

# Kapitel 2

## Phänomenologische Grundlagen

In dieser Arbeit untersuchen wir die hadronische Vakuumpolarisation mit Gittermethoden. “Hadronisch” deshalb, weil neben dem von uns betrachteten Zerfallskanal eines Photons in ein Quark-Antiquark-Paar auch noch der Zerfall in ein Elektron-Positron-Paar möglich ist (leptonische Vakuumpolarisation). Die hadronische Vakuumpolarisation ist definiert durch

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle \\ &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2),\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit dem Vektor-Strom

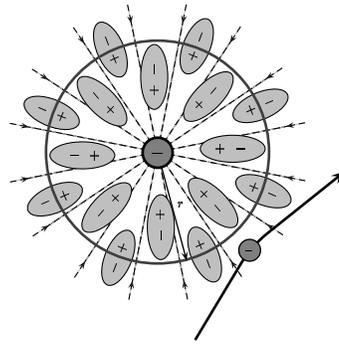
$$J_\mu(x) = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f(x) \gamma_\mu \psi_f(x)\tag{2.2}$$

und den Quark-Feldern  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$ . Die Summe läuft über die Quark-*flavour*-Quantenzahlen mit elektrischer Ladung  $Q_f$ . Die physikalische Bedeutung der leptonischen Vakuumpolarisation ist in Abb. (2.1) illustriert. Die Polarisation des Vakuums durch virtuelle Elektron-Positron-Paare erzeugt eine Abschirmung der elektrischen Ladung in Streuprozessen (die hadronische Vakuumpolarisation ergibt eine Verstärkung der Ladung: Plus und Minus in den Fermion-Antifermion-Blasen sind vertauscht).

Die Quark-Antiquark-Paare der hadronischen Vakuumpolarisation unterliegen der starken Wechselwirkung, welche durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben wird. Das Ziel dieser Arbeit ist die nicht-störungstheoretische Berechnung der QCD-Effekte.

Die Gittertheorie eignet sich zur Untersuchung der QCD aus verschiedenen Gründen. Zum einen ist die Kopplungskonstante  $\alpha_s(\mu)$  der QCD für kleine Renormierungsskalen  $\mu \approx 1\text{GeV}$  von der Größenordnung 1. Die Störungstheorie verliert bei

diesen Energieskalen jedoch ihre Anwendbarkeit. Das verhindert beispielsweise eine perturbative Bestimmung des hadronischen Massenspektrums. Die Gittereichtheorie stellt hier als nicht-perturbatives Verfahren einen gangbaren Weg dar [2, 3]. Die QCD ist eine nicht-abelsche Eichtheorie, was dazu führt, dass die Eichbosonen eine Selbstwechselwirkung haben. Im Ensemble der Feynman-Regeln der Theorie tauchen deshalb Gluon-Gluon-Vertizes auf. Die Selbstwechselwirkung der Eichbosonen ist dafür verantwortlich, dass die Quarks und Gluonen nicht frei beobachtbar sind. Man bezeichnet diese Eigenschaft als *confinement*. Dieses schränkt die dynamischen Prozesse auf ein begrenztes Volumen ein, so dass der Fehler, hervorgerufen durch Rechnungen bei endlichem Volumen, klein sein sollte. Das endliche Volumen und die diskreten Abstände sorgen sowohl für einen Infrarot- als auch einen Ultraviolett-*cutoff*. Divergente Matrixelemente werden damit automatisch reguliert.



**Abbildung 2.1:** Die leptonische Vakuumpolarisation renormiert durch virtuelle Elektron-Positron-Produktion die elektrische Ladung in Streuprozessen.

