\frac{ic_{cvc}}{2} \sum_{\sigma} a\hat{q}_{\sigma} \Phi_{\mu\sigma} \sigma_{\mu\sigma} \quad (5.55)$$

und speziell mit der von uns bevorzugten Ableitung

$$V_{\mu}^{(1),imp}(\hat{q}) = -ic_{cvc} \sum_{\sigma} \sin(q_{\sigma}a/2) \sigma_{\mu\sigma}. \quad (5.56)$$

Die Formeln (5.53) bis (5.56) sind die Vertizes der Gitter-QED für die Kopplungskonstante $e = 1$ und sind in Abb. (5.4) grafisch dargestellt. Wir können die Gleichung (5.52) in einem kleinen Programm auf dem PC berechnen, da uns im freien Fall die Propagatoren (5.50) im Impulsraum bekannt sind. Das Resultat vergleichen wir mit der Rechnung auf dem Parallelrechner mit diagonalen Eichfeldern $U_{\mu}(x) = \delta_{ab}$ und erhalten die zu erwartende Übereinstimmung (im Rahmen der Genauigkeit der APE-Rechner). Dieses ist nach dem Test aus Abschnitt 4.2 der zweite Test unserer Programme.

5.8 Eichinvarianz

Wir führen auf die fermionischen Felder eine Eichtransformation, wie durch Glg. (4.13) gegeben, durch. Wegen der Invarianz des Pfadmaßes (4.16) und der Wirkung (4.15), sollten die Erwartungswerte (5.42), (5.43) und (5.44) davon unberührt bleiben. Wir führen also als dritten Test eine Eichtransformation auf eine Eichfeldkonfiguration durch

$$U'_\mu(x) = G(x)U_\mu(x)G^{-1}(x + a\mu) \quad (5.57)$$

mit Elementen $G(x)$ aus $SU(3)$, also

$$G(x) = \exp\{i\Lambda(x)\} \quad (5.58)$$

und $\Lambda(x) = \Lambda^+(x)$. Dass diese Transformation das gleiche leistet wie die Transformation (4.13), erkennt man leicht, wenn man die Definition der Ströme (4.32) und (5.32) beachtet. Unsere Matrixelemente (5.42), (5.43) und (5.44) bleiben dabei unverändert.

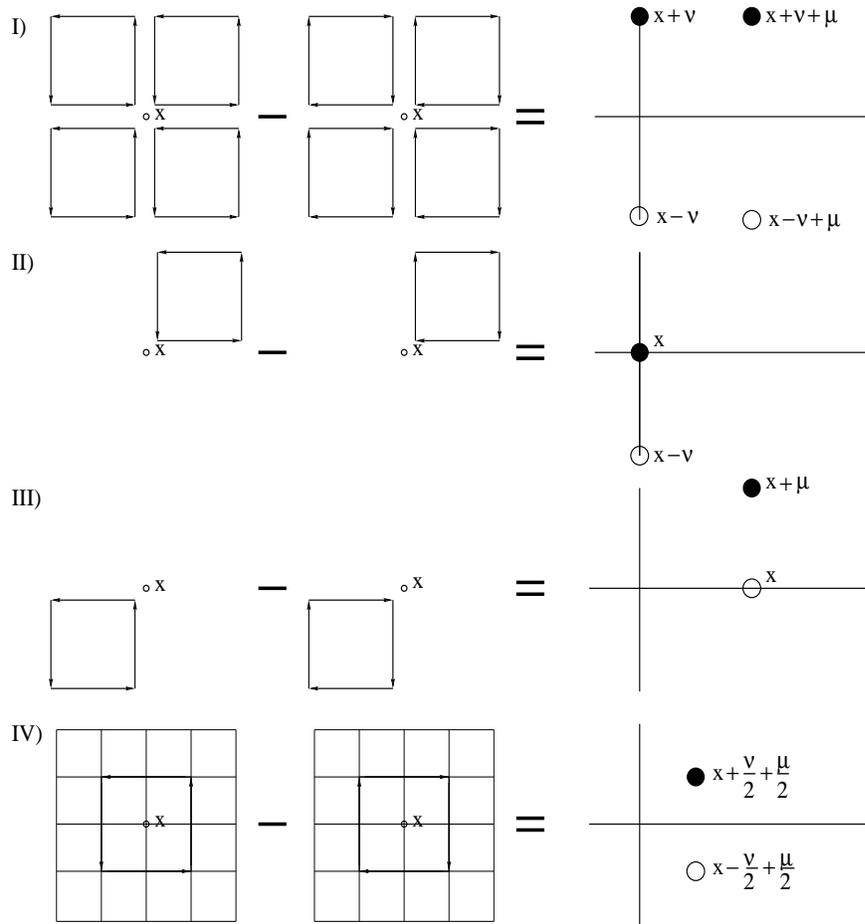


Abbildung 5.3: Definitionen des Feldstärketensors (5.20) aus clover-leaf-Plaquette-Variablen $Q_{\mu\nu}$ und drei alternative Definitionen des Feldstärketensors in der grafischen Schreibweise. Alle Definitionen führen auf Verbesserungsterme, die die Ward-Identitäten (4.27) und (4.28) erfüllen (vgl. Tabelle 5.1). Die linke Spalte zeigt die grafische Darstellung des Feldstärketensors proportional zu $Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}$, während die rechte Spalte die daraus folgende Ableitung im Verbesserungsterm wiedergibt: Die gefüllten Kreise bedeuten “plus” die abzuleitende Funktion, die ungefüllten Kreise bedeuten “minus” die abzuleitende Funktion. Römisch Eins ist die Ableitung aus (5.31).

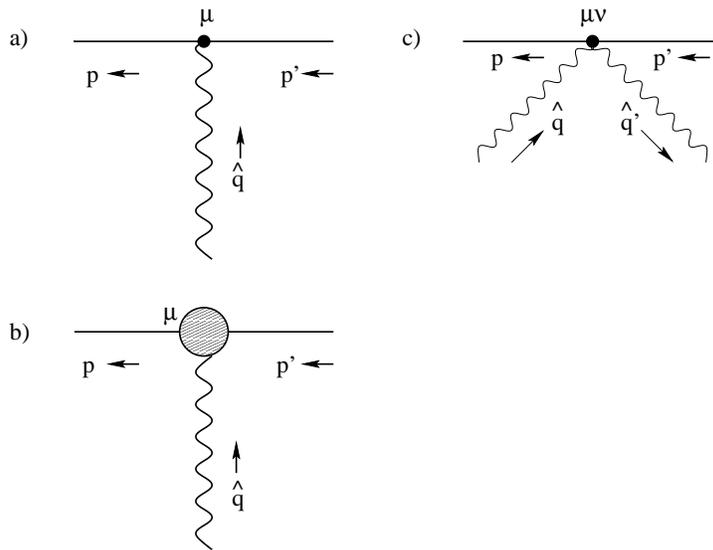


Abbildung 5.4: Feynman-Regeln der Gitter-QED bis zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten e . Diagramm a) hat den richtigen Kontinuumsliches. Diagramm b) ist dessen $O(a)$ -Korrektur und c) ist eine 2-Photon-2-Quark-Wechselwirkung. Die Gitter-QED besitzt n -Photon-2-Quark-Vertizes für jede natürliche Zahl n .

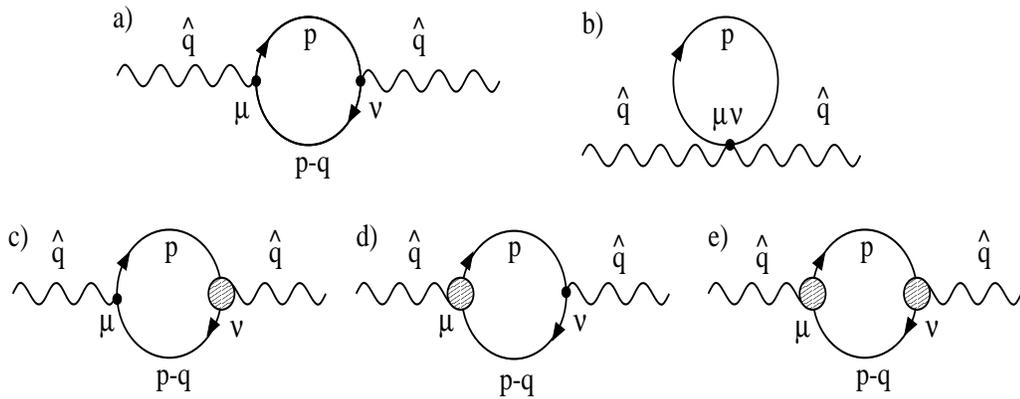


Abbildung 5.5: Die Gittervakuumpolarisation in Feynman-Diagrammen.