

Freie Universität



Berlin

Der dynamische Zustandsindex: Erweiterung des
theoretischen Konzeptes und Anwendung auf
mittelfristige Klimaprognosen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

am Fachbereich Geowissenschaften

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Alexander Pasternack

Berlin, 31. August 2018

1. Gutachter: PD Dr. Peter Névir
Freie Universität Berlin
Fachbereich Geowissenschaften
Institut für Meteorologie
Carl-Heinrich-Becker-Weg 6-10
12165 Berlin, Deutschland

2. Gutachter: Prof. Dr. Henning Rust
Freie Universität Berlin
Fachbereich Geowissenschaften
Institut für Meteorologie
Carl-Heinrich-Becker-Weg 6-10
12165 Berlin, Deutschland

Tag der Disputation: 14.12.2018

Zusammenfassung

Der dynamische Zustandsindex (DSI) identifiziert Gebiete in der Atmosphäre, die von einem stationären, adiabatischen und reibungsfreien Grundzustand abweichen. Im ersten Teil dieser Arbeit wird das Verständnis des Bernoulli-Theorems mit Hilfe des theoretischen Konzeptes des DSI vertieft. Dieses Konzept beruht auf der Nambu-Felddarstellung des atmosphärischen Grundgleichungssystems, die die Erhaltungsgrößen als konstituierende Größen in den Vordergrund stellt. Ein großer Vorteil hierbei ist, dass sich aus ihr die stationäre Lösung des Grundgleichungssystems analytisch gewinnen lässt. So kann erstmals ein Zusammenhang zwischen den stationären Lösungen des Grundgleichungssystems und dem Bernoulli-Theorem hergestellt werden. Hierbei wird eine Hierarchie der verschiedenen Formen des Bernoulli-Theorems auf Basis der zugrundeliegenden thermo- und wirbeldynamischen Freiheitsgrade aufgestellt. Es wird eine ausgezeichnete Erhaltungsgröße entwickelt, mit deren Hilfe eine stationäre Wind- und Temperaturdarstellung für ein kompressibles, wirbelbehaftetes und baroklines Fluid abgeleitet werden kann. Hierbei wird deutlich, dass diese beiden Darstellungen eine geschlossene Form des Bernoulli-Theorems als weitere Verallgemeinerung charakterisieren. In dieser Arbeit werden die diagnostischen Eigenschaften der stationären Temperaturdarstellung erstmals untersucht und mit dem DSI verglichen. Im zweiten Teil wird gezeigt, dass sich die auf einer dekadischen Zeitskala ablaufenden Mechanismen zwischen der Nordatlantischen Oszillation (NAO) und der Atlantischen Multidekadischen Variabilität (AMV) auch durch den DSI über Mittel- und Nordeuropa darstellen lassen. Es stellt sich heraus, dass die Prozesse zwischen AMV, NAO und DSI zeitlich um etwa 15 Jahre verschoben sind, wobei die Variabilität der Tropopausenhöhe als ausgezeichneter Diagnosefaktor identifiziert wird. Im dritten Teil wird das Vorhersagepotential des DSI im, für die dekadische Klimavorhersage verwendeten, Erdsystemmodell MPI-ESM-LR untersucht. Es lässt sich feststellen, dass die zugrundeliegende räumliche Auflösung algebraisch mit dem Betrag des DSI und somit mit den aufgelösten nicht-balancierten Prozessen zusammenhängt. Ferner wird festgestellt, dass das MPI-ESM-LR, gegenüber den ERA-Interim Reanalysedaten, zu viel Niederschlag simuliert, welcher keine Verbindung mit den auslösenden und nicht-balancierten Prozessen aufweist. Darüberhinaus wird das Vorhersagepotential des DSI durch eine statistische Bias-Korrektur signifikant verbessert.

Abstract

The Dynamic State Index (DSI) identifies areas where the atmosphere deviates from its steady, adiabatic and inviscid basic state. In the first part of this thesis, the understanding of the Energy-Vorticity theory as theoretical concept of the DSI is deepened. This concept is based on the representation of atmospheric dynamical equations of motion in Nambu-form, which features the conserved quantities as constitutive factors. A great advantage of the Nambu field representation is the possibility to analytically derive the steady solution of the atmospheric primitive equations. Thus, a link between the steady solution of the primitive equations and Bernoulli's Theorem can be found for the first time. Moreover, a hierarchy of the different forms of Bernoulli's Theorem will be developed, based on the degrees of freedom of the underlying thermo and vortex dynamics. In this context, a constitutive conserved quantity will be presented, which could be used to determine a steady velocity and temperature solution for a compressible, baroclinic fluid with vortices. Here, it becomes clear that these steady solutions are characterizing a novel closed generalization of Bernoulli's Theorem. Moreover, the diagnostic attributes of the steady temperature solution will be analyzed and compared with the DSI for the first time. The second part of this thesis shows that the decadal mechanisms between North-Atlantic Oscillation (NAO) and Atlantic Multidecadal Variability (AMV) also have an impact on the DSI over north and middle Europe. Here, the processes between NAO, AMV and DSI are lagged by 15 years, where the variability of the tropospheric height is identified as a major influencing factor. The third part of this thesis analyzes the potential DSI predictability of the earth system model MPI-ESM-LR, which is used for decadal climate predictions. It turns out, that the spatial model resolution is algebraic related to the DSI magnitude and thus to the resolved non-balanced processes. Moreover, it turns out, that MPI-ESM-LR simulates too much precipitation w.r.t. ERA-Interim, which could not be related to triggering non-balanced processes. Here, a statistical bias correction significantly improves the prediction skill of the DSI.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Motivation	1
I. Das theoretische Konzept des dynamischen Zustandsindex und die Beziehung zum Bernoulli-Theorem	7
2. Vorbemerkung	9
3. Die Nambu-Darstellung des ursprünglichen Gleichungssystems	13
3.1. Grundlagen der diskreten Nambu-Mechanik	13
3.1.1. Übergang von der diskreten Nambu-Mechanik zur Nambu-Felddarstellung	18
3.2. Nambu-Feldtheorie idealer Fluide	20
3.2.1. Diagnostische Zwangsbedingung idealer Fluide	25
3.3. Zusammenfassung	31
4. Ein verallgemeinertes und geschlossenes Bernoulli-Theorem	33
4.1. Herleitung des verallgemeinerten Bernoulli-Theorems	35
4.2. Die stationären Zustände und ein verallgemeinertes Bernoulli-Theorem	38
4.2.1. Bernoulli-Theorem für barokline und wirbelfreie Fluide	40
4.2.2. Klassisches Bernoulli-Theorem	43
4.3. Zusammenfassung	45
5. Der DSI und das stationäre Wind- und Temperaturfeld	49
5.1. Diskussion der stationären Temperaturdarstellung	50
5.2. Diskussion der stationären Winddarstellung	51

5.3.	Diskussion der Definition des dynamischen Zustandsindex	53
5.3.1.	Eigenschaften des DSI	56
5.4.	Das stationäre Temperaturfeld am Beispiel von Sturm Lothar	58
5.4.1.	Synoptische Situation von Sturm Lothar	59
5.4.2.	Verwendete Reanalysedaten	59
5.4.3.	Analyse des stationären Temperaturfeldes	60
5.5.	Verfahren zur Bestimmung des stationären Zustandes	63
5.6.	Zusammenfassung	64
6.	Der zonal gemittelte Grundzustand und die Bestimmung der Lagrange'schen Parameter	67
6.1.	Quantifizierung der Lagrange'schen Parameter	68
6.2.	Diskussion der Lagrange'schen Parameter im zonal gemittelten Grundzustand	71
6.3.	Zusammenfassung	73
II.	Die dekadische AMV-NAO-Kopplung analysiert mit dem DSI	75
7.	Vorbemerkung	77
8.	Die Wechselwirkung zwischen AMV und NAO	79
8.1.	Die Nordatlantische Oszillation (NAO)	82
8.2.	Die Atlantische Multidekadische Variabilität (AMV)	84
8.3.	Mechanismen der NAO-AMV Wechselwirkungen	87
8.4.	Spektralanalyse der NAO-AMV-Kopplung	90
8.4.1.	Beobachtungsdaten der NAO und der AMV	90
8.4.2.	Anpassung an einen auto-regressiven (AR) Prozess	91
8.4.3.	Kreuzkorrelation	93
8.4.4.	Kreuzkohärenz	94
8.4.5.	Zusammenfassung	98

9. Einfluss der AMV-NAO-Wechselwirkung dargestellt mit dem DSI	101
9.1. Verwendete Reanalysedaten	103
9.2. Wechselwirkung zwischen AMV & NAO für ERA 20c	103
9.3. Auswirkung der NAO auf den DSI für ERA 20c	109
9.4. Auswirkung der AMV auf den DSI für ERA 20c	113
9.5. Die Auswirkung der AMV-NAO-Kopplung auf den DSI und die Tropopausenhöhe	116
9.5.1. Kopplung zwischen DSI und Tropopausenhöhe	118
9.5.2. Einfluss der NAO auf die Tropopausenhöhe	120
9.5.3. Einfluss der AMV auf die Tropopausenhöhe	122
9.6. Zusammenfassung	125
III. Bewertung einer modellbasierten, dekadischen DSI-	
Prognose	127
10. Analyse des DSI in einem dekadischen Vorhersagesystem	129
10.1. Verwendete Daten	130
10.1.1. Dekadische Experimente des MPI-ESM-LR	130
10.1.2. ERA-Interim-Reanalysedaten	132
10.2. Spektrale Eigenschaften des DSI	132
10.3. Verifikation der MiKlip-Läufe	138
10.4. Zusammenfassung	148
11. Zusammenfassung	153
A. Alternative Herleitungen des verallgemeinerten Bernoulli-Theorems	161
A.1. Die stationäre Wind- und Temperaturdarstellung	161
A.2. Das Bernoulli-Theorem für barokline und wirbelfreie Fluide	163
A.3. Das klassische Bernoulli-Theorem	165
A.3.1. Analyse des Energie-Massen-Wirbel-Gleichgewichtes	167

B. Herleitung der stationären Zustände aus dem primitiven Gleichungssystem	171
B.1. Stationäre Winddarstellung	171
B.2. Stationäre Temperaturdarstellung	172
B.3. Dynamischer Zustandsindex	173
C. Herleitungen des Grundzustandes auf Zustandsflächen	179
C.1. Charakterisierung der stationären Winddarstellung	179
C.1.1. Charakterisierung des DSI	181
Literaturverzeichnis	183
Veröffentlichungen	193
Symbolverzeichnis	195
Abkürzungsverzeichnis	197
Danksagung	205
Selbstständigkeitserklärung	207

1. Einleitung und Motivation

Die Atmosphäre wird maßgeblich durch ein Zusammenspiel von Thermo- und Hydrodynamik geprägt und im höchsten Maße durch nichtlineare Prozesse beeinflusst. Dies macht das System Atmosphäre zu einem der komplexesten physikalischen Systeme überhaupt. In der klassischen Meteorologie wird dieses System durch das meteorologische Grundgleichungssystem, bestehend aus Impulsbilanz- und Massenerhaltung sowie ersten Hauptsatz der Thermodynamik, beschrieben. Für ein besseres Verständnis der atmosphärischen Dynamik, ist es sinnvoll das hydro-thermodynamische System in einen Grundzustand und einer Abweichung davon aufzuteilen. Neben der Möglichkeit den Grundzustand durch den Mittelwert darzustellen, kann der Grundzustand auch durch eine bestimmte Lösung des Gleichungssystems ausgedrückt werden. Der Vorteil bei der zweiten Variante ist, dass der Grundzustand als Lösung des Gleichungssystems im Prinzip beobachtet werden kann und keine Vermischung von nicht-linearen Prozessen stattfindet. Der Nachteil ist, dass der Grundzustand nicht eindeutig bestimmt ist und festgelegt werden muss.

Ein zentrales Element dieser Arbeit ist das theoretische Konzept des, von Néviri (2004) entwickelten, dynamische Zustandsindex (DSI). Dieses Konzept beruht auf einer stationären, adiabatischen, reibungsfreien und trockenen Lösung des Grundgleichungssystems als Grundzustand. Dieser Grundzustand kann als eine Verallgemeinerung des geostrophischen Zustandes gesehen werden und ist eine nicht-lineare Lösung der meteorologischen Grundgleichungen, wobei die Abweichungen von diesem Zustand durch den DSI beschrieben werden. Diesbezüglich zeigten praktische Anwendungen früherer Studien, dass der DSI, aufgrund seiner Eigenschaft nicht-balancierte Prozesse zu visualisieren, im engen Zusammenhang zu Nie-

derschlagsprozessen, Zyklonen beziehungsweise Stürmen steht (Weber und Névir, 2007; Claußnitzer et al., 2008b; Claußnitzer und Névir, 2009).

Das theoretische Konzept des DSI beruht auf der, von Névir (1998) eingeführten, Nambu-Felddarstellung des meteorologischen Grundgleichungssystems in der Euler'schen, kompressiblen Form. Die Besonderheit hierbei ist, dass die Dynamik nicht mehr nur über die Energie, sondern auch in gleichberechtigter Weise durch weitere Erhaltungsgrößen, den sogenannten Casimir-Funktionalen, beschrieben wird. In der kompressiblen, Euler'schen Form der Hydrodynamik gehören die Masse, die Entropie sowie die Ertel'sche potentielle Enstrophie zu den Casimir-Funktionalen. Diese Casimir-Funktionalen schränken als Zwangsbedingung die Bewegung im Zustandsraum ein und charakterisieren verschiedene Niveaus der Komplexität des hydrodynamischen Systems im Sinne der enthaltenen thermo- und wirbeldynamischen Freiheitsgrade. Ein großer Vorteil der Nambu-Felddarstellung ist, dass sich aus ihr die stationäre Lösung des Grundgleichungssystems analytisch gewinnen lässt. Ausgangspunkt für die stationäre Lösung ist die, innerhalb eines sogenannten Energie-Casimir-Funktionalen, über global konstante Lagrange'sche Parameter, stattfindende, Kopplung zwischen Energie und Casimir-Funktional. Für ein inkompressibles System ohne wirbel- und thermodynamischen Freiheitsgrad besteht die Lösung aus der Bernoulli-Gleichung, die die Grundlage für das klassische Bernoulli-Theorem bildet. Dementsprechend ergeben sich für Systeme mit zusätzlichen Freiheitsgraden komplexere stationäre Lösungen, die aber alle, wie das klassische Bernoulli-Theorem, eine individuelle Erhaltung der Bernoulli-Funktion beinhalten.

Ein Ziel dieser Arbeit besteht darin, erstmals die stationäre Lösung des Grundgleichungssystems theoretisch einzuordnen und einen konkreten Zusammenhang zum Bernoulli-Theorem herzustellen. Ferner soll eine konkrete Form des allgemeinen Casimir-Funktionalen gefunden werden, welches aufgrund seiner Form die stationären Lösungen der übrigen Casimir-Funktionalen Enstrophie, Entropie und Masse enthält. Diesbezüglich soll in dieser Arbeit gezeigt werden, dass es sich bei der stationären Lösung, die mit Hilfe eines solchen Energie-Casimir-Funktionalen abgeleitet wird, um eine geschlossene Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems

handelt. Die stationäre Lösung eines solchen Systems besteht aus einer konkreten Darstellung des stationären Windfeldes. Neben dem stationären Windfeld lässt sich so auch eine stationäre Darstellung des Temperaturfeldes ableiten. Hierbei wird erstmals das prognostische Potential der stationären Temperaturdarstellung untersucht.

Die soeben genannten Ziele dienen zur Erweiterung des allgemeinen, physikalischen Grundverständnisses der Atmosphäre aus einer theoretischen Sichtweise. Parallel dazu wurden in den letzten Jahrzehnten immer komplexere Modelle der Hydro- und Thermodynamik entwickelt, um immer genauere und umfangreichere Wettervorhersagen und Klimasimulationen zu ermöglichen. Hierbei spielen möglichst umfassende Parametrisierungen sowie realistische Anfangs- und Endbedingungen, begleitet von immer leistungsfähigeren Rechnern eine entscheidende Rolle. Auf der Ebene der Klimasimulationen wird diese Entwicklung durch einen immer größeren Bedarf an verlässlichen Aussagen zu Klimaentwicklungen im Bereich von Jahren bis hin zu Dekaden angetrieben, da Planungshorizonte vor allem in der Wirtschaft, aber auch in Politik und Gesellschaft, generell in diesem Zeitraum angesiedelt sind.

Eine erste Anwendung des DSI für größere Zeitskalen wurde von Selz (2010) vorgestellt, wobei der Fokus auf der tropischen Pazifikregion lag. Es wurde von Selz (2010) ein neuer ENSO-Index auf Basis des DSI entwickelt, der ein prognostisches Potential im Bereich von ein bis drei Jahren vor einem El Niño Ereignis zeigte. Im Rahmen dieser Arbeit soll erstmals untersucht werden, inwieweit der DSI ein dekadisches bis multidekadisches Vorhersagepotential für Europa und den Nordatlantik aufweist. Hierzu sollen zwei Methoden in dieser Arbeit angewendet werden. Die erste Methode befasst sich mit einer prozessorientierten Untersuchung anhand von Beobachtungs- beziehungsweise Reanalysedaten. Die Basis für die Untersuchung ist, dass sich die Ränder der Troposphäre, also konkret der Ozean und die Tropopause, zeitlich viel träger verhalten, als die Troposphäre selbst. Dennoch beeinflussen Änderungen der Meeresoberflächentemperatur (SST) und der Tropopausehöhe maßgeblich die dynamischen Prozesse in der Troposphäre sowie auch die nordatlantische Oszillation (NAO). Hierbei wird die Variabilität der nordatlan-

tischen SSTs durch die Atlantische Multidekadische Variabilität (AMV) quantifiziert. Jene prozessorientierte Herangehensweise benötigt allerdings ein Verständnis über die physikalischen Wechselwirkungen zwischen den SSTs, der Tropopausenhöhe und dem DSI und auf welchen Zeitskalen diese stattfinden. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit allein anhand von Beobachtungs- beziehungsweise Reanalysedaten untersucht werden.

Die zweite Methode basiert auf dem, im Rahmen der Fördermaßnahme "Mittelfristige Klimaprognosen" (MiKlip), geschaffenen Modellsystem zur Vorhersage der Klimaänderungen auf der dekadischen Zeitskala. Die Grundlage hierfür ist das Erdsystemmodell des MPI Hamburg (MPI-ESM-LR). Diesbezüglich besteht die große Herausforderung in der Bestimmung des Anfangszustandes. Hierzu werden im Rahmen dieser Arbeit drei Experimente mit unterschiedlichen Initialisierungsmethoden analysiert. Es soll hierbei das dekadische Vorhersagepotential des DSI im Rahmen des MiKlip-Modellsystems untersucht werden und mit dem des Niederschlags verglichen werden. Als Referenz dienten hierbei die Reanalysedaten des Europäischen Zentrums für Mittelfristige Wettervorhersage (ECMWF), wobei diese auf einem wesentlich höher aufgelösten Modellgitter zur Verfügung stehen. Dadurch, dass der DSI nicht-balancierte Prozesse parametrisiert, ist dieser abhängig von der zugrunde liegenden Modellauflösung. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit analysiert werden, welchen Einfluss die Auflösung des zugrunde liegenden Modellgitters auf den Betrag des DSI hat und inwiefern sich dadurch der Zusammenhang zum Niederschlag ändert.

Letztlich können die Hauptziele dieser dreiteiligen Arbeit wie folgt zusammengefasst werden:

- Vertiefung des theoretischen Konzeptes des DSI und eine Darstellung des Zusammenhangs zum Bernoulli-Theorem. Hierbei soll erstmals eine geschlossene Form als weitere Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems aufgestellt und die daraus resultierende stationäre Temperaturdarstellung erstmals analysiert werden.
- Analyse von Telekonnectionen zwischen NAO, AMV und DSI auf der de-

kadischen bis multidekadischen Zeitskala auf Basis von Beobachtungs- und Reanalysedaten.

- Evaluierung des dekadischen Vorhersagepotentials des DSI im Rahmen des MiKlip-Modellsystems.

Die hier vorliegende Arbeit ist dabei wie folgt in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil dieser Arbeit wird das theoretische Konzept, das dem DSI zu Grunde liegt, vertieft. Hierzu wird nach einer kurzen Vorbemerkung (Kapitel 2) in Kapitel 3 die Nambu-Felddarstellung und der entsprechende konzeptionelle Zusammenhang zum DSI erläutert. Die stationären Gleichgewichte, welche sich aus dieser Darstellung ergeben, werden in Kapitel 4 in Beziehung zum Bernoulli-Theorem gesetzt. Die diagnostische Eigenschaften des stationären Temperaturfeldes werden mit den Eigenschaften des DSI in Kapitel 5 verglichen. Basierend auf den Ergebnissen der vorherigen Kapitel werden in Kapitel 6, die für die stationäre Lösung relevanten, Lagrange'schen Parameter quantifiziert.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird die prozessorientierte Analyse von Telekonnectionen zwischen NAO, AMV und DSI auf der dekadischen bis multidekadischen Zeitskala, basierend Beobachtungs- und Reanalysedaten, behandelt. Nach einer Vorbemerkung hierzu (Kapitel 7) werden diesbezüglich in Kapitel 8 zunächst die Mechanismen der AMV-NAO-Kopplung anhand von Beobachtungsdaten erläutert und in Kapitel 9 auf Reanalysedaten übertragen. Ferner wird in Kapitel 9 untersucht, ob sich die Wechselwirkungen zwischen AMV und NAO auch durch den DSI über Europa darstellen lassen.

Der dritte Teil dieser Arbeit konzentriert sich auf die Evaluierung des dekadischen Vorhersagepotentials des DSI im Rahmen des MiKlip-Modellsystems. Hierbei wird in Kapitel 10 das in MiKlip verwendete Erdsystemmodell des MPI Hamburg (MPI-ESM-LR) vorgestellt. Anschließend wird auf die Verifikations-Problematik eingegangen, die sich bei unterschiedlicher Auflösung von Vorhersagemodell und Reanalysedaten ergibt und das DSI-Vorhersagepotential des MPI-ESM-LR analysiert. Die Ergebnisse der drei oben genannten Themenschwerpunkte werden abschließend in Kapitel 11 zusammengefasst.

Teil I.

Das theoretische Konzept des dynamischen Zustandsindex und die Beziehung zum Bernoulli-Theorem

2. Vorbemerkung

In den letzten 70 Jahren wurde die Entwicklung von immer realistischeren und komplexeren Modellen für die Wetter- und Klimavorhersage vorangetrieben. Diese komplexen hydro-thermodynamischen Modelle werden mit möglichst realistischen Anfangs- und Randbedingungen sowie diversen Parametrisierungsverfahren auf leistungsfähigen Rechnern numerisch gelöst.

Darüber hinaus hat es immer wieder richtungweisende Arbeiten gegeben, die mit konzeptionellen Methoden einen bedeutenden Beitrag zum tieferen Verständnis der atmosphärischen Dynamik leisteten. Den Anfang machten die Arbeiten von Bjerknes (1904) und Exner (1908), welche die bereits seit dem 18. Jh. bekannten Bewegungsgesetze für Fluide auf konkrete atmosphärische Probleme anwendeten. Einen weiteren bedeutenden Beitrag leistete die Arbeit von Ertel (1942) über die atmosphärische Wirbeldynamik, wobei das in diesem Rahmen entdeckte Theorem der potentiellen Vorticity zum tieferen Verständnis der wirbelbehafteten Prozesse in der Atmosphäre beigetragen hat. Das Theorem verbindet die Impulsbilanz, die Massenerhaltung und den ersten Hauptsatz der Thermodynamik für adiabatische Prozesse zu einer einzigen individuellen Erhaltungsgröße. Mit Hilfe dieser Größe entwickelte Hoskins et al. (1985) eine neue Denkweise (IPV-Denken), mit der die Entstehung und Intensivierung von Zyklonen (Zyklogenese) über Wechselwirkungen von PV-Anomalien auf isentropen Flächen in der oberen und unteren Troposphäre erklärt werden können. Die von Hoskins et al. (1985) entwickelte Denkweise baut auf den wichtigen Arbeiten von Charney (1947) und Eady (1949) auf, die die Zyklogenese erstmals in Verbindung mit großen meridionalen Temperaturgradienten (Baroklinität), geringer statischer Stabilität sowie einer Phasenverschiebung zwischen dem Geopotential- und Temperaturfeld brachten.

Eine wichtige Entwicklung, die die theoretische Meteorologie in der jüngeren Vergangenheit gemacht hat, war die Anwendung der Hamilton'schen Mechanik auf die Hydro- und Thermodynamik. Diese stellt in ihrer kanonischen Form eine fundamentale Bereicherung für das Verständnis verschiedenster physikalischer Systeme dar. Allerdings konnte das hydro-thermodynamische Grundgleichungssystem erst durch eine erweiterte, nicht-kanonische Form der Hamilton Mechanik beschrieben werden, wobei die Arbeit von Morrison und Greene (1980) dafür den Grundstein legte. Diese Form der Hamilton Mechanik zeichnet sich dadurch aus, dass sie das physikalische System sowohl durch eine skalare Hamilton-Funktion als auch durch einen antisymmetrischen Poisson-Tensor beschreibt. Wenn der Poisson-Tensor nun singular ist, gibt es neben der Energie, die über die Hamilton-Funktion ausgedrückt wird, weitere Erhaltungsgrößen, die sogenannten Casimir-Funktionen, welche als Zwangsbedingungen die Bewegung im Phasenraum einschränken. Für konkrete meteorologische Anwendungen wurde die nicht-kanonische Hamilton Mechanik dann von Névir (1993) diskutiert, wobei neben der Masse und der Entropie vor allem die verschiedenen Wirbelerhaltungsgrößen als Casimir-Funktionen gefunden wurden.

Eine weitreichende Erweiterung der Hamilton Mechanik fand unabhängig von der Hydrodynamik durch Nambu (1973) statt, wobei der Autor anhand der Kreiselgleichungen zeigen konnte, dass der Drehimpuls gleichberechtigt neben der Energie als Erhaltungsgröße in das System eingeht. Diesbezüglich wurden die ursprünglichen Ideen der diskreten Nambu-Mechanik von Névir und Blender (1993) auf kontinuierliche Systeme der inkompressible Hydro-Thermodynamik übertragen. Es konnte dabei gezeigt werden, dass die Enstrophie und die Helizität für inkompressible Flüssigkeiten im zwei- beziehungsweise dreidimensionalen Fall die Dynamik auf der gleichen hierarchischen Ebene beschreiben wie die Energie. Diesbezüglich konnte die Helmholtz'sche Wirbelgleichung, ausgehend von der Rotation der Bewegungsgleichung, eines dreidimensionalen nicht-divergenten barotropen Fluids über eine trilineare Nambu-Klammer mit den Erhaltungsgrößen kinetische Energie und Helizität ausgedrückt werden. In einem weiteren Schritt verallgemeinerte Névir (1998) mit Hilfe seiner Energie-Wirbel-Theorie den Ansatz von Nambu auch auf

kompressible Fluide mit einem thermodynamischen Freiheitsgrad. Für jenes System sind die namensgebenden, konstituierenden Erhaltungsgrößen die Energie, die Masse, die Entropie sowie die Helizität, wobei letztere nur für barotrope Systeme erhalten ist. Die Casimir-Funktion ist hierbei die Ertel'sche potentiellen Enstrophie. Analog zum Hamilton Prinzip der kleinsten Wirkung wurde von Névir (1998) durch eine stationäre Lösung des meteorologischen Grundgleichungssystem aus den Erhaltungsgrößen ein Energie-Wirbel-Gleichgewicht abgeleitet. Dieses Energie-Wirbel-Gleichgewicht ist die Grundlage für den von Névir (2004) entwickelten dynamischen Zustandsindex, der sich dadurch auszeichnet, dass er Abweichungen von diesem Zustand, also das Ungleichgewicht zwischen Energie und Wirbeln, beschreibt.

Neben der oben genannten Enstrophie sind die Masse und die Entropie ebenfalls Casimir-Funktionale innerhalb der Hydrodynamik, welche als Zwangsbedingung die Bewegung im Zustandsraum einschränken. Somit ist ein Ziel dieses Teils der Arbeit, jene Casimir-Funktionale und die daraus resultierenden thermodynamischen Modelle bezüglich ihrer fluiddynamischen Komplexität hierarchisch einzuordnen. Weiterhin wird der hydro-thermodynamischen Grundzustand, welcher sich durch Adiabasie, Reibungsfreiheit sowie Stationarität auszeichnet, näher charakterisiert, indem ein Zusammenhang zwischen den stationären Lösungen des Grundgleichungssystems und dem Bernoulli-Theorem hergestellt wird. Hierbei wird eine Hierarchie der verschiedenen Formen des Bernoulli-Theorems auf Basis der zugrundeliegenden thermo- und wirbeldynamischen Freiheitsgrade aufgestellt. Darüber hinaus wird ein Casimir-Funktional entwickelt, mit dessen Hilfe eine stationäre Wind- und Temperaturdarstellung für ein kompressibles, wirbelbehaftetes und baroklines thermodynamisches Modell abgeleitet werden kann. Es wird zudem beschrieben, dass diese beiden Darstellungen eine geschlossene Form des Bernoulli-Theorems als weitere Verallgemeinerung charakterisieren. Anschließend wird erstmals das prognostische Potential der stationären Temperaturdarstellung untersucht.

3. Die Nambu-Darstellung des ursprünglichen Gleichungssystems

In diesem Kapitel wird zunächst ein Überblick über die diskrete Nambu-Mechanik gegeben, die als Verallgemeinerung der Hamilton'schen Sichtweise gesehen werden kann. Anschließend wird auf die von Névir (1998) entwickelte Nambu-Feld-darstellung der idealen Hydro-Thermodynamik eingegangen. Die Besonderheit hierbei ist, dass die Dynamik nicht mehr nur über die Energie, sondern auch in gleichberechtigter Weise durch weitere Erhaltungsgrößen, den sogenannten Casimir-Funktionalen, beschrieben wird. Hierbei werden auch die fluiddynamischen Zwangsbedingungen diskutiert, die durch die Casimir-Funktionale vorgegeben werden.

3.1. Grundlagen der diskreten Nambu-Mechanik

Im Jahr 1973 wurde durch den Japaner Yoichiro Nambu eine Verallgemeinerung der kanonischen Hamilton Mechanik für diskrete Systeme eingeführt. Hierbei wird die Mechanik konservativer Systeme durch die Energie sowie durch weitere Erhaltungsgrößen beschrieben. Diese stehen nun nicht mehr passiv im Hintergrund, sondern bestimmen die Bewegungsgleichungen in aktiver Weise. Ein System mit N Freiheitsgraden $x_i(t) = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, wird durch $N-1$ Erhaltungsgrößen $H_1(x_i), H_2(x_i), \dots, H_{N-1}(x_i)$ beziehungsweise Hamiltonfunktionen beschrieben, die völlig gleichberechtigt in die Darstellung eingehen. Die Evolutionsgleichungen eines solchen Systems sind durch die Jacobi-Determinantenform gegeben:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial(x_i, H_1, H_2, \dots, H_{N-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}. \quad (3.1)$$

Mit (3.1) lässt sich auch die zeitliche Evolution einer beliebigen dynamischen Funktion $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ bestimmen:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_N} \frac{dx_N}{dt}. \quad (3.2)$$

Wendet man nun nochmal (3.1) auf (3.2) an, so lässt sich die zeitliche Entwicklung von F auch mit einer (N-1)-fachen antisymmetrischen Nambu-Klammer schreiben:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H_1, H_2, \dots, H_{N-1}\} =: \frac{\partial(F, H_1, H_2, \dots, H_{N-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}. \quad (3.3)$$

Aufgrund der Antisymmetrie verschwindet die Nambu-Klammer, wenn diese zwei gleiche Elemente enthält, etwa wenn $F = H_1, H_2, \dots, H_{N-1}$ ist. Somit sieht man auch, dass H_1, H_2, \dots, H_{N-1} automatisch Erhaltungsgrößen sind.

Zudem kann gezeigt werden, dass die Nambu-Mechanik auch die klassische kanonische Hamiltonmechanik beinhaltet. Hierzu betrachtet man ein System mit $N=2$ Freiheitsgraden, welches folglich eine Erhaltungsgröße $H(x_1, x_2)$ aufweist. Somit ergibt sich zunächst folgende Determinantenform der zeitlichen Evolution:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial(x_i, H)}{\partial(x_1, x_2)}. \quad (3.4)$$

Klassischerweise werden die beiden Freiheitsgrade x_1, x_2 mit dem generalisierten Ort $x_1 = q$ und dem Impuls $x_2 = p$ und somit die Erhaltungsgröße H mit der Gesamtenergie besetzt. Daraus ergibt sich:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}. \quad (3.5)$$

Somit wird deutlich, dass die Nambu-Mechanik, für $N=2$ Freiheitsgrade, auch die klassische Hamiltonmechanik enthält. Im Gegensatz dazu bietet sich für die atmosphärische Dynamik aufgrund des vom meteorologischen Grundgleichungssystem aufgespannten Phasenraums, eine Betrachtung mit $N=3$ Freiheitsgraden $x_i(t) = (x_1, x_2, x_3)$ an. Für diesen Fall gilt nun:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial(x_i, H_1, H_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}. \quad (3.6)$$

Beziehungsweise:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x_2, x_3)} = \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \quad (3.7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x_3, x_1)} = \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \quad (3.8)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1}. \quad (3.9)$$

Darüberhinaus kann man die Variablen x_1, x_2, x_3 zu einem 3-dimensionalen Zustandsvektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zusammenfassen, womit sich die zeitliche Entwicklung auch als Kreuzprodukt zwischen den Gradienten der beiden Hamiltonfunktionen H_1 und H_2 schreiben lässt:

Nambu-Evolutionsgleichung

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla H_1 \times \nabla H_2. \quad (3.10)$$

Hierbei muss aber beachtet werden, dass der Nabla-Operator nicht den Gradienten im Ortsraum beschreibt, sondern den Gradienten im Zustandsraum ($\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})^T$). Infolgedessen bewegt sich die Trajektorie im dreidimensionalen Zustandsraum entlang der Schnittlinie der beiden Erhaltungsflächen H_1 und H_2 . Für diese geometrisch anschauliche Interpretation wird im späteren Verlauf dieser Arbeit eine praktische meteorologische Anwendungsmöglichkeit vorgestellt. Die zeitliche Entwicklung einer beliebigen dynamischen Funktion $F(\vec{x})$ lässt sich entsprechend durch folgendes Spatprodukt schreiben:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H_1, H_2\} := \nabla F \cdot (\nabla H_1 \times \nabla H_2) = \frac{\partial(F, H_1, H_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}. \quad (3.11)$$

Aufgrund der nun zweifachen Antisymmetrie gilt nun auch:

$$\{F, H_1, H_2\} = -\{H_1, F, H_2\} = -\{F, H_2, H_1\}. \quad (3.12)$$

Die Bewegungsgleichung (3.10) erfüllt zudem das Liouville'sche Theorem, welches eine Inkompressibilität des Phasenraums für ein dissipationsfreies System

beschreibt. Demzufolge verschwindet die Divergenz des Flusses $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}$:

$$\nabla \cdot \dot{\vec{x}} = \nabla \cdot (\nabla H_1 \times \nabla H_2) = 0. \quad (3.13)$$

Dies ist auch gleichbedeutend mit einem zeitlich konstantem infinitesimalen Phasenraumvolumen dV , da gilt:

$$\nabla \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{1}{dV} \frac{d}{dt} (dV). \quad (3.14)$$

Wenn ein System jedoch Dissipation in Form einer Dissipationsfunktion D aufweist, gilt für die zeitliche Entwicklung nun:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla H_1 \times \nabla H_2 - \nabla D. \quad (3.15)$$

Demnach ergibt sich für die Divergenz des Phasenraums:

$$\nabla \cdot \dot{\vec{x}} = -\nabla^2 D, \quad (3.16)$$

was bedeutet, dass das Phasenraumvolumen aufgrund von (3.14) nun zeitlich abnimmt.

Weiterhin führte Nambu (1973) noch eine Verallgemeinerung der Evolutionsgleichung (3.11) auf:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial(F, H_i, G_i)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}. \quad (3.17)$$

Somit lässt sich die zeitliche Änderung einer Funktion F auch durch eine Summe von trilinearen Klammern ausdrücken. Diese Form findet Anwendung in der Beschreibung von komplexeren Systemen, die von mehreren Zuständen abhängig sind. Ein Beispiel für ein solches System ist die Atmosphäre, deren Bewegungsgleichungen in der Nambuschreibweise ausführlich in Abschnitt 3.2 behandelt werden. Bezüglich (3.17) erfüllt jede einzelne Klammer das Liouville'sche Theorem und damit auch deren Summe. Allerdings müssen die individuellen Hamiltonfunktionen H_i und G_i nun nicht mehr unbedingt Erhaltungsgrößen sein (Nambu, 1973).

Die Hamiltonsche Differentialgleichung (3.5) zeigte bereits den Zusammenhang zwischen der Nambu-Mechanik und der kanonischen Hamiltonmechanik für zwei Freiheitsgrade.

Für den dreidimensionalen Fall ist die Hamilton-Theorie, wegen der ungeraden Anzahl an Freiheitsgraden, nicht mehr kanonisch. Die Bewegungsgleichung (3.10) hätte demnach in der nichtkanonischen Darstellung folgende Struktur:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underline{\underline{P}}(\vec{x}) \cdot \nabla H_1 = \underline{\underline{P}}^*(\vec{x}) \cdot \nabla H_2. \quad (3.18)$$

Hierbei ist $\underline{\underline{P}}(\vec{x})$ ein antisymmetrischer Poissontensor, welcher nun nicht mehr wie in der kanonischen Theorie von Konstanten, sondern direkt von den Phasenraumvariablen (x_1, x_2, x_3) abhängt. Diese Abhängigkeit des Poissontensors macht den Unterschied zwischen einer kanonischen und einer nichtkanonischen Theorie deutlich. Wenn $\underline{\underline{P}}(\vec{x})$ nun singularär ist, was bedeutet, dass die Determinante des Poissontensors verschwindet ($\det(\underline{\underline{P}}(\vec{x})) = 0$), so hat $\underline{\underline{P}}(\vec{x})$ Eigenvektoren zum Eigenwert null. Diese Eigenvektoren lassen sich als Gradienten von Casimir-Funktionen darstellen. Für diese gilt nun:

$$\underline{\underline{P}}(\vec{x}) \cdot \nabla C = 0. \quad (3.19)$$

Die Casimir-Funktion des Poissontensors $\underline{\underline{P}}(\vec{x})$ ist eine beliebige Funktionen der Phasenraumvariablen (x_1, x_2, x_3) , demnach ist $C = C(\vec{x})$. Für diesen allgemeinen Fall wäre $H_2 = H_2(\vec{x})$ ein solches Casimir, sodass gilt $\underline{\underline{P}}(\vec{x}) \cdot \nabla H_2 = 0$. Dies ergibt sich durch die Zusammenführung von (3.10) und (3.18) zu $\frac{d\vec{x}}{dt} = \underline{\underline{P}}(\vec{x}) \cdot \nabla H_1 = \nabla H_1 \times \nabla H_2$, wonach wegen (3.19) folgt, dass $\underline{\underline{P}}(\vec{x}) \cdot \nabla C = \nabla C \times \nabla H_2 = 0$ ist. Dies ist unter anderem für $C = H_2$ erfüllt. Somit zeigt sich dadurch auch, dass die Casimir-Funktion auch gleichzeitig eine Erhaltungsgröße ist.

Ferner lässt sich die Bewegungsgleichung 3.18 auch über einen alternativen Poissontensor $\underline{\underline{P}}^*(\vec{x})$ mit der anderen Erhaltungsgröße H_2 wie folgt darstellen:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underline{\underline{P}}^*(\vec{x}) \cdot \nabla H_2. \quad (3.20)$$

Für diese Darstellung würde dann dementsprechend $\underline{\underline{P}}^*(\vec{x}) \cdot \nabla H_1 = 0$ gelten. Dass

beide Darstellungen von (3.18) gültig sind und die jeweils nicht berücksichtigte Hamiltonfunktion die Rolle des Casimirs übernimmt, verdeutlicht, dass die beiden Erhaltungsgrößen bei der nichtkanonischen Theorie nicht gleichberechtigt in die Bewegungsgleichung eingehen. Erst durch die Nambu-Mechanik, wo sich die Trajektorie im Phasenraum, wie in (3.10) beschrieben, entlang der Schnittlinie der beiden Erhaltungsflächen bewegt, werden die Erhaltungsgrößen auf eine Ebene gestellt.

3.1.1. Übergang von der diskreten Nambu-Mechanik zur Nambu-Felddarstellung

Der Abschnitt 3.1 stellte die Grundlagen der Nambu-Mechanik für diskrete Teilchen vor. Diese Darstellung ist jedoch für die dynamische Meteorologie nicht anwendbar, da das zu Grunde liegende Grundgleichungssystem die zeitliche Evolution von kontinuierlichen Feldgrößen beschreibt. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt der Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System erläutert. Für den Übergang wird der Vektor der diskreten Variablen $\vec{x}(t)$ durch den Vektor der Feldfunktionen $\vec{u}(\vec{r}, t)$ ersetzt:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \longrightarrow \vec{u}(\vec{r}, t) = (u_1(\vec{r}, t), \dots, u_n(\vec{r}, t)). \quad (3.21)$$

Hierbei ist $\vec{r} = (x, y, z)$ der Ortsvektor im dreidimensionalen euklidischen Raum und t die Zeit. Somit wird die lokalzeitliche Änderung an einem festen Ort \vec{r} mit $\frac{\partial}{\partial t}$ bezeichnet. Weiterhin wird die Hamilton-Funktion $H(\vec{x})$ durch ein Hamilton-Funktional $\mathcal{H}[\vec{u}]$ ersetzt, das als Volumenintegral über die Hamiltondichte $h(\vec{u})$ gegeben ist:

$$H(\vec{x}) \longrightarrow \mathcal{H}[\vec{u}] = \int_V d\tau h(\vec{u}). \quad (3.22)$$

Darüber hinaus wird auch die partielle Ableitung der diskreten Variablen durch eine Funktionalableitung nach den Feldvariablen und allen räumlichen Ableitungen

Diskrete Systeme	Kontinuierliche Systeme
Variablen sind Funktionen: $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$	Variablen sind Felder: $\vec{u}(\vec{r}, t) = (u_1(\vec{r}, t), \dots, u_n(\vec{r}, t))$
Hamilton-Funktion: $H(\vec{x})$	Hamilton-Funktional: $\mathcal{H}[\vec{u}] = \int_V d\tau h(\vec{u})$ $h(\vec{u})$: Hamiltondichte
Partielle Ableitung: $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$	Funktionalableitung: $\frac{\delta}{\delta \vec{u}} = \frac{\partial}{\partial \vec{u}} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}} \right) \pm \dots$

Tabelle 3.1.: Diese Tabelle zeigt die Änderungen, die sich beim Übergang von einer Teilchen- zu einer Felddarstellung ergeben.

von $\vec{u}(\vec{r}, t)$ ersetzt:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta \vec{u}} = \frac{\partial}{\partial \vec{u}} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}} \right) \pm \dots \quad (3.23)$$

In einem Feld muss die ortsabhängigkeit der Variablen nun berücksichtigt werden. Folglich ändert sich auch die Form der trilinearen, antisymmetrischen Nambu-Klammer:

$$\begin{aligned} \frac{dF(\vec{x})}{dt} &= \{F, H_1, H_2\} := \nabla F \cdot (\nabla H_1 \times \nabla H_2) = \frac{\partial(F, H_1, H_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \\ \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{F}[\vec{u}]}{\partial t} &= \{\mathcal{F}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = \int_V d\tau \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{u}} \cdot \vec{K} \left(\frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta \vec{u}}, \frac{\delta \mathcal{H}_2}{\delta \vec{u}} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Hierbei ist \vec{K} ein konstanter, antisymmetrischer, bilinearer Differentialoperator. Zudem ist die Darstellung der trilinearen Nambu-Klammer (3.24) nur als Beispiel anzusehen.

Die Änderungen, die sich durch den Übergang von der Teilchen-Darstellung zum Kontinuum sind noch einmal in Tabelle 3.1 zusammen gegenübergestellt.

3.2. Nambu-Feldtheorie idealer Fluide

In diesem Unterabschnitt wird die von Névir (1998) entwickelte Nambu-Feld-darstellung des hydro-thermodynamischen Grundgleichungssystem für reibungs-freie adiabatische Fluide skizziert. Ausgangspunkt sind die meteorologischen Grund-gleichungen, zu denen die Impulsbilanz, die Kontinuitätsgleichung (Massenbilanz) sowie der erste Hauptsatz der Thermodynamik für adiabatische Prozesse (Bilanz der inneren Energie) gehören. Der erste Hauptsatz für adiabatische Prozesse kann an dieser Stelle auch über die Entropie-Dichte σ formuliert werden.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\nabla \cdot (\sigma \vec{v}). \quad (3.27)$$

Hierbei beschreibt t die Zeit, \vec{v} den dreidimensionalen Windvektor, Ω die Win-kelgeschwindigkeit der Erde, ϕ das Geopotential, ρ die Dichte und s die massen-spezifische Entropie. Dieses System lässt sich über fünf Felder darstellen: die drei Geschwindigkeitskomponenten von \vec{v} , die Massendichte ρ und die Entropie-Dichte $\sigma = s\rho$. Für die massenspezifische Entropie selbst besteht folgender Zusammen-hang zur potentiellen Temperatur Θ :

$$ds = c_p \frac{d\Theta}{\Theta}, \quad (3.28)$$

wobei c_p die spezifische Wärmekapazität für isobare Prozesse ist. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf die Entropie und die potentielle Temperatur als äquivalent erachtet ($s \sim \Theta$).

Névir (1998) konnte zeigen, dass die Dynamik des Systems auch über drei global erhaltene Hamiltonfunktionen und einer konstituierenden Größe festgelegt wird. Besagte Funktionen sind die Masse

$$\mathcal{M}[\rho] = \int_V d\tau \rho, \quad (3.29)$$

die Entropie

$$\mathcal{S}[\sigma] = \int_V d\tau \sigma = \int_V d\tau s \rho, \quad (3.30)$$

die Gesamtenergie mit der inneren Energie $e(v, \frac{\sigma}{\rho})$

$$\mathcal{H}[\vec{v}, \rho, \sigma] = \int_V d\tau \rho \left[\frac{\vec{v}^2}{2} + \phi + e(v, s) \right], \quad (3.31)$$

sowie die Helizität als konstituierende Größe mit dem absoluten Wirbelvektor $\vec{\xi}_a$

$$h_a[\vec{v}] = \frac{1}{2} \int_V d\tau \vec{v} \cdot \vec{\xi}_a. \quad (3.32)$$

Daraus leitete Névir (1998) die Nambu-Felddarstellung des Grundgleichungssystems ab:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \{\vec{v}, h_a, \mathcal{H}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\vec{v}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\vec{v}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\rho, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \{\sigma, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma}. \quad (3.35)$$

Es konnte gezeigt werden, dass sich die einzelnen Gleichungen des primitiven Grundgleichungssystems in der Nambu-Felddarstellung auch über eine zeitliche Entwicklung eines beliebigen Funktionals $\mathcal{F}[\vec{v}, \rho, \sigma]$, wie folgt zusammenfassen lassen:

Grundgleichungssystem in trilinearer Nambu-Klammer-Form

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{H}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma}. \quad (3.36)$$

Die zeitliche evolution von $\mathcal{F}[\vec{v}, \rho, \sigma]$ wird hierbei durch die Summe eines Energie-Helizitäts-Terms, eines Energie-Masse-Terms sowie eines Energie-Entropie-Terms ausgedrückt. Hierbei ist der Energie-Helizitäts-Term als trilineare Nambu-Klammer

$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, \sigma} = \rho \vec{v}$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \right _{\sigma, \vec{v}} = \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + e + p v - T s + \phi \right)$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \sigma} \right _{\vec{v}, \rho} = T$
$\left. \frac{\delta h_a}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, \sigma} = \vec{\xi}_a$	$;$	$\left. \frac{\delta h_a}{\delta \rho} \right _{\sigma, \vec{v}} = 0$	$;$	$\left. \frac{\delta h_a}{\delta \sigma} \right _{\vec{v}, \rho} = 0$
$\left. \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, \sigma} = 0$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \right _{\sigma, \vec{v}} = 1$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \sigma} \right _{\vec{v}, \rho} = 0$
$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, \sigma} = 0$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \rho} \right _{\sigma, \vec{v}} = 0$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right _{\vec{v}, \rho} = 1$

Tabelle 3.2.: Diese Tabelle zeigt eine Übersicht über die Funktionalableitungen nach \vec{v} , ρ und σ . Die Indizes hinter dem senkrechten Strich geben jeweils die beim Ableiten konstant gesetzten Größen an.

wie folgt definiert:

Energie-Helizitäts-Term

$$\{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{H}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} = - \int_V d\tau \left[\frac{1}{\rho} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{v}} \cdot \left(\frac{\delta h_a}{\delta \vec{v}} \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right) \right]. \quad (3.37)$$

Die Variablen im Index der Nambu-Klammer-Darstellung geben dabei die Zustandsgrößen an, nach denen innerhalb des Volumenintegrals die Funktionalableitung berechnet wird. Diesbezüglich listet Tabelle 3.2 nochmal die entsprechenden Funktionalableitungen auf, welche bereits von Névir (1998) berechnet wurden.

Der Energie-Masse-Term ist folgendermaßen definiert:

Energie-Masse-Term

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} = - \int_V d\tau \left[\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{v}} \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right) \right] + cyc(\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}). \quad (3.38)$$

Hierbei gibt $cyc(\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H})$ die zyklischen Vertauschungen von $\{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}$ an, welche die wichtige Antisymmetrie $\{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\} = -\{\mathcal{H}, \mathcal{M}, \mathcal{F}\} = -\{\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{H}\}$ gewähr-

leistet. Letztlich ist der Energie-Entropie-Term definiert als:

Energie-Entropie-Term

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} = - \int_{\vec{v}} d\tau \left[\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{v}} \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \sigma} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right) \right] + cyc(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{H}). \quad (3.39)$$

Eine Übersicht über die Lösungen der, in (3.37) - (3.39) verwendeten, Funktionalableitungen wird hierbei in Tabelle 3.2 gegeben. Die Möglichkeit einer Summe von trilinearen Nambu-Klammern wurde bereits von Nambu (1973) ausdrücklich erwähnt (siehe Abschnitt 3.1), jedoch nur für die diskrete Dynamik. Hierbei ist interessant, dass diese bei Nambu (1973) bisher nur als hypothetisch gesehene Möglichkeit tatsächlich im Rahmen der Feldtheorie der idealen Hydro-Thermodynamik realisiert wird.

Wählt man nun für \mathcal{F} die Systemvariablen \vec{v}, ρ, σ , so lassen sich die Bewegungsgleichung (3.41), die Kontinuitätsgleichung (3.46) und der 1. Hauptsatz der Thermodynamik (3.47) wieder aus Summe der trilinearen Nambu-Klammern (3.36) ableiten. Unter Verwendung der Funktionalableitungslösungen aus 3.2 gilt somit für die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \{\vec{v}, h_a, \mathcal{H}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\vec{v}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\vec{v}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} \quad (3.40)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\delta h_a}{\delta \vec{v}} \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} - \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \nabla \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \nabla \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \sigma} \quad (3.41)$$

$$= -\vec{\xi}_a \times \vec{v} - \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + e + pv - Ts + \phi \right) - s \nabla T \quad (3.42)$$

$$= -\vec{\xi}_a \times \vec{v} - \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + h + \phi \right) + T \nabla s \quad (3.43)$$

$$= -\vec{\xi} \times \vec{v} - \nabla \frac{1}{2} \vec{v}^2 - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \quad (3.44)$$

$$= -\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi. \quad (3.45)$$

Für die Umformung wurde die Darstellung der massenspezifischen Enthalpie $h = e + pv$, folgende thermodynamische Beziehung $\nabla h = T \nabla s + v \nabla p$, sowie die Transformation der Geschwindigkeitsadvektion in einen wirbelbehafteten und einen wir-

belfreien Anteil ($\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{\xi} \times \vec{v} + \nabla \frac{1}{2} \vec{v}^2$) verwendet.

Auch die Kontinuitätsgleichung und der 1. Hauptsatz der Thermodynamik können über Funktionalableitung wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\rho, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} = -\nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right) = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \{\sigma, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} = -\nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right) = -\nabla \cdot (\sigma \vec{v}). \quad (3.47)$$

Somit wird ersichtlich, dass sich die Bewegungsgleichung (3.33) nun als Summe aus einem Energie-Helizitäts-Term, einem Energie-Masse-Term sowie einem Energie-Entropie-Term zusammensetzt. Die Nambu-Darstellung (3.34) der Kontinuitätsgleichung wird allein durch den Energie-Masse-Term beschrieben, und der 1. Hauptsatz der Thermodynamik (3.35) ergibt sich durch den Energie-Entropie-Term.

Die Nambu-Felddarstellung der idealen Hydro-Thermodynamik gewinnt dadurch an Relevanz, dass das meteorologische Grundgleichungssystem vollständig durch die globalen Erhaltungsgrößen Energie, Masse, Entropie sowie der konstituierenden Größe der absoluten Helizität beschrieben werden kann. Dadurch wird die innere Struktur des hydro-thermodynamischen Gleichungssystems physikalisch durchschaubar. So lässt sich zum Beispiel zeigen, dass der nichtlineare Advektionsterm der Geschwindigkeit in der Bewegungsgleichung (3.25), analog zum Helmholtz-Theorem, aus einem wirbelbehafteten Anteil und einem wirbelfreien Anteil aufgrund der Energie-Helizitäts-Klammer sowie der Energie-Masse-Klammer gebildet wird. Ferner fällt für barotrope Strömungen die Entropie als dynamische Variable und mit ihr der erste Hauptsatz der Thermodynamik weg. Dies ist in der Nambu-Theorie gleichbedeutend mit der Wegnahme des Energie-Entropie-Terms, was letztendlich dazu führt, dass auch die Darstellung der Eulerschen Bewegungsgleichung eine neue Form erhält, da diese nur noch über den Energie-Helizitäts-Term und den Energie-Masse-Term beschrieben wird. Die atmosphärische Dynamik wird nun vollständig durch die Erhaltungsgrößen Energie, Masse und der, aufgrund der Barotropie, zur Erhaltungsgröße gewordenen Helizität bestimmt. Man kann nun noch zusätzlich Inkompressibilität annehmen, was dazu führt, dass die

Dichte als dynamische Variable und die Kontinuitätsgleichung als dazugehörige prognostische Gleichung wegfallen. In der Nambuschreibweise würde der Energie-Masse-Term wegfallen. Somit wird die Dynamik nur noch durch die Energie und die Helizität beschrieben. Infolgedessen eröffnet sich eine Hierarchie von Approximationen, die sich durch sukzessive Wegnahme von Erhaltungsgrößen und dadurch entsprechend weniger tilinearen Nambu-Klammern innerhalb von (3.36) ergeben.

3.2.1. Diagnostische Zwangsbedingung idealer Fluide

Es kann gezeigt werden, dass der Poissontensor in der nichtkanonischen Darstellung des meteorologischen Grundgleichungssystems singularär ist (Névir, 1993). Das heißt, es existiert ein Casimir für das gilt:

<p>Zwangsbedingung idealer Fluide</p> $\{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{C}_f\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{C}_f\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{C}_f\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} = 0 \quad \text{für alle } \mathcal{F}[\vec{v}, \rho, \sigma].$

(3.48)

Nach dieser Definition kann intuitiv als Casimir \mathcal{C}_f die Masse gewählt werden, da das Massenfunktional definitionsgemäß mit dem Energie-Masse-Term vertauscht. Der Energie-Entropie-Term sowie der Energie-Helizitäts-Term verschwinden ohnehin, da das Massenfunktional nicht von der Entropie und der Helizität abhängig ist. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, für \mathcal{C}_f die Entropie zu wählen, da diese mit dem Energie-Masse-Term und dem Energie-Entropie-Term vertauscht. Diese Lagrange'schen Größen sind zwar Casimir-Funktionale des Grundgleichungssystems, haben jedoch den Nachteil, dass sie keine Information über die Helizität und im Fall vom Massenfunktional auch noch keine Information über die Entropie beinhalten. Diesbezüglich muss ein Casimir-Funktional, das in der Summe mit allen drei Nambu-Klammern vertauscht, eine Kombination aus den Erhaltungsgrößen

Masse, Entropie und einer Wirbelgröße sein:

Allgemeines Casimir-Funktional

$$\mathcal{C}_f[\vec{v}, \rho, \sigma] = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s) \quad , \quad \Pi = \frac{1}{\rho} \vec{\xi}_a \cdot \nabla s. \quad (3.49)$$

Das Verschwinden der Summe der drei trilinearen Nambu-Klammern mit den Casimir-Funktional (3.48) zeigt, dass das allgemeine Casimir-Funktional mit einem global konstanten, sogenannten Lagrange'schen Parameter λ_f , zu jeder Klammer dazu addiert werden kann, ohne dass sich die Dynamik einer reibungsfreien, adiabatischen Atmosphäre ändert:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \{\vec{v}, h_a, \mathcal{H} + \lambda_f \mathcal{C}_f\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\vec{v}, \mathcal{M}, \mathcal{H} + \lambda_f \mathcal{C}_f\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\vec{v}, \mathcal{S}, \mathcal{H} + \lambda_f \mathcal{C}_f\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\rho, \mathcal{M}, \mathcal{H} + \lambda_f \mathcal{C}_f\}_{\rho, \vec{v}, \rho} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \{\sigma, \mathcal{S}, \mathcal{H} + \lambda_f \mathcal{C}_f\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma}. \quad (3.52)$$

Die durch (3.49) für die Dynamik auferlegte Zwangsbedingung, der algebraischen Abhängigkeit zwischen Π und s legt eine innere Abhängigkeit des hydro-thermodynamischen Phasenraums, welcher durch die Eulerschen Variablen \vec{v} , ρ und σ aufgespannt wird, offen. Durch die globale Erhaltung der potentiellen Enstrophie und der damit verbundenen Lagrange'schen Erhaltung der Ertel'schen PV verlaufen die zeitlichen Entwicklungen der Geschwindigkeit, der Dichte und der Entropie im hydro-thermodynamischen Phasenraum nicht unabhängig voneinander. Aufgrund von (3.48) und der daraus folgenden Invarianz der Bewegungsgleichungen (3.33 - 3.35) gegenüber der Casimir-Funktion kann zunächst eine verallgemeinerte Hamiltonfunktion in Form eines Energie-Casimir-Funktionals definiert werden:

$$\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, \sigma] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, \sigma] - \lambda_f \mathcal{C}_f[\vec{v}, \rho, \sigma]. \quad (3.53)$$

An dieser Stelle soll der Phasenraum nicht mehr durch die Entropiedichte σ sondern durch die massenspezifische Entropie s dargestellt werden. Die Phasenraumtransformation von $[\vec{v}, \rho, \sigma]$ zu $[\vec{v}, \rho, s]$ hat praktische Gründe, denn die Funktion f der allgemeinen Casimirdefintion (3.49) gibt direkt eine Abhängigkeit von den individuellen Erhaltungsgrößen Π und s vor, womit man nun neben und $f = 1$ und $f = \frac{1}{2}\Pi^2$ auch direkt $f = s$ wählen kann. Dadurch hat das Energie-Casimir-Funktional folgende Form:

$$\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s] - \lambda_f \mathcal{C}_f[\vec{v}, \rho, s]. \quad (3.54)$$

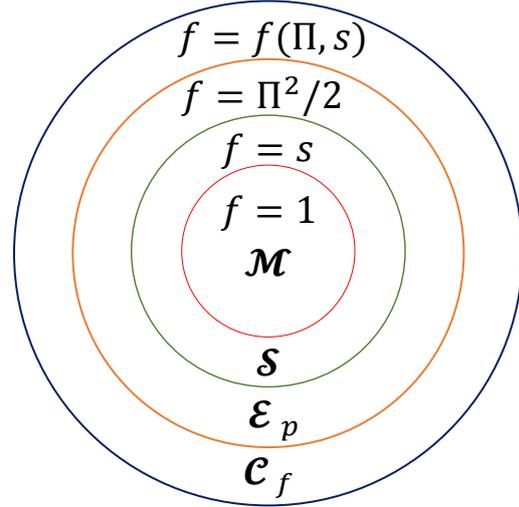
Weiterhin ändern sich auch einige Funktionalableitungen der trilinearen Nambuklammern. So ergibt sich für die Ableitung der Hamiltonfunktion nach der Dichte nun die Bernoullistromfunktion $B = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + e + pv + \phi$, welche sich als Summe aus kinetischer und potentieller Energiedichte sowie der Enthalpie $h = e + pv$ zusammensetzt. Alle Funktionalableitungen für einen $[\vec{v}, \rho, s]$ Phasenraum sind nochmal in Tabelle 3.3 analog zu Tabelle 3.2 dargestellt.

$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, s} = \rho \vec{v} \quad ;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \right _{s, \vec{v}} = \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + e + pv + \phi \right)$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta s} \right _{\vec{v}, \rho} = \rho T$
$\left. \frac{\delta h_a}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, s} = \vec{\xi}_a \quad ;$	$\left. \frac{\delta h_a}{\delta \rho} \right _{s, \vec{v}} = 0$	$;$	$\left. \frac{\delta h_a}{\delta s} \right _{\vec{v}, \rho} = 0$
$\left. \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, s} = 0 \quad ;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \right _{s, \vec{v}} = 1$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta s} \right _{\vec{v}, \rho} = 0$
$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \vec{v}} \right _{\rho, s} = 0 \quad ;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \rho} \right _{s, \vec{v}} = s$	$;$	$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta s} \right _{\vec{v}, \rho} = \rho$

Tabelle 3.3.: Diese Tabelle zeigt eine Übersicht über die Funktionalableitungen nach \vec{v}, ρ und s . Die Indizes hinter dem senkrechten Strich geben jeweils die beim Ableiten konstant gesetzten Größen an.

Durch die Phasenraumtransformation erhält man jeweils für $f = 1$ für das Casimir die Masse (3.29) und für $f = s$ die Entropie (3.30). Ferner konnte Névir (1998) zeigen, dass die Lagrange'sche Erhaltungsgröße der Ertel'schen potentiellen Enstrophie ein Casimir-Funktional ist, welches mit allen drei trilinearen

Abbildung 3.1: Schaubild über die Hierarchie der Casimir-Funktionale. Die allgemeine Casimir-Definition f enthält Informationen über die Enstrophie, die Entropie sowie über die Masse. Die Enstrophie \mathcal{E}_p enthält Wirbel-, Entropie- sowie Massen-Information. Das Casimir \mathcal{S} steht in der Hierarchie unter \mathcal{E}_p und enthält Informationen über die Entropie und die Masse. In der Mitte steht das Massen-Casimir \mathcal{M} , welches nur die Massen-Information enthält.



Nambu-Klammern vertauscht. Die Ertel'sche potentielle Enstrophie ergibt sich für $f = \frac{1}{2}\Pi^2$ wie folgt:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \int_V d\tau \rho \Pi^2 \quad . \quad (3.55)$$

Bei den Casimir-Funktionalen des Grundgleichungssystems wird eine gewisse Hierarchie ersichtlich, da die gewählten Funktionen $f = f(\Pi, s)$ von einer quadratischen ($f = \frac{1}{2}\Pi^2$) über eine lineare ($f = s$) zu einer konstanten ($f = 1$) Funktion übergehen:

$$\mathcal{C}_{f=\frac{1}{2}\Pi^2} = \mathcal{E}_p(\rho, s, \vec{v}) \quad \text{Ertel'sche Enstrophie,} \quad (3.56)$$

$$\mathcal{C}_{f=s} = \mathcal{S}(\rho, s) \quad \text{Entropie,} \quad (3.57)$$

$$\mathcal{C}_{f=1} = \mathcal{M}(\rho) \quad \text{Masse.} \quad (3.58)$$

Die daraus resultierenden Casimir-Funktionale weisen, je nach Rang, eine funktionale Abhängigkeit von ein bis drei Größen auf, wobei das höhergestellte Casimir auch von den Funktionalen der niedriger gestellten Casimir-Funktionale abhängig ist. Dies wird durch das Schaubild 3.1 verdeutlicht. Das Enstrophie-Casimir umfasst die Dichte, die Entropie sowie die PV. Das Entropie-Casimir \mathcal{S} beinhaltet neben der Entropie auch die Dichte. Das Massen-Casimir \mathcal{M} ist schließlich nur von der Dichte abhängig. Letztlich sind diese drei Casimir-Funktionale Teilmengen der allgemeinen Casimir-Definition $\mathcal{C} = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$, was durch den äußersten

Kreis in der Darstellung 3.1 impliziert wird.

Die Rolle der Casimir-Funktionale ist deshalb so wichtig, da sie dem Hydrothermodynamischen System innere Zwangsbedingungen auferlegen, wodurch dieses erst hinreichend beschrieben werden kann. Ein wichtiger Punkt an dieser Stelle ist, dass zur Bestimmung des stationären Zustandes, analog zum Hamilton'schen Prinzip der kleinsten Wirkung, für alle Energie-Casimir-Funktionale (3.54) ein Minimum in Bezug auf die Systemvariablen gefunden werden muss:

$$(\rho, s, \vec{v}) = \underset{\rho, s, \vec{v}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s]. \quad (3.59)$$

Hierzu muss also zunächst ein Extremum über die erste Ableitung bestimmt werden:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = 0. \quad (3.60)$$

Daraus folgt, dass das meteorologische Grundgleichungssystem neben Adiabasie und Reibungsfreiheit auch Stationarität aufweist. Aus (3.60) ergeben sich, wegen der Definition des Energie-Casimir-Funktional 3.54, folgende Bedingungen an die Funktionalableitungen der Hamiltonfunktion und des Casimirs:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} = \lambda_f \left. \frac{\delta \mathcal{C}_f}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} \quad (3.61)$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = \lambda_f \left. \frac{\delta \mathcal{C}_f}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} \quad (3.62)$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s} = \lambda_f \left. \frac{\delta \mathcal{C}_f}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s}. \quad (3.63)$$

Die Funktionalableitungen der allgemeinen Casimir-Definition und der Hamiltonfunktion wurden bereits von Névir (1993) berechnet mit deren Hilfe für die Funktionalableitung des Energie-Casimir-Funktional (3.60) beziehungsweise die daraus folgenden Gleichgewichte (3.61 - 3.63) folgt:

Stationäre Lösung

$$B = \lambda_f (f - \Pi \frac{\partial f}{\partial \Pi}) \tag{3.64}$$

$$\rho T = \lambda_f (\rho \frac{\partial f}{\partial s} - \nabla \cdot (\frac{\partial f}{\partial \Pi} \vec{\xi}_a)) \tag{3.65}$$

$$\rho \vec{v} = \lambda_f (\nabla \times (\frac{\partial f}{\partial \Pi} \nabla s)). \tag{3.66}$$

Die aus (3.64) bis (3.66) resultierenden stationären Lösungen haben zwar die allgemeinste Form, sind aber physikalisch schwer interpretierbar. Ein besseres physikalisches Verständnis erfolgt, wenn man für das Casimir-Funktional die Masse, die Entropie oder die Enstrophie wählt. Alle drei Größen erfüllen die Zwangsbedingung (3.48), legen aber jeweils andere physikalische innere Zwangsbedingungen fest. So enthält ein System mit dem Casimir der Enstrophie zwar Informationen über die Wirbel-, die Thermo- sowie die Massendynamik, aber dieses System ist dadurch limitiert, dass die PV und die Entropie nicht unabhängig mit der Energie im Gleichgewicht sind. Dieser Zustand wurde von Névir (1998) Energie-Wirbel-Zustand genannt. Bei einem System, das durch das Entropie-Casimir beschrieben wird, verschwindet der wirbeldynamische Freiheitsgrad. Dieses System ist somit wirbelfrei und baroklin. Das Massen-Casimir beschreibt ein barotropes und wirbefreies System ohne thermodynamischen Freiheitsgrad und ohne wirbeldynamischen Freiheitsgrad.

$\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f$ $f = f(\Pi, s)$		
$\mathcal{C}_{f=\frac{1}{2}\Pi^2} = \mathcal{E}_p$ $f = \frac{1}{2}\Pi^2$	$\mathcal{C}_{f=s} = \mathcal{S}$ $f = s$	$\mathcal{C}_{f=1} = \mathcal{M}$ $f = 1$
wirbelbehaftet baroklin	wirbelfrei baroklin	wirbelfrei barotrop

Tabelle 3.4.: Diese Tabelle zeigt eine Übersicht der in dieser Arbeit beschriebenen Casimir-Funktionale und den daraus resultierenden Zuständen.

3.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Entwicklung der Nambu-Felddarstellung der Eulerschen Bewegungsgleichungen von Névir (1998) herausgearbeitet. Somit kann das Grundgleichungssystem nun vollständig durch die globalen Erhaltungsgrößen Energie, Masse, Entropie sowie Helizität, als konstituierende Größe, über eine Summe aus drei trilinearen Nambu-Klammern beschrieben werden. Dies ermöglicht eine alternative physikalische Sichtweise auf die innere Struktur des hydro-thermodynamischen Gleichungssystems, denn das bedeutet die Existenz eines Casimir-Funktionalen, für das die Summe der trilinearen Nambu-Klammern verschwindet. In seiner allgemeinsten Form muss das Casimir-Funktional von der PV und der Entropie abhängig sein ($\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$). Dieses allgemeine Casimir-Funktional beinhaltet somit auch konkrete Casimir-Funktionale, wie die Erhaltungsgrößen Masse, Entropie sowie Enstrophie. Diese drei Größen legen aber jeweils andere physikalische Zwangsbedingung fest, worüber sich eine bestimmte Hierarchie ergibt. Hierzu zeigt Tabelle 3.4 eine Übersicht der Casimir-Funktionale Masse, Entropie sowie Enstrophie und die sich daraus ergebenden physikalischen Systeme. An oberster Stelle in der Hierarchie steht das allgemeine Casimir-Funktional, welches eine algebraische Abhängigkeit von der Ertel'schen PV und der Entropie aufweist $f = f(\Pi, s)$. Auf der Ebene darunter folgen dann die Casimir-Funktionale Enstrophie, Entropie sowie Masse. Diese Casimir-Funktionale stehen auf einer Ebene, denn die stationären Lösungen der Modelle, die sich für $\mathcal{C}_{f=\frac{1}{2}\Pi^2} = \mathcal{E}_p$, $\mathcal{C}_{f=s} = \mathcal{S}$ und $\mathcal{C}_{f=1} = \mathcal{M}$ ergeben, können nicht ineinander umgeformt werden. Dennoch steht das Enstrophie-Casimir an erster Stelle, welches sowohl abhängig von der PV als auch Entropie ist ($f = \frac{1}{2}\Pi^2$). Dieses System hat somit einen wirbel- und einen thermodynamischen Freiheitsgrad. An zweiter Stelle steht dann das Entropie-Casimir, da dieses nur von der Entropie abhängig ist ($f = s$) und somit der wirbeldynamische Freiheitsgrad wegfällt. Letztendlich folgt das Massen-Casimir, für das die Casimir-Funktion $f = 1$ gesetzt wird, womit nur noch eine Abhängigkeit von der Masse folgt. Hierbei fällt nun neben dem wirbeldynamischen auch der thermodynamische Freiheitsgrad weg.

4. Ein verallgemeinertes und geschlossenes Bernoulli-Theorem

Im 18. Jahrhundert beobachtete Giovanni Battista Venturi, dass die Geschwindigkeit eines Fluids innerhalb einer Röhre von deren Durchmesser abhängig ist. Hierbei zeigte sich, dass die Geschwindigkeit mit abnehmenden Röhrendurchmesser zunimmt (siehe Abb. 4.1). Diesbezüglich entdeckte Daniel Bernoulli im selben Jahrhundert einen Zusammenhang zwischen dem Druck, der potentiellen Energie und der Geschwindigkeit eines Fluids insofern, als dass die Summe aus kinetischer Energie, potentieller Energie und massenspezifischen Druck für einen stationären, adiabatischen und reibungsfreien Zustand konstant ist. In seiner klassischen Form wird für das Bernoulli Theorem zusätzlich noch InkompRESSIBILITÄT und Wirbelfreiheit angenommen, womit es wie folgt gegeben ist:

$$B = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \phi + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (4.1)$$

Hierbei ist B die Bernoulli-Funktion, \vec{v} die Geschwindigkeit, ϕ die geopotentielle Höhe, p der Druck und ρ die Dichte. Weiterhin muss beachtet werden, dass die Bernoulli-Funktion in seiner klassischen Form global konstant ist. Ein erster Meilenstein bei der Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems wurde von Schär (1993) gesetzt. In dieser Studie wurde das Bernoulli-Theorem für ein kompressibles, baroklines und wirbelbehaftetes Fluid verallgemeinert. Durch die Baroklinität erhält die Bernoulli-Funktion einen thermodynamischen Freiheitsgrad, womit das verallgemeinerte Bernoulli-Theorem folgende Form hat:

$$B = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \phi + h = c \quad (4.2)$$



Abbildung 4.1.: Schaubild über den Zusammenhang zwischen dem Durchmesser und der Fließgeschwindigkeit einer Röhre. Aufgrund der Erhaltung der Bernoulli-Funktion im Grundzustand (Stationarität, Reibungsfreiheit und Adiabasie), nimmt die Fließgeschwindigkeit ab/zu, wenn sich der Röhrendurchmesser und somit auch der Druck erhöht/verringert. Die Bedingung hierfür ist Inkompressibilität, Wirbelfreiheit und Isothermie.

Hierbei ist h die massenspezifische Enthalpie, die sich über die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p oder als Summe aus der inneren Energie e und des Quotienten aus Druck und Dichte ausdrücken lässt ($h = c_p T = e + \frac{p}{\rho}$). Im Gegensatz zum klassischen Bernoulli-Theorem, ist die Bernoulli-Funktion für die Verallgemeinerung nach Schär (1993) nicht mehr global konstant, sondern entlang von Stromlinien erhalten, was im Folgendem durch ein c ausgedrückt wird. Eine genaue Spezifizierung der Stromlinien fehlt jedoch in dieser Veröffentlichung. Zudem konnte auf Grundlage des verallgemeinerten Bernoulli-Theorems ein Ausdruck für den stationären Wind gefunden werden:

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \nabla_s \times \nabla B. \quad (4.3)$$

Die stationäre Winddarstellung (4.3) erinnert an die aus der Nambu-Mechanik hergeleitete Bewegung im Phasenraum $\dot{x} = \nabla H_1 \times \nabla H_2$, da diese entlang der Schnittlinie zweier Erhaltungsgrößen stattfindet (siehe Abschnitt 3.1). Somit wird im Folgendem gezeigt, dass sich das Bernoulli-Theorem aus der Nambu-Darstellung des Primitiven Gleichungssystems ableiten lässt und es soll eine weitere geschlossene Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems mit Hilfe des, in dieser Arbeit erstmals beschriebenen, konkreten Energie-Casimir-Funktionalen aufgestellt werden. Diesbezüglich wird im folgenden Abschnitt (4.1) dargelegt, dass sich aus der stationären Lösung, die mit Hilfe des Energie-Casimir-Funktionalen abgeleitet wird, die Bernoulli-Funktion erstmals in Beziehung mit der PV und der Entropie setzen

lassen. Ferner wird verdeutlicht, dass sich über das Energie-Casimir-Funktional auch eine stationäre Darstellung der Temperatur und der Geschwindigkeit ableiten lassen. Dies ermöglicht eine neue Sichtweise des Bernoulli-Theorems, denn es wird deutlich, dass neben der Erhaltung der Bernoulli-Funktion auch die stationäre Wind- und Temperaturdarstellung Teil dieses Theorems sind.

In Abschnitt 4.2 wird gezeigt, dass sich aus dem Bernoulli-Theorem, das sich aus der stationären Lösung des Energie-Casimir-Funktional ergibt, das klassische Bernoulli-Theorem, die Verallgemeinerung nach Schär sowie ein erstmals beschriebenes Bernoulli-Theorem für barokline und wirbelfreie Fluide ableiten lassen. Somit lässt sich feststellen, dass es sich bei der stationären Lösung des Energie-Casimir-Funktional um eine geschlossene und allgemeine Form des Bernoulli-Theorems handelt.

4.1. Herleitung des verallgemeinerten Bernoulli-Theorems

Im vorherigen Kapitel wurden die Definitionen des Massen-, das Entropie- sowie das Wirbel-Casimir-Funktional genannt. Diese Funktionale sind Teil der allgemeinen Casimir-Funktional-Definition $\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$. Die stationäre Lösung dieses allgemeinsten Casimir-Funktional hat dabei, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, folgende Lösung:

Stationäre Lösung

$$B = \lambda_f \left(f - \Pi \frac{\partial f}{\partial \Pi} \right) \quad (4.4)$$

$$\rho T = \lambda_f \left(\rho \frac{\partial f}{\partial s} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \Pi} \vec{\xi}_a \right) \right) \quad (4.5)$$

$$\rho \vec{v} = \lambda_f \left(\nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial \Pi} \nabla s \right) \right). \quad (4.6)$$

Diese Lösung kann dabei als allgemeinste Form des Bernoulli-Theorems angesehen werden. An dieser Stelle wird offensichtlich, dass die Bernoulli-Funktion nun

abhängig von den individuellen Erhaltungsgrößen PV, Entropie und somit auch von der Masse und dem absoluten 3D-Wirbelvektor ist. Auch für die stationären Darstellungen der Temperatur und des Windes folgt erstmals $T_{st} = T_{st}(\Pi, s)$ beziehungsweise $\vec{v}_{st} = \vec{v}_{st}(\Pi, s)$. Da das allgemeinste Casimir-Funktional mit $f = f(\Pi, s)$ aber unpraktikabel und physikalisch schwer interpretierbar ist, kann man wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, auch eine konkrete Größe für f festlegen. So folgt, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, für $f = 1$ das Massen-Casimir-Funktional, welches die Massenerhaltung berücksichtigt. Für $f = s$ ist $\mathcal{C}_{f=s} = f(s)$ und beinhaltet zudem noch die Entropieerhaltung. Zu guter Letzt erhält man für $f = \frac{1}{2}\Pi^2$ einen Term, der neben der Massenerhaltung auch die Entropie- und Wirbelerhaltung erfasst. Hierfür gilt $\mathcal{C}_{f=\frac{1}{2}\Pi^2} = f(\Pi)$. Die stationären Lösungen für $f = 1$, $f = s$ und $f = \frac{1}{2}\Pi^2$ werden gesondert im Anhang A hergeleitet und diskutiert.

Keine dieser Lösungen für f berücksichtigt aber die Möglichkeit, dass f auch gleichzeitig von der Entropie und der PV abhängig sein kann ($f = f(\Pi, s)$). Hierbei ist eine naheliegende Lösung die Funktionen f von Enstrophie-, Entropie- und Massen-Funktional zu addieren. Eine solche Funktion wird hierbei erstmals im Rahmen dieser Arbeit beschrieben. Diese wird mit f_s bezeichnet und weist dabei folgende Form auf:

Ansatz für allgemeine Casimir-Funktion

$$f_s = \frac{1}{2}\Pi^2 + k_s s + k_m, \quad (4.7)$$

wobei das entsprechende Funktional folgende Form hat:

Casimir-Funktional für f_s

$$\mathcal{C}_{f_s} = \int_V d\tau \rho \left(\frac{1}{2}\Pi^2 + k_s s + k_m \right). \quad (4.8)$$

Dieses Funktional erhält den Namen Wirbel-Entropie-Massen-Funktional und ist wegen der impliziten Summe der Casimir-Funktionalen Enstrophie, Entropie und Masse, auch ein Casimir des hydro-thermodynamischen Grundgleichungssystems. Hierbei sind die Entropiekonstante k_s sowie die Massenkostante k_m global kon-

stante Lagrange'sche Parameter. Dieses Casimir-Funktional hat sowohl einen Massen, einen thermodynamischen und einen wirbeldynamischen Freiheitsgrad. Somit muss eine Ableitung des Energie-Wirbel-Entropie-Massen-Funktional $\mathcal{N} = \mathcal{H} + \mathcal{C}$ nach der Dichte, der Entropie und der Geschwindigkeit ein Minimum ergeben. Hierfür können die bereits vorgestellten Ableitungen (3.64) - (3.66) eines allgemeinen Wirbel-Casimir-Funktional verwendet werden, womit sich folgendes ergibt:

$$B = -\lambda_f \frac{1}{2} \Pi^2 + \lambda_f k_s s + \lambda_f k_m \quad (4.9)$$

$$\rho T = -\lambda_f \vec{\xi}_a \cdot \nabla \Pi - \lambda_f k_s \rho \quad (4.10)$$

$$\rho \vec{v} = \lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi. \quad (4.11)$$

Hierbei ist noch zu erwähnen, dass λ_f ein global konstanter Lagrange'scher Parameter ist, der unter anderem dafür gebraucht wird Größen mit unterschiedlichen Dimensionen zu addieren. Außerdem verdeutlicht (4.9), dass das Feld der Bernoulli-Funktion durch die individuell erhaltenen Größen der PV und der Entropie lokalisiert wird. Denn die potentielle Vorticity ist, genau wie die Entropie, eine Lagrange'sche Erhaltungsgröße, was bedeutet, dass die PV und die Entropie zwar individuell konstant sind, aber durchaus ortsabhängig sein können. Darüber hinaus zeigt sich in (4.10), dass durch die Wirbel, in diesem Fall in Form von $\vec{\xi}_a \cdot \nabla \Pi$, nun auch die Temperatur zu einem lokal, stationären Feld wird. Bei der Lösung des stationären Windes (4.11) wird deutlich, dass sich dieser nun entlang der Schnittfläche zwischen Entropie und PV bewegt. Darüber hinaus besteht eine weitere besondere Eigenschaft des Gleichungssystems (4.9 - 4.11) darin, dass daraus ein Energie-Wirbel-Zustand, ein barotroper, wirbelfreier Zustand sowie ein barokliner, wirbelfreier Zustand direkt abgeleitet werden können. Diese drei Zustände sind, wie in Tabelle. 4.1 verdeutlicht, andernfalls nur separat mit Hilfe des Energie-Enstrophie-Funktional, des Energie-Entropie-Funktional sowie des Energie-Massen-Funktional bestimmbar. (diese drei Zustände werden in den folgenden Abschnitten ausführlich diskutiert). Dies verdeutlicht die übergeordnete Bedeutung des Energie-Wirbel-Entropie-Massen-Funktional. Somit steht dieses Funktional in der in Tabelle 3.4 gezeigten Hierarchie der Casimir-Funktionale an

$\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f$ $f = f(\Pi, s)$		
$\mathcal{C}_{f_s} = \mathcal{E}_p + \mathcal{S} + \mathcal{M}$ $f_s = \Pi^2 + s + 1$		
$\mathcal{C}_{f=\frac{1}{2}\Pi^2} = \mathcal{E}_p$ $f = \frac{1}{2}\Pi^2$	$\mathcal{C}_{f=s} = \mathcal{S}$ $f = s$	$\mathcal{C}_{f=1} = \mathcal{M}$ $f = 1$
wirbelbehaftet baroklin	wirbelfrei baroklin	wirbelfrei barotrop

Tabelle 4.1.: Diese Tabelle zeigt eine Übersicht der in dieser Arbeit beschriebenen Casimir-Funktionale und den daraus resultierenden Zuständen.

zweiter Stelle, direkt unter dem allgemeinen Casimir-Funktional $\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$ (siehe Tab. 4.1).

4.2. Die stationären Zustände und ein verallgemeinertes Bernoulli-Theorem

Im vorherigem Abschnitt wurde dargelegt, dass sich aus der stationären Lösung eines konkreten Energie-Casimir-Funktional eine Abhängigkeit zwischen der Bernoulli-Funktion, der PV und der Entropie ableiten lässt. Nun soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass es sich bei dieser stationären Lösung um ein verallgemeinertes, geschlossenes Bernoulli-Theorem handelt. Hierzu muss die aktuelle Form der stationären Temperatur (4.10) noch weiter umgeformt werden, indem man den Gradienten von (4.9) bildet:

$$\nabla B = -\lambda_f \Pi \nabla \Pi + \lambda_f k_s \nabla s \longrightarrow \nabla \Pi = \frac{-\nabla B + \lambda_f k_s \nabla s}{\lambda_f \Pi}. \quad (4.12)$$

Setzt man nun (4.12) in (4.10) ein, so folgt für die Temperatur:

$$T = \vec{\xi}_a \cdot \frac{\nabla B}{\rho \Pi}. \quad (4.13)$$

Über die Definition der PV ($\Pi = \frac{1}{\rho} \vec{\xi}_a \cdot \nabla s$) erhält man folgende allgemeine Darstellung des stationären Temperaturfeldes, welche hierbei mit T_{st} bezeichnet wird:

Stationäre Temperaturdarstellung

$$T_{st} = \frac{\vec{\xi}_a \cdot \nabla B}{\vec{\xi}_a \cdot \nabla s}, \quad (4.14)$$

Auch die Darstellung des stationären Windes (4.9) lässt sich auf diese Weise weiter umformen, indem man die Beziehung (4.12) in (5.7) einsetzt und nach der Dichte umstellt:

Stationäre Winddarstellung

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho \Pi} \nabla s \times \nabla B. \quad (4.15)$$

An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass im Anhang B.2 und B.1 eine alternative, direkte Herleitung der stationären Temperatur- und Winddarstellung aus dem primitiven Gleichungssystem beschrieben wird. Durch die stationäre Lösung des primitiven Gleichungssystem und der daraus abgeleiteten stationären Temperatur und Winddarstellung lässt sich somit erstmals ein geschlossenes, verallgemeinertes Bernoulli-Theorem ableiten:

Geschlossenes, verallgemeinertes

Bernoulli-Theorem

$$B = -\lambda_f \frac{1}{2} \Pi^2 + \lambda_f k_s s + \lambda_f k_m \quad (4.16)$$

$$T_{st} = \frac{\vec{\xi}_a \cdot \nabla B}{\vec{\xi}_a \cdot \nabla s} \quad (4.17)$$

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho \Pi} \nabla s \times \nabla B. \quad (4.18)$$

Dies ist eine weitere, abschließende Verallgemeinerung zu der Verallgemeinerung von (Schär, 1993), welche zwar bereits zeigte, dass die Bernoulli-Funktion entlang von Stromlinien konstant ist ($B = c$), und dass der stationäre Wind entlang der Schnittlinie von Bernoulli-Funktion und Entropie weht, aber die Lokalisierung der Bernoulli-Funktion durch Entropie und PV ($B = c(\Pi, s)$) und eine Darstellung

der stationären Temperatur fehlten hierbei noch.

Somit wird deutlich, dass die Form des Bernoulli-Theorems (4.16)-(4.18), welche über das Energie-Casimir-Funktional (4.8) abgeleitet wird, eine weitere Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems nach Schär (1993) darstellt. In den folgenden Abschnitten soll nun deutlich gemacht werden, dass das Bernoulli-Theorem, das mit Hilfe von \mathcal{C}_{f_s} abgeleitet wird, auch das klassische Bernoulli-Theorem beinhaltet. Darüber hinaus wird gezeigt, dass sich aus der stationären Lösung des Energie-Casimir-Funktional neben den bereits bekannten Formen des Bernoulli-Theorems, auch noch ein Bernoulli-Theorem für einen baroklinen, wirbelfreien Zustand ableiten lässt. In Anhang A wird zudem gezeigt, dass sich das klassische und das thermische Bernoulli-Theorem sowie die Verallgemeinerung nach Schär (1993) jeweils separat aus dem Massen-, Entropie und Enstrophie-Casimir-Funktional ableiten lassen. Dies unterstreicht nochmals die Bedeutung des konkreten Energie-Casimir-Funktional (4.8), da sich daraus mit dessen Hilfe direkt alle Formen des Bernoulli-Theorems ableiten lassen.

4.2.1. Bernoulli-Theorem für barokline und wirbelfreie Fluide

Das barokline und wirbelfreie Bernoulli-Theorem ergibt sich aus einem baroklinen und wirbelfreien Zustand. Dieser Zustand hat zwar einen thermodynamischen aber keinen wirbeldynamischen Freiheitsgrad, somit sind keine Wirbelinformationen vorhanden. Folglich hat die allgemeine stationäre Lösung (4.9 - 4.11) nun folgende Darstellung:

Stationäre Lösung

$B = \lambda_f k_s s + C,$	(4.19)
----------------------------	--------

$\rho T = \lambda_f k_s \rho.$	(4.20)
--------------------------------	--------

Es lässt sich feststellen, dass die Bernoulli-Funktion nun nicht mehr global konstant ist sondern durch die Entropie lokalisiert wird ($B = c(s)$). Denn die Entropie ist eine Lagrange'sche Erhaltungsgröße, was dazu führt, dass die Entropie zwar individuell konstant ist, aber durchaus ortsabhängig sein kann. Dennoch ist die

Bernoulli-Funktion auf isentropen Flächen individuell erhalten, was diesem thermodynamischen Modell erlaubt trotz Baroklinität wirbelfrei zu bleiben. Weiterhin zeigt sich, dass der durch das Entropie-Casimir bedingte Zustand wegen (4.20) global isotherm ist ($T = \lambda_f k_s = \text{const.}$) und sich somit im thermischen Gleichgewicht befindet. Die Dichte ρ und somit auch der Druck p (wegen $p = \rho RT$) sind aber weiterhin noch ortsabhängig. Führt man nun (4.19) und (4.20) zusammen, so ergibt sich:

$$B = Ts + C. \quad (4.21)$$

Dieses Gleichgewicht zeigt nach T umgestellt ($T = \frac{B-C}{s}$) strukturelle Ähnlichkeiten zu der Darstellung des stationären Temperaturfeldes des Energie-Wirbel-Gleichgewichtes (4.14), wobei der Wirbelanteil fehlt. Dies ist damit zu begründen, dass das Funktional der Ertel'schen potentiellen Enstrophie ($\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \int_V d\tau \rho \Pi(s)^2$) als Casimir des wirbelbehafteten Zustandes bereits Informationen über die Entropie enthält. Insgesamt lässt sich aus dem definierten, wirbelfreien Zustand eine ortsabhängige, stationäre Strömung im thermischen Gleichgewicht ableiten.

Darüber hinaus lässt sich aus (4.21) noch ein Zusammenhang zwischen mechanischer Energie und freier Enthalpie, ohne chemische Reaktionen $G = h - Ts$ ableiten:

$$\begin{aligned} B - Ts &= C \\ \iff \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \phi + h - Ts &= C \\ \iff \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \phi &= -G + C. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Für die freie Enthalpie lässt sich zudem noch ein totales Differential berechnen, welches allgemein für ein Gemisch aus i verschiedenen Gasen die Form

$$dG = \frac{1}{\rho} dp - s dT + \sum_i \mu_i dN_i \quad (4.23)$$

annimmt. Dabei beschreibt μ_i das chemische Potential, welches die Eigenschaft eines Stoffes charakterisiert zu diffundieren, mit anderen Stoffen zu reagieren sowie den Aggregatzustand zu wechseln. N_i ist hierbei die Stoffmenge. Die durch (4.23)

beschriebene Änderung der freien Enthalpie ist ein wichtiges Maß unter welchen Bedingungen eine Reaktion abläuft. So gilt:

$dG < 0$: *Exergone Reaktion (Reaktion läuft freiwillig ab).*

$dG = 0$: *Keine Reaktion (Gleichgewichtssituation).*

$dG > 0$: *Endergone Reaktion (Reaktion braucht Energiezufuhr).*

Wenn man nun darüber hinaus (4.22) differenziert so ergibt sich:

$$d\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \phi\right) = -dG. \quad (4.24)$$

Somit stellt sich eine Zunahme der mechanischen Energie ($\vec{v}^2 + \phi$) für exergone Reaktionen und eine Abnahme für endergone Reaktionen ein. Dementsprechend gibt es keine Änderung der mechanischen Energie für eine konstante freie Enthalpie.

Chemisches Gleichgewicht für $\vec{v} = 0$

Die allgemeine Lösung des stationären, baroklinen, wirbelfreien Zustandes besitzt keine Informationen über den Wind. Nimmt man nun $\vec{v} = 0$ an, so folgt mit $\vec{\xi} = 0$ und die Wirbelfreiheit wird nicht verletzt. Somit wird die allgemeine stationäre Lösung (4.9 - 4.11) zu:

<p>Stationäre Lösung</p>

$B = \lambda_s k_s s + C,$	(4.25)
----------------------------	--------

$\rho T = \lambda_f k_s \rho$	(4.26)
-------------------------------	--------

$\rho \vec{v} = 0.$	(4.27)
---------------------	--------

Ferner kann man (4.25) und (4.26) zusammenführen, womit sich wieder ergibt:

$$B = Ts + C. \quad (4.28)$$

Des Weiteren lässt sich aus (4.28) noch ein weiterer Gleichgewichtszustand, unter Berücksichtigung von $\vec{v} = 0$ (4.27) und $\phi = const.$, einführen. Hierfür muss die

freie Enthalpie $G = h - Ts$ mit einbezogen werden:

$$\begin{aligned}
 B - Ts &= C \\
 \iff \phi + h - Ts &= C \\
 \iff -\phi &= G + C.
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Wenn man nun darüber hinaus für (4.29) das totale Differential berechnet, so ergibt sich:

$$dG = 0. \tag{4.30}$$

Somit stellt sich der chemische Gleichgewichtszustand als weitere Lösung für ein stationäres, baroklines und wirbelfreies System heraus.

4.2.2. Klassisches Bernoulli-Theorem

Das klassische Bernoulli-Theorem ergibt sich aus dem stationären barotropen und wirbelfreien Zustand. Diese stationäre Lösung nimmt an, dass der wirbelfreie, barotrope Zustand keine Wirbelinformationen und auch keine thermodynamischen Informationen beinhaltet. Folglich hat die allgemeine stationäre Lösung (4.9 - 4.11) nun folgende Darstellung:

Stationäre Lösung
$B = \lambda_f k_m = const.$

(4.31)

Hierbei gilt, dass $\lambda_f k_m$ nicht ortsabhängig ist, was dazu führt, dass die Bernoulli-Funktion, anders als noch beim Energie-Entropie-Zustand (4.19), global konstant ist, da nun keine Lagrange'sche Erhaltungsgröße die Bernoulli-Funktion individuell lokalisiert. Somit ist die Strömung nicht nur stationär und reibungsfrei, sondern auch noch wirbelfrei und isentrop, da durch die Wahl des Massen-Casimirs der Thermo- und Wirbeldynamische Freiheitsgrad wegfallen. Eine solche Strömung wird auch Potentialströmung genannt, wobei für diese Art von Strömung die

Bernoulli-Funktion folgende Form annimmt:

$$B = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + \phi + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (4.32)$$

Diese Darstellung entspricht dem klassischen Bernoulli-Theorem.

Hydrostatisches Gleichgewicht für $\vec{v} = 0$

Im barotropen, wirbelfreien Zustand fehlt neben einer Aussage über die Temperatur auch eine Aussage über den Wind \vec{v} . Setzt man nun aber doch $\vec{v} = 0$, wird die Wirbelfreiheit weiterhin nicht verletzt ($\vec{\xi} = 0$) und man erhält für die allgemeine stationäre Lösung (4.9 - 4.11) folgende Darstellung:

Stationäre Lösung

$B = \lambda_f k_m = \text{const.}$	(4.33)
-------------------------------------	--------

$\rho \vec{v} = 0.$	(4.34)
---------------------	--------

Die nun hinzugekommene thermodynamische Information verdeutlicht, dass die Temperatur global konstant ist ($T = \lambda_f k_s = \text{const.}$). Zudem ist die Geschwindigkeit nicht mehr beliebig, sondern hat die triviale Lösung $\vec{v} = 0$. Somit ergibt sich aus (4.33) folgende Beziehung:

$$\phi + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (4.35)$$

Setzt man nun $\phi = gz$ und nimmt an, dass ρ höhenkonstant ist, so folgt über das partielle Höhen-Differential $\frac{\partial}{\partial z}$ die hydrostatische Grundgleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (4.36)$$

Dieses Ergebnis verdeutlicht, dass der barotrope und wirbelfreie Grundzustand für den Fall $\vec{v} = 0$ hydrostatisch ist.

4.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine weitere und nun geschlossene Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems mit Hilfe der stationären Lösung des, in dieser Arbeit erstmals beschriebenen, Energie-Casimir-Funktional aufgestellt. Hierbei konnte festgestellt werden, dass sich eine funktionale Abhängigkeit zwischen der Bernoulli-Funktion, der PV sowie der Entropie ergibt ($B = B(\Pi, s)$). Ferner konnte eine stationäre Temperatur- und Winddarstellung abgeleitet werden. Die funktionale Abhängigkeit $B = B(\Pi, s)$ ist als weitere Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems, mit $B = c(\Pi, s)$ beziehungsweise $\frac{dB}{dt} = 0$ zu verstehen. Somit ist die Bernoulli-Funktion im allgemeinen Fall konstant entlang von Isolinien mit konstanter PV und Entropie. Diese Abhängigkeit kann als Kopplung zwischen der Euler'schen und der Lagrange'schen Darstellung interpretiert werden, die in einem stationären Zustand gleich sind. Diesbezüglich repräsentiert das Feld der Bernoulli-Funktion die Euler'sche Sichtweise und die individuell erhaltenen Größen der PV und der Entropie die Lagrange'sche Sichtweise. Somit kann das Bernoulli-Theorem letztlich als ein Ausdruck der Abhängigkeit zwischen der Euler'schen und der Lagrange'schen Sichtweise gesehen werden, welche für einen stationären Fall äquivalent sind. Ferner ist die weitere Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems auch durch den DSI ausgedrückt, da dieser gerade dann Null ist, wenn die Bernoulli-Funktion abhängig von der Entropie und der PV ist (eine genauere Beschreibung des DSI erfolgt in Abschnitt 5). Dies ist gerade für den stationären, reibungsfreien und adiabatischen Grundzustand der Fall. Neben der weiteren geschlossenen Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems konnte erstmals ein wirbelfreies, baroklines Bernoulli-Theorem herausgearbeitet werden, das zwischen dem klassischen Bernoulli-Theorem und der Verallgemeinerung von (Schär, 1993) steht, da es anders als das klassische Bernoulli-Theorem baroklin ist aber im Gegensatz zur Verallgemeinerung wirbelfrei ist. Für dieses thermodynamische Modell ist die Bernoulli-Funktion nicht mehr, wie beim klassischen Bernoulli-Theorem, global, sondern auf isentropen Flächen konstant. Die stationäre Temperatur ist diesbezüglich als global konstant anzusehen. Tabelle 4.2 gibt eine Übersicht über die vier verschiedenen Formen des Bernoulli-Theorems sowie deren zugrundeliegen-

de Bedingungen und die entsprechend ableitbaren Darstellungen für \vec{v}_{st} und T_{st} . Hierbei ist es wichtig zu erwähnen, dass es in der von Schär (1993) vorgestellten Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems keine konkrete Spezifizierung der individuellen Erhaltung der Bernoulli-Funktion gibt. Dennoch muss beachtet werden, dass die Bernoulli-Funktion, für eine baroklinen, wirbelbehafteten Zustand nicht mehr global, sondern auf Flächen gleicher PV sowie auf Flächen gleicher Entropie konstant ist.

Tabelle 4.2 verdeutlicht weiterhin, dass durch die hier vorgestellte geschlossene, Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems, zusätzlich zum stationären Wind, auch eine Darstellung der stationären Temperatur abgeleitet werden kann. Somit beschreibt diese Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems vier (3D-Wind und Temperatur) von fünf Variablen des atmosphärischen Grundgleichungssystems für einen stationären Zustand. Die einzige Variable, deren stationärer Darstellung sich nicht ableiten lässt, ist die Dichte. Die Tatsache, dass die Dichte aber dennoch für die Berechnung der stationären Temperatur- und Winddarstellung benötigt wird, lässt vermuten, dass eine Vielzahl von stationären Zuständen durch die räumliche Verteilung des Dichtefeldes aufgespannt werden kann.

Klassisches Bernoulli-Theorem (Venturi & Bernoulli, 18. Jh.):	Wirbelfreies, baroklines Bernoulli-Theorem (neu)	Verallgemeinerung von Schär, 1993:	Weitere Verallgemeinerung: (neu)
Bedingung: Inkompressibilität Barotropie Wirbelfrei	Bedingung: Kompressibilität Baroklinität Wirbelfrei	Bedingung: Kompressibilität Baroklinität Wirbelbehaftet	Bedingung: Kompressibilität Baroklinität Wirbelbehaftet
$B = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \phi + \frac{p}{\rho} = const.$	$B = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \phi + h = B(s) = c(s)$ $T_{st} = const.$	$B = (\vec{v}^2 + \phi + h) = c^*$ $\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \nabla s \times \nabla B$	$B = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \phi + h = B(\Pi, s) = c(\Pi, s)$ $T_{st} = \vec{\xi}_a \cdot \frac{\nabla B}{\rho\Pi}$ $\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \nabla s \times \nabla B$ $DSI = 0$

Tabelle 4.2.: Diese Tabelle zeigt eine Übersicht über die verschiedenen Formen des Bernoulli-Theorems mit den jeweils zugrunde liegenden Bedingungen und den entsprechenden Ausdrücken für \vec{v}_{st} und T_{st} . * In der von (Schär, 1993) vorgestellten Verallgemeinerung wird gezeigt, dass die Bernoulli-Funktion entlang von Stromlinien konstant ist und nicht mehr global; eine nähere Spezifizierung fehlt allerdings in dieser Veröffentlichung.

5. Der DSI und das stationäre Wind- und Temperaturfeld

Im vorherigem Abschnitt wurde eine stationäre Temperatur- und Winddarstellung abgeleitet und es konnte gezeigt werden, dass diese beiden Darstellung, neben der individuellen Erhaltung der Bernoulli-Funktion, Teil einer geschlossenen, verallgemeinerten Form des Bernoulli-Theorems sind. Diese beiden Darstellungen werden in diesem Kapitel nun ausführlicher diskutiert. Ferner wurde im vorherigem Kapitel beschrieben, dass die Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems auch durch den DSI ausgedrückt wird, da dieser gerade dann Null ist, wenn die Bernoulli-Funktion abhängig von der Entropie und der PV ist. Diese Eigenschaft des DSI wird in diesem Kapitel näher beschrieben, wobei in diesem Zusammenhang auch die Verbindung zur stationären Temperatur und Winddarstellung deutlich gemacht wird.

Das diagnostische Potential des besagten atmosphärischen Grundzustandes, beziehungsweise dessen Abweichung, konnte bereits in zahlreichen Studien (Weber und Névir, 2007; Claußnitzer et al., 2008b; Claußnitzer und Névir, 2009) mit Hilfe des dynamischen Zustandsindex (DSI) gezeigt werden. Allerdings gab es bisher wenige Studien, die sich mit den diagnostischen Eigenschaften der stationären Temperatur- und Winddarstellung befassten. Diesbezüglich quantifizierte Gassmann (2014) eine Abweichung von der stationären Winddarstellung in Form eines nicht-stationären Windfeldes. In dieser Studie wurde der stationäre Wind inaktiver Wind und dessen Abweichung aktiver Wind genannt, da die Advektion der PV mit dem inaktiven Wind verschwindet, wohingegen die Advektion mit dem aktiven Wind mit nicht-balancierten Prozessen in Verbindung steht. Hierbei zeigt sich,

dass die Divergenz des nicht-stationären Windfeldes in guter Übereinstimmung mit der Dipol-Struktur des DSI ist. In Anlehnung an die Studie von Gassmann (2014), soll erstmals auch das diagnostische Potential des stationären Temperaturfeldes im Folgenden anhand einer Fallstudie genauer untersucht und mit dem DSI verglichen werden.

5.1. Diskussion der stationären Temperaturdarstellung

Im vorherigen Abschnitt wurde über die stationäre Lösung, welche über das Energie-Casimir-Funktional bestimmt wurde, gezeigt, dass die Temperatur über die PV lokalisiert wird und über die Definition der stationären Bernoulli-Funktion folgende Lösung abgeleitet:

Stationäre Temperaturdarstellung

$$T_{st} = \frac{\vec{\xi}_a \cdot \nabla B}{\vec{\xi}_a \cdot \nabla s}, \quad (5.1)$$

Diese Temperaturdarstellung lässt sich soweit umformen, dass sich daraus der adiabatische und der hydrostatische Zustand ableiten lassen. Hierfür muss der Wind in (4.14) als konstant angenommen werden ($\vec{v} = const.$), woraus auch Wirbelfreiheit ($\vec{\xi} = 0$) folgt. Somit ergibt sich, wenn nur der vertikale Anteil beachtet wird und nachdem der Nenner auf die andere Seite gebracht wurde, folgende Gleichung:

$$T \frac{\partial s}{\partial z} = g + c_p \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Für eine adiabatische Schichtung gilt $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$, was dann für (5.2) folgendes ergibt:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{c_p}. \quad (5.3)$$

Dies entspricht genau der Definition einer adiabatischen Schichtung, nämlich, dass der individuelle trockenadiabatische Temperaturgradient $\frac{g}{c_p}$ gleich dem negativen

geometrischen Temperaturgradienten $\frac{\partial T}{\partial z}$ ist. Ausgangspunkt für den hydrostatischen Zustand ist wieder (5.2). Mit der Definition der Entropie $\frac{\partial s}{\partial z} = c_p \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z}$ über die potentielle Temperatur ($\Theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}$) ergibt sich wegen

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\Theta}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_p} \frac{\Theta}{p} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (5.4)$$

folgendes:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{TR}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = g + c_p \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Mit Hilfe der idealen Gasgleichung $p = \rho RT$ folgt dann letztendlich:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (5.6)$$

was der Definition des hydrostatischen Zustands entspricht.

5.2. Diskussion der stationären Winddarstellung

Neben einer stationären Temperaturdarstellung, lassen sich auch mit Hilfe des Energie-Casimir-Funktionalen insgesamt drei stationäre Winddarstellungen ableiten. Um Verwechslungen mit dem realen Wind zu vermeiden, wird der stationäre Wind im weiteren Verlauf als \vec{v}_{st} bezeichnet. Weiterhin werden diese Winddarstellungen nummeriert.

Die erste stationäre Winddarstellung ergibt sich direkt aus (4.11), indem man durch die Dichte ρ teilt:

1. stationäre Winddarstellung

$$\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho} \lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi. \quad (5.7)$$

Äquivalent zu der in Kapitel 3.1 hergeleiteten Bewegung im Phasenraum $\dot{x} = \nabla H_1 \times \nabla H_2$ findet auch die Bewegung im Ortsraum über \vec{v}_{st} auf der Schnittlinie zweier Erhaltungsflächen statt. Konkret handelt es sich hierbei um die Entropie-

und die PV-Fläche. Eine konkrete geometrische Interpretation ist aber im dreidimensionalen Ortsraum schwierig, deshalb ist es sinnvoll die Dynamik immer auf einer der materiellen Flächen zu betrachten. So würde \vec{v}_{st1} auf einer PV-Fläche parallel zu den Isentropen wehen und entsprechend auf isentropen Flächen parallel zu den Isolinien gleicher PV. Hierbei wird die geometrische Interpretation nochmal in Abschnitt 5.3 genauer veranschaulicht.

Die zweite Winddarstellung leitet sich ab, indem man die Beziehung (4.12) in (5.7) einsetzt:

2. stationäre Winddarstellung

$$\vec{v}_{st2} = \frac{1}{\rho\Pi} \nabla s \times \nabla B. \quad (5.8)$$

Diese Winddarstellung wurde bereits von Schär (1993) direkt aus dem primitiven Gleichungssystem hergeleitet, um zu zeigen, dass der Wind im stationären, reibungsfreien, adiabatischen und reibungsfreien Grundzustand auf den Schnittlinien der Bernoulli- und der Theta- beziehungsweise Entropie-Flächen weht. Diese Darstellung wurde bereits in Kapitel 4 abgeleitet und in Verbindung mit dem Bernoulli-Theorem gebracht. Dennoch wird diese Darstellung im Folgendem als 2. Winddarstellung bezeichnet, da für deren Ableitung mehr Umformungen, als für \vec{v}_{st1} , nötig sind. Da der stationäre Wind auch schon bereits parallel zu den Isentropen und Linien gleicher PV weht (5.7), folgt, dass die dritte stationäre Winddarstellung auf den Schnittlinien der Bernoulli-Fläche und der PV-Fläche wehen muss. Dies wird auch durch (3.64) deutlich, da daraus folgt, dass $B = B(s, \Pi)$ gilt. Somit nimmt die dritte stationäre Winddarstellung folgende Form an:

3. stationäre Winddarstellung

$$\vec{v}_{st3} = \frac{1}{\rho} \lambda_g \nabla B \times \nabla \Pi. \quad (5.9)$$

Hierbei steht λ_g für einen nicht weiter spezifizierten, global konstanten Lagrange'schen Parameter. Über die Dichte ρ , die in allen drei Winddarstellungen explizit enthalten ist, kann die Kontinuitätsgleichung ($\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) = 0$) mit einbezogen werden. Dies ist wiederum essentiell für die Herleitung des DSI. Der DSI und dessen

Herleitung mit Hilfe der drei stationären Winddarstellungen werden im folgenden Abschnitt eingehender diskutiert.

5.3. Diskussion der Definition des dynamischen Zustandsindex

Die Herleitung des DSI und dessen Definition im Grundzustand ergibt sich am anschaulichsten, wenn man die Definition der zweiten stationären Winddarstellung (5.8) in die Kontinuitätsgleichung für einen stationären Zustand ($\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st2}) = 0$) einsetzt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st2}) &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\Pi} \nabla s \times \nabla B \right) \\ &= \frac{1}{\Pi} \nabla \cdot (\nabla s \times \nabla B) - \frac{1}{\Pi^2} \nabla \Pi \cdot (\nabla s \times \nabla B) \\ &= -\frac{1}{\Pi^2} \nabla \Pi \cdot (\nabla s \times \nabla B) = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, denn über die Spatproduktregel ergibt sich eine Rotation eines Gradienten, welche gleich Null ist. Nun kann die Gleichung auch noch mit $-\Pi^2$ multipliziert werden, was zu

$$\nabla \Pi \cdot (\nabla s \times \nabla B) = 0 \quad (5.11)$$

führt. Dieses Spatprodukt aus Π , s und B lässt sich auch in Form einer Funktionaldeterminante schreiben:

$$\frac{\partial(\Pi, s, B)}{\partial(x, y, z)} = 0. \quad (5.12)$$

Dies ist die Energie-Wirbel-Gleichung für eine reibungsfreie, stationäre und adiabatische Atmosphäre im Grundzustand. Damit in der Determinante (5.12) die massenbehafteten Ströme in der Atmosphäre berücksichtigt werden können, erfolgt eine Transformation, über die Beziehung $dm = dadbdc = \rho dx dy dz$, vom Ortssystem x, y, z zu Lagrange'sche Massenkoordinaten a, b, c . Diese Determinan-

te in Massenkoordinaten wird als der dynamische Zustandsindex bezeichnet:

$$DSI := \frac{\partial(\Pi, s, B)}{\partial(a, b, c)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Pi, s, B)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\rho} \nabla \Pi \cdot (\nabla s \times \nabla B). \quad (5.13)$$

Die Einheit des DSI ist

$$[DSI] = \frac{K^2 m^4}{kg^2 s^3} = \frac{PV^2}{s}. \quad (5.14)$$

Diese ergibt sich aus den beteiligten Größen. Der DSI enthält Informationen über den wirbeldynamischen, entropischen sowie energetischen Zustand der Atmosphäre. Für eine reibungsfreie, stationäre und adiabatische Atmosphäre im Grundzustand ist der DSI gleich Null. Jenes ist gleichbedeutend mit einer funktionalen Abhängigkeit zwischen der Bernoulli-Funktion, der PV und der Entropie (zum Beispiel $B = B(s, \Pi)$).

Für die Herleitung des DSI über die Kontinuitätsgleichung wurde von Névir (2004) zwar die zweite Winddarstellung verwendet, dennoch gilt die Divergenzfreiheit des Produktes aus Dichte und stationären Wind auch für die anderen beiden Winddarstellung:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st1}) = \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st2}) = \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st3}) = 0. \quad (5.15)$$

An dieser Stelle macht sich aber scheinbar ein Widerspruch bemerkbar. Denn grundsätzlich gilt für den Grundzustand $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st1}) = \nabla \cdot (\lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi) = 0$ und für eine Abweichung vom Grundzustand sollte $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \neq \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st1}) = \nabla \cdot (\lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi) \neq 0$ gelten. Allerdings wird die zweite Bedingung auf den ersten Blick für instationäre, diabatische und reibungsbehaftete Prozesse nie erfüllt, denn die Rotation eines Gradienten ist immer gleich Null (da gilt: $\nabla \cdot (\lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi) = \lambda_f [\nabla \Pi \cdot (\nabla \times \nabla s) - \nabla s \cdot (\nabla \times \nabla \Pi)]$). Der Ausweg ist, dass man außerhalb des Grundzustands den Eichfaktor λ_f beziehungsweise λ_g nicht mehr als global konstant ansehen darf, was zu

$$\nabla \cdot (\lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi) = \lambda_f \nabla \cdot (\nabla s \times \nabla \Pi) + \nabla \lambda_f \cdot (\nabla s \times \nabla \Pi) = \nabla \lambda_f \cdot (\nabla s \times \nabla \Pi) \quad (5.16)$$

führt. Somit ergibt sich in gewisser Weise eine Quantifizierung des DSI für Abwei-

chungen vom Grundzustand ($DSI \neq 0$). Folglich gilt:

<p>Eigenschaft der Lagrange'schen Parameter</p> <p>$DSI = 0 \longrightarrow \nabla \lambda_f \cdot (\nabla s \times \nabla \Pi) _{\text{Grundzust.}} = 0$ (5.17)</p> <p>$DSI \neq 0 \longrightarrow \nabla \lambda_f \cdot (\nabla s \times \nabla \Pi) \neq 0.$ (5.18)</p>

Eine weitere Eigenschaft des Grundzustands beziehungsweise des Verschwindens des DSI, ist die Advektionsfreiheit PV, der Bernoulli-Funktion sowie der Entropie über die stationären Winddarstellungen, denn nach Anwendung der Spatproduktregel auf (5.11) gilt auch:

$$\vec{v}_{st1} \cdot \nabla B = \lambda_f DSI = 0, \quad (5.19)$$

$$\vec{v}_{st2} \cdot \nabla \Pi = \frac{1}{\Pi} DSI = 0, \quad (5.20)$$

$$\vec{v}_{st3} \cdot \nabla s = \lambda_g DSI = 0. \quad (5.21)$$

Die unterstreicht den gleichen Stellenwert der Winddarstellungen untereinander, da alle drei stationären Winddarstellungen nur zusammen die Advektionsfreiheit der Lagrange'schen Größen B , Π und s im Grundzustand herbeiführen.

Eine geometrische Interpretation des DSI im Grundzustand mit der dazugehörigen Advektionsfreiheit (5.19)-(5.21), lässt sich leichter nachvollziehen, wenn man die Dynamik auf ein Π -, B - oder Θ -System überführt. Hierzu stellt Abb. 5.1 exemplarisch das PV-Feld, das Feld der Bernoulli-Funktion sowie das DSI-Feld auf einer konstanten Θ -Fläche (330 K) dar. Des Weiteren ist noch das Windfeld in 5.1(a) und 5.1(b) aufgetragen. Dadurch, dass die Dynamik Θ -Fläche betrachtet wird, reduziert sich der Zustandsraum, sodass von den ursprünglichen drei Winddarstellungen nur zwei übrig bleiben:

$$\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho \Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_\Theta \times \nabla \Pi, \quad (5.22)$$

$$\vec{v}_{st2} = \frac{1}{\rho \Pi} \vec{k}_\Theta \times \nabla B, \quad (5.23)$$

wobei sich für den DSI auf einer Θ -Fläche folgendes ergibt:

$$DSI_{\Theta} := \frac{1}{\rho} \vec{k}_{\Theta} \cdot (\nabla_h \Pi \times \nabla_h B). \quad (5.24)$$

Eine Herleitung von (5.23-5.24) ist im Anhang C zu finden.

Die dargestellten Felder zeigen hierbei den Sturm Lothar für die ERA-Interim Reanalysedaten. Hierbei werden sowohl das Sturmereignis als auch die verwendeten Reanalysedaten in Abschnitt 5.4.1 näher beschrieben. In Abb. 5.1 zu erkennen, dass überall dort, wo der Wind die Flächen gleicher PV beziehungsweise Bernoulli-Funktion schneidet, der DSI ungleich Null ist. Dies entspricht gerade dem Bereich der Frontalzone. In diesem Gebiet ist $\vec{v} \neq \vec{v}_{st}$ und es gilt $B \neq B(\Pi)$. Letzteres ist auch an der Bernoulli-Funktions-Isolinie zu erkennen, welche in 5.1(a) eingezeichnet ist, da sie die PV-Isolinien dort schneidet, wo ein DSI-Dipol zu erkennen ist.

5.3.1. Eigenschaften des DSI

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits gezeigt, dass unter der Erfüllung von $B = B(\Pi, s)$ der DSI gleich Null ist. Somit quantifizieren Werte ungleich Null Zustände, in denen die Atmosphäre vom stationären und adiabatischen Zustand abweicht. Hierzu soll Abb. 5.2 etwas mehr Aufschluss geben. Ausgangspunkt ist der stationäre und adiabatische Grundzustand, der unter ruhigen Wetterbedingungen von der Atmosphäre erreicht wird. Demzufolge bewirken instationäre und diabatische Störungen einen von Null verschiedenen DSI. In diesen Gebieten kommt es zum Beispiel verstärkt zu Zyklonogenese, Niederschlag und Stürmen. Danach findet sich das System wieder im Grundzustand ein. Eine genauere Analyse hierzu ist in Weber und Névir (2007) und Claußnitzer und Névir (2009) zu finden. Jedoch bleibt noch zu erwähnen, dass die Umkehrung der DSI-Definition nicht gilt. Das heißt, dass man von einem DSI gleich Null nicht auf eine stationäre und adiabatische Atmosphäre schließen kann. Dies liegt an der Anwendung der Divergenz bei Gleichung (3.25), wobei die Divergenz keine Äquivalenzumformung darstellt.

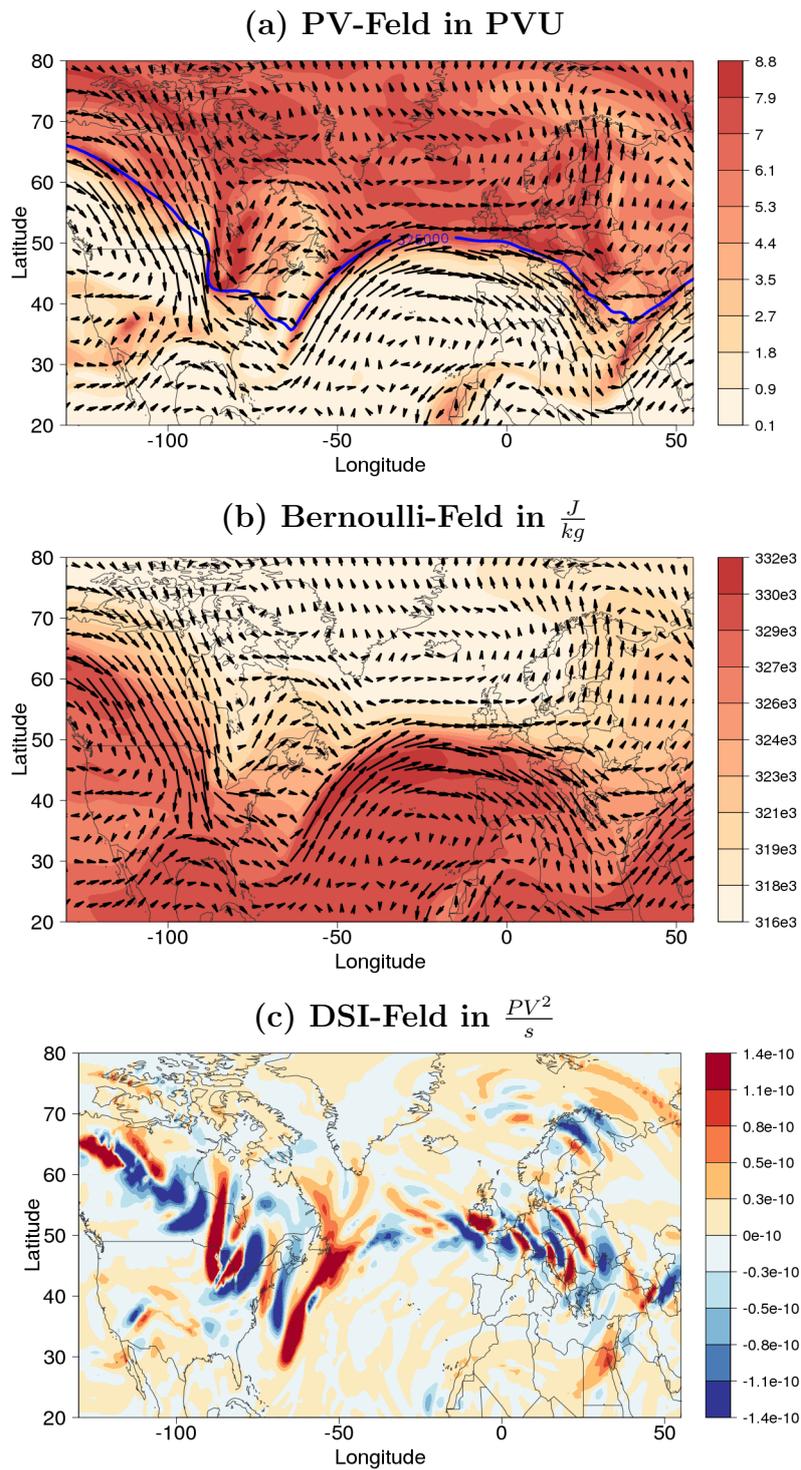


Abbildung 5.1.: Feld der potentiellen Vorticity [PVU] (Abbildung a), der Bernoulli-Funktion [$\frac{J}{kg}$] (Abbildung b) sowie des DSI [$\frac{PV^2}{s}$] (Abbildung c) auf der 330 K-Fläche für den 26.12.1999 12 UTC (ERA-Interim). Die Pfeile in (a) und (b) zeigen den Wind und die blaue Linie in (a) die 325000 $\frac{J}{kg}$ Isolinie der Bernoulli-Funktion.

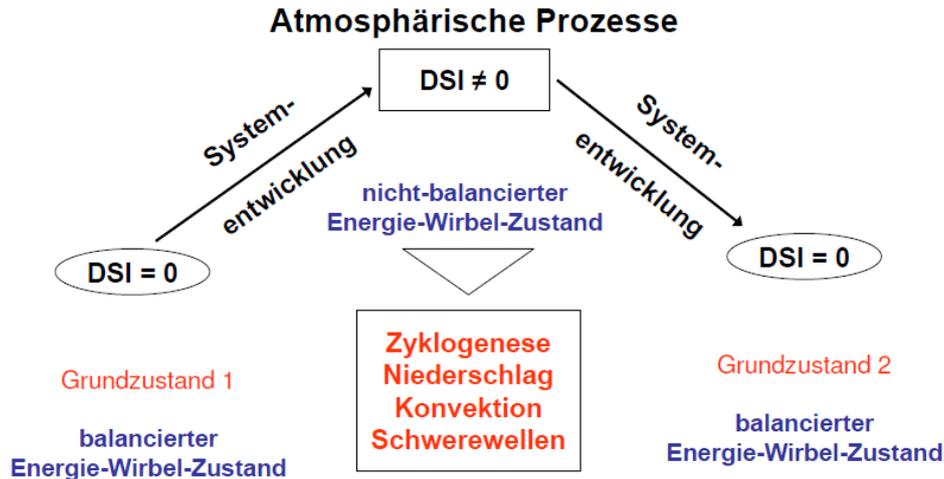


Abbildung 5.2.: Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Systementwicklung und dem DSI (nach Weber und Névir, 2007).

Außerdem weist der DSI auch eine Dipolstruktur auf, sodass aufgrund des Zwischenwertsatzes, der DSI in der Mitte des Dipols auch gleich Null ist.

Eine weitere Eigenschaft des DSI ist die starke Abhängigkeit seiner Amplitude von der Höhe. In hohen Druckniveaus ist der DSI größer als in geringen Druckniveaus. Der Grund hierfür ist, dass die Dichte sowohl in die potentielle Temperatur, als auch in die potentielle Vorticity eingeht. Mit der zusätzlichen Dichtenormierung wird dieser Effekt noch verstärkt.

5.4. Das stationäre Temperaturfeld am Beispiel von Sturm Lothar

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob die stationäre Temperatur, ähnlich wie der DSI, in der Lage ist, nicht balancierte Prozesse in der Atmosphäre zu diagnostizieren. Hierzu soll im weiteren Verlauf auf die synoptische Situation von Sturm Lothar, welcher am 26. Dezember 1999 über Deutschland wütete, eingegangen werden.

5.4.1. Synoptische Situation von Sturm Lothar

Der Sturm, der am 26. Dezember 1999 über Zentraleuropa zog, erhielt vom Deutschen Wetterdienst den Namen Lothar und war einer der stärksten seiner Art. Auf seinem Weg durch Europa verursachte Lothar immense Schäden an Wäldern und Gebäuden. Der Sturm entwickelte sich am Vortag aus einer noch unscheinbaren Welle vor der Ostküste Nordamerikas. Am Sonntag den 26. Dezember 1999 um 0 UTC befand sich Lothar schon etwa 300 km westlich vor der Britischen Küste. Die Geopotentialstörung war in 500 hPa Höhe kaum zu erkennen und konnte nur in der unterern Troposphäre ausgemacht werden (siehe Abb. 5.2(a)). Allerdings zeichnete sich das Gebiet um Lothar durch außerordentlich starke Baroklinität aus (Ulbrich et al., 2001), sodass sich 6 Stunden später das Tief explosionsartig entwickeln konnte, nachdem sich eine Geopotentialanomalie auch in der oberen Troposphäre gebildet hat. Hierbei erreichte Lothar über Nordfrankreich schon einen Kerndruck von etwa 962 hPa. Ab ca. 12 UTC zog der Orkan durch Deutschland (siehe Abb. 5.2(b)) über Trier, Frankfurt, Jena bis nach Ostsachsen. Die stärksten Winde wurden hierbei südlich des Orkantiefs beobachtet und trafen somit weite Teile Frankreichs, der Schweiz und Süddeutschlands. Hierbei wurden Spitzenböen von bis zu 151 km/h in Karlsruhe und 215 km/h auf dem Feldberg im Schwarzwald gemessen. Diese hohen Windgeschwindigkeiten wurden durch ungewöhnlich hohe Drucktendenzen bedingt. So wurde zum Beispiel an der Station Caen in Nordfrankreich ein Druckabfall von 27,7 hPa innerhalb von 3 Stunden und ein darauf folgender 3-stündiger Druckanstieg von 29 hPa gemessen.

5.4.2. Verwendete Reanalysedaten

Für diesen Teil der Arbeit wurden die ERA-Interim-Reanalysedaten (Dee et al., 2011) verwendet. Diese standen zunächst auf einem T255 Gitter ($\sim 0.75^\circ$) mit 60 vertikalen Leveln für den Zeitraum von 1979 - 2012 zur Verfügung. Hierbei wurden 6-stündliche Daten (0 UTC, 6, UTC, 12 UTC, 18 UTC) für den Zeitraum zwischen dem 24.12.1999 und dem 01.01.2000 analysiert. Die auf Druckflächen und der 2PVU-Fläche betrachteten Variablen der Reanalyse sind die Felder der

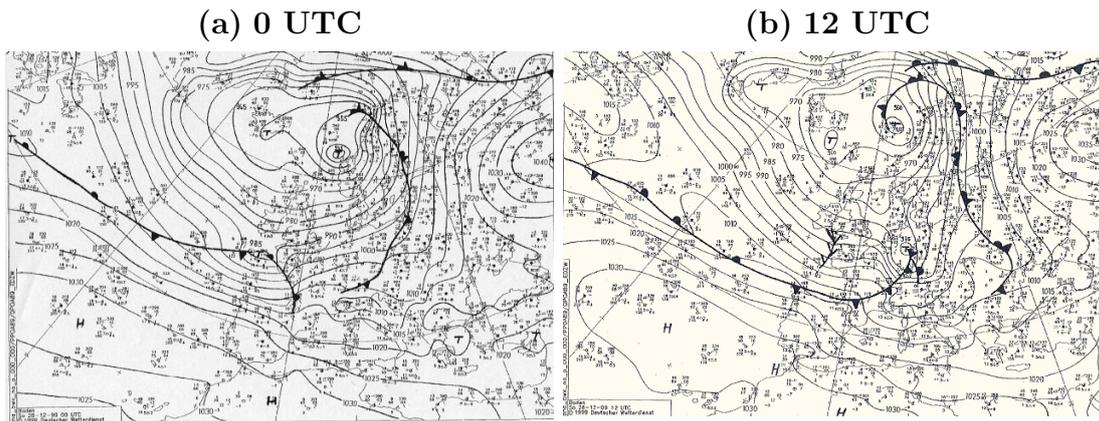


Abbildung 5.3.: Bodenanalyse vom 26.12.1999 0 UTC (Abbildung a) und 12 UTC (Abbildung b). Quelle: Deutscher Wetterdienst.

drei Windkomponenten, der Temperatur, des Geopotentials sowie der potentiellen Vorticity (nur auf Druckflächen).

5.4.3. Analyse des stationären Temperaturfeldes

In diesem Abschnitt soll, wie bereits erwähnt, untersucht werden, ob die stationäre Temperatur (4.14), ähnlich wie der DSI, in der Lage ist, nicht balancierte Prozesse in der Atmosphäre zu diagnostizieren. Hierzu wurde zunächst die Differenz zwischen der beobachteten und der stationären Temperatur berechnet:

$$\Delta T = T - T_{st}. \quad (5.25)$$

Somit müsste ΔT in der Lage sein, den Einfluss von Diabasis und Instationarität auf das Temperaturfeld zu quantifizieren. Zunächst ist bei einem Blick auf das DSI-Feld vom 26.12.1999 12 UTC in Abb. 5.4(a) eine Dipolstruktur über Nordfrankreich zu erkennen, wo auch Lothar zum gegenwärtigen Zeitpunkt sein Maximum erreichte. Diese Struktur stimmt auch gut mit dem Geopotentialtief über diesem Gebiet überein. Zusätzlich sind noch weitere DSI-Dipole bei 20° W, 75° W und 100° W zusammen mit entsprechenden Geopotentialtrögen sichtbar, womit sich allgemein ein frontalartige Struktur über den mittleren Breiten ausprägt. Diese Struktur ist außerdem für die Differenz zwischen der beobachteten und der

stationären Temperatur zu erkennen (Abb. 5.4(b)). Ferner ist die Struktur von ΔT auch in guter Übereinstimmung mit den Niederschlagsfeldern (Abb. 5.4(c)). Allerdings ist auffällig, dass die Temperaturdifferenz negativ ist, was bedeutet, dass die stationäre Temperatur größer ist als die Temperatur der Reanalysedaten:

$$T_{st} > T. \quad (5.26)$$

Eine physikalische Interpretation könnte in der, an die stationäre Temperaturdarstellung (4.14) erinnernde, Gibbs'schen Beziehung $T = \frac{\partial E}{\partial s}$ liegen. Denn die Gibbs'schen Beziehung macht deutlich, dass die stationäre Temperatur, aufgrund einer, für adiabatische Prozesse, geringeren Entropieänderung, höher ist. Die Änderung der Entropie lässt sich über $\partial s = \partial_i s + \partial_d s$ in einen irreversiblen Anteil $\partial_i s$ und einen diabatischen Anteil $\partial_d s$ aufspalten, wobei der diabatische Anteil für die stationäre Temperatur, wegen der zugrunde liegenden adiabatischen Annahme, verschwindet. Dieses Verhalten spiegelt sich auch im Berechnungsverfahren der stationären Temperatur wieder, welches auf Feldern beruht, die nicht unbedingt immer stationär sind; also vereinfacht ausgedrückt $T_{st} \sim T_{st}(\vec{v}, \phi, T)$. Für Bereiche in denen sich die Atmosphäre im Grundzustand befindet, gibt es wenig, durch verstärkte Wind- und Geopotentialgradienten induzierte, dynamische Aktivität und die stationäre Temperatur entspricht der beobachteten Temperatur. Demgegenüber stehen Bereiche, welche sich durch hohe dynamische Aktivität auszeichnen, wo bei der Berechnung von T_{st} ein höherer Betrag von kinetischer Energie zusätzlich zum Temperaturfeld hinzukommt. Somit ist die stationäre Temperatur in Regionen außerhalb des Grundzustands größer als die Beobachtete. Eine mögliche Lösung besteht darin, sich den tatsächlichen stationären Feldern iterativ anzunähern. Diesbezüglich wird in Abschnitt 5.5 ein entsprechendes Iterationschema vorgestellt.

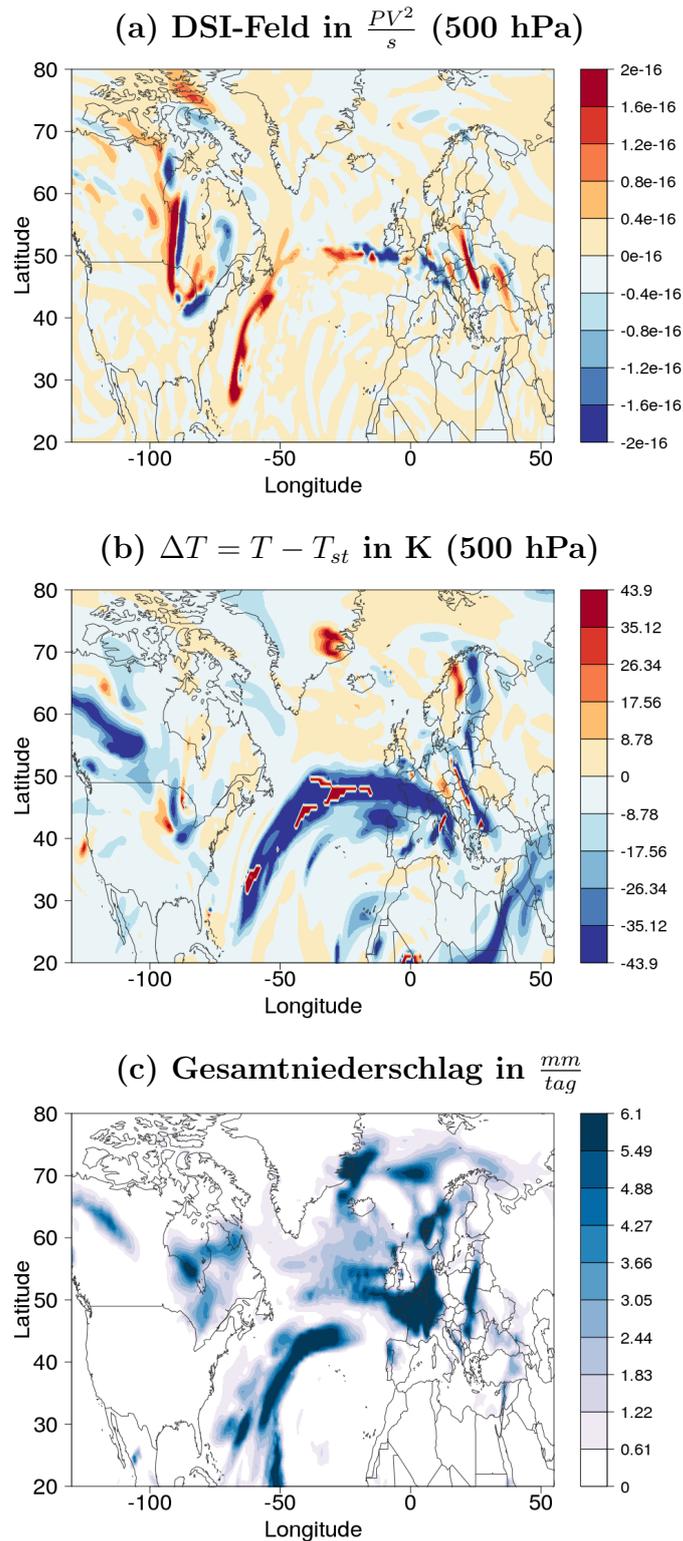


Abbildung 5.4.: Feld des DSI (a), der Temperaturdifferenz ΔT (b) sowie des Gesamtniederschlags (c) für den 26.12.1999 12 UTC. Die grauen Linien in (a) und (b) zeigen das Geopotentialfeld [gpm]. Als Datengrundlage dienten die ERA-Interim Reanalysedaten.

5.5. Verfahren zur Bestimmung des stationären Zustandes

Der Startpunkt beim in Abb. 5.5 dargestellten Iterationsschema sind die beobachteten Wind-, Temperatur- und Dichtefelder. Diese werden für die Berechnung der beobachteten Felder der Bernoulli-Funktion, der PV, der Entropie (an dieser Stelle mit B_{Obs} , Π_{Obs} und S_{Obs} bezeichnet) und letztlich auch dem DSI verwendet. Falls der DSI gleich Null ist, befindet sich die Atmosphäre bereits im Grundzustand und das Iterationsverfahren kann beendet werden. Ansonsten wird über B_{Obs} , Π_{Obs} und S_{Obs} mit Hilfe von (B.5) und (B.7) das stationäre Wind und Temperaturfeld \vec{v}_{st} beziehungsweise T_{st} berechnet. Hierbei gilt für Iterationsschritt $k = 1$: $\vec{v}_{st} = \vec{v}_{k,st}$ und $T_{st} = T_{k,st}$. Da es, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt, keine stationäre Darstellung des Dichtefeldes gibt, wird für die Berechnung der stationäre Felder immer das beobachtete Dichtefeld ρ_{Obs} verwendet. Anschließend wird $T_{k,st}$ um ein T_ϵ verringert, da die stationäre Temperatur als zu hoch angenommen wird (siehe Abschnitt 5.4.3). Das verringerte $T_{k,st}$ wird T^* genannt, um Verwechslungen zu vermeiden. Nun wird mit $\vec{v}_{k,st}$, T^* und ρ_{Obs} die Bernoulli-Funktion $B_{k,st}$, die PV $\Pi_{k,st}$, die Entropie $S_{k,st}$ und wieder der DSI berechnet. Ist der DSI nun wieder ungleich Null, wird über $B_{k,st}$, $\Pi_{k,st}$ und $S_{k,st}$ das Wind- und Temperaturfeld $\vec{v}_{k+1,st}$ beziehungsweise $T_{k+1,st}$ berechnet und k wie $k + 1$ gesetzt, womit das Iterationsverfahren wieder mit einer Reduzierung von $T_{k,st}$ von vorne beginnt. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis der DSI gleich oder zumindest annähernd Null ist, wobei das zugehörige Wind- und Temperaturfeld, welche zur Berechnung des DSI benötigt wurden, dann als stationärer Anteil des gesamten Wind- und Temperaturfelds angesehen werden kann. Im Rahmen dieses vorgestellten Verfahrens wäre es auch möglich das Windfeld iterativ zu verändern. Allerdings müssten alle drei Windkomponenten unabhängig verändert werden, außerdem wäre auch nicht eindeutig, ob das Feld über eine \vec{v}_ϵ verringert oder vergrößert werden müsste. Aus diesem Grund erscheint es geeigneter nur das Temperaturfeld iterativ zu verringern.

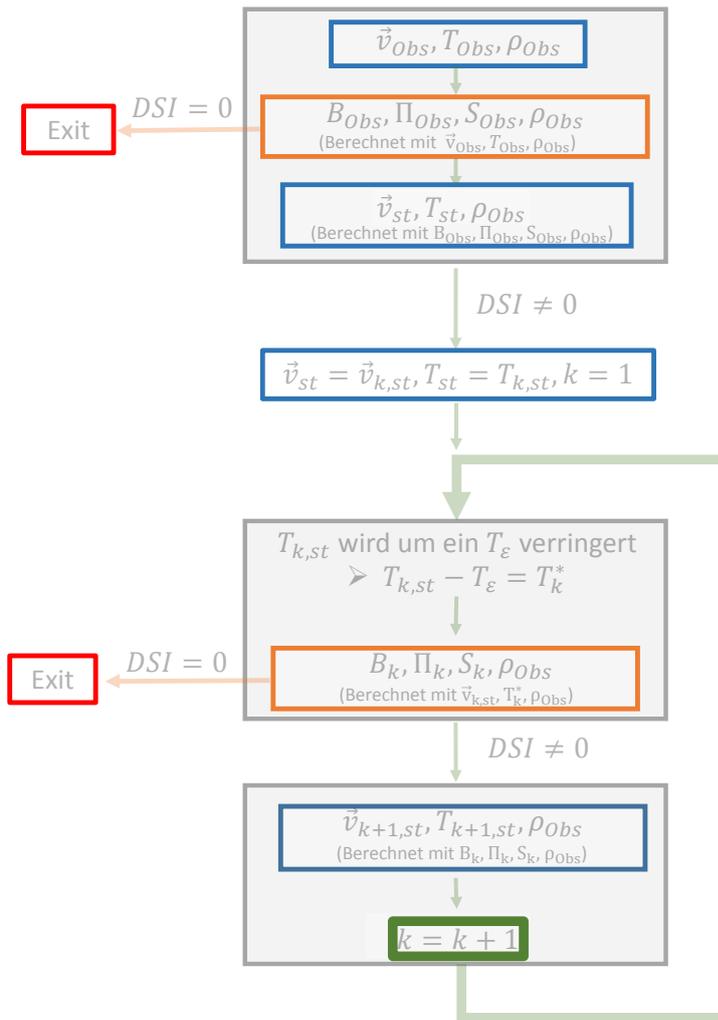


Abbildung 5.5.: Iterationsschema zur Bestimmung der stationären Temperatur und Windfelder.

5.6. Zusammenfassung

Der Hauptaspekt dieses Kapitels war die Analyse der stationären Temperatur anhand von Sturm Lothar. Als Datengrundlage dienen die ERA-Interim-Reanalyse-daten. Hierbei wurde die Abweichung zwischen der stationären Temperatur und der Modell-Temperatur berechnet, um den Einfluss von instationären, diabatischen und reibungsbehafteten Prozessen auf das Temperaturfeld zu quantifizieren. Diesbezüglich konnte gezeigt werden, dass die Abweichungen von der stationären Temperatur frontalartige Strukturen bildet, welche in guter Übereinstimmung mit den DSI und den Niederschlagsfeldern der Reanalyse-daten sind. Allerdings stellte sich heraus, dass die Temperaturabweichung viel zu groß sind. In Anbetracht

dessen, konnte das Berechnungsverfahren des stationären Temperaturfelds verantwortlich gemacht werden, da es zur Berechnung auf Temperatur- und Windfelder zurückgreift, die nicht unbedingt stationär sind. Hierzu wurde ein Iterationsverfahren vorgestellt, um die stationären Felder näherungsweise zu bestimmen. Hierbei wird die Bernoulli-Funktion, die PV sowie die Entropie aus dem stationären Wind und dem stationären Temperaturfeld berechnet, das iterativ verringert wird. Falls der hieraus berechnete DSI ungefähr Null ist, wurde der Grundzustand bestimmt, ansonsten muss die Prozedur wiederholt werden.

Das Bestimmen der stationären Felder könnte zum Beispiel einen Beitrag für die Datenassimilation leisten oder aber dabei helfen Ensemble-Modelle physikalisch zu generieren, indem die stationären Felder unterschiedlich gestört werden. Eine physikalische Ensemblegenerierung würde hierbei eine Bereicherung der probabilistischen Vorhersagen, die sonst eher über eine Veränderung der Startzeit erzeugt werden, darstellen.

6. Der zonal gemittelte Grundzustand und die Bestimmung der Lagrange'schen Parameter

In den vorherigen Kapiteln wurde dargelegt, dass sich für einen stationären, adiabatischen und reibungsfreien Grundzustand eine algebraische Abhängigkeit zwischen Bernoulli-Funktion, PV und Entropie ergibt. Ausgangspunkt hierfür ist das Energie-Casimir-Funktional

$$\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s] - \lambda_f \mathcal{C}_f[\vec{v}, \rho, s], \quad (6.1)$$

und dessen Funktionalableitungen nach den Systemvariablen ρ , \vec{v} und s innerhalb eines stationären Zustandes:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = 0. \quad (6.2)$$

Damit sich das Energie-Casimir-Funktional als Summe aus Hamiltonfunktion \mathcal{H} und Casimir-Funktional \mathcal{C}_f schreiben lässt, wird der Lagrange'sche Parameter λ_f benötigt. Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, findet sich jener Lagrange'sche Parameter und einer weiterer Parameter λ_g auch in der Darstellung des stationären Windes wieder:

$$\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho} \lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi, \quad (6.3)$$

$$\vec{v}_{st3} = \frac{1}{\rho} \lambda_g \nabla B \times \nabla \Pi. \quad (6.4)$$

Die Lagrange'schen Parameter sind im atmosphärischen Grundzustand global konstant.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Lagrange'schen Parameter erstmals zu bestimmen, was eine neue physikalische Sicht auf jene Parameter eröffnet.

6.1. Quantifizierung der Lagrange'schen Parameter

In Kapitel 3 wurde bereits mit Hilfe der Nambu-Darstellung des Primitiven Gleichungssystems gezeigt, dass die Bernoulli-Funktion, die PV und die Entropie für einen stationären, adiabatischen und reibungsfreien Grundzustand im Gleichgewicht sind (3.64). So ergibt sich für die Funktionalableitung des Energie-Casimir-Funktional $\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s]$ nach der Dichte:

$$B = f - \Pi \frac{\partial f}{\partial \Pi}, \quad (6.5)$$

wobei $f = f(\Pi, s)$ ist. Somit sind die Bernoulli-Funktion, die Entropie und die PV auch auf folgende Weise voneinander abhängig:

$$B = B(s, \Pi). \quad (6.6)$$

Aufgrund von (6.6) können nun auch, unter der Voraussetzung, dass $\Pi \neq 0$ ist, folgende algebraische Abhängigkeiten aufgestellt werden:

$$\Pi = \Pi(B, s), \quad (6.7)$$

$$s = s(\Pi, B). \quad (6.8)$$

Für die Funktionalableitung von $\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s]$ nach der Geschwindigkeit gilt, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt:

$$\rho \vec{v} = \lambda_f (\nabla \times (\frac{\partial f}{\partial \Pi} \nabla s)), \quad (6.9)$$

beziehungsweise:

$$\rho \vec{v} = \lambda_f \left(\nabla \frac{\partial f}{\partial \Pi} \times \nabla s \right). \quad (6.10)$$

Bildet man von 6.5 den Gradienten und stellt die resultierende Gleichung nach $\nabla \frac{\partial f}{\partial \Pi}$ um, so folgt:

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial \Pi} = \frac{1}{\Pi} \left[-\frac{\partial f}{\partial \Pi} \nabla \Pi + \nabla f - \frac{1}{\lambda_f} \nabla B \right]. \quad (6.11)$$

Setzt man nun (6.11) in (6.10) ein und stellt nach der Geschwindigkeit, so resultiert folgende stationäre Winddarstellung:

$$\vec{v}_{st} = \lambda_f \left[\frac{1}{\Pi} \left(-\frac{\partial f}{\partial \Pi} \nabla \Pi + \nabla f - \frac{1}{\lambda_f} \nabla B \right) \times \nabla s \right]. \quad (6.12)$$

Aufgrund der Kettenregel $\frac{\partial f}{\partial \Pi} \nabla \Pi = \nabla f$ resultiert aus (6.12) für jede beliebige Funktion $f = f(\Pi, s)$, also zum Beispiel $f = \Pi^3$ oder $f = \Pi^2 + s$, die bereits von Schär (1993) hergeleitete, stationäre Winddarstellung:

$$\vec{v}_{st_2} = \frac{1}{\rho \Pi} \nabla s \times \nabla B, \quad (6.13)$$

die im Rahmen dieser Arbeit auch als zweite stationäre Winddarstellung bezeichnet wird. Für ein wirbelfreies, thermodynamisches Modell ($f = s$, $f = 1$), gäbe es entsprechend keine stationäre Winddarstellung (siehe hierzu Abschnitt 4.2.1 und 4.2.2). Die universelle Gültigkeit von (6.13) für ein beliebiges $f = f(\Pi, s)$ und die Unabhängigkeit von einem Lagrange'schen Parameter, unterstreicht nochmal die Bedeutung der zweiten Winddarstellung.

Ferner lassen sich mit der zweiten Winddarstellung (6.13) mit Hilfe von (6.6 - 6.8) auch wieder die beiden anderen Winddarstellungen aus Kapitel 4 ableiten. Hierzu

muss zunächst für (6.6 - 6.8) der Gradient berechnet werden:

$$\nabla B = \left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi} \nabla s + \left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_s \nabla \Pi, \quad (6.14)$$

$$\nabla \Pi = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial B} \right|_s \nabla B + \left. \frac{\partial \Pi}{\partial s} \right|_B \nabla s, \quad (6.15)$$

$$\nabla s = \left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_B \nabla \Pi + \left. \frac{\partial s}{\partial B} \right|_{\Pi} \nabla B. \quad (6.16)$$

Hierbei muss bei der Berechnung der Ableitungen zwischen Bernoulli-Funktion, Entropie und PV die verbleibende Größe konstant gesetzt werden. Somit wäre zum Beispiel $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi}$ die Ableitung der Bernoulli-Funktion nach der Entropie bei konstanter PV. Setzt man nun (6.14) beziehungsweise (6.16) in $\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho \Pi} \nabla s \times \nabla B$ entsprechend ein, so folgen die anderen beiden Winddarstellungen:

$$\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho \Pi} \left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_s \nabla s \times \nabla \Pi, \quad (6.17)$$

$$\vec{v}_{st3} = \frac{1}{\rho \Pi} \left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_B \nabla \Pi \times \nabla B. \quad (6.18)$$

Vergleicht man die Winddarstellungen (6.17) und (6.18) mit den in Kapitel 4, über die allgemeine Casimir-Funktion $f_s = \frac{1}{2} \Pi^2 + s + 1$, hergeleiteten Winddarstellungen $\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho} \lambda_f \nabla s \times \nabla \Pi$ beziehungsweise $\vec{v}_{st3} = \frac{1}{\rho} \lambda_g \nabla B \times \nabla \Pi$, so fällt eine Äquivalenz zwischen den Ableitungen $\left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_s$ in (6.17) sowie $\left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_B$ in (6.18) und den Lagrange'schen Parametern λ_f und λ_g ins Auge:

$$\lambda_f = \frac{1}{\Pi} \left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_s, \quad (6.19)$$

$$\lambda_g = \frac{1}{\Pi} \left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_B. \quad (6.20)$$

Somit lassen sich die, für einem Grundzustand global erhaltenen, Lagrange'schen Parameter erstmals über die Ableitungen (6.19-6.20) quantifizieren. Hierbei muss erwähnt werden, dass die Lösungen (6.19) und (6.20) für λ_f und λ_g abhängig von der gewählten Casimir-Funktion f sind.

Die Bedeutung der einzelnen Ableitungen $\left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_{s=const}$, $\left. \frac{\partial \Pi}{\partial s} \right|_{B=const}$ und $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi=const}$, welche den Grundzustand entsprechend auf der Θ , B sowie Π -Fläche beschreiben,

wird in den nächsten Abschnitten näher beleuchtet.

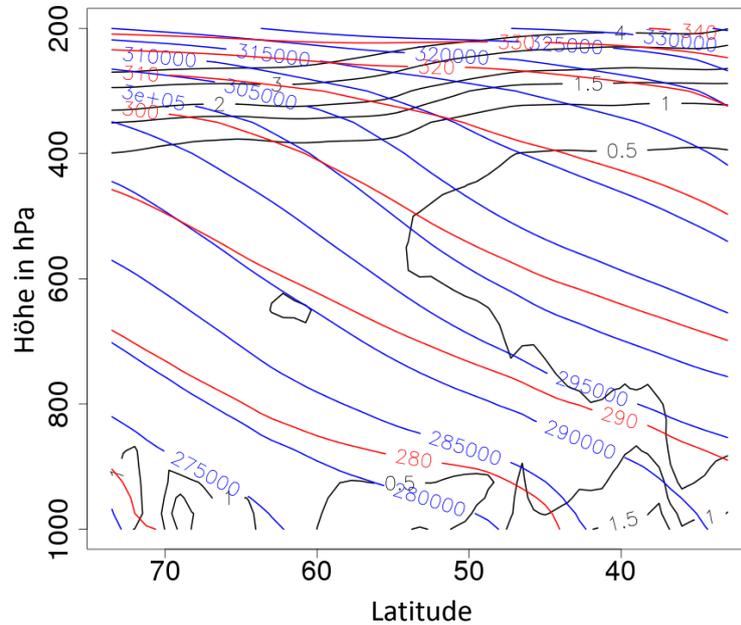


Abbildung 6.1.: Vertikaler Schnitt der Lage der Π -Flächen (schwarze Linien), der Θ -Flächen (rote-Linien) sowie der B -Flächen (blaue-Linien) bezogen auf das p -System (vertikale Achse). Die horizontale Achse stellt die Breitengrade von 30° N bis 75° N dar. Die Flächen wurden hierbei für ERA-Interim berechnet und über den gesamten Zeitraum (1979-2010) gemittelt.

6.2. Diskussion der Lagrange'schen Parameter im zonal gemittelten Grundzustand

Der Term $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi=const}$ beschreibt die Änderung der Bernoulli-Funktion nach der potentiellen Vorticity. Bezüglich des Vorzeichens von $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi=const}$ zeigt Abb. 6.1 zunächst die vertikale Lage der Π -, Θ - sowie B -Flächen im p -System, wobei zu erkennen ist, dass es gerade im Bereich des Polarjets zu einer starken Drängung dieser Linien kommt. Hierbei muss beachtet werden, dass sich Abb. 6.1 unter anderem auf Θ -Flächen bezieht und $\left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_{s=const}$ wiederum auf Flächen gleicher Entropie betrachtet wird. Dennoch werden die potentielle Temperatur Θ und die massenspezifische Entropie s , wegen $ds = \frac{d\Theta}{\Theta}$, im Folgendem als äquivalent betrachtet.

Folgt man nun einer isentrope in Abb. 6.1, so fällt auf, dass nach Norden hin die Bernoulli-Funktion abnimmt, die PV jedoch zunimmt. Somit zeigen die Gradienten, wie in Schaubild 6.2a verdeutlicht, in unterschiedliche Richtungen, was zu

$$\left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_{s=const} < 0. \quad (6.21)$$

führt. Das negative Vorzeichen von $\left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_{s=const}$ ermöglicht erst, dass \vec{v}_{st1} im klimatologischen Mittel von West nach Ost weht. Dies wird deutlich wenn man die erste stationäre Winddarstellung auf einer isentropen Fläche betrachtet:

$$\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho \Pi} \left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_s \vec{k}_s \times \nabla_h \Pi. \quad (6.22)$$

Denn im klimatologischen Mittel zeigt $\nabla \Pi$ nach Norden (siehe Abb. 6.2a), so dass das Kreuzprodukt $\vec{k}_s \times \nabla \Pi$ nach Westen gerichtet ist. Somit ist erst wegen $\left. \frac{\partial B}{\partial \Pi} \right|_{s=const} < 0$ der stationäre Wind \vec{v}_{st1} im Mittel nach Osten gerichtet.

Die Änderung der Entropie nach der potentiellen Vorticity wird durch den Term $\left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_{B=const}$ beschrieben. In Abb. 6.1 wird deutlich, dass im zeitlichen Mittel die Gradienten von Π und s auf der Bernoulli-Fläche in die gleiche Richtung zeigen (siehe 6.2b). Das Vorzeichen ist also positiv:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_{B=const} > 0. \quad (6.23)$$

Betrachtet man die dritte stationäre Winddarstellung auf Π -Flächen:

$$\vec{v}_{st3} = \frac{1}{\rho \Pi} \left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_B \vec{k}_\Pi \times \nabla_h B, \quad (6.24)$$

beziehungsweise auf B -Flächen:

$$\vec{v}_{st3} = -\frac{1}{\rho \Pi} \left. \frac{\partial s}{\partial \Pi} \right|_B \vec{k}_B \times \nabla_h \Pi, \quad (6.25)$$

so fällt auf dass \vec{v}_{st3} im klimatologischen Mittel auf beiden Flächen nach Osten weht, denn auf Π -Flächen zeigt ∇B in Richtung Süden (siehe Abb. 6.2c) und auf B -Flächen zeigt $\nabla \Pi$ im klimatologischen Mittel nach Norden (siehe Abb. 6.2b).

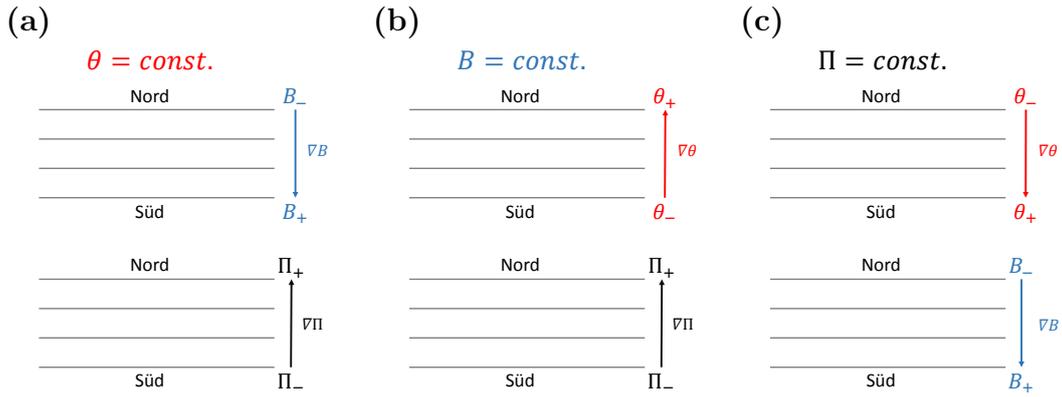


Abbildung 6.2.: Schaubild über die Richtung des Gradienten der potentiellen Temperatur (roter Pfeil), der Bernoulli-Funktion (blauer Pfeil) sowie der PV (schwarzer Pfeil) auf einer Θ -Fläche (a), B -Fläche (b) sowie einer Π -Fläche (c) im klimatologischen Mittel.

Analog zu den partiellen Ableitungen (6.21) und (6.23) existiert auch der Term $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi=\text{const.}}$, der die Änderung der Bernoulli-Funktion nach der Entropie beschreibt. Nach (4.22) folgte bereits $B = Ts$, woraus dementsprechend für die Ableitung gilt:

$$\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi=\text{const.}} = T > 0. \quad (6.26)$$

Physikalisch erinnert (6.26) an die Gibbs'sche Fundamentalgleichung $de = Tds - pdV$, wobei bei konstantem Volumen und konstantem Druck $\left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_v = \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_p = T$ folgt. An dieser Stelle sei e die innere Energie und h die Enthalpie. Insofern ist (6.26) eine Erweiterung der Gibbs'sche Fundamentalgleichung um die dynamischen Größen der kinetischen Energie \bar{v}^2 und der potentiellen Energie ϕ (wegen $B = \frac{1}{2}\bar{v}^2 + \phi + h$). Dadurch, dass die Temperatur immer positiv ist, ist auch $\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_{\Pi=\text{const.}} > 0$. Dies spiegelt sich auch in der Richtung der Gradienten von B und s , welche in Abb. 6.2c schematisch dargestellt sind, wider. Denn auf der Π -Fläche nimmt die potentielle Temperatur und die Bernoulli-Funktion von Nord nach Süd ab.

6.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel konnten erstmals die Lagrange'schen Parameter bestimmt werden. Diese lassen sich als partielle Ableitungen auf den jeweiligen Zustandsflächen

$\frac{\partial B}{\partial \Pi}|_s$, $\frac{\partial \Pi}{\partial s}|_B$ und $\frac{\partial B}{\partial s}|_\Pi$ schreiben, wobei sich letztere nur für einen wirbelfreien und baroklinen Zustand ergibt (siehe Anhang A). Die Bedeutung liegt hierbei, dass diese, aufgrund der Eigenschaft, der globalen Konstanz, den instationären, adiabatischen und reibungsfreien Grundzustand jeweils auf der θ –, B – sowie der Π –Fläche charakterisieren. Ferner konnten die Vorzeichen der Ableitungen über ein klimatologisches Mittel jener materieller Flächen bestimmt werden. Hierbei zeigte sich, dass das Vorzeichen dieser partiellen Ableitungen eine wichtige Rolle bei der klimatologischen Windrichtung der ersten und dritten Winddarstellung einnimmt. Somit beschreiben alle drei stationären Winddarstellungen im klimatologischen Mittel, analog zum geostrophischen Wind, einen Westwind.

Teil II.

Die dekadische AMV-NAO-Kopplung analysiert mit dem DSI

7. Vorbemerkung

Das Ziel dieses Teils ist es, die Wechselwirkungen zwischen der Nordatlantischen Oszillation (NAO) und der AMV (atlantische multi-dekadische Variabilität) zu untersuchen. Hierbei birgt besonders die multi-dekadische Variabilität AMV ein großes prognostisches Potential für die mittelfristige Klimaprognose. Sofern sich ein signifikanter Zusammenhang zur NAO auf dieser Zeitskala finden ließe, wäre dies von besonderem sozialen und ökonomischen Interesse, da die NAO einen Einfluss auf die Sturm- und Zyklonenaktivität, Niederschlag sowie Oberflächentemperatur über dem Nordatlantik und die umliegenden Kontinente aufweist. Jene Phänomene lassen sich mit Hilfe des dynamischen Zustandsindex visualisieren, sodass ein weiteres Ziel dieses Teils darin besteht, den Einfluss der NAO-AMV-Kopplung auf den DSI zu analysieren.

Hierzu soll zunächst in Kapitel 8 auf die physikalischen Wechselwirkungen zwischen NAO und AMV eingegangen werden. Ferner sollen anhand von Beobachtungsdaten relevante Perioden für diese Wechselwirkungen identifiziert werden. In Kapitel 9 soll untersucht werden, ob sich jene zuvor identifizierten Perioden im DSI über Europa wiederfinden und die physikalischen Wechselwirkungen zwischen DSI, AMV und NAO beschrieben werden.

8. Die Wechselwirkung zwischen AMV und NAO

Die Atmosphären- und Ozeanzirkulationen im Nordatlantik zeigen eine ausgeprägte multi-dekadische Variabilität, welche von besonderem sozialen und ökonomischen Interesse ist. Der Grund für diese Bedeutsamkeit liegt in dem Einfluss jener Zirkulationen auf die Sturm- und Zyklonenaktivität, Niederschlag sowie Oberflächentemperatur über dem Nordatlantik und die umliegenden Kontinente. Mit dieser Thematik haben sich schon zahlreiche Studien befasst (z. B. Hurrell et al. 2003; Sutton und Hodson 2005; Knight et al. 2006; Zhang und Delworth 2006). Die atmosphärische Variabilität wird hierbei durch die Nordatlantische Oszillation (NAO, Hurrell 1995) repräsentiert. Diese charakterisiert Schwankungen des Bodendrucks zwischen dem subpolaren und subtropischen Nordatlantik. Gebräuchliche Quantifizierungen der NAO sind die Berechnung der normalisierten Bodendruckdifferenz zwischen Island und den Azoren (z.B. Hurrell 1995; Hurrell et al. 2003) oder die Berechnung der ersten Hauptkomponente des Bodendruckfeldes zwischen 20°N - 80°N , 90°W - 40°E (z.B. Pinto et al. 2008). Die charakteristische Zeitskala dieser Oszillation liegt zwar bei etwa 10 Tagen (Czaja et al., 2003), sie weist nichtsdestoweniger auch eine Variabilität auf der interannualen sowie dekadischen bis multi-dekadischen Zeitskala auf. (Czaja et al. 2003, Hurrell et al. 2003). Eine ausführlichere Beschreibung der NAO wird in Abschnitt 8.1 gegeben. Die Variabilität des Ozeans wird hingegen durch die sogenannte Atlantic Multidecadal Variability (AMV) wiedergegeben, wobei diese Maßzahl durch Änderungen der Meeresoberflächentemperatur (SST) im Nordatlantik beschrieben wird. Hierbei sind die Entstehungsmechanismen der AMV noch Gegenstand der Forschung.

Allerdings gibt es einen großen Konsens aus zahlreichen Modell-Studien (z.B. Deser und Blackmon 1993; Delworth et al. 1993; Timmermann et al. 1998; Vellinga und Wu 2004; Latif et al. 2004; Jungclaus et al. 2005), dass die atlantischen SST-Fluktuationen durch einen nordwärts gerichteten Wärmetransport der Atlantic Meridional Overturning Circulation (AMOC) induziert werden. Eine Berechnung der AMV erfolgt hierbei über ein trendbereinigtes räumliches SST-Mittel über den Nordatlantik von 0°N bis 70°N (Enfield et al. 2001), wobei ein genauerer Überblick über die AMV in Abschnitt 8.2 gegeben wird. Bezüglich der relevanten zeitlichen Moden der SST-Schwankungen stellten die Studien von Deser und Blackmon (1993) sowie Kushnir (1994) Fluktuationen im quasi-dekadischen (~ 10 Jahre) sowie multi-dekadischen Bereich fest. Darüber hinaus konnten Mann et al. (1998) einen interannualen bis dekadischen Mode ausmachen, der mit der NAO in Verbindung gebracht wurde.

Die Wechselwirkungen zwischen Ozean und Atmosphäre und deren Wirkungsweise werden bereits seit über einem Jahrhundert untersucht. Bereits im späten 19. Jahrhundert hat Petterson (1896) die Auswirkung von milden Ozean-Temperaturen auf den nordeuropäischen Winter untersucht. Eine weitere Pionierarbeit leistete Bjerknes (1964), denn ein Ergebnis dieser Studie war, dass der Unterschied des Bodendrucks zwischen Island und den Azoren, welcher als Maß für den Westwinddrift genommen wurde, mit den SSTs des Nordatlantiks für den Zeitraum zwischen 1900 und 1928 negativ korrelierte (Korrelationskoeffizient: $-0,82$). Dieses Ergebnis wurde von zahlreichen Studien bestätigt. So hat unter anderem Gastineau und Frankignoul (2012) den Einfluss der AMOC auf die Atmosphäre mit Hilfe von sechs Klimamodellen untersucht, mit dem Ergebnis, dass auf eine starke AMOC 4 bis 9 Jahre später (abhängig vom verwendeten Modell) eine schwächere beziehungsweise negative NAO folgte, was eine Verlagerung der Sturmzugbahnen nach Süden zur Folge hatte und durch ein hufeisenförmiges Muster der SST-Anomalien begleitet wurde. Des Weiteren stellte Bjerknes (1964) die Vermutung an, dass der Einfluss der Atmosphäre auf den Ozean eher auf der saisonalen bis interannualen Zeitskala größer ist als andersherum. Viele Studien, die sowohl auf Beobachtungs- als auch auf Modelldaten beruhen, bestätigen diese Annahme (z. B., Cayan 1992; Kushnir et al.

2006; Kwon et al. 2010). Allerdings haben Frankignoul und Kestenare (2005) sowie Renggli (2011) auch eine Auswirkung des Ozeans auf die Atmosphäre in dieser zeitlichen Größenordnung ausgemacht. Dennoch ist der Einfluss des Ozeans auf die Atmosphäre auf der dekadischen bis zur multi-dekadischen Zeitskala größer, als im saisonalen bis interannualen Bereich, was auf die vergleichsweise größere Trägheit und langsamere Dynamik des Ozeans zurückzuführen ist (Bjerknes 1964; Delworth et al. 1993; Latif 1998). Spätere Arbeiten von Eden und Jung (2001) und Latif et al. (2004) zeigten zudem, dass die Variabilität der AMOC der multi-dekadischen Variationen der NAO um etwa eine Dekade vorauslaufen. Über die physikalische Wirkungsweise der Atmosphären-Ozean-Kopplung beziehungsweise umgekehrt der Ozean-Atmosphären-Kopplung wird in Abschnitt 8.3 und entsprechend in Abschnitt 8.3 genauer eingegangen. Darüber hinaus befasst sich Abschnitt 8.4 mit dem spektralen Zusammenhang der beobachteten Zeitreihen der AMV und der NAO unter strengeren statistischen Gesichtspunkten bezüglich der Signifikanz. Eine Kreuzkorrelation soll offenlegen, für welche lag-times (zeitliche Verschiebungen) ein Zusammenhang zwischen NAO und AMV signifikant ist. Für diesen Zweck wird ein t-Test angewendet, der allgemein der Annahme unterliegt, dass die Testgrößen nicht autokorreliert und unabhängig sind. Die meteorologischen Daten sind aber im Allgemeinen hin autokorreliert. Daher besteht ein häufiger Fehler darin, die ursprüngliche Stichprobengröße für die Signifikanzberechnung zu verwenden. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit erstmals eine reduzierte Stichprobengröße, beruhend auf der Anzahl der nicht autokorrelierten Datenpunkte, für die Berechnung des t-Tests angewendet. Wie bereits erwähnt, haben sich viele Studien bereits mit der Kopplung zwischen AMV und NAO auf der dekadischen bis multi-dekadischen sowie auf der saisonalen bis interannualen Zeitskala befasst. Auch dieser Punkt wird nochmal in Abschnitt 8.4 durch eine Analyse des Kreuz-Spektrums untersucht. Das Konfidenzintervall wird hierbei über ein parametrisches Bootstrapping berechnet, wofür die AMV und die NAO zuvor an einen autoregressiven Prozess angepasst werden müssen. Die resultierenden Ergebnisse sollen Auskunft geben, ob sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen den beobachteten Zeitreihen der NAO und der AMV auf verschiedenen spektralen Bändern ausmachen lässt.

8.1. Die Nordatlantische Oszillation (NAO)

Die Nordatlantische Oszillation (NAO) ist in erster Linie die Schwankung der Differenz des Luftdrucks zwischen dem Azorenhoch im Süden und dem Islandtief im Norden des Nordatlantiks. Ferner zeichnet sich die NAO dadurch aus, dass sie einen großen Einfluss auf die winterliche Klimavariabilität aufweist, das heißt, dass sie sich maßgeblich auf die Wetter- und Klimaschwankungen über dem Nordatlantikraum auswirkt. Hierzu ist zu sagen, dass die NAO für 31 % der winterlichen Oberflächentemperaturen-Anomalien nördlich von 20°N verantwortlich ist (Hurrell et al., 2003). Weiterhin erklärt sie 40 % der Luftdruckschwankungen im Nordwinter in der Troposphäre (Pinto und Raible, 2011). Der Begriff der NAO wurde erstmals zu Beginn der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts von Sir Gilbert Walker eingeführt. In diesem Zusammenhang korrelierte er Bodendruckanomalien über Island mit denen über den Azoren (Luterbacher, 2008). Walker verstand unter diesem Prozess eine wechselseitige Massenumverteilung zwischen subtropischen und arktischen Breiten des Nordatlantiks. Die Variabilität der Luftdruckdifferenz zwischen dem Islandtief und dem Azorenhoch wird über den NAO-Index ausgedrückt. Dieser wird üblicherweise durch die standardisierte Luftdruckdifferenz zwischen Ponta Delgada (Azoren) und Reykjavík (Island) berechnet. Allerdings gibt es, was die Ortswahl der Luftdruckmessung angeht, durchaus Abweichungen. So wird zum Beispiel häufig der Luftdruck über Lissabon an Stelle des Azoren-Luftdrucks verwendet. Der Kritikpunkt an dieser Verfahrensweise besteht darin, dass das Islandtief und das Azorenhoch keine stationären Gebilde darstellen und somit die Messung an zwei Punkten durchaus unzureichend sein könnte. Daher legen neuere Ansätze auch Luftdruckgegensätze größerer Gebiete zugrunde (Luterbacher, 2008). Andere Ansätze erfassen die zeitliche Variabilität der NAO zum Beispiel über die Stärke des Zonalwindes, welche üblicherweise dessen Stärke in einem vordefinierten Gebiet heranziehen. Ferner gibt es noch die Möglichkeit, die NAO über eine Hauptkomponenten-Analyse des Bodendrucks zu quantifizieren. Hierzu wird meistens die erste Hauptkomponente als Indexwert berücksichtigt. Eine Auflistung der gebräuchlichsten Definitionen der NAO ist in Leckebusch et al. (2008) zu finden.

Bei der NAO unterscheidet man zwischen einer so genannten NAO+ und einer NAO- Phase, entsprechend des Vorzeichens des NAO-Index. Durch die Definition des NAO-Index ergibt sich, dass bei einer positiven NAO-Phase der Druck über Island niedriger und über den Azoren höher als im langzeitlichen Mittel ist. Während dieser Konstellation herrscht zwischen 40°N und 60°N eine starke Westwindzirkulation. Zusätzlich kommt es über eine verstärkte vertikale Windscherung des Horizontalwindes zu einer Zunahme von baroklinen Instabilitäten, welche in Verbindung mit obertroposphärischer Divergenz Zyklogense-Prozesse begünstigen. Allgemein führt dies zu milderem Wintern, reichlicheren Niederschlägen sowie einer erhöhten Anzahl von Stürmen über Nord- und Mitteleuropa. Umgekehrt kommt es über dem Mittelmeerraum bis in den vorderen Orient zu Trockenheit und relativ kalten Wintern. Im Laufe einer negativen NAO-Phase ist der Druckgegensatz zwischen Islandtief und Azorenhoch abgeschwächt, das heißt, dass der Luftdruck über Island höher und über den Azoren niedriger ist, als im Mittel. Dementsprechend sind die Westwinde schwächer, was dazu führt, dass dem Mittelmeerraum relativ milde und feuchte Winter beschert werden, während es über Nord- und Mitteleuropa kalt und trocken ist. Dabei ist die Situation in Europa mit einer blockierenden Wetterlage (einem stationären Hoch) von Osteuropa bis nach Mittel- und Westeuropa verbunden.

In der folgenden Abbildung (Abb. 8.1) ist der NAO-Index nach Hurrell et al. (2003) für die Wintermonate Dezember bis März der Jahre 1864 bis 2001 dargestellt. Obwohl der NAO-Index Schwankungen einer kürzeren Zeitskala unterworfen ist, so lassen sich doch auch großskalige Schwankungen zwischen positiven und negativen NAO-Index ausmachen. Was die NAO+ Zeiträume angeht, sind besonders die Jahre 1900 bis 1930 zu erwähnen, diese werden allerdings von einer recht starken negativen NAO-Phase zwischen 1915 bis 1918 unterbrochen. Auch in den Jahren zwischen 1980 und 2000 hat sich eine markante NAO+ Phase ausgebildet, deren Höhepunkt Anfang der 90er-Jahre liegt. Darüber hinaus sollte der Fokus auch noch auf den Zeitraum zwischen 1950 und 1970 gelegt werden, wo der NAO-Index besonders hohe negative Werte aufweist. Dennoch sollte man bei der Betrachtung des NAO-Index berücksichtigen, dass es einen Trend zur Zunahme

der NAO-Amplitude gibt.

Bezüglich der Antriebsmechanismen der NAO bestimmte Franzke et al. (2004) den Wechsel der NAO-Phasen durch das Brechen von synoptischen Wellen, wobei zur Analyse die potentielle Temperatur auf der 2 PVU-Fläche verwendet wurde. Positive NAO-Phasen werden hierbei durch zwei antizyklische brechende Wellen, einer über der Westküste der USA und einer zweiten über dem subtropischen Atlantik, ausgelöst, wobei antizyklonisches (zyklonisches) Wellenbrechen durch eine südwestlich-nordöstliche (südöstlich-nordwestliche) Neigung des Trog- Rücken-Systems charakterisiert ist (Thorncroft et al. 1993). Über diesen Vorgang kommt es zu einer Advektion von kalter Luft nach Kanada und Grönland, weiterhin werden warme Luftmassen von Florida in den zentralen Nordatlantik transportiert. Somit kommt es zu einem für die NAO+ charakteristischen "kalt über warm -Muster". Demgegenüber ist eine negative NAO-Phase von einer einzelnen, zyklonal brechenden Welle geprägt. Diese ist mit einer starken südöstlichen-nordwestlichen Neigung verbunden (Franzke et al., 2004). Weiterhin heißt es in Franzke et al. (2008), dass die NAO-Anomalie durch das sukzessive Brechen weiterer synoptischer Wellen aufrechterhalten wird und schließlich erst bei deren Ausbleiben und Zunahme der Bodenreibung abklingt. Weiterhin zeigten statistische Auswertungen, dass negative NAO-Lebenszyklen im Mittel seltener und länger sind als positive. Die Unterschiede sind dabei in Phasen eines schwachen stratosphärischen Polarwirbels umso stärker ausgeprägt, womit der Einfluss stratosphärisch-troposphärischer Wechselwirkungen auf die NAO nachgewiesen wurde (Franzke et al., 2008).

8.2. Die Atlantische Multidekadische Variabilität (AMV)

Der Begriff der Atlantischen Multidekadischen Variabilität (AMV) beschreibt eine zyklisch auftretende Änderung der Meeresoberflächentemperatur im Nordatlantik. Dieses Phänomen wird auch oft mit dem von Kerr (2000) eingeführten Namen AMO (Atlantischen Multidekadischen Oszillation) bezeichnet. Hierbei muss aller-

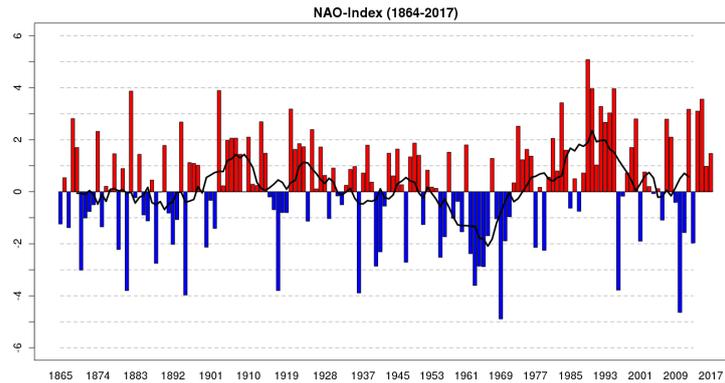


Abbildung 8.1.: NAO-Index nach Hurrell et al. (2003) von 1864 bis 2017. Die schwarze Linie zeigt das 10-Jährige gleitende Mittel.

dings beachtet werden, dass die letzte Bezeichnung nicht mit der AMOC (Atlantic Meridional Overturning Circulation) verwechselt wird, welcher wiederum die Zirkulation der Meeresströmung im Atlantik beschreibt. Für die Berechnung der AMV wird die Meeresoberflächentemperatur (SST) über dem gesamten Atlantik von 0°N bis 70°N räumlich gemittelt und anschließend linear trendbereinigt (Enfield et al., 2001). Der zugrunde liegende Datensatz von Kaplan et al. (1998) beinhaltet monatliche Werte der Meeresoberflächentemperatur seit 1856 auf einem $5^{\circ} \times 5^{\circ}$ Gitter und ist aufgrund seiner Länge und Konsistenz sehr wertvoll für die wissenschaftlichen Untersuchungen der AMV. Hierzu zeigt Abb. 8.2 den zeitlichen Verlauf des AMV-Index von 1864 bis 2012. Man erkennt deutlich die drei Phasen mit positiver SST-Anomalie zwischen 1864 und 1896, zwischen 1928 und 1960 und zwischen 2000 und 2012. Die negativen Phasen erstrecken sich dementsprechend zwischen 1896 und 1928 und zwischen 1960 und 2000. Somit beträgt die Periodendauer der AMV etwa 60 bis 70 Jahre.

Die genauen Entstehungsmechanismen der AMV-Phasen stellen aktuell einen Forschungsschwerpunkt dar. Allerdings scheint die thermohaline Zirkulation (THC) einen großen Anteil an der Variabilität der AMV zu haben. So konnte Latif et al. (2004) mit einem Korrelationskoeffizienten von 0,7 zwischen der THC im Atlantik bei 30°N und den SST-Anomalien zwischen 40°N und 60°N die enge Bindung zwischen diesen beiden Prozessen nachweisen. Der für den Nordatlantik relevante Anteil der THC wird durch einen Strom warmen, salzreichen Ober-

flächenwassers bestimmt, der entlang der Ostküste Mittelamerikas über den Golf von Mexiko als Golfstrom in Richtung Arktis strömt. Im Labradorbecken und im Europäischen Nordmeer bilden sich Absinkzonen, da aufgrund von Verdunstungs- und Abkühlungseffekten der hohe Salzgehalt das Wasser in die Tiefe zieht. Dieses kalte Tiefenwasser fließt als Tiefenstrom in Richtung Äquator zurück. Dieser Teil der THC wird auch als Atlantic Meridional Overturning Circulation (AMOC) bezeichnet. Dima und Lohmann (2007) stellten fest, dass sich die Änderung der AMV-Phase bezüglich einer veränderten Thermohalinen Zirkulation im Bereich von 30 bis 35 Jahren abspielt. Von einer verstärkten THC ausgehend entwickelt sich eine positive AMV-Phase, welche wiederum eine Intensivierung des Islandtiefs zur Folge hat. Hierbei kann sich die Bodendruckanomalie bis 20° N ausbreiten. Mit einer leichten Phasenverschiebung hat sich über dem Pazifik eine entgegengesetzte Bodendruckanomalie gebildet. Aufgrund des so verstärkten Druckgradienten begünstigen stärkere Winde in der Arktis einen höheren Frischwasser- und Meer-eistransport in den Nordatlantik zwischen Grönland und Spitzbergen. Dies führt zu einer Abschwächung der THC, was wiederum den Phasenwechsel der AMV zu einer negativen Phase mit sich bringt.

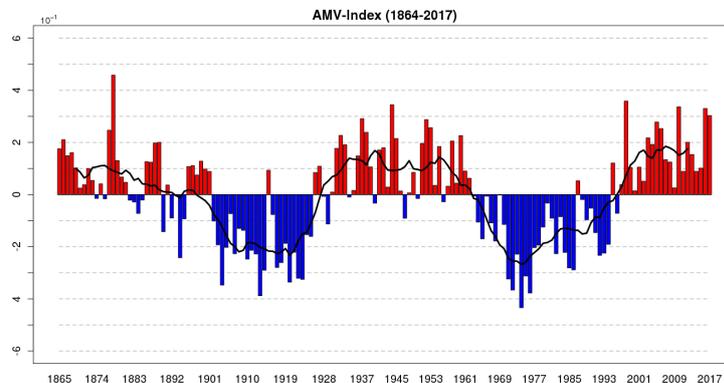


Abbildung 8.2.: AMV-Index, berechnet aus dem Datensatz von Kaplan et al. (1998) von 1864 bis 2017. Die schwarze Linie zeigt das 10-Jährige gleitende Mittel.

8.3. Mechanismen der NAO-AMV Wechselwirkungen

Dieser Abschnitt beschreibt die atmosphärischen und ozeanischen Prozesse beziehungsweise Mechanismen, die bei der Wechselwirkung zwischen NAO und AMV eine Rolle spielen. Denn, die NAO ist zwar per Definition nur ein atmosphärisches Phänomen, aber dadurch, dass das Islandtief beziehungsweise das Azorenhoch über dem Nordatlantischen Ozean liegen, ist auch eine Wechselwirkung mit dem Ozean gegeben. Konkret zeigt sich das darin, dass sich atmosphärische Temperaturänderungen unmittelbar auf die ozeanische Deckschicht aufprägen. Diese Deckschicht ist die obere Schicht des Ozeans. Ihre Schichtdicke beträgt dabei 25 bis 200 Meter. Sie zeichnet sich weiterhin dadurch aus, dass sie sehr gut durchmischt ist, sodass sich der Salzgehalt, die Dichte sowie die Temperatur in der Vertikalen nur geringfügig ändert. Ferner ergibt sich aufgrund der starken vertikalen Durchmischung der Deckschicht auch ein Einfluss der NAO auf die Meeresoberflächentemperatur (SST). Somit bildet sich eine tripolartige Struktur der SST aus (Abb. 8.3). Die Abbildung macht deutlich, dass während einer NAO+-Phase

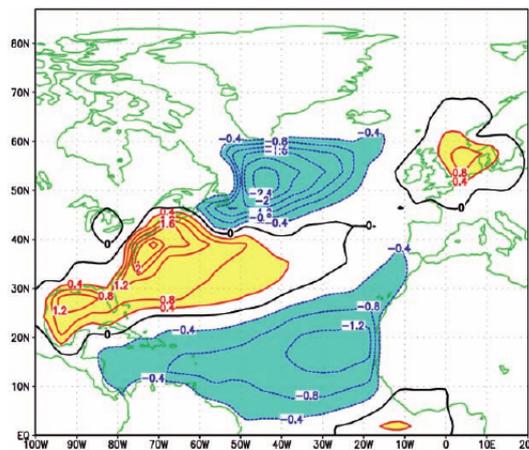


Abbildung 8.3.: Tripolares SST-Muster (in K), das mit NAO-Anomalien einhergeht. Das Muster beschreibt die Differenz im Nordatlantischen SST-Feld zwischen Wintern (JFM) mit positivem (NAO-Index $> 0,5$) und negativem NAO-Index (NAO-Index $< -0,5$); aus Kucharski und Molteni (2003)).

der nordwestliche Atlantik von Island bis Neufundland relativ kühle Temperaturen aufweist. Dies kommt dadurch zustande, dass das Islandtief aufgrund seines verstärkten zyklonalen Drehsinns vermehrt kältere Luft aus Norden nach Süden

transportiert. Umgekehrt führt die selbe Ursache zu einer anderen Wirkung im mittleren Nordatlantik bis hin zur Nordsee. Denn hier ergibt sich eine Erwärmung während einer positiven NAO-Phase, da nun wärmere Luft aus dem Süden nach Norden transportiert wird. Durch die weitere Verstärkung der antizyklonalen Zirkulation des Azorenhochs kommt es in dieser Region wieder zu einer Abkühlung. Aufgrund der höheren Wärmekapazität von Wasser speichert der Ozean die aufgenommene Energie über längere Zeiträume als die Atmosphäre. Dies wirkt sich dann wieder auf die darüberliegende Atmosphäre aus. Im Normalfall wirken die Wärmeflüsse der ozeanischen Deckschicht den Temperaturanomalien der Atmosphäre entgegen, sodass sich eine eher dämpfende Wirkung einstellt. Wenn jedoch NAO-verursachte Wärmefluss-Anomalien auf schon existierende passende SST - Anomalien treffen, so werden die Wärmefluss-Anomalien reduziert und die atmosphärischen Temperaturanomalien bleiben somit länger erhalten (Greatbatch und Jung, 2007). Somit kann die ozeanische Deckschicht die Dauer der ursprünglichen NAO-Anomalie erhöhen (Barsugli und Battisti 1998, Cassou et al. 2007). Auf diesem Wege werden die über die Atmosphäre aufgenommenen Temperaturen von der Atmosphäre isoliert und bis zum nächsten Winter in der ozeanischen Deckschicht erhalten. Diese wird aber dann im Spätherbst durch zunehmende Winde durchmischt, sodass die von der Deckschicht aufgenommenen Vorjahrestemperaturen wieder mit der Atmosphäre in Kontakt treten (Czaja und Frankignoul, 2002). Jung et al. (2008) beurteilen den Einfluss der Rückkopplung des Ozeans auf die NAO auf der interannualen Zeitskala als relativ gering (10 - 20 %).

Die soeben beschriebenen Mechanismen charakterisierten den Einfluss der Atmosphäre auf die Ozeantemperaturen im Nordatlantik. Demgegenüber gibt es jedoch Untersuchungen an Beobachtungsdaten (z. B. von Czaja und Frankignoul 2002), dass auch die SST, in Form der AMV, einen aktiven Einfluss auf die atmosphärische Zirkulation hat. In diesem Zusammenhang zeigt Abb. 8.4a die Differenz zwischen SST-Composits während positiver AMV-Phasen und SST-Composits während negativer AMV-Phasen. Hierbei zeigt sich ein tripolares hufeisenförmiges Muster über dem Nordatlantik mit jeweils einem Maximum in den gemäßigten Breiten und in den Subtropen. Ein Minimum der SST-Änderungen lässt sich im Westat-

lantik zwischen 20° N und 50° N ausmachen. Dies hat zur Folge, dass der Atlantik in den gemäßigten Breiten (ca. 50° N) stärker erwärmt wird als der südlicher liegende Teil (ca. 30° N), was zu einer Abnahme der Baroklinität in diesem Bereich führt. Diese Wirkungsweise wurde bereits von zahlreichen Studien (z. B. Watanabe und Kimoto 2000b; Sutton et al. 2001; Peng et al. 2002) beschrieben. Letztlich wird die Entstehung von Zyklonen durch reduzierte barokline Instabilität vor Neufundland vermindert, was tendenziell gleichbedeutend mit negativen NAO-Prozessen ist. Dies wird nochmal durch Abb. 8.4b verdeutlicht, welche die Differenz der Bodendrucks während positiver AMV-Phasen und während negativer AMV-Phasen zeigt. Dabei ist zu erkennen, dass es während positiver AMV-Phasen zu einer Zunahme des Drucks über Island und einer Abnahme des Drucks über den Azoren kommt, was den Charakteristika einer negativen NAO-Phase entspricht. Bei einer negativen AMV-Phase ist dies entsprechend umgekehrt.

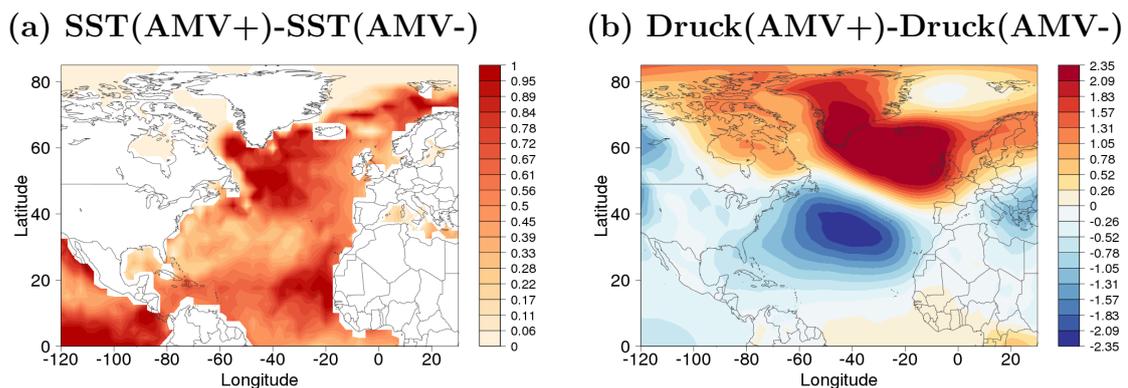


Abbildung 8.4.: Composit-Differenz der SST-Felder in [K] (a) und der Bodendruck-Felder in [hPa] (b) während positiver (größer als eine Standardabweichung) und negativer (kleiner als eine Standardabweichung) AMV-Phasen für ERA 20c zwischen 1900 und 2010.

Die NAO wird jedoch nicht nur durch eine SST-bedingte Veränderung des Temperaturgradienten in den mittleren Breiten beeinflusst, sondern auch durch die positive Temperaturanomalie in den Subtropen (siehe Abb. 8.4a). Diese Anomalien im subtropischen Atlantik bewirken eine Veränderung der interäquatorialen SST-Gradienten und führen zudem zu einer diabatischen Erwärmung. Hierbei steht die diabatische Erwärmung im engen Zusammenhang mit der ITCZ, sodass durchaus eine Rückkoppelung mit der NAO über Änderungen der angetriebenen Rossbywellen besteht. Durch eine positive SST-Anomalie kommt es in der Höhe zu

Divergenzen, welche Atizyklonalität bewirken und somit die Anregung von Rossbywellen in den Subtropen abschwächen. Über die Rossbywellen wiederum findet eine Amplifizierung der Hoch- und Tiefdruckgebiete in den mittleren Breiten statt. Somit spricht eine positive SST-Anomalie in den Subtropen eher für eine negative NAO-Phase. Diese wird auch ausführlicher von Czaja et al. (2003) beschrieben.

8.4. Spektralanalyse der NAO-AMV-Kopplung

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem spektralen Zusammenhang der beobachteten Zeitreihen der AMV und der NAO. Eine Kreuzkorrelation soll offenlegen, für welche lag-times ein Zusammenhang zwischen NAO und AMV signifikant ist. In diesem Zusammenhang wird im Folgendem erstmals eine reduzierte Stichprobengröße, beruhend auf der Anzahl der nicht autokorrelierten Datenpunkte, für die Berechnung der Signifikanz über einen t-Test berücksichtigt. Darüber hinaus soll eine Berechnung des Kreuzspektrums darüber Auskunft geben, ob sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen den beobachteten Zeitreihen der NAO und der AMV auf verschiedenen spektralen Bändern ausmachen lässt.

8.4.1. Beobachtungsdaten der NAO und der AMV

Die in dieser Arbeit verwendete Zeitreihe der AMV wird vom Earth System Research Laboratory (ESRL) des National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) zur Verfügung gestellt. Hierbei stellt der SST-Datensatz von Kaplan et al. (1998), welcher auf einem $5^\circ \times 5^\circ$ Gitter vorliegt und die monatlichen Anomalien vom Januar 1856 bis heute beinhaltet, die Grundlage für die Berechnung des AMV-Index dar. Die Berechnung erfolgte über ein gebietsbezogenes, gewichtetes Mittel über dem Nordatlantik von 0°N - 70°N . Die resultierende Zeitreihe wurde anschließend im Rahmen dieser Arbeit noch trendbereinigt. Positive Werte der AMV werden typischerweise mit SSTs in Verbindung gebracht, die wärmer sind als das klimatologische Mittel. Negative AMV-Werte werden dementsprechend mit kälteren SSTs assoziiert. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Wintermittel (De-

zember, Januar und Februar) der AMV für den Zeitraum von 1864 bis 2012 verwendet (siehe Abb. 8.5). Die verwendete Zeitreihe des NAO-Index wurde vom National Center for Atmospheric Research (NCAR) zur Verfügung gestellt und basiert auf der normalisierten Differenz des an den Wetterstationen von Lissabon, Portugal und Stykkisholmur/Reykjavik, Island, seit 1864 bis heute, gemessenen Bodendrucks (Hurrell, 1995). Für diese Arbeit wurden allerdings nur die trendbereinigten Wintermittel (Dezember, Januar und Februar) der Jahre 1864 bis 2012 verwendet (siehe Abb. 8.5). Positive Werte des NAO-Index deuten auf eine größere Druckdifferenz zwischen Portugal und Island als im klimatologischen Mittel hin, was zu einer Verstärkung der Westwinde über den mittleren Breiten führt. Dementsprechend bedeuten negative Werte des NAO-Index eine Abschwächung der Druckdifferenz zwischen den besagten Stationen.

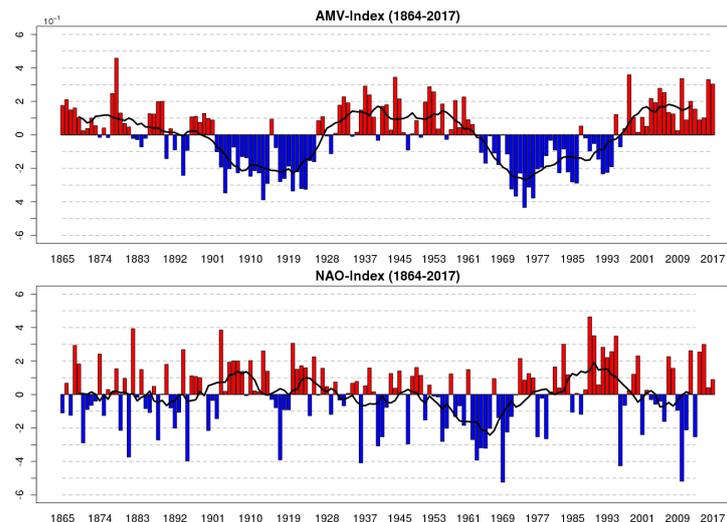


Abbildung 8.5.: *Oben: trendbereinigter AMV-Index aus den Kaplan SSTs. Unten: trendbereinigter NAO Index, basierend auf dem Datensatz von Hurrell (1995). Die schwarze Linie stellt jeweils das 10-jährige gleitende Mittel dar.*

8.4.2. Anpassung an einen auto-regressiven (AR) Prozess

Das generelle Konzept, welches hinter einem autoregressiven Modell steckt, ist, dass ein schwach stationärer Prozess \mathbf{X}_t von seinen eigenen, vorhergegangenen Werten abhängig \mathbf{X}_{t-k} ist. Autoregressive Prozesse werden durch ihre Ordnung be-

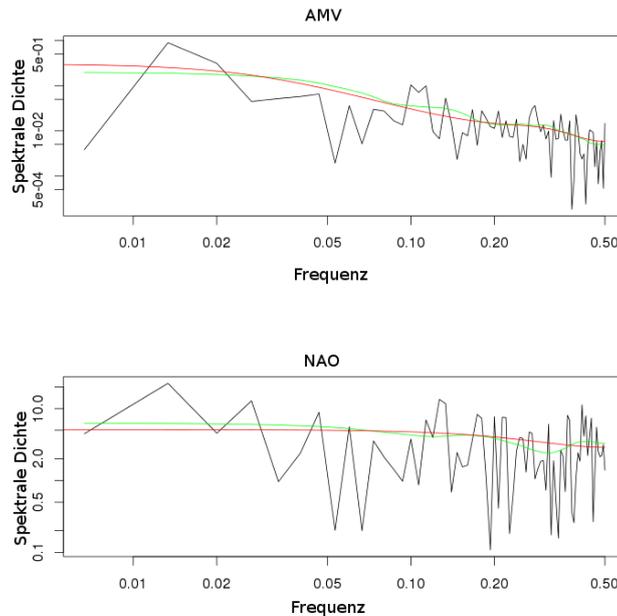


Abbildung 8.6: Spektrale Dichte der trendbereinigten AMV (oben) und NAO Indizes (unten) mit dem jeweiligen AR-fit (rote Linie) und dem Daniell-Kernel (grüne Linie).

stimmt, wobei durch von Storch und Zwiers (2001) eine Definition eines solchen Prozesses mit der Ordnung p , auch $AR(p)$ genannt, gegeben wird:

$\{\mathbf{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$ ist ein autoregressiver Prozess der Ordnung p für alle reellen Konstanten α_k , $k = 0, \dots, p$, wobei $\alpha_p \neq 0$ ist, und wenn $\{\mathbf{Z}_t : t \in \mathbb{Z}\}$ weißes Rauschen ist. Somit gilt:

$$\mathbf{X}_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{X}_{t-k} + \mathbf{Z}_t. \quad (8.1)$$

Wie sich an Gleichung 8.1 erkennen lässt, entspricht ein $AR(0)$ -Prozess weißem Rauschen. Ein $AR(1)$ -Prozess hingegen wird auch rotes Rauschen genannt, da sich die meiste Energie im kleinem Frequenzbereich (im Lichtspektrum entspricht das der Farbe Rot) befindet. Diese Prozesse sind nicht in der Lage zu oszillieren, sondern stellen eine Relaxation äußerer Anregungen dar, welche durch das Rauschen \mathbf{Z}_t induziert werden. Des Weiteren fällt auf, dass das System nur für $|\alpha_1| < 1$ stationär ist, wobei ein größeres α ein größeres Gedächtnis des Systems impliziert. Im Gegensatz zu den Prozessen erster Ordnung sind solche mit höherer Ordnung $p > 2$ in der Lage mit $p - 1$ Frequenzen zu oszillieren, was auf die so erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden zurückzuführen ist. Folglich würde ein $AR(2)$ Prozess mit einer Frequenz schwingen. Um später ein parametrisches Bootstrapping an den Zeitreihen der AMV und der NAO vorzunehmen, muss ein autoregressives Modell an diese Indizes angepasst werden. Dies wurde mit Hilfe der Yule-Walker-

Gleichungen realisiert. Die Frage, welche Ordnung des autoregressiven Modells am besten geeignet ist, wurde durch das sogenannte Akaike Information Criterion (AIC) gelöst. Das AIC ist im Grunde genommen eine Abstimmung zwischen der Komplexität eines Modells und dessen Anpassungsgüte (logarithmische Likelihood Funktion) (Akaike, 1974).

Es resultiert, dass ein AR(3) mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 60; 0, 03; 0, 13)$ die beste Anpassung für die AMV darstellt, wobei α_2 verhältnismäßig klein ist und somit eigentlich vernachlässigt werden kann. Somit hat das angepasste AR(3) Modell mit α_3 nur einen relevanten oszillierenden Anteil, welcher über einen polynomialen Ansatz einer Periode von etwa 3 Jahren zugeordnet werden kann. Im Gegensatz dazu hat sich für die NAO ergeben, dass ein AR(1) Modell mit einem $(\alpha_1) = (0, 14)$ die beste Lösung darstellt. Somit scheint die atmosphärische Oszillation keine zu sein, sondern entspricht eher rotem Rauschen. Die in diesem Abschnitt bestimmten AR-Modelle sind notwendig, um das Signifikanzniveau der Kreuzkohärenz zwischen NAO und AMV über ein Bootstrappingverfahren zu bestimmen (siehe 8.4.4). Die zugehörigen Power-Spektren der NAO und der AMV und deren AR-Anpassungen sind in Abb. 8.6 dargestellt.

8.4.3. Kreuzkorrelation

Abbildung 8.7 zeigt die Kreuzkorrelation zwischen der NAO- und der AMV-Zeitreihe, welche Auskunft darüber geben soll, ob eine Zeitreihe mit der anderen mit einer gewissen zeitlichen Verschiebung korreliert. Es zeigt sich bei der Kreuzkorrelation eine Periode von 60 Jahren mit einem Maximum, wenn die NAO um 20 Jahre vorausläuft und mit einem Minimum, wenn die AMV hingegen um 10 Jahre vorausläuft. Aufgrund der Periode von 60 Jahren zeigt sich nochmal ein zusätzliches Maximum, wenn die AMV um 40 Jahre führt. Bezüglich der Glaubwürdigkeit der Daten fällt auf den ersten Blick auf, dass die bereits erwähnten Extrema signifikant sind, wenn die ursprüngliche Stichprobengröße von 149 Jahren für den t-Test verwendet werden. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass diese Tests auf der Annahme beruhen, dass die zugrunde liegenden Daten nicht autokorreliert

und unabhängig sind, was generell zu dem Problem führt, dass das Konfidenzlevel zu niedrig angesetzt und somit schon bei kleineren Korrelationen als signifikant eingestuft wird, da meteorologische Daten im Allgemeinen autokorreliert sind. Dies wird von Zwiers und von Storch (1995) ausführliche diskutiert. In der selben Veröffentlichung wird deshalb darauf hingewiesen, dass in solchen Fällen eine sogenannte äquivalente Stichprobengröße berechnet werden soll, welche auch als effektive Anzahl von unabhängigen Beobachtungen interpretiert werden kann. Diesbezüglich schlugen Anderson und McLean (1974) und Trenberth (1984) vor, die äquivalente Stichprobengröße N_{eq} mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion zu berechnen:

$$N_{eq} = \frac{N}{1 + 2 \sum_{\tau=1}^{N-1} \frac{N-\tau}{N} \rho(\tau)}, \quad (8.2)$$

Hierbei ist $\rho(\tau)$ die Autokorrelation für eine zeitliche Verschiebung (auch Lag genannt) τ . Für den Spezialfall, dass der beobachtete Prozess ein AR(1)-Prozess ist, schlug Zwiers und von Storch (1995) für die Autokorrelationsfunktion $\rho(\tau) = \rho_1^{|\tau|} = \alpha_1^{|\tau|}$ vor. Somit ergibt sich als äquivalente Anzahl für die AMV $N_{eq}(AMV) = 139,7$ und für die NAO $N_{eq}(NAO) = 113,3$. Dies zeigt, dass die NAO eine höhere Autokorrelation aufweist. Diesbezüglich wird, um ein strikteres Signifikanzniveau mittels t-Test festzulegen, die kleinere äquivalente Anzahl der NAO ($N_{eq}(NAO) = 113,3$) für die Berechnung verwendet. Das somit resultierende Konfidenzintervall ist auch in Abb. 8.7 dargestellt. Es fällt auf, dass immer noch insgesamt 12 Werte der erwähnten Extrema über den nun höheren Signifikanzniveau liegen. Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass es sich bei dem Signifikanzniveau um das 95 % Konfidenzlevel handelt, was im Umkehrschluss impliziert, dass 5 % der Werte eine Null-Hypothese noch ablehnen können, obwohl sie eigentlich wahr wäre.

8.4.4. Kreuzkohärenz

Die Kreuzkohärenz ist ein Maß für den Grad der linearen Abhängigkeit zweier Zeitreihen in Abhängigkeit von der Frequenz. Dies ermöglicht unter anderem eine Identifikation der Frequenzbereiche in denen die Abhängigkeit zwischen AMV und

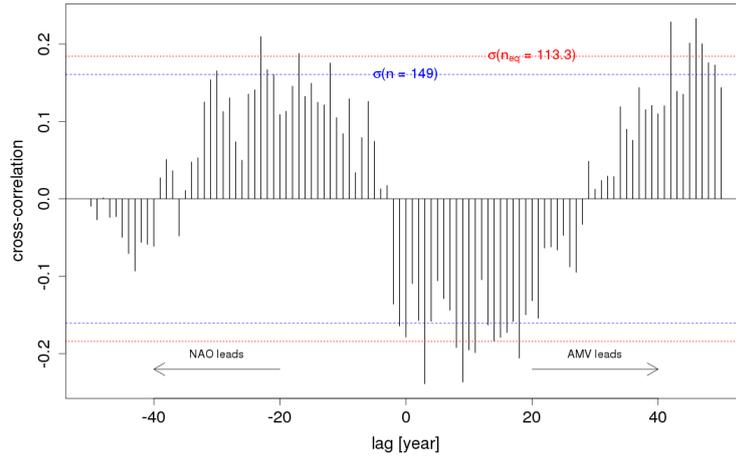


Abbildung 8.7.: Kreuzkorrelation zwischen der AMV und der NAO. Blaue Linie: 95 % Konfidenzlevel mit der ursprünglichen Stichprobengröße. Rote Linie: 95 % Konfidenzlevel mit der äquivalenten Stichprobengröße. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine AMV-Änderung zeitlich früher auftritt als eine Variation der NAO. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

NAO am stärksten sind. Eine Definition des Kreuzspektrums und der zugehörigen quadratischen Kohärenz wurde durch von Storch und Zwiers (2001) gegeben. Unter der Annahme, dass \mathbf{X}_t und \mathbf{Y}_t zwei schwach stationäre Prozesse sind, ist das Kreuzspektrum Γ_{xy} definiert als die Fouriertransformierte F der Kreuzkovarianzfunktion γ_{xy} :

$$\Gamma_{xy}(\omega) = F\{\gamma_{xy}\}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) e^{-2\pi i \tau \omega} \quad (8.3)$$

mit der Frequenz $\omega \in [-0,5, 0,5]$ und dem zeitlichen lag τ .

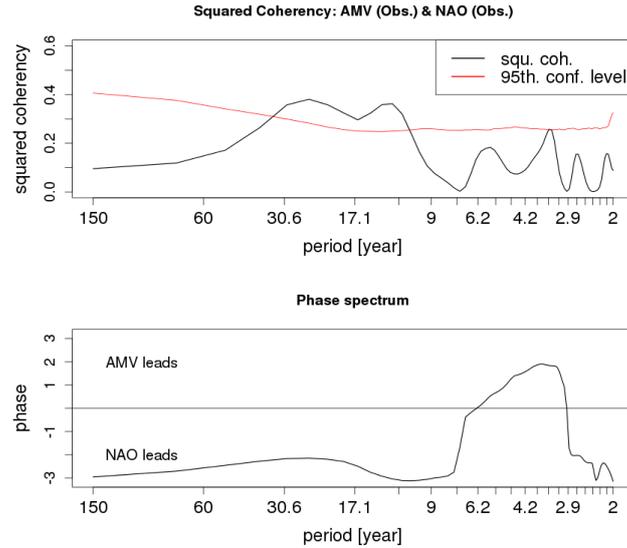
Aufgrund der Fouriertransformation ist das Kreuzspektrum im Allgemeinen eine komplexe Funktion mit entsprechendem Real- und Imaginärteil ($\Gamma_{xy}(\omega) = \Lambda_{xy}(\omega) + i\Psi_{xy}(\omega)$). Somit kann das Kreuzspektrum auch folgendermaßen über Polarkoordinaten ausgedrückt werden:

$$\Gamma_{xy}(\omega) = A_{xy}(\omega) e^{i\Phi_{xy}(\omega)}, \quad (8.4)$$

Hierbei sind A_{xy} und Φ_{xy} die Amplituden- und das Phasenspektrum. Das Amplitudenspektrum ist definiert als:

$$A_{xy}(\omega) = \sqrt{\Lambda_{xy}(\omega)^2 + \Psi_{xy}(\omega)^2}. \quad (8.5)$$

Abbildung 8.8: Oben: Quadratische Kohärenz zwischen der AMV und NAO (schwarze Linie). Die rote Linie stellt dabei das 95te Konfidenzlevel dar, welches mithilfe eines parametrischen Bootstrapping berechnet wurde. Unten: Phase in [rad] zwischen diesen Indizes. Hierbei geht der Wertebereich von $-3,14$ ($-\pi$) bis $3,14$ (π).



Wenn $\Psi_{xy}(\omega) \neq 0$ und $\Lambda_{xy}(\omega) \neq 0$, dann ist das Phasenspektrum gegeben als:

$$\Phi_{xy}(\omega) = \tan^{-1}(\Psi_{xy}(\omega)/\Lambda_{xy}(\omega)), \quad (8.6)$$

ansonsten gilt für den Fall $\Psi_{xy}(\omega) = 0$,

$$\Phi_{xy}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Lambda_{xy}(\omega) > 0 \\ \pm\pi & \text{für } \Lambda_{xy}(\omega) < 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

und falls $\Lambda_{xy}(\omega) = 0$ ist, gilt:

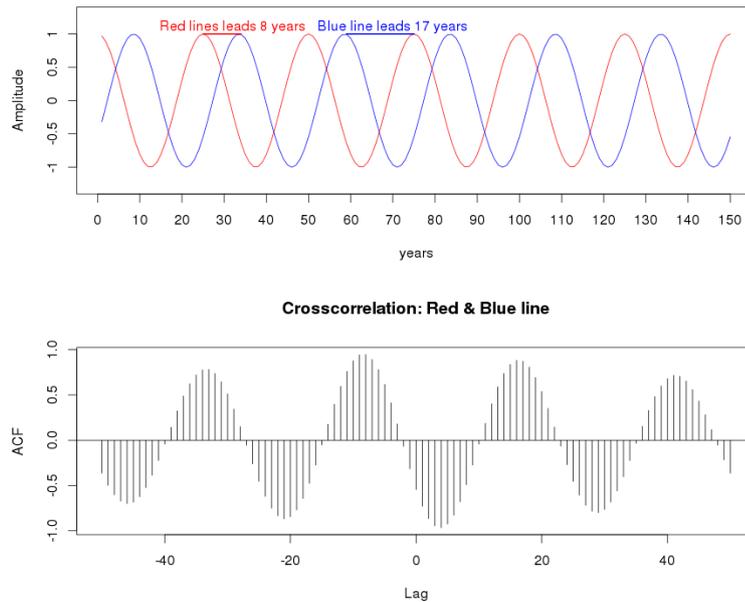
$$\Phi_{xy}(\omega) = \begin{cases} \pi/2 & \text{if } \Psi_{xy}(\omega) > 0 \\ -\pi/2 & \text{if } \Psi_{xy}(\omega) < 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Mit diesen Informationen kann die quadratische Kohärenz wie folgt berechnet werden:

$$\kappa_{xy}(\omega) = \frac{A_{xy}(\omega)^2}{\Gamma_{xx}(\omega)\Gamma_{yy}(\omega)}. \quad (8.9)$$

Auf dem ersten Blick fällt auf, dass die quadratische Kohärenz Parallelen zum quadrierten Korrelationskoeffizient aufweist. Diesbezüglich kann auch gezeigt werden, dass $0 \leq \kappa_{xy} \leq 1$ gilt. Die quadratische Kohärenz zwischen der AMV und der NAO überschreitet das 95te Konfidenzlevel bei einer Periode von etwa 3 Jahren

und ein weiteres Mal bei dem Periodenband zwischen 12 und 33 Jahren (siehe Abb. 8.8). Dabei muss erwähnt werden, dass das besagte Konfidenzintervall über ein parametrisches Bootstrapping-Verfahren mit 10000 Realisierungen berechnet wurde, wobei die Koeffizienten, die dafür notwendig sind, aus den angepassten AR-Modellen der AMV und der NAO stammen (hierbei sei auf Abschnitt 8.4.2 verwiesen). Das Iterationsverfahren lief so ab, dass für jeden Iterationsschritt ein zufälliger AR(3)- und ein zufälliger AR(1)-Prozess simuliert wurde, wobei die Koeffizienten die selben sind, die aus der AR-Anpassung der AMV und der NAO aus Abschnitt 8.4.2 resultierten. Danach wurde die quadratische Kohärenz zwischen diesen simulierten Prozessen für jede Frequenz berechnet. Dieser Vorgang wurde entsprechend 10000 mal wiederholt und anschließend wurde das 95te Perzentil aus allen 10000 Iterationen für jede Frequenz berechnet. Letztlich gibt das so berechnete Konfidenzlevel Auskunft über die quadratische Kohärenz zwischen jeweils einem beliebigen AR(3)- und einem beliebigen AR(1)-Prozess mit den vorgegebenen Parametern und Längen. Somit bedeutet ein Überschreiten des Konfidenzintervalls, dass mit 95 % Wahrscheinlichkeit die Kohärenz zwischen AMV und NAO einen physikalischen Hintergrund hat und nicht dadurch zustande kommt, dass es sich einfach um eine zufälliges Zusammenspiel zwischen einem AR(3)-Prozess und einem AR(1)-Prozess handelt. Hierbei sollte allerdings auch wieder berücksichtigt werden, dass es trotzdem immer noch eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % gibt. Nichtsdestoweniger zeigt die Phase der relevanten Perioden, dass es eine Verschiebung von etwa $-\pi$ im dekadischen Bereich und eine Verschiebung von etwa $\pi/2$ bei einer Periode von 3 Jahren gibt. Für den dekadischen Bereich bedeutet die Phasenverschiebung, dass die NAO, abhängig von der Periode, 6 bis 16,5 Jahre voraus läuft, was allerdings nicht bedeutet, dass zuerst eine NAO-Änderung auftritt, welche dann die AMV beeinflusst. Zur besseren Anschauung sollen hierbei beispielhaft zwei Zeitreihen mit jeweils einer Periode von 25 Jahren und einer Phasenverschiebung von $-2/3\pi$ dienen (siehe Abb. 8.9). Dementsprechend liegt das Maximum der quadratischen Kohärenz für beide Zeitreihen bei 25 Jahren und die Phasenverschiebung gibt an, dass die rote Linie 8 Jahre vorausläuft. Letzteres heißt aber im Umkehrschluss, dass die andere Zeitreihe mit $4/3\pi$ beziehungsweise 17 Jahre voraus laufen könnte. Dieser Aspekt könnte durch die Phasen-Definition von $-\pi$

**Abbildung 8.9:**

Oben: Exemplarischer Verlauf von zwei Zeitreihen mit jeweils einer Periode von 25 Jahren und einer Phasenverschiebung von $-2/3\pi$. Unten: Kreuzkorrelation zwischen den beiden oberen Zeitreihen.

bis π eventuell übersehen werden. Darüber hinaus verdeutlicht Abb. 8.9 noch die zugehörige Kreuzkorrelation der beiden beispielhaften Zeitreihen, welche durchaus Parallelen zu der Kreuzkorrelation zwischen der AMV und der NAO aufweist (Abb. 8.7). Diese ist nämlich auch positiv, wenn die NAO voraus läuft und negativ, wenn die AMV führt. Hier liegt die Phasenverschiebung, wie bereits erwähnt, aber bei $-\pi$ im dekadischen Periodenbereich. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Phasenverschiebung von $1/2\pi$ bei einer Periode von 3 Jahren, was dazu führt, dass die AMV der NAO etwa um ein Jahr voraus läuft. Dieses Ergebnis ist im Einklang mit den Studien von Frankignoul und Kestenare (2005) sowie Renggli (2011), welche auch ein Vorauslaufen des Ozeans auf dieser Zeitskala beschrieben haben.

8.4.5. Zusammenfassung

Zahlreiche Beobachtungs- und Modellstudien haben sich bereits direkt oder indirekt mit dem Zusammenhang zwischen der AMV und der NAO für verschiedene zeitliche Perioden auseinandergesetzt. Hierzu herrscht ein großer Konsens darüber, dass es eine Kopplung zwischen diesen beiden Indizes sowohl auf der dekadischen bis multi-dekadischen als auch auf der jahreszeitlichen bis interannualen Zeitskala gibt. Für den längeren Zeitraum zeigen viele Studien, dass der Ozean die Atmo-

sphäre mit einem Lag von 4 bis 9 Jahren beeinflusst. Wohingegen auf der kürzeren Zeitskala der Einfluss der Atmosphäre auf den Ozean größer ist als andersherum. Dieses Kapitel befasste sich mit einer ähnlichen Thematik, indem der spektrale Zusammenhang zwischen den beobachteten Zeitreihen der AMV und der NAO, unter einer verschärfteren Signifikanzbestimmung, analysiert wurde. Hierzu hat eine Anpassung der AMV an ein autoregressives Modell ergeben, dass ein AR(3)-Prozess dafür am geeignetsten ist. Der oszillierende Anteil konnte hierbei einer Periode von 3 Jahren zugeordnet werden. Auf der anderen Seite erwies sich für die NAO die Anpassung an ein AR(1)-Modell am probatesten. Solche Prozesse werden auch rotes Rauschen genannt und haben keinen oszillierenden Anteil. Weiterhin wurde eine Kreuzkorrelation zwischen diesen Zeitreihen berechnet, wobei für die Signifikanzberechnung nur die Anzahl der unabhängigen Daten verwendet wurde, welche auch äquivalente Anzahl genannt wird. Diese liegt naturgemäß unter der ursprünglichen Stichprobengröße, was dazu führt, dass das Signifikanzniveau auch höher liegt. Somit lässt sich ein signifikantes Maximum ausmachen, wenn die NAO etwa 20 Jahre vorausläuft und signifikante Minima ergeben sich, wenn die AMV 5, 10 und 20 Jahre führt. Aufgrund der Periode der Kreuzkorrelation von 60 Jahren ergibt sich ein weiteres Maximum, wenn die AMV um 40 Jahre vorausläuft. Die Tatsache, dass es mehrere Extrema für verschiedene Leadtimes gibt, verdeutlicht, dass die Kopplungsmechanismen zwischen der NAO und der AMV auf verschiedenen spektralen Bändern stattfinden. Dieser Aspekt wurde über das Kreuzspektrum analysiert. Die so berechnete quadratische Kohärenz zwischen der AMV und der NAO wies signifikante Werte für eine Periode von 3 Jahren und für den Periodenbereich zwischen 12 und 33 Jahren auf. Ferner konnte für den dekadischen bis multi-dekadischen Bereich eine Phasenverschiebung zwischen Ozean und Atmosphäre von 6 bis 16,5 Jahren beobachtet werden. Das Problem bei dieser Untersuchungsmethode war, dass die verwendeten Zeitreihen der AMV und der NAO mit ihrer Länge von 149 Jahren verhältnismäßig kurz sind. Dies führt dazu, dass die Ergebnisse wegen verschärfter Signifikanz nicht eindeutig sind, da das hier angesetzte 95te Signifikanzniveau immer noch eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % beinhaltet und die Anzahl der signifikanten Werte nur knapp über diesen Prozentsatz liegt. Trotzdem zeigten die im Rahmen dieser Arbeit erzielten Ergebnisse

gute Übereinstimmungen mit den zuvor erwähnten Studien.

9. Einfluss der AMV-NAO-Wechselwirkung dargestellt mit dem DSI

Im vorherigen Kapitel konnte gezeigt werden, dass in den Wechselwirkungen zwischen der NAO und der AMV durchaus prognostisches Potential liegt, da die AMV mit einer Periode von etwa 60 Jahren der kurzperiodischen NAO im dekadischen Bereich vorausläuft. Dabei beeinflusst die NAO einen großen Teil der winterlichen Klimavariabilität über dem Nordatlantik und den umliegenden Kontinenten (Hurrell und van Loon, 1997), was sich unter anderem an der Sturmaktivität und dem Niederschlag über Nord- und Südeuropa bemerkbar macht. Diese Phänomene sind Auswirkungen eines instationären, diabatischen Zustands der Atmosphäre. Folglich besteht auch ein enger Zusammenhang zum DSI, dessen Beziehung zu Stürmen und Niederschlag nicht nur im Rahmen dieser Arbeit in Kapitel 5, sondern auch unter anderem in den Arbeiten von Claußnitzer et al. (2008) und Weber und Névir (2007) gezeigt wurde. Somit soll in diesem Kapitel untersucht werden, ob sich die Kopplung zwischen AMV und NAO auch im DSI abbildet. Hierzu werden die ERA 20c-Reanalysedaten auf einem $2,5^\circ \times 2,5^\circ$ Gitter für den Zeitraum von 1900 bis 2010 verwendet. Diesbezüglich zeigt Abb. 9.1 den mittleren $|DSI|$ über alle Winter (Dezember-Januar-Februar, DJF) für die ERA 20c Reanalysedaten in 750 hPa. Auf den ersten Blick ist zu erkennen, dass der $|DSI|$ bei einer Abweichung vom Grundzustand vom Äquator bis zum Pol zunimmt, was dem in Richtung Pol zunehmenden Einfluss der Corioliskraft zuzuschreiben ist und zur besseren Darstellbarkeit eine Skalierung über den dekadischen Logarithmus sinnvoll macht. Generell sind die hohen DSI-Werte am südlich von Grönlands, vor der Küste Neufundlands auffällig, welche sich dadurch erklären lassen, dass dort und auf der Lee-Seite der Rocky-Mountains, aufgrund von ausgeprägten Gebirgsstrukturen,

großskalige Wellen angeregt werden. In diesem Bereich werden die für Europa relevanten Winterzyklonen gebildet beziehungsweise verstärkt. In den Abschnitten 9.3 und 9.4 wird analysiert, wie sich diese Struktur unter dem Einfluss der NAO beziehungsweise der AMV verändert. Ferner soll untersucht werden, ob es auch zu einer zeitlichen Verschiebung zwischen diesen Prozessen und dem $|DSI|$ über Europa kommt (das Gebiet, über dem räumlich gemittelt wurde, ist auch in Abb. 9.1 eingezeichnet). Für solche Untersuchungen muss aber zunächst überprüft werden, ob die in den Beobachtungsdaten bereits entdeckten Wechselwirkungen und Eigenschaften zwischen NAO und AMV auch in den ERA 20c-Daten wiederzufinden sind. Dies geschieht im folgendem Abschnitt 9.2.

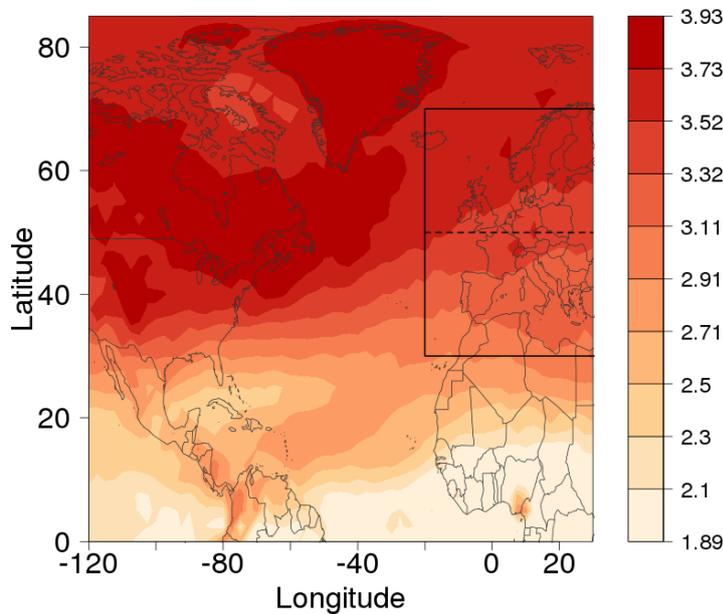


Abbildung 9.1.: Wintermittel (DJF) des $\log_{10} |DSI|$ in 750 hPa für ERA 20c. Das mit der durchgezogenen Linie eingezeichnete Rechteck zeigt das 'europäische' Gebiet, welches im Rahmen dieser Arbeit für weitere Untersuchungen verwendet wird. Die gestrichelte Linie unterteilt dieses Gebiet in einen nördlichen und einen südlichen Teil.

9.1. **Verwendete Reanalysedaten**

Für diesen Teil der Arbeit wurden die ERA 20c Daten verwendet (Poli et al., 2013). Diese basieren auf dem IFS-Modell (ECMWF, 2013), welche über Beobachtungsdaten am Boden assimiliert wurden, sodass die Reanalysedaten in einem Zeitraum von 1900 bis 2010 zur Verfügung stehen. Die hierbei analysierten Felder sind die drei Komponenten des Windes, der Temperatur, des Geopotentials, des Bodendruck, der Meersoberflächentemperatur sowie des Drucks auf der 2 PVU-Fläche. Ferner beträgt die räumliche Auflösung des Gitters $2,5^\circ$, wobei die Wintermittel über die Monate Dezember, Januar und Februar (DJF) verwendetet werden.

9.2. **Wechselwirkung zwischen AMV & NAO für ERA 20c**

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem AMV- und dem NAO-Index der ERA 20c-Reanalysedaten. Hierzu wird analog zu Abschnitt 8.4 die spektrale Dichte, die Kreuzkorrelation sowie die quadratische Kohärenz für die Indizes aus dem 20c-Datensatz berechnet und anschließend mit den Ergebnissen der beobachteten Zeitreihen verglichen (Abschnitt 8.4). Der AMV-Index wird dabei in gleicher Weise wie die beobachtete AMV-Zeitreihe, welche auf den Kaplan SSTs beruht, über ein Mittel des SST-Felds aus den ERA 20c-Daten berechnet. Demgegenüber steht die Berechnung des NAO-Index, welcher anders als die NAO von Hurrell (1995), über die erste Hauptkomponente des Bodendruckfelds über dem Nordatlantik im Sektor $20^\circ \text{ N}-80^\circ \text{ N}$, $90^\circ \text{ W}-40^\circ \text{ E}$ berechnet wird. Der Grund für die abweichende Berechnungsmethode der NAO liegt darin, dass es für den verwendeten ERA 20c-Datensatz schwierig ist, zwei Gitterpunkte auszuwählen, die den gewählten Stationen von Hurrell (1995) entsprechen, zumal diese eher repräsentativ für die Druckschwankungen im Ostatlantik sind. Somit hat die Berechnung über die erste Hauptkomponente den Vorteil, stations- beziehungsweise ortsunabhängig zu sein. Der Nachteil ist allerdings, dass nur etwa 50 % der Varianz des gesamten Druckfel-

des durch die erste Hauptkomponente erklärt wird, da durch die Berechnungsmethode die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert wird. Die so berechneten Zeitreihen der AMV und der NAO für ERA 20c sind in Abb. 9.2 dargestellt. Beim Vergleich mit dem zeitlichen Verlauf der beobachteten Indizes (siehe Abb. 8.5) fällt auf, dass diese gut mit den Reanalysedaten übereinstimmen. Lediglich vom Betrag unterscheidet sich der NAO Index aus 20c mit den Beobachtungen, was auf die unterschiedliche Berechnungsmethoden zurückzuführen ist. Dieser Aspekt spielt allerdings keine Rolle für den Korrelationskoeffizienten, der zwischen den beiden NAO-Indizes bei 0,86 und zwischen den beiden AMV-Indizes bei 0,91 liegt. Da das 95 %-Signifikanzniveau bei der verwendeten Stichprobengröße von 111 Jahren bei etwa 0,2 liegt, kann die zeitliche Übereinstimmung zwischen den beobachteten Indizes und denen aus ERA 20c als gut erachtet werden. Abbildung 9.3 zeigt

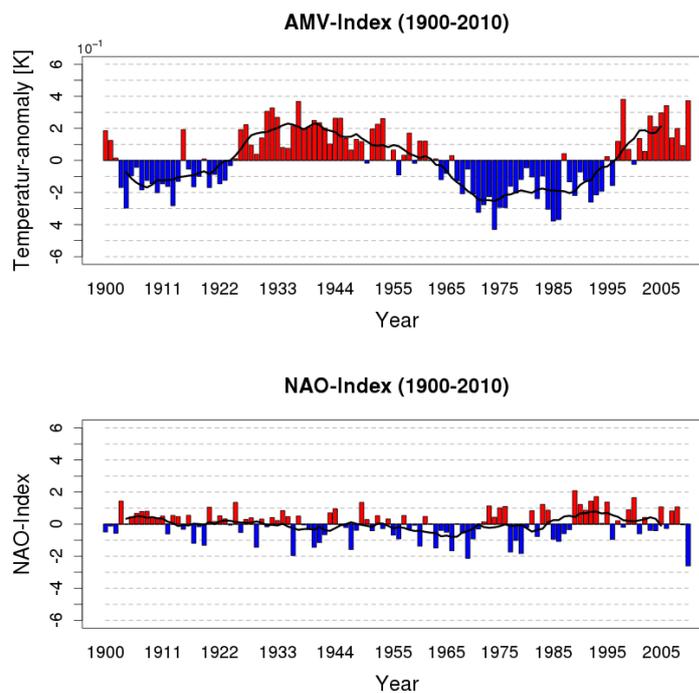


Abbildung 9.2.: Oben: AMV-Index aus den SSTs von ERA 20c. Unten: NAO Index, basierend auf der 1. Hauptkomponente des Druckfelds von ERA 20c. Die schwarze Linie stellt jeweils das 10 Jährige gleitende Mittel dar.

die spektrale Dichte der AMV und der NAO für ERA 20c. Auch hier fällt bei einem Vergleich mit der spektralen Dichte der Beobachtungsdaten (siehe Abb. 8.6) die relativ große Ähnlichkeit zwischen den beiden Datensätzen, bezüglich lokaler

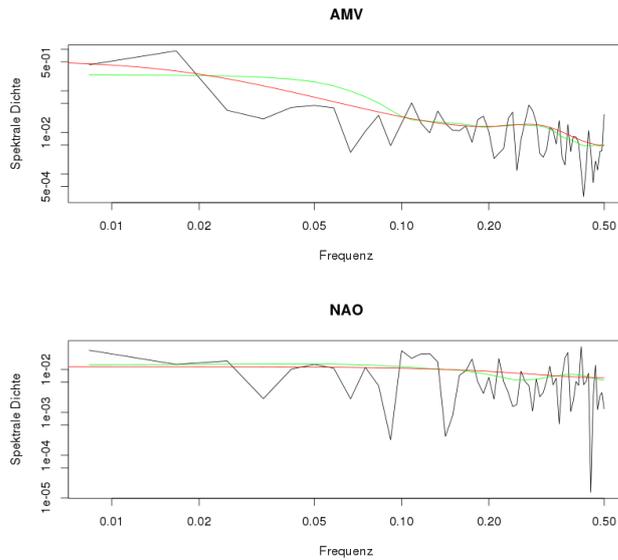


Abbildung 9.3: Spektrale Dichte der trendbereinigten AMV (oben) und NAO Indizes (unten) mit dem jeweiligen AR-fit (rote Linie) und dem Daniell-Kernel (grüne Linie) für ERA 20c.

Extrema auf. Kleinere Unterschiede kommen jedoch trotzdem zustande, da die verwendete Zeitreihe der ERA 20c-Indizes mit 111 Jahren um 38 Jahre kürzer ist, was vor allem im niedrigen Frequenzbereich, aufgrund der dort schlechter aufgelösten Schwingungen, zu Abweichungen führt. Bezüglich der Anpassung an einen autoregressiven Prozess (siehe auch Abschnitt 8.4.2) lässt sich feststellen, dass für die AMV aus ERA 20c ein AR(3)-Modell mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 58; -0, 01; 0, 25)$ am besten geeignet ist. Hierbei macht auch wieder der dritte Koeffizient den einzigen relevanten oszillierenden Anteil aus, wobei dieser über einem polynomialen Ansatz einer Periode von etwa 3 Jahren zuzuordnen ist. Diese beiden Eigenschaften stimmen überein mit der beobachteten AMV (Abschnitt: 8.4.2). Eine weitere Übereinstimmung lässt sich zudem auch für die NAO finden, da die NAO in der ERA 20c Reanalyse am besten einem AR(1)-Modell mit $\alpha_1 = 0, 15$ zugeordnet werden kann. Der Koeffizient der beobachteten NAO weicht mit $\alpha_1 = 0, 14$ dabei kaum ab (Abschnitt: 8.4.2). Daher stellen sowohl der NAO-Index von Hurrell (1995) als auch der NAO-Index der ERA 20c Reanalyse einen schwachen roten Rauschprozess dar.

Im Folgenden geht es um die Wechselwirkungen zwischen AMV und NAO in den ERA 20c-Reanalysedaten. Hierzu zeigt Abb. 9.4 die Kreuzkorrelation zwischen den besagten Indizes, wobei auffällt, dass diese eine Periode von 60 Jahren aufweist. Weiterhin gibt es ein Maximum, wenn die NAO um 20 Jahre vorausläuft und ein

Minimum, wenn die AMV um etwa 15 Jahre vorausläuft. Dieses Verhalten stimmt mit dem aus dem beobachteten Daten überein (Abschnitt 8.4.3). Bezüglich der Unsicherheit der Daten fällt auf dem ersten Blick auf, dass die bereits erwähnten Extrema signifikant sind, wenn die ursprüngliche Stichprobengröße von 111 Jahren für den t-Test verwendet werden. Aber auch hier sind die verwendeten Daten autokorreliert und nicht unabhängig. Demzufolge muss wieder eine äquivalente Stichprobengröße N_{eq} berechnet werden, welche auch als effektive Anzahl von unabhängigen Beobachtungen interpretiert werden kann. Die Berechnung läuft dabei äquivalent zu der in Abschnitt 8.4.3 beschriebenen Vorgehensweise ab, wobei sich $N_{eq} = 63,7$ ergibt. Das somit resultierende Konfidenzintervall ist auch wieder in Abb. 9.4 dargestellt. Es fällt auf, dass das Maximum bei einem Vorauslaufen der NAO von 20 Jahren und das Minimum bei einem Vorauslaufen der AMV um circa 15 Jahre immer noch über dem Signifikanzniveau liegen. Da aber das 95te Signifikanzniveau immer noch eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % beinhaltet, was in etwa 5,5 Werte sind und nur 3 Werte über dem Signifikanzniveau liegen, ist dieses Ergebnis nicht ganz eindeutig.

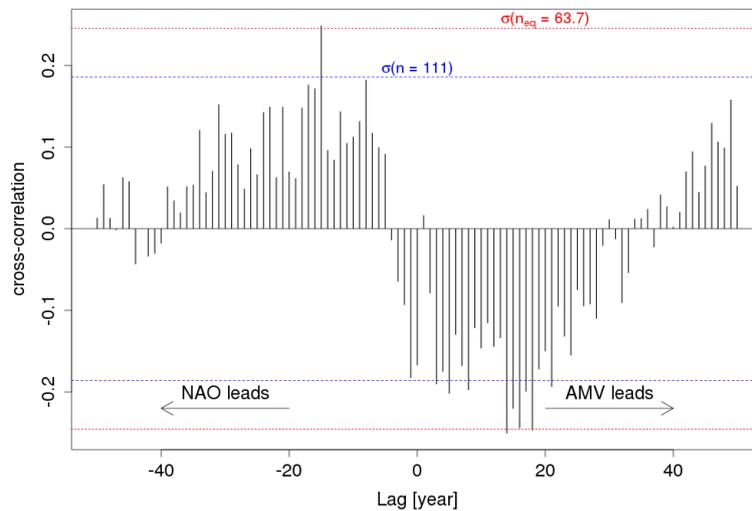


Abbildung 9.4.: Kreuzkorrelation zwischen der AMV und der NAO für ERA 20c. Blaue Linie: 95 % Konfidenzlevel mit der ursprünglichen Stichprobengröße. Rote Linie: 95 % Konfidenzlevel mit der äquivalenten Stichprobengröße. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine AMV-Änderung zeitlich früher auftritt als eine Variation der NAO. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

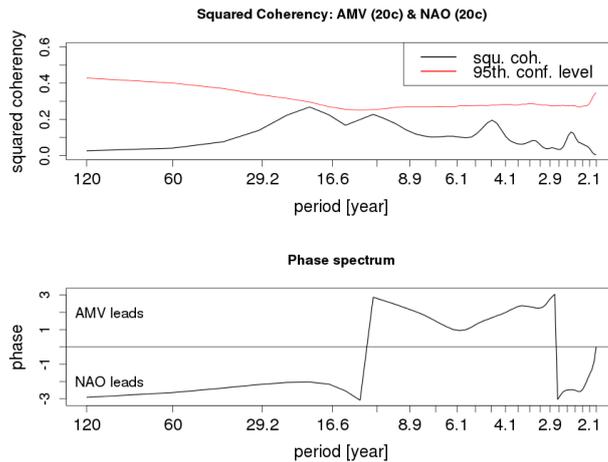


Abbildung 9.5: Oben: Quadratische Kohärenz zwischen der AMV und NAO (schwarze Linie) für ERA 20c. Die rote Linie stellt dabei das 95te Konfidenzniveau dar, welches mithilfe eines parametrischen Bootstrapping berechnet wurde. Unten: Phase in [rad] zwischen diesen Indizes.

Abbildung 9.5 zeigt die quadratische Kohärenz zwischen der AMV und der NAO in den ERA 20c-Reanalysedaten und soll Auskunft darüber geben, auf welcher Zeitskala die Wechselwirkungen zwischen diesen beiden Indizes stattfindet. Auch hier wurde das 95te Signifikanzniveau über ein parametrisches Bootstrappingverfahren mit 10000 Iterationsschritten, welches in Abschnitt 8.4.4 bereits beschrieben wurde, berechnet. Obwohl für keine Periode eine signifikante quadratische Kohärenz erreicht wird, gibt es lokale Maxima für die Periode zwischen 22 und 12 Jahren sowie jeweils bei 5 und circa 2 Jahren. Somit zeigen sich, ähnlich wie bei der quadratischen Kohärenz der Beobachtungsdaten, Extrema auf der dekadischen bis multi-dekadischen sowie auf der interannualen Zeitskala. Darüber hinaus verdeutlicht die Phase der relevanten Perioden, dass es eine Verschiebung von etwa $-1,5$ rad ($-\pi/2$) im dekadischen Bereich und eine Verschiebung von etwa $1,5$ rad ($\pi/2$) bei einer Periode von 5 Jahren gibt. Für den dekadischen Bereich bedeutet die Phasenverschiebung, dass die NAO, abhängig von der Periode, 5 bis 3 Jahre vorausläuft, was allerdings im Umkehrschluss auch bedeuten kann, dass die AMV 17 bis 9 vor der NAO läuft. Auf der interannualen Zeitskala führt die Phasenverschiebung von $-1,5$ rad dazu, dass entweder die AMV um ein Jahr führt oder die NAO der AMV um circa 4 Jahre vorausläuft.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es zwischen der ERA 20c-Reanalyse und den Beobachtungsdaten bezüglich der AMV und der NAO-Indizes große Übereinstimmungen gibt. Dies äußert sich zunächst in einer guten zeitlichen Übereinstimmung bei der Korrelationskoeffizienten von 0,86 und 0,91 erreicht wurden. Wei-

terhin hat eine Analyse der spektralen Dichte der ERA 20c-Daten analoge Ergebnisse zu den Beobachtungen gezeigt. Hierbei hat eine Anpassung an ein autoregressives Modell gezeigt, dass auch der AMV-Index aus ERA 20c am ehestem einem AR(3)-Prozess mit einer oszillierenden Komponente von 3 Jahren entspricht. Für die NAO ließ sich, ähnlich wie schon bei den Beobachtungsdaten, eine Anpassung an einen AR(1)-Prozess als beste Näherung feststellen. Ferner wurde über eine Kreuzkorrelation untersucht, ob es eine zeitliche Verschiebung zwischen der AMV und der NAO gibt. Auch hier waren die Ergebnisse äquivalent zu denen der Beobachtungsdaten. Allerdings führte eine genauere Betrachtung der Signifikanz der ERA 20c-Daten, mittels einer äquivalenten Stichprobengröße, zu keinem eindeutigem Ergebnis, da nur sehr wenige Werte über dem Signifikanzniveau lagen. Dieses Problem findet sich bei der Betrachtung der quadratischen Kohärenz wieder, bei der die Extrema der ERA 20c-Daten gut mit denen der Beobachtungsdaten übereinstimmen, aber nicht signifikant sind. Dies ist möglicherweise der Berechnungsmethode des NAO-Index für ERA 20c über die erste Hauptkomponente geschuldet, da der so berechnete NAO-Index nur 50 % der Varianz des gesamten Druckfelds wiedergibt und somit auch Informationen über die Wechselwirkungen zwischen Druckfeld (NAO) und Ozean (AMV) verloren gehen. Diesbezüglich zeigt Abb. 9.6 wieder die quadratische Kohärenz zwischen AMV und NAO, nur dass der NAO-Index über die Differenz der Bodendruckanomalien zweier Gitterpunkte berechnet wurde, die jeweils über Island (20° W, 65° N) und den Azoren ($27,5^{\circ}$ W, $37,5^{\circ}$ N) liegen. Nun ist zu erkennen, dass die Maxima im dekadischen und interannualen Bereich höher sind und für den zuerst genannten Bereich sogar signifikant sind. Ein weiterer Aspekt für die fehlende Signifikanz der quadratischen Kohärenz könnte die geringere Stichprobengröße sein. Nichtsdestoweniger sind die guten Übereinstimmungen zwischen Beobachtungen und Reanalyse damit zu erklären, dass letztere schließlich mithilfe von Beobachtungsdaten assimiliert.

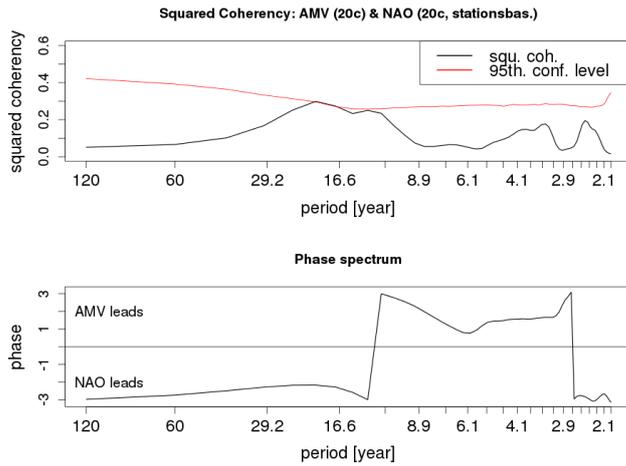


Abbildung 9.6: Oben: Quadratische Kohärenz zwischen der AMV und NAO, welche nun durch die Differenz zweier Gitterpunkte berechnet wurde, (schwarze Linie) für ERA 20c. Die rote Linie stellt dabei das 95te Konfidenzlevel dar, welches mithilfe einer parametrischen Bootstrapping berechnet wurde. Unten: Phase in [rad] zwischen diesen Indizes.

9.3. Auswirkung der NAO auf den DSI für ERA 20c

In diesem Abschnitt wird anhand der ERA 20c-Reanalysedaten untersucht, inwieweit sich eine Änderung der NAO auf den DSI auswirkt und welche Mechanismen hierbei eine Rolle spielen. Hierzu wird auch untersucht, ob es eine zeitliche Verschiebung zwischen dem DSI über Europa und der NAO gibt und auf welcher Zeitskala sich dies abspielt. Für diesen Zweck wurde der DSI über Europa für den Bereich $35^\circ \text{ N} - 70^\circ \text{ N}$, $20^\circ \text{ W} - 30^\circ \text{ E}$ gemittelt. Das entsprechende Gebiet wurde bereits in Abb. 9.1 eingezeichnet. Darüber hinaus zeigen Abb. 9.7a und Abb. 9.7b den mittleren $|DSI|$ über alle Winter (Dezember - Januar - Februar, DJF) mit positiver NAO-Phase und negativer NAO-Phase. Auf den ersten Blick ist zu erkennen, dass der $|DSI|$ bei einer Abweichung vom Grundzustand vom Äquator bis zum Pol zunimmt. Dies ist dem in Richtung Pol zunehmenden Einfluss der Corioliskraft innerhalb der PV zuzuschreiben. Weiterhin ist zu erkennen, dass sich das lokale Maximum des $|DSI|$, welches sich für NAO+ vor der Küste Neufundlands befindet, für NAO- nach Süden verschiebt. Dies ist damit erklären, dass es während einer NAO+ Phase zu einer Verstärkung und einer nördlichen Verschiebung der Sturmzugbahnen in den mittleren Breiten kommt. Um einen genaueren Eindruck von den Unterschieden des $|DSI|$ für die beiden NAO-Phasen gewinnen zu können, wurde in Abb. 9.8 eine Korrelation zwischen dem DSI und dem NAO-Index berechnet. Durch eine klassenbasierte Korrelation ist es nicht notwendig, den dekadischen Logarithmus des $|DSI|$ zu berücksichtigen, was eine Berechnung

der Signifikanz erheblich vereinfacht. Hierbei zeigen sich zonal verlaufende Bänder mit abwechselnd positiver und negativer Korrelation. Diese, sich im Atlantik zonal erstreckenden Muster positiver Korrelation, lassen sich nun mit einer Zunahme der Sturmzugbahnen der mittleren Breiten und mit einer Zunahme der Easterly-Waves während positiver NAO-Phasen erklären. Beide Aspekte führen zu einer erhöhten atmosphärischen Dynamik und so zu einer Zunahme des DSI, was letztendlich zu einer positiven Korrelation zwischen NAO und DSI führt. In Abb. 9.8 hat sich be-

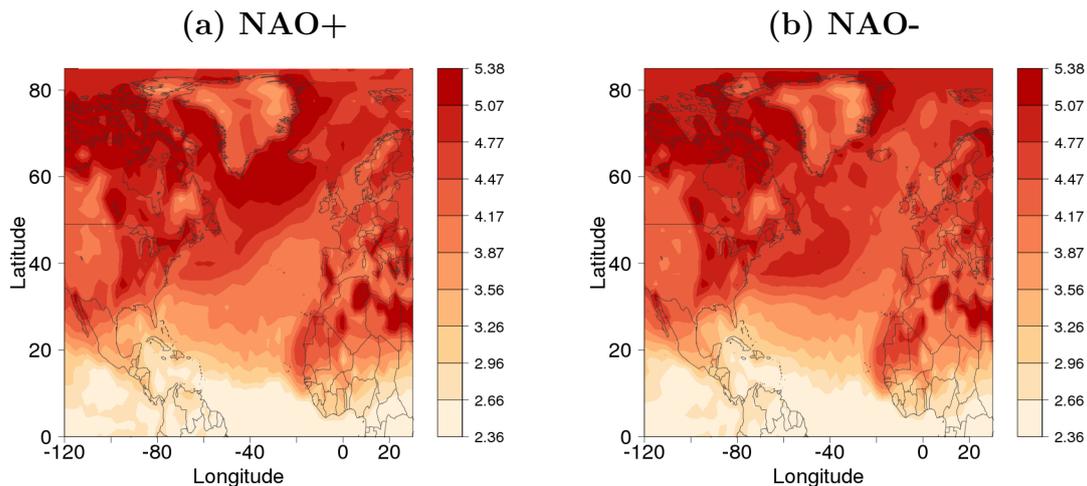


Abbildung 9.7.: Mittel des dekadisch logarithmierten $|DSI|$ für ERA 20c während positiver (a) und negativer (b) NAO-Phasen in 1000 hPa.

reits eine gute Korrelation zwischen dem DSI und der NAO über dem Atlantik und Europa gezeigt. Nun soll untersucht werden, ob es eine zeitliche Verschiebung zwischen der NAO und dem über Europa gemittelten DSI gibt. Hierzu stellt Abb. 9.9a die Kreuzkorrelation zwischen diesen Größen dar, wobei zu erkennen ist, dass es eine signifikante zeitliche Verschiebung nur für etwa 3 Werte gibt. Dieses Ergebnis ist aber in Anbetracht der 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit des 95ten Signifikanzniveaus bei 111 Jahren nicht eindeutig. Der Korrelationskoeffizient von etwa 0,5 bei keiner zeitlichen Verschiebung ist hingegen eindeutig signifikant, da das 99,9te Signifikanzniveau gerade mal bei 0,3 liegt. Eine noch höhere Korrelation von 0,6 wird erreicht, wenn der Betrag des DSI nur über Nordeuropa gemittelt und dieser dann wie gehabt mit der NAO gekreuzkorreliert wird (Abb. 9.9b). Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich, wie in Abb. 9.8 ersichtlich wird, durch Nordeuropa, aufgrund der NAO bedingten Verschiebung der Sturmzugbahnen, ein Band positiver

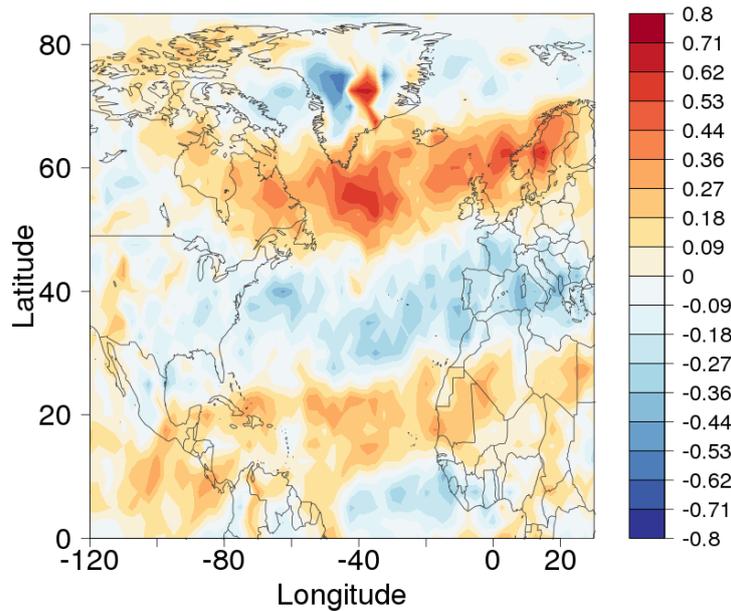


Abbildung 9.8.: Korrelation des $|DSI|$ -Felds in 750 hPa mit dem NAO-Index für ERA 20c. Hierbei sind Werte $< -0,19$ und $> 0,19$ signifikant ($p < 0,05$).

Korrelation zieht, wohingegen es in Südeuropa genau andersherum ist. Ungeachtet dessen soll zunächst im weiteren Verlauf das Mittel von $|DSI|$ über den gesamten europäischen Raum verwendet werden, da sich die weiteren Ergebnisse dieser Arbeit dadurch nur geringfügig ändern und so eine bessere Übersichtlichkeit gewahrt werden kann.

Die nächste Frage, die sich stellt, ist, auf welcher Zeitskala die Wechselwirkungen zwischen DSI und NAO stattfinden. In diesem Zusammenhang zeigt Abb. 9.10 die quadratische Kohärenz zwischen diesen Größen, wobei zu erkennen ist, dass das Signifikanzniveau bei einer Periode von 6 Jahren und bei einer Periode von 2,5 Jahren überschritten wird. In diesem Bereich lässt sich auch kaum eine Phasenverschiebung feststellen.

Bisher wurde nur untersucht, wie sich die NAO auf den Betrag des DSI in der unteren Troposphäre auswirkt. Aus diesem Grund zeigt Abb. 9.11 die Korrelation des $|DSI|$ -Felds mit dem NAO-Index in der oberen Troposphäre bei 250 hPa. Hierbei zeigen sich über dem Atlantik wieder zonale Bänder mit abwechselnd positiver und negativer Korrelation. Diese sind auch wieder auf die Veränderung der Sturmzug-

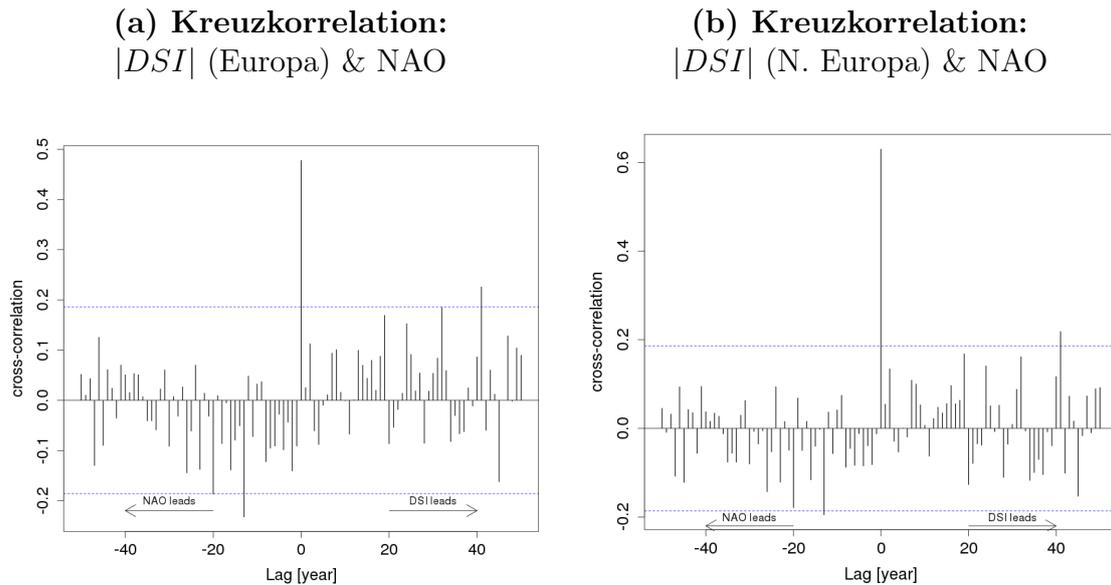


Abbildung 9.9.: Kreuzkorrelation zwischen dem NAO-Index und $|DSI|$ für 750 hPa. Abbildung a) zeigt die Kreuzkorrelation mit einem $|DSI|$, der über das gesamte in Abb. 9.8 eingezeichnete Gebiet. Abbildung b) zeigt die Kreuzkorrelation mit einem Mittel nur über den nördlichen Teil des besagten Gebiets. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine DSI-Änderung zeitlich früher auftritt als eine Variation der NAO. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

bahnen und der Easterly Waves während der NAO-Phasen zurückzuführen. Diese Struktur ist über Europa, anders als in 750 hPa (siehe Abb. 9.8), nicht mehr zu finden. Vielmehr ist beinahe das gesamte Gebiet über dem europäischen Kontinent leicht anti-korreliert. Dies wird auch in der Kreuzkorrelation zwischen der NAO und über Europa gemittelten Betrag des DSI in 250 hPa (Abb. 9.12) deutlich. In dieser Abbildung ist nämlich zu erkennen, dass der Korrelationskoeffizient bei keiner zeitlichen Verschiebung zwischen diesen Größen nur etwa bei 0,2 liegt. Das Minimum ist hierbei bei einer leichten Verschiebung von ungefähr 2 bis 3 Jahren zu finden und liegt etwa bei 0,26. Ansonsten scheint der Einfluss der NAO auf den DSI in der oberen Troposphäre nicht besonders groß zu sein, da das Signifikanzniveau bei den zeitlichen Verschiebungen nur selten und dann auch nur leicht überschritten wird.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der Einfluss der NAO auf den Betrag des DSI eher in der unteren bis mittleren Troposphäre zu finden ist, da sich in diesen Höhen die Auswirkungen der veränderten Druckdifferenz im Ost-

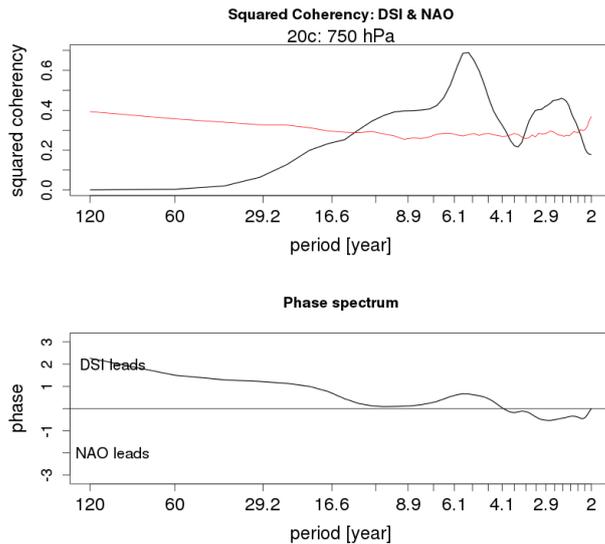


Abbildung 9.10: Oben: Quadratische Kohärenz zwischen dem über Europa gemittelten $|DSI|$ für 750 hPa und der NAO (schwarze Linie) für ERA 20c. Die rote Linie stellt dabei das 95te Konfidenzlevel dar, welches mithilfe eines parametrischen Bootstrapping berechnet wurde. Unten: Phase zwischen diesen Zeitreihen.

atlantik beziehungsweise die daraus resultierenden Modifikationen der Sturmzugbahnen eher bemerkbar machen. Diese Kopplung spielt sich auf einer tendenziell kürzeren Zeitskala ab und hat auch keine zeitliche Verschiebung in den Wintermittelwerten, was darauf zurückzuführen ist, dass die zugrundeliegende Kopplung zwischen der NAO und den Stürmen beziehungsweise Zyklonen in erster Linie auf der synoptischen Zeitskala stattfindet. Demgegenüber stehen die Ergebnisse in der oberen Troposphäre, welche zunächst gegen des physikalischen Erklärungsmodell über höhere/niedrigere Dynamik und entsprechend höhere/niedrigere Beträge des DSI während positiver/negativer NAO-Phasen über Europa sprechen. Denn der $|DSI|$ ist in 250 hPa über Europa anti-korreliert. Die Erklärung hierfür ist, dass sich aufgrund der vertikalen Neigung der Frontalzone, die räumlichen Zirkulationsmuster in dieser Höhe nach Norden verschieben. Diesbezüglich wird auf Abschnitt 9.5 verwiesen, in dem eine umfangreichere Beschreibung gegeben wird.

9.4. Auswirkung der AMV auf den DSI für ERA 20c

In diesem Abschnitt wird anhand der ERA 20c-Reanalysedaten untersucht, inwieweit sich eine Änderung der AMV auf den DSI auswirkt und welche Mechanismen hierbei eine Rolle spielen. Hierzu wird auch wieder untersucht, ob es eine zeitliche Verschiebung zwischen dem DSI über Europa und der AMV gibt und auf welcher

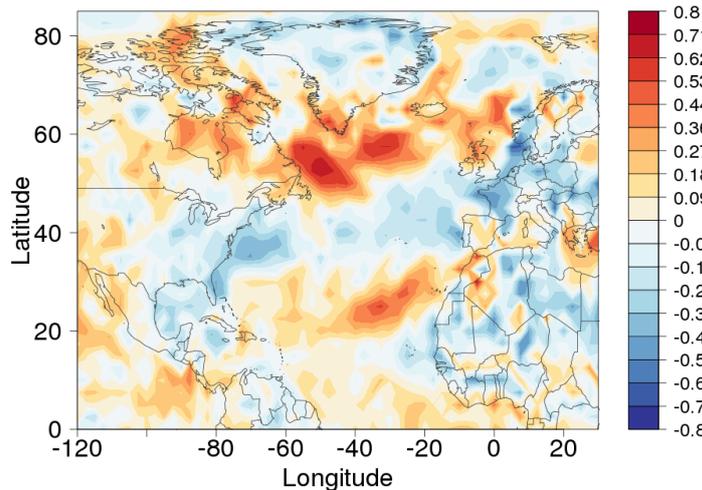


Abbildung 9.11.: Korrelation des $|DSI|$ -Felds in 250 hPa mit dem NAO-Index für ERA 20c. Hierbei sind Werte $< -0,19$ und $> 0,19$ signifikant ($p < 0,05$).

Zeitskala sich dies abspielt. Für diesen Zweck wurde der DSI abermals über Europa für den Bereich $35^\circ \text{ N} - 70^\circ \text{ N}$, $20^\circ \text{ W} - 30^\circ \text{ E}$ gemittelt. Das entsprechende Gebiet wurde bereits in Abb. 9.8 eingezeichnet. Die räumliche Verteilung der Korrelation zwischen dem Betrag des DSI und der AMV ohne zeitliche Verschiebung ist für 750 hPa und 250 hPa in Abb. 9.13a und in Abb. 9.13b dargestellt. In beiden Höhen deutet sich ein tripolares Muster über dem Nordatlantik an. Dabei ist das Muster komplementär zu dem der NAO-DSI-Korrelation, also mit Anti-Korrelation in den mittleren Breiten und den Subtropen und positiver Korrelation dazwischen. Dies ist auf die in den Abschnitten 8.3 und 8.3 gezeigten Anti-Korrelation zwischen NAO und AMV zurückzuführen. Jedoch sind die Korrelationskoeffizienten zwischen dem $|DSI|$ und der AMV über dem Atlantik relativ gering und über Europa ähnlich schwach ausgeprägt. Letzteres ist auch in Abb. 9.14a und 9.14b zu erkennen, welche die Kreuzkorrelation zwischen der AMV und dem über Europa gemittelten $|DSI|$ für 750 hPa und 250 hPa zeigt. Denn für beide Drucklevel liegt der Korrelationskoeffizient ohne zeitliche Verschiebung nur bei ungefähr -0,15 und somit auch unter dem 95 % Signifikanzlevel. Besagtes Signifikanzlevel wird in 750 hPa jeweils bei einer zeitlichen Verschiebung von etwa ± 2 Jahren und bei einer Verschiebung von ungefähr 30 Jahren, bei einem Vorauslaufen der AMV, überschritten. Da es sich hierbei aber nur um vereinzelte Werte handelt, können

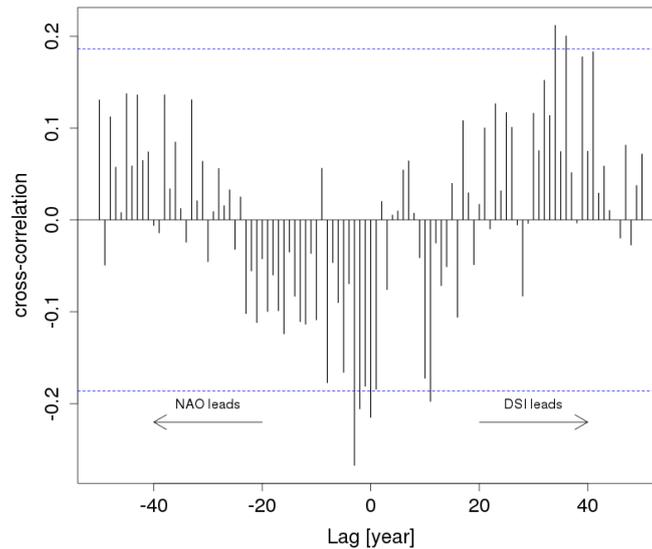


Abbildung 9.12.: Kreuzkorrelation zwischen dem NAO-Index und dem über Europa gemittelten $|DSI|$ für 250 hPa für ERA 20c. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine DSI-Änderung zeitlich früher auftritt als eine Variation der NAO. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

diese Überschreitungen im Rahmen einer 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit nicht als eindeutig gewertet werden. Anders verhält sich dies in 250 hPa, wo es bei einem Vorlaufen des $|DSI|$ um einen Zeitraum von 10 bis 25 Jahren mehrfach zu einer signifikanten Anti-Korrelation, mit Minima um -0,29 kommt. Dass der Betrag des DSI der AMV vorausläuft und diese auch beeinflusst, ist jedoch physikalisch nicht sinnvoll. Vielmehr macht sich ein weiteres Mal der Einfluss der NAO bemerkbar, welche in dieser Höhe mit dem $|DSI|$ anti-korreliert ist (Abschnitt 9.3) und der AMV im ähnlichen zeitlichen Bereich vorausläuft (Abschnitt 8.4.3). Wesentlich auffälliger ist aber die Kreuzkorrelation für den Bereich, wo die AMV dem $|DSI|$ um etwa 10 bis 30 Jahre vorausläuft, da für den gesamten Zeitraum das Signifikanzniveau überschritten wird und dabei ein Maximum von 0,4 bei circa 20 Jahren erreicht wird. Hierbei zeigt sich auch in der quadratischen Kohärenz zwischen dem $|DSI|$ und der AMV (Abb. 9.15) ein Extremum im dekadischen Bereich, welches allerdings nicht signifikant ist. Die Erklärung für das Maximum der Kreuzkorrelation, wenn die AMV vorausläuft, kann im Grunde genommen auf die Kreuzkorrelation zwischen der AMV und der NAO (Abb. 9.4) zurückgeführt werden, in der die AMV der NAO in einem ähnlichen zeitlichen Bereich vorauslief.

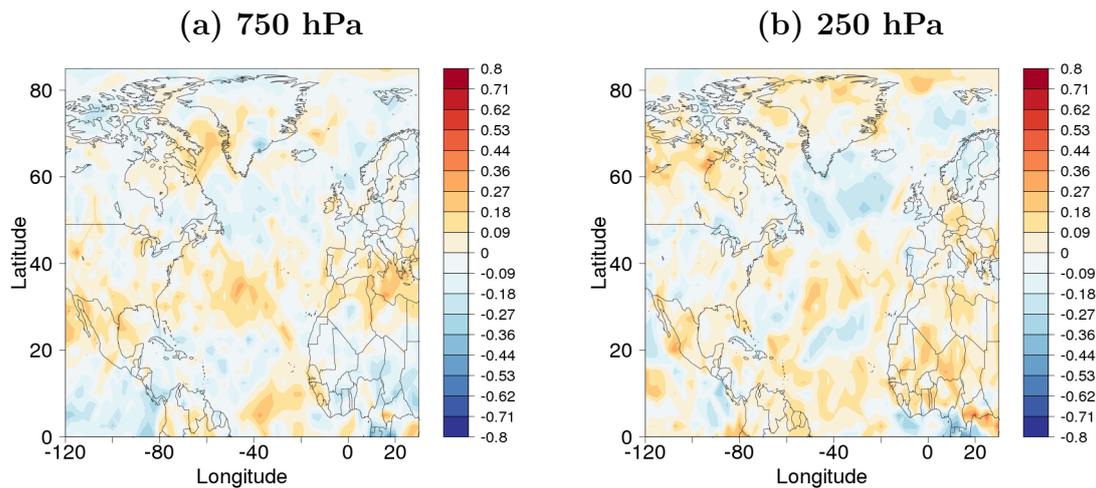


Abbildung 9.13.: Korrelation des $|DSI|$ -Felds in 750 hPa (a) und 250 hPa (b) mit dem AMV-Index für ERA 20c. Hierbei sind Werte $< -0,19$ und $> 0,19$ signifikant ($p < 0,05$).

Hierbei ergab sich aber eine Anti-Korrelation, die aber aufgrund einer weiteren Anti-Korrelation zwischen NAO und DSI in 250 hPa (Abb. 9.12) wiederum zu einer positiven Korrelation zwischen NAO und $|DSI|$ in eben jener Höhe führt (Abb. 9.13a). Auffällig hierbei ist allerdings, dass das Maximum der Kreuzkorrelation recht groß und zeitlich relativ stabil ist, obwohl zwischen dem $|DSI|$ in 250 hPa und der AMV, welche am Boden berechnet wird, beinahe die gesamte Troposphäre liegt. Dies ist aber eigentlich nicht besonders verwunderlich, da sich das 250 hPa Drucklevel ungefähr auf der Höhe der Tropopause befindet, welche wiederum eine viel geringere Variabilität aufweist, als die Troposphäre darunter und somit weniger auf kleinskalige Fluktuationen reagiert. Um dies zu verifizieren, wird im folgendem Abschnitt der Einfluss der Tropopausenhöhe auf die Wechselwirkungen zwischen NAO, AMV und DSI näher beleuchtet.

9.5. Die Auswirkung der AMV-NAO-Kopplung auf den DSI und die Tropopausenhöhe

In den vorherigen Abschnitten konnte gezeigt werden, dass es in der unteren Troposphäre eine signifikant positive Korrelation zwischen der NAO und dem DSI über

Europa gibt. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass in der oberen Troposphäre die AMV mit dem DSI, bei einer Verschiebung von etwa 20 Jahren, signifikant positiv korreliert ist. Hierbei ist bemerkenswert, dass es in der unteren Troposphäre eine wesentlich schwächere Korrelation zwischen DSI und AMV gibt. Somit scheint die Kopplung zwischen Ozean und atmosphärischer Dynamik in der Nähe der Tropopause ausgeprägter zu sein, als in der darunter liegenden Atmosphäre. Hierbei wurde die 2 PVU-Isofläche unter anderem von Highwood (1997) und Pelly (2001) als dynamische Tropopause festgelegt.

Das bedeutet, dass sich bei einer positiven PV Anomalie, welche sich infolge einer Zyklone bildet, die Tropopause absenkt (Holton et al., 1995). Somit können auch Prozesse wie NAO und AMV einen Einfluss auf die Tropopause beziehungsweise Tropopausenhöhe haben. Folglich befasst sich dieser Abschnitt mit der Frage, welche Rolle die Tropopausenhöhe in den Wechselwirkungen zwischen NAO, AMV und DSI einnimmt. Die Tropopausenhöhe wird im Weiteren durch den Druck auf der 2 PVU-Isofläche beschrieben. Somit bedeutet ein höherer Druckwert auf der 2 PVU-Fläche, dass die Tropopause niedriger liegt und bei einem niedrigeren Druckwert liegt die Tropopause entsprechend höher.

