

Kapitel 4

Konstruktion der Vakuumpolarisation auf dem Gitter

Wir untersuchen zuerst die Kontinuumsgröße, um ihre für uns wichtigen Symmetrien herauszuarbeiten.

4.1 Vakuumpolarisation im Kontinuum

Beim Übergang von der Kontinuumstheorie zur Gittertheorie gehen einige Symmetrien verloren, wie wir im vorherigen Kapitel schon an der Wilson-Wirkung beispielhaft erläutert haben. Aus der Translationsinvarianz der Wirkung wird eine Invarianz unter Translationen in Abständen der Länge a . Aus der Lorentz-Invarianz – bzw. im Euklidischen – der $O(4)$ -Symmetrie wird die Invarianz unter $\pi/2$ -Drehungen in vier Dimensionen. Diese Transformationen bilden ebenfalls eine Gruppe, genannt $H(4)$. Eine weitere Forderung ist die Eichinvarianz der Wirkung. Diese führt auch auf dem Gitter auf Ward-Identitäten für Vektorstrom und Polarisationsensor. Zur Einstimmung betrachten wir in diesem Abschnitt den Kontinuumsfall. Wir benutzen hier die Minkowski-Metrik und -Koordinaten, wie in der Kontinuumstheorie üblich.

4.1.1 Ward-Takahashi-Identität im Kontinuum

Wie schon erwähnt, ist die Ward-Identität des Vektorstroms und der Vakuumpolarisation das zentrale Konstruktionsmerkmal der Gittervakuumpolarisation. Wir

wollen diese Eigenschaften kurz diskutieren. Ward zeigte 1950, dass die Eichinvarianz der Wirkung (3.2) die Ward-Identität zur Folge hat [44]

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p, p). \quad (4.1)$$

$S_F(p)$ in Glg. (4.1) ist der Feynman-Propagator, und die Funktion $\Gamma^\mu(p, p)$ ist die Vertexfunktion einschließlich aller höheren Korrekturen. Die Glg. (4.1) wurde von Takahashi auf endliche Impulsüberträge verallgemeinert [45]

$$S_F^{-1}(p + q) - S_F^{-1}(p) = q_\mu \Gamma^\mu(p + q, p) \quad (4.2)$$

und heißt Ward-Takahashi-Identität. Für verschwindende Eichwechselwirkung ist die Glg. (4.2) sofort einsehbar, denn dann ist der inverse Feynman-Propagator durch

$$S_F^{-1}(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m) \quad (4.3)$$

gegeben und es gilt $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$.

4.1.2 Vakuumpolarisation

Der Vektorstrom

$$j_\mu(x) = \psi(x) \gamma_\mu \bar{\psi}(x). \quad (4.4)$$

ist der Noetherstrom zur Eichinvarianz der Wirkung und erfüllt

$$\langle \partial_\mu j^\mu(x) \rangle = 0, \quad (4.5)$$

bezüglich des Erwartungswertes (3.7) und im Impulsraum

$$\langle q_\mu j^\mu(q) \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Die Vakuumpolarisation ist

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle \quad (4.7)$$

Im Fourierraum wird die Vakuumpolarisation

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \gamma_\mu i S_F(k) \Gamma_\nu(k, k + q) i S_F(k + q). \quad (4.8)$$

Der Propagator $S_F(q)$ möge alle Korrekturen enthalten und die Vertexfunktion $\Gamma_\nu(k, k+q)$ alle höheren Vertexkorrekturen. Wir multiplizieren mit q^ν und erhalten mit der Ward-Takahashi-Identität (4.2) zunächst

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \gamma_\mu [S_F(k) - S_F(k+q)]. \quad (4.9)$$

Die beiden Integralteile sind divergent. Eine Regularisierung (beispielsweise im $\overline{\text{MS}}$ -Schema) liefert skalenabhängige endliche Beiträge plus sich aufhebende Divergenzen. Nach einer Translation im Impulsintegral erhalten wir die Ward-Identität für die Polarisationsfunktion im Kontinuum

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0. \quad (4.10)$$

Wir entwickeln den Vakuumpolarisationstensor, der das Produkt zweier Lorentzvektoren darstellt, nach der Basis von Lorentztensoren zweiter Stufe im Impulsraum

$$\Pi_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu \Pi^{(1)}(q^2) - g_{\mu\nu} q^2 \Pi^{(2)}(q^2) \quad (4.11)$$

und zeigen mit der Glg. (4.10), dass gilt

$$\Pi_{\mu\nu} = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (4.12)$$

Wir nehmen die Eigenschaft (4.10) sowie die Identität (4.6) als Leitmotiv für den nächsten Abschnitt, in dem wir die Vakuumpolarisation auf dem Gitter konstruieren.