Wir greifen mit dieser Untersuchung phänomenologische Resultate der jüngsten Zeit auf [4, 5, 6, 7, 8, 9], die für diese Observable im Bereich kleiner Impulsübertragquadrate  $q^2$  sogenannte Renormalonbeiträge vorhersagen. Die Standardmethode zur phänomenologischen Auswertung von Operatorprodukten ist die Operatorproduktentwicklung (OPE). Dabei wird das bilokale Operatorprodukt in (2.1) in eine Reihe lokaler Operatoren entwickelt. Im Ortsraum lautet die Entwicklung für das Produkt der Vektorströme

$$J_\mu(x)J_\nu(0) = \sum_n C_{\mu\nu}^m(x)\mathcal{O}_n. \quad (2.3)$$

Im Grenzfall kleiner Abstände  $x$  tragen nur die ersten Terme der Summe bei. Die lokalen Operatoren müssen dabei dieselben Symmetrien wie das bilokale Opera-

torprodukt besitzen. Die Entwicklungskoeffizienten, genannt Wilson-Koeffizienten  $C_{\mu\nu}^n(x)$ , tragen sowohl die Ortsabhängigkeit als auch die Diracstruktur. Sie können z. B. störungstheoretisch in der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$ , oder auch mit Gittermethoden bestimmt werden [10].

Bestimmt man die Wilson-Koeffizienten störungstheoretisch, können Renormalonbeiträge auftreten. Diese widersprechen dem Konzept der OPE nicht, sondern sind vielmehr ein mit ihr verträglicher Bestandteil. Die Wilson-Koeffizienten der OPE sind nicht-analytisch in der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$ . Die Renormalonbeiträge sind als Konsequenz der nicht-Analytizität der Wilson-Koeffizienten in der Kopplungskonstanten zu verstehen und führen auf divergente Beiträge in Potenzen von  $\Lambda_{\text{QCD}}^2/q^2$ . Wie wir später sehen werden, eignet sich gerade die Vakuumpolarisation sehr gut für die Untersuchung der Renormalonbeiträge, da ihre OPE im masselosen Grenzfall keinen Term proportional zu  $1/q^2$  enthält. Renormalonbeiträge zur Vakuumpolarisation sollen aber schon mit dieser Potenz beginnen, so dass wir keine Überlagerung der Effekte erwarten.

In [11] wird die in 3-loop-Entwicklung gewonnene Polarisationsfunktion mit experimentellen Daten verglichen. Diese erhält man aus dem experimentell zugänglichen Verhältnis der Wirkungsquerschnitte

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (2.4)$$

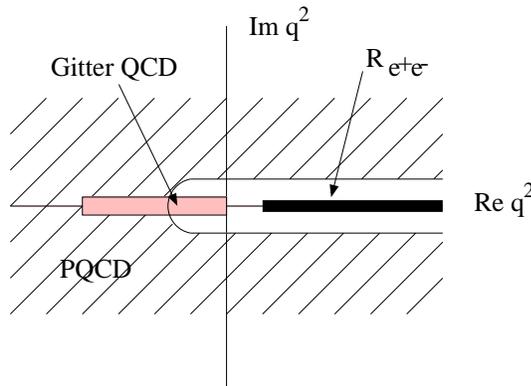
über die *Summenregel* genannte Dispersionsrelation

$$-12\pi^2 q^2 \frac{d\Pi(-q^2)}{dq^2} = q^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s+q^2)^2} ds. \quad (2.5)$$

Es wurde die Dispersionsrelation der logarithmischen Ableitung gewählt, um den logarithmischen Divergenzen der Polarisationsfunktion  $\Pi(-q^2)$  zu entgehen. Die Gleichung (2.5) heißt Adler Funktion [12]. Im Energiebereich bis hinunter zu 1GeV ergab sich Konsistenz zwischen den experimentellen und den phänomenologischen Daten.

Wir wollen hier einen anderen Weg einschlagen, um die Frage nach der Bedeutung der Renormalonbeiträge zu behandeln. Mithilfe von Gitterrechnungen sind wir in der Lage, die starke Wechselwirkung nicht-störungstheoretisch zu behandeln. Leider sind uns auch hier Grenzen gesetzt. Durch eine endliche Gitterkonstante bekommen wir für große Impulsüberträge Diskretisierungseffekte. Wir sollten also innerhalb eines Impulsfensters, das auf der einen Seite durch die Gültigkeit der Störungstheorie ( $q > 1\text{GeV}$ ), auf der anderen Seite durch  $O(a)$ -Effekte des Gitteroperators beschränkt ist, eine Übereinstimmung der Gitterrechnung und der OPE erwarten, vorausgesetzt, die Renormalonbeiträge sind vernachlässigbar klein. Neben den Diskretisierungseffekten gibt es noch weitere Gitterfehlerquellen, auf die wir weiter unten eingehen werden.

Ein direkter Vergleich von experimentellen Ergebnissen und unseren Gitterdaten ist nicht möglich, da wir die Polarisationsfunktion mangels Rechenleistung nur in der *quenched approximation* (für unterdrückte Quark-Antiquark-*loops*) simulieren können. Wir beschränken uns außerdem auf nackte Quarkmassen in der Größenordnung der Strange-Quark-Masse und extrapolieren von dort in den chiralen Limes. Phänomenologisch zeigt sich eine starke Abhängigkeit des Resultats von der Zahl der Fermionen  $N_f$  (*flavours*) [11]. Die experimentellen Daten enthalten alle 6 *flavour*-Freiheitsgrade. Wir müssen uns demnach mit einem “Konsistenzcheck” der Gittertheorie und der OPE zufrieden geben. Für einen Gesamtüberblick über die Analytizität der Polarisationsfunktion und die Lage des Verhältnisses der Wirkungsquerschnitte  $R(s)$  in der komplexen  $q^2$ -Ebene vgl. die Abb. (2.2).



**Abbildung 2.2:** Die Analytizität der Vakuumpolarisation in der komplexen  $q^2$ -Ebene. Störungstheorie ist in der schraffierten Region anwendbar, während die Gitter-QCD im Bereich des schattierten Balkens Information liefert. Experimentell zugänglich ist das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte  $R(s)$  (Das Bild stammt aus [13]).

## 2.1 Renormalonbeiträge zur Vakuumpolarisation

Einleitend geben wir eine kurze Zusammenfassung der phänomenologischen Arbeiten, die das UV-Renormalonproblem behandeln [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Die störungstheoretische Entwicklung einer Observablen  $\mathcal{O}$  der Quantenchromodynamik (QCD) hat im allgemeinen die Form

$$\mathcal{O}_{\text{PERT}} = \sum_n a_n (\alpha_s)^n \quad (2.6)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten  $a_n(M)$  und der laufenden Kopplungskonstanten  $\alpha_s(M)$ , die jeweils von Renormierungsschema und -skala  $M$  abhängen. Wählt man die Skala in der Größenordnung des Energieübertrags  $M^2 \sim Q^2$ , so zeigen die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  für große Impulsüberträge (im UV-Bereich) und große Ordnungen  $n$  in der 1-loop-Approximation die Form [8]

$$(a_n)_{\text{UV}} \sim (-b_0)^{(n-1)}(n-1)!, \quad (2.7)$$

mit dem 1-loop-Koeffizienten  $b_0$  der  $\beta$ -Funktion. Das Koeffizientenwachstum mit  $n!$  ist ein Zeichen dafür, dass die Konvergenz der Reihe (2.6) zusammenbricht. Dieses ist ein allgemeines Problem der Störungstheorie und ist eine Konsequenz der Tatsache, dass die Observable um  $\alpha_s = 0$  herum entwickelt wird. Dort ist ihr Konvergenzradius gleich Null.

Erfüllt eine Reihe ein Koeffizientenwachstum von höchstens  $n!$ , so nennt man sie *asymptotisch konvergent*. Das ist ein abgeschwächtes Konvergenzkriterium. Man kann zeigen, dass man mit den ersten Termen asymptotisch konvergenter Entwicklungen bis hin zur Ordnung  $N \sim 1/\alpha_s$  das wahre Ergebnis approximiert. Bei Hinzunahme noch höherer Ordnungen hingegen, entfernt man sich vom Wert der vollen Summe. Die laufende Kopplungskonstante der Quantenelektrodynamik (QED) beispielsweise ist eine gegen 1 kleine Größe ( $\alpha_{\text{QED}} \sim 1/137$ ), so dass wir die Störungstheorie sicher anwenden können. Anders ist die Situation für die Kopplungskonstante  $\alpha_s(M)$  der QCD. Sie ist nur für große Renormierungsskalen  $M$  klein, so dass wir auch dort die Störungstheorie sicher anwenden können.

Das alternierende Vorzeichen der Koeffizienten (2.7) macht die Reihe (2.6) Borelsummierbar. Borel-summiert man die Beiträge hoher Ordnung (vgl. Anhang C)

$$\sum_{n_{\text{crit}}} (-b_0)^{(n-1)}(n-1)! (\alpha_s(Q^2))^n \quad (2.8)$$

auf, so ergibt sich ein Beitrag der Gestalt [8]

$$\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{Q^2}. \quad (2.9)$$

Es wird das Residuum (C.8) zur Abschätzung der Unsicherheit der (Rest-) Reihe (2.8) und das 1-loop-Resultat  $\alpha_s(Q^2) = 1/(b_0 \log(\Lambda_{\text{QCD}}^2/Q^2))$  benutzt. Allgemein nennt man die Abschätzung der Restreihe

$$\sum_{n_{\text{crit}}} a_n (\alpha_s)^n \quad (2.10)$$

den Renormalonbeitrag. Der UV-Renormalonbeitrag gewinnt demnach für kleine Impulsüberträge  $Q$  eine Bedeutung, wird also IR-relevant. Das ist verblüffend, da die Ausgangsannahmen der Grenzfall großer  $n$  und großer Impulsübertragsquadrate  $Q^2$  waren. Eine Summation von (2.8) mit  $\alpha_s(M^2)$  bei konstanter Skala  $M$  führt hingegen auf die Form [9]

$$\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{Q^2} \frac{Q^4}{M^4}. \quad (2.11)$$

Die Impuls-Abhängigkeit ist hier über die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  eingebracht. Wir erhalten also zwei qualitativ sehr unterschiedliche Ergebnisse je nach Wahl der Renormierungsskala  $M$ <sup>1</sup>. Wir werden im Abschnitt 2.2 die Operatorproduktentwicklung der Vakuumpolarisation kennenlernen. Es zeigt sich, dass sie (im chiralen Limes  $m \rightarrow 0$ ) keine Terme der Ordnung  $1/Q^2$  enthalten wird. Wir werden diesen Sachverhalt ausnutzen und mit einer Gitterrechnung versuchen, die Bedeutung der möglichen  $1/Q^2$  Terme abzuschätzen.

## 2.2 OPE der Vakuumpolarisation

Die Vakuumpolarisation hat als Korrelator zweier Vektorströme eine Operatorproduktentwicklung (OPE) [14]. Diese ist ein nicht-störungstheoretisches Werkzeug zur Berechnung von Operatorprodukten. Man entwickelt dabei ein bilokales Ope-

---

<sup>1</sup>In [6] wird diese Ambiguität als eine Unbestimmtheit der Kopplungskonstanten auf “ $1/Q^2$ -Niveau” interpretiert. Als mögliche Ursache der unterschiedlichen Ergebnisse der Borel-Summation wird genannt, das beispielsweise der 1-*loop*-Kopplungskonstanten

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \quad (2.12)$$

Terme der Ordnung  $1/Q^2$

$$\tilde{\alpha}_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{b_0(\Lambda_{\text{QCD}}^2 - Q^2)} \quad (2.13)$$

oder auch der Ordnung  $1/Q^4$

$$\tilde{\alpha}'_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{b_0(\Lambda_{\text{QCD}}^2 - Q^2)} + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{b_0 Q^2} \quad (2.14)$$

hinzugefügt werden können, um den Pol bei  $\Lambda_{\text{QCD}} = Q$  zugunsten der physikalischen Singularität bei  $Q = 0$  zu verschieben.

operatorprodukt in eine Reihe lokaler Operatoren deren Koeffizienten, die Wilson-Koeffizienten, die Abstandsabhängigkeit tragen. Zur Berechnung der Wilson-Koeffizienten lassen sich sowohl perturbative [15, 16, 17, 18], als auch nicht-perturbative Methoden anwenden [10].

Wir entwickeln das Strom-Strom-Operatorprodukt in Glg. (2.1) im Grenzfall kleiner Abstände  $x$ , in dem nur die führenden Operatoren beitragen. Im Impulsraum lautet die Entwicklung der Polarisationsfunktion aus (2.1)

$$\Pi(q^2) = C^1(q^2)1 + C^{q\bar{q}}(q^2)m\bar{\psi}\psi + C^{F^2}(q^2)(F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a) + \dots \quad (2.15)$$

Die Operatoren sind eichinvariante Lorentz-Skalare. Die führenden Terme sind der 1-Operator (Dimension  $D = 0$ ) und in nächster Ordnung das chirale Kondensat  $m\bar{\psi}\psi$  (der Faktor  $m$  ist nötig, um die chirale Symmetrie sicherzustellen) und das Gluon-Kondensat  $F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a$  mit Dimension  $D = 4$ . Die Wilson-Koeffizienten verhalten sich aus Dimensionsgründen wie

$$\begin{aligned} C^1(q^2) &\sim (q^2)^0 \\ C^{q\bar{q}}(q^2) &\sim (q^2)^{-2} \\ C^{F^2}(q^2) &\sim (q^2)^{-2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Polarisationsfunktion aus (2.1) besitzt demnach einen perturbativen und einen nicht-perturbativen Anteil

$$\Pi(q^2) = \Pi^{\text{PERT}}(q^2) + \Pi^{\text{NP}}(q^2), \quad (2.17)$$

wobei der Wilson-Koeffizient  $C^1(q^2) = \Pi^{\text{PERT}}(q^2)$  genannt wird, während die nicht störungstheoretisch zugänglichen höheren Korrekturen zu  $\Pi(q^2)$  in dem Beitrag  $\Pi^{\text{NP}}(q^2)$  zusammengefasst werden. Wir betrachten fortan den Fall eines einzelnen fermionischen *flavour* mit  $Q_f = 1$ . Störungstheoretisch lautet der Wilson-Koeffizient  $C^1(q^2) = \Pi^{\text{PERT}}(q^2)$  nach einer 3-loop-Rechnung für massive Fermionen [19]

$$-12\pi^2\Pi^{\text{PERT}}(q^2) = c_0 + \frac{4}{3}c_1\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} + \left(\frac{16}{9}c_2^A + 4c_2^{NA}\right)\frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{\pi^2} + \dots \quad (2.18)$$

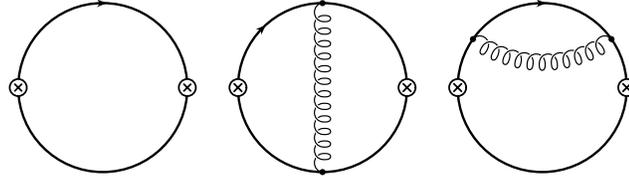
Die Entwicklungskoeffizienten sind divergent und müssen renormiert werden. Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit der Skala  $\mu$  lauten die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{9}{4}\left[\frac{20}{9} - \frac{4}{3}\ln\frac{-q^2}{\mu^2} + 8\frac{\bar{m}^2}{q^2} + \left(\frac{4\bar{m}^2}{q^2}\right)^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{-q^2}{\bar{m}^2}\right) + O\left(\frac{\bar{m}^5}{q^5}\right)\right], \\ c_1 &= -\frac{9}{4}\left[\frac{55}{12} - 4\zeta(3) - \ln\frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{4\bar{m}^2}{q^2}\left(4 - 3\ln\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{4\bar{m}^2}{q^2} \right)^2 \left( \frac{1}{24} + \zeta(3) + \frac{11}{8} \ln \frac{-q^2}{\bar{m}^2} + \frac{3}{4} \ln^2 \frac{-q^2}{\bar{m}^2} - \frac{3}{2} \ln \frac{-q^2}{\bar{m}^2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + O\left(\frac{\bar{m}^5}{q^5}\right) \Big], \\
c_2^A &= -\frac{9}{4} \left[ -\frac{143}{72} - \frac{37}{6} \zeta(3) + 10\zeta(5) + \frac{1}{8} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{4\bar{m}^2}{q^2} \left( \frac{1667}{96} - \frac{5}{12} \zeta(3) - \frac{35}{6} \zeta(5) - \frac{51}{8} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{9}{4} \ln^2 \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + O\left(\frac{\bar{m}^5}{q^5}\right) \right], \\
c_2^{NA} &= -\frac{9}{4} \left[ +\frac{44215}{2592} - \frac{227}{18} \zeta(3) - \frac{5}{3} \zeta(5) - \frac{41}{8} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{11}{24} \ln^2 \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{11}{3} \zeta(3) \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{4\bar{m}^2}{q^2} \left( +\frac{1447}{96} + \frac{4}{3} \zeta(3) - \frac{85}{12} \zeta(5) - \frac{185}{24} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{11}{8} \ln^2 \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + O\left(\frac{\bar{m}^5}{q^5}\right) \right].
\end{aligned}$$

Von der *3-loop*-Rechnung<sup>2</sup> an aufwärts gibt es neben den abelschen (*A*) Beiträgen auch noch nicht-abelsche (*NA*) Korrekturen sowie Quark-Antiquark-*loops*. Letztere werden wir aufgrund der Valenzquarkapproximation vernachlässigen. Für die diagrammatische Darstellung der Korrekturen vgl. Abb. (2.3), (2.4) und (2.5).

Im Falle einer verschwindenden Kopplungskonstanten  $\alpha_s \equiv 0$  und verschwindender Masse reduziert sich der perturbative Anteil auf

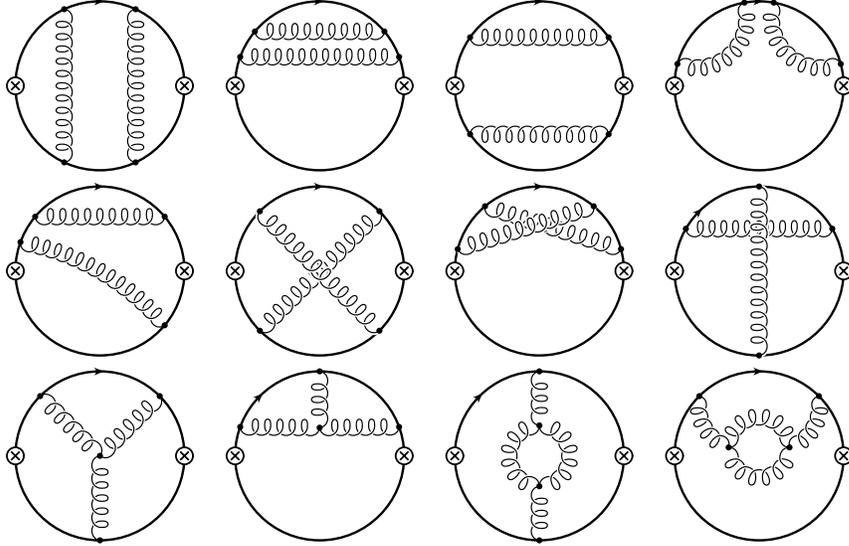


**Abbildung 2.3:** 1- und 2-*loop*-Diagramme die zu  $c_0$  und  $c_1$  beitragen.

$$-12\pi^2 \Pi^{\text{PERT}}(q^2) = 3 \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - \frac{5}{3} \right). \quad (2.20)$$

Die Vakuumpolarisation ist logarithmisch divergent. Insbesondere wird sich die Polarisationsfunktion auf dem Gitter um einen konstanten (skalenabhängigen) Wert von der Polarisationsfunktion im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema unterscheiden, da das Raum-Zeit-Gitter der natürliche Regulator ist.

<sup>2</sup>Die Formulierung “*3-loop*-Rechnung” ist etwas missverständlich: Der erste *loop* ist in unserem Fall eine QED-Korrektur, während die höheren Ordnungen QCD-Wechselwirkungen berücksichtigen. Der Name “(1+2)-*loop*-Rechnung” wäre demnach angemessener.



**Abbildung 2.4:** Gluonische Beiträge zu  $c_2$ . Die ersten beiden Zeilen sind die abelschen – die in der dritten Reihe die nicht-abelschen Beiträge.

Der führende nicht-störungstheoretische Anteil der OPE lautet [11]

$$\begin{aligned}
 -12\pi^2\Pi^{\text{NP}}(q^2) = & -3 \sum_q Q_q^2 4\pi^2 \left\{ w_1 \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle}{q^4} + w_2 \frac{\langle m_q \bar{q}q \rangle}{q^4} \right. \\
 & \left. + w_3 \sum_{q'} \frac{\langle m_{q'} \bar{q}'q' \rangle}{q^4} + \text{höhere Kondensate} \right\}. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Dieser Beitrag ist für allgemeine elektrische Ladungen  $Q_q$  der Quarks formuliert. Die Summe in der ersten Zeile von (2.21) läuft über alle teilnehmenden Quarks  $q$ , die Summe in der zweiten Zeile über die leichten Quarks  $q'$ . Das Gluon-Kondensat wird umbenannt wie in der Literatur üblich  $F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a = \frac{\alpha_s}{\pi} GG$ . Die Koeffizienten  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$  sind störungstheoretisch bestimmt

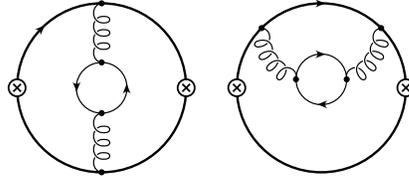
$$w_1 = \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{11}{18} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right) + O(\alpha_s^2), \quad (2.22)$$

$$w_2 = 2 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} + \left( \frac{47}{4} - \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \left( \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^2 + O(\alpha_s^3), \quad (2.23)$$

$$w_3 = \frac{4}{27} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} + \left( \frac{4}{3} \zeta(3) - \frac{88}{243} - \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \left( \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^2 + O(\alpha_s^3).$$

Summen-Regel-Resultate für die Kondensate sind [20, 21]

$$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle \simeq (0.336 \cdots 0.442 \text{ GeV})^4 \quad (2.24)$$



**Abbildung 2.5:** 3-loop-Diagramme, die wir wegen Valenzquarkapproximation der Gitterdaten vernachlässigen.

und

$$\langle m_q \bar{q}q \rangle \simeq \begin{cases} -(0.086 \cdots 0.111 \text{ GeV})^4 & \text{für } q = u, d \\ -(0.192 \cdots 0.245 \text{ GeV})^4 & \text{für } q = s \end{cases} \quad (2.25)$$

wobei  $u, d, s$  Up-, Down- und Strange-Quarks bezeichnet. Ein nicht-störungstheoretischer Zugang zur Vakuumpolarisation gibt damit prinzipiell Informationen zur Berechnung der Kopplungskonstanten  $\alpha_s(\mu)$ , des Gluon-, des chiralen- und höherer Kondensate. Eine Präzisionsbestimmung ist freilich durch statistische und systematische Fehler beschränkt.