4.2 Ward-Identität des erhaltenen Vektorstroms

In der Gittereichtheorie führt die Übersetzung eines Kontinuumsoperators in Gittervariable in der Regel auf eine Reihe geeigneter Kandidaten, die im Kontinuumslimit gegen die Kontinuumsgröße konvergieren. Um diese Ambiguität einzuschränken, stellen wir an den Operator zusätzliche Forderungen, die schon bei endlicher Gitterkonstante a exakt erfüllt sein sollen. Wir beginnen mit der Konstruktion des erhaltenen Vektorstroms, der ein Baustein bei der Konstruktion der Vakuumpolarisation ist. Außerdem fordern wir, dass die Ward-Identitäten der Vakuumpolarisation aus dem Kontinuum auch auf dem Gitter erfüllt sein sollen und erhalten ein erstes Resultat. In Kapitel 5 verstehen wir den Operator als den ersten Term in der Taylorentwicklung des Kontinuumsoperators in Potenzen der Gitterkonstante a und versuchen die Korrekturen linear in a zu beseitigen, um die Konvergenz in Richtung des Kontinuumergebnisses zu beschleunigen. Die Eichinvarianz der Wirkung ist

die grundlegende Eigenschaft, die wir ausnutzen wollen, um unseren Operator mit möglichst vielen der Eigenschaften auszustatten, die schon die Kontinuumsvariante des Polarisationsensors besitzt. Das Noether-Theorem besagt, dass zu jeder Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße gehört. Diese lässt sich durch Integration aus dem Noetherstrom gewinnen. Der erhaltene Vektorstrom ist der Noetherstrom zur Eichinvarianz der Wirkung, die Erhaltungsgröße die Ladung. Da wir die Eichinvarianz der Wirkung auf dem Gitter gefordert haben, können wir auch einen erhaltenen Vektorstrom auf dem Gitter ableiten. Dieses wollen wir nun tun.

Lokale Eichtransformationen mit Elementen $G(x)$ aus $U(1)$ bzw. $SU(N)$ mit $N > 1$ der Felder $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ gemäß

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= G(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)G^+(x)\end{aligned}\tag{4.13}$$

lassen die Wirkung invariant. Die fermionische Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S}\tag{4.14}$$

mit der fermionischen Wirkung $S[\bar{\psi}, \psi, U]$

$$S = \sum_x a^8 (\bar{\psi}(x)K(x, y)\psi(y))\tag{4.15}$$

und der Fermion-Matrix K bleibt ebenfalls invariant. Wir nutzen dabei aus, dass sich das Pfadmaß unter unitären Transformationen (4.13) nicht ändert

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' .\tag{4.16}$$

Wir gehen über zu infinitesimalen, unitären Transformationen

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)(1 - i\epsilon(x) + O(\epsilon(x)^2)), \\ \psi'(x) &= (1 + i\epsilon(x) + O(\epsilon(x)^2))\psi(x)\end{aligned}\tag{4.17}$$

und entwickeln die Zustandssumme (4.14) im Parameter ϵ . Das Feld $\epsilon(x)$ stammt z. B. für die Eichgruppe $SU(3)$ aus der linearen Hülle der Gell-Mann-Matrizen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}Z &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi}, \psi, U]} \\ &\left\{ 1 - i \sum_x \left[\frac{\overleftarrow{S}\partial}{\partial\bar{\psi}(x)} \epsilon(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\epsilon(x)\frac{\partial S}{\partial\psi(x)} \right] + O(\epsilon^2) \right\} .\end{aligned}\tag{4.18}$$

Aufgrund der Invarianz der Zustandssumme müssen alle Potenzen in ϵ verschwinden. Insbesondere setzen wir den Term linear in ϵ identisch Null, wobei wir $\epsilon(x) = \delta_{xy}$ wählen und erhalten so den zur Eichinvarianz gehörigen Noetherstrom. Er lautet

$$J_\mu(x) = \frac{1}{2}(\bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) U_\mu(x)\psi(x + a\mu)) \quad (4.19)$$

und genügt der Beziehung

$$\left\langle \left[\frac{\overleftarrow{S}\partial}{\partial\psi(x)}\psi(x) - \bar{\psi}(x)\frac{\partial S}{\partial\psi(x)} \right] \right\rangle_{\psi\bar{\psi}} = \langle \Delta_{\mu x}^{back} J_\mu(x) \rangle_{\psi\bar{\psi}} = 0, \quad (4.20)$$

mit der Rückwärtsableitung

$$\Delta_{\mu x}^{back} f(x) = \{f(x) - f(x - a\mu)\}/a. \quad (4.21)$$

Der Erwartungswert wird bezüglich der fermionischen Freiheitsgrade gebildet und ist definiert durch

$$\langle \dots \rangle_{\psi\bar{\psi}} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \dots e^{-S[\bar{\psi}, \psi, U]}. \quad (4.22)$$

Im Fourierraum lautet die Glg. (4.20)

$$0 = (2/a) \sin(q_\mu a/2) \sum_n e^{iqna + iq\mu a/2} \langle J_\mu(x = na) \rangle_{\psi\bar{\psi}}. \quad (4.23)$$

Wir lernen daraus, dass der erhaltene Vektorstrom zwischen zwei Gitterplätzen x und $x + \mu a$ lokalisiert ist und führen die Fouriertransformierte

$$\langle J_\mu(q) \rangle_{\psi\bar{\psi}} = \sum_n e^{iqna + iq\mu a/2} \langle J_\mu(x = na) \rangle_{\psi\bar{\psi}} \quad (4.24)$$

und den Gitterimpuls

$$\hat{q}_\mu = (2/a) \sin(q_\mu a/2) \quad (4.25)$$

ein. Der Impuls (4.25) hat den richtigen Kontinuumsgrenzwert, und seine führende Korrektur ist von der Ordnung $O(a^2)$. Damit kann er uns auch in einem $O(a)$ verbesserten Operator als Gitterimpuls dienen. Wir schreiben die Identität (4.23) mit unseren Abkürzungen etwas eleganter

$$\hat{q}_\mu \langle J_\mu(q) \rangle_{\psi\bar{\psi}} = 0. \quad (4.26)$$

4.3 Ward-Identität für die Polarisationsfunktion

Wir fordern, motiviert durch die Gln. (4.10) und (4.26), die exakten Beziehungen

$$\hat{q}_\mu \Pi_{\mu\nu}(\hat{q}) = 0, \quad (4.27)$$

$$\hat{q}_\nu \Pi_{\mu\nu}(\hat{q}) = 0. \quad (4.28)$$

Die Gleichungen (4.27) und (4.28) gestatten uns einen an die Kontinuumsform (4.12) angelehnten Lösungsansatz

$$\Pi_{\mu\nu}(\hat{q}) = (\hat{q}_\mu \hat{q}_\nu - \hat{q}^2 \delta_{\mu\nu}) \Pi(\hat{q}^2). \quad (4.29)$$

Man beachte, dass wir als Argument der Polarisationsfunktion $\Pi(\hat{q}^2)$ den Gitterimpuls wählen. Da wir die Polarisationsfunktion mit phänomenologischen Ergebnissen vergleichen wollen, ist die Kenntnis der tensoriellen Struktur erforderlich, um diese beispielsweise durch Spurbildung über Dirac-Indizes ν, μ abzuseparieren. Um eine geeignete Beziehung abzuleiten, gehen wir vom Erwartungswert eines Operators $\langle \mathcal{O} \rangle_{\psi\bar{\psi}}$ aus. Der Operator sei eine beliebige Funktion der Feldvariablen $\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y)$. Entwickeln wir den Erwartungswert Glg. (4.22) nach der Variablentransformation Gln. (4.17) analog zu Glg. (4.18), und setzen wir wieder den linearen Term in ϵ zu Null, so erhalten wir die allgemeine Form

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}[\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y)] \Delta_{\mu x}^{\text{back}} J_\mu(x) \rangle_{\psi\bar{\psi}} \\ & + \left\langle \left(\frac{\mathcal{O}[\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y)] \partial}{\partial \psi(x)} \psi(x) \right) - \left(\bar{\psi}(x) \frac{\partial \mathcal{O}[\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y)]}{\partial \psi(x)} \right) \right\rangle_{\psi\bar{\psi}} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Man beachte hierbei folgendes. Aus Glg. (4.30) erhalten wir wiederum das Ergebnis Glg. (4.20) für den Spezialfall, dass man den Operator $\mathcal{O} \equiv 1$ wählt. Weiterhin ist anzumerken, dass der Erwartungswert in Glg. (4.30) nur bzgl. der fermionischen Freiheitsgrade zu bilden ist. Das bedeutet, dass diese Identität für jede Konfiguration unitärer Matrizen $U_\mu(y)$ erfüllt ist. Dieses kann uns später als Test für unser Programm dienen.

Wir wählen nun als Operator $\mathcal{O}[\bar{\psi}(y), \psi(y), U(y)] = J_\mu(y)$, also den erhaltenen Vektorstrom selbst und erhalten

$$\langle J_\mu(y) \Delta_{\nu x}^{\text{back}} J_\nu(x) \rangle_{\psi\bar{\psi}} + \langle J_\nu^{(2)}(y) \rangle_{\psi\bar{\psi}} \Delta_{\nu x}^{\text{back}} \delta_{xy} \delta_{\mu\nu} = 0. \quad (4.31)$$

Der Operator $J_\mu^{(2)}(x)$ hat die Form

$$J_\mu^{(2)}(x) = \frac{a}{2} (\bar{\psi}(x+a\mu) (r+\gamma_\mu) U_\mu^+(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) (r-\gamma_\mu) U_\mu(x) \psi(x+a\mu)). \quad (4.32)$$

Unter Verwendung der Hermitezität der Gamma-Matrizen folgt für die hermitesch konjugierten der Gln. (4.19) und (4.32)

$$\begin{aligned} J_\mu^+(x) &= -J_\mu(x), \\ J_\mu^{(2)+}(x) &= +J_\mu^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Glg. (4.30) liefert unter Benutzung der Gln. (4.33) die Ward-Identität

$$\langle J_\mu(x) \Delta_{\nu y}^{back} J_\nu^+(y) \rangle_{\psi\bar{\psi}} - \langle J_\nu^{(2)}(x) \rangle_{\psi\bar{\psi}} \Delta_{\nu y}^{back} \delta_{xy} \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (4.34)$$

und deren hermitesch konjugierte

$$\langle \Delta_{\mu x}^{back} J_\mu(x) J_\nu^+(y) \rangle_{\psi\bar{\psi}} - \langle J_\mu^{(2)}(y) \rangle_{\psi\bar{\psi}} \Delta_{\mu x}^{back} \delta_{xy} \delta_{\mu\nu} = 0. \quad (4.35)$$

Wir fouriertransformieren die Ward-Identitäten (4.34) und (4.35) und erhalten den zweiteiligen Polarisationsstensor

$$\Pi_{\mu\nu}(\hat{q}) = \Pi_{\mu\nu}^{(a)}(\hat{q}) + \Pi_{\mu\nu}^{(b)}(\hat{q}) \quad (4.36)$$

mit

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)}(\hat{q}) = \frac{1}{L^4} \sum_{x,y} a^4 e^{iqx - iqy + iq\mu a/2 - iq\nu a/2} \langle J_\mu(x) J_\nu^+(y) \rangle \quad (4.37)$$

und

$$\Pi_{\mu\nu}^{(b)}(\hat{q}) = -\frac{1}{L^4} \sum_{x,y} a^4 e^{iqx - iqy} \langle J_\nu^{(2)}(x) \rangle \delta_{\mu\nu} \delta_{xy}. \quad (4.38)$$

Die diagrammatische Darstellung findet sich in Abb. (4.1) Man beachte, dass der

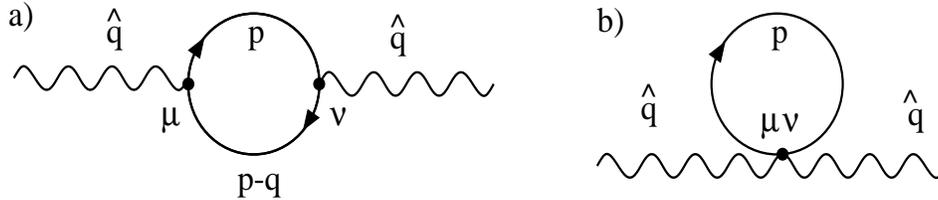


Abbildung 4.1: Die Beiträge zum Polarisationsstensor. Der Beitrag a) ist das Pendant zum Kontinuumsdiagramm. Der Beitrag b) verschwindet im Kontinuumsstimes.

Erwartungswert $\langle J_\nu^{(2)}(x) \rangle$ (und damit auch $\langle J_\mu(x) J_\nu^+(y) \rangle$) für alle μ und ν eine reelle Größe ist. Das bietet uns eine weitere gute Möglichkeit, unser Programm zu testen.

Die Vorfaktoren werden in den Definitionsgleichungen (4.37) und (4.38) so gewählt, dass wir den richtigen Kontinuums Grenzwert

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \int d^4x e^{iqx} \langle J_\mu(x) J_\nu^+(0) \rangle \quad (4.39)$$

in euklidischen Koordinaten erhalten. Der Erwartungswert in den Gln. (4.37) und (4.38) trägt keinen Index mehr, denn er umschließt die Mittelung über alle Felder und ist definiert durch

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu \dots e^{-S_{Wilson}[\bar{\psi}, \psi, U] - S_{gauge}[U]}. \quad (4.40)$$

Die Auswertung der Ausdrücke des Polarisationsensors (4.37) und (4.38) involviert die Fermion-Propagatoren von jedem Punkt x nach jedem Punkt y auf dem Gitter. Durch eine Translation lässt sich die Zahl der Inversionen zur Berechnung der Propagatoren von L^4 auf fünf reduzieren. Wir nutzen dabei die Translationsinvarianz im statistischen Mittel der Eichfelder

$$\langle \dots \rangle_{gauge} = \int \mathcal{D}A_\mu \dots e^{-S_{gauge}[U]} \quad (4.41)$$

mit der Eichfeldwirkung $S_{gauge}[U]$ in Glg. (3.58). Wir führen die Variablensubstitutionen $\tilde{x} = x - y$ und $\tilde{y} = y - y = 0$ durch, wodurch die Ward-Identität bzgl. des zweiten Index ν , Glg. (4.28), nur noch im statistischen Mittel der Eichfeldkonfigurationen erfüllt ist. Wir gelangen also zu unserem Gitterrepräsentanten der Vakuumpolarisation

$$\Pi_{\mu\nu}^{(a)}(\hat{q}) = \sum_x a^4 e^{iqx + iqu_a/2 - iqv_a/2} \langle J_\mu(x) J_\nu^+(0) \rangle \quad (4.42)$$

und

$$\Pi_{\mu\nu}^{(b)}(\hat{q}) = - \sum_x a^4 e^{iqx} \langle J_\nu^{(2)}(x) \rangle \delta_{\mu\nu} \delta_{x0}. \quad (4.43)$$

In Kapitel 5 werden wir den erhaltenen Vektorstrom verbessern, um die $O(a)$ -Korrekturen zu unterdrücken. Wir werden dann eine Form erhalten

$$\begin{aligned} J_\mu(x) = & \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) U_\mu(x) \psi(x + a\mu) \right\} \\ & + \frac{1}{2} c_{cvc} a i \delta_\lambda \left\{ \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\lambda} \psi(x) \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

mit einer noch zu spezifizierenden Ableitung δ_λ und der störungstheoretisch bestimmten Konstanten c_{cvc} . Der Verbesserungsterm in Glg. (4.44) ist lokal in den fermionischen Variablen. Das bedeutet, dass wir diesen Term nicht durch Funktionalableitung nach den *fermionischen* Feldern erhalten können. Wir skizzieren deshalb kurz einen anderen Weg zu den Operatoren (4.42) und (4.43), der auf einer Funktionalableitung nach den *bosonischen* Feldern beruht.

4.4 Vertizes

Wir haben uns bei den bisherigen Überlegungen in diesem Kapitel auf Eichgruppen $SU(N)$ mit $N > 1$ oder $U(1)$ beschränkt. Wir erweitern unsere Überlegungen nun und bedenken, dass Quarks sowohl eine Farbladung als auch eine elektrische Ladung besitzen. Wir betrachten den Prozess, dass ein einlaufendes Photon über eine QED-Kopplung in ein Quark und ein Antiquark zerfällt, welche unter Einfluss der starken Wechselwirkung durch die Raum-Zeit propagieren und schließlich wieder in ein Photon übergehen. Wir wählen unsere Linkvariablen als Elemente aus dem Produktraum $U(1) \times SU(3)$.

Wir untersuchen die Born-Näherung zum QED-Prozess, d. h. die fermionischen Propagatoren verspüren nur den Einfluss der starken Wechselwirkung. Wir leiten deshalb die Feynman-Regeln für fermionische Variablen der Gitter-QED im Ortsraum ab. Da es sich hier um Terme der Größenordnung $O(e^2)$ in der Kopplungskonstanten e handelt, genügt es, die euklidische Gitterwirkung bis zu Termen dieser Ordnung zu entwickeln. Ausgangspunkt ist der wechselwirkende Term der Wirkung der Gitter-QED und -QCD mit Wilson-Fermionen (die U 's stehen für QCD- und Q 's für QED-Eichfelder).

$$\begin{aligned} S_F^{(W)}[U, Q, \psi, \bar{\psi}] &= (m + \frac{4r}{a}) \sum_x a^4 \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &\quad - \frac{1}{2a} \sum_{x,\mu} a^4 [\bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) U_\mu(x) Q_\mu(x) \psi(x + a\mu) \\ &\quad + \bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x) Q_\mu^+(x) \psi(x)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wir entwickeln $Q_\mu(x) = \exp(ieaA_\mu)$ mit den reellen Feldern A_μ in eine Potenzreihe, brechen diese nach den Beiträgen zur Ordnung e^2 ab und erhalten

$$S_F^{(W)} = S_F^{(0)}[U, \psi, \bar{\psi}] + S_F^{(1)}[U, A, \psi, \bar{\psi}] + S_F^{(2)}[U, A, \psi, \bar{\psi}] + O(e^2), \quad (4.46)$$

wobei der QCD-Anteil lautet

$$\begin{aligned} S_F^{(0)}[U, \psi, \bar{\psi}] &= (m + \frac{4r}{a}) \sum_x a^4 \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{2a} \sum_{x,\mu} a^4 [\bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) U_\mu(x) \psi(x + a\mu) \\ &\quad + \bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) U_\mu^+(x) \psi(x)] \end{aligned} \quad (4.47)$$

und die führenden QED-Korrekturen sind

$$\begin{aligned} S_F^{(1)}[U, A, \psi, \bar{\psi}] &= -\frac{ie}{2} \sum_{x,\mu} a^4 [\bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) A_\mu(x) U_\mu(x) \psi(x + a\mu) \\ &\quad - \bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) A_\mu(x) U_\mu^+(x) \psi(x)] = ie \sum_{x,\mu} a^4 J_\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned} \quad (4.48)$$

und

$$\begin{aligned}
S_F^{(2)}[U, A, \psi, \bar{\psi}] &= \frac{e^2}{4} a \sum_{x,\mu} a^4 [\bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) A_\mu^2(x) U_\mu(x) \psi(x + a\mu) \\
&+ \bar{\psi}(x + a\mu) (r + \gamma_\mu) A_\mu^2(x) U_\mu^+(x) \psi(x)] = \frac{e^2}{2} \sum_{x,\mu} a^4 J_\mu^{(2)}(x) A_\mu^2(x). \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Den erhaltenen Vektorstrom berechnen wir demnach durch

$$J_\mu(x) = \left. \frac{\delta S_F^{(1)}[U, A, \psi, \bar{\psi}]}{\delta(i e A_\mu(x))} \right|_{A_\mu=0}. \quad (4.50)$$

Auch den Operator $J_\mu^{(2)}(x)$ bekommen wir durch Funktionalableitung

$$\frac{1}{2!} J_\mu^{(2)}(x) = \left. \frac{\delta S_F^{(2)}[U, \psi, \bar{\psi}]}{\delta((e A_\mu(x))^2)} \right|_{A_\mu=0}. \quad (4.51)$$

Wir leiten also insbesondere den erhaltenen Vektorstrom (4.19) alternativ durch Funktionalableitung der Wirkung nach den *Eichfeldern* her. Eine Verbesserung der Wirkung sollte dementsprechend eine Verbesserung des erhaltenen Vektorstroms mit sich bringen, die wir im Kapitel 5 systematisch erarbeiten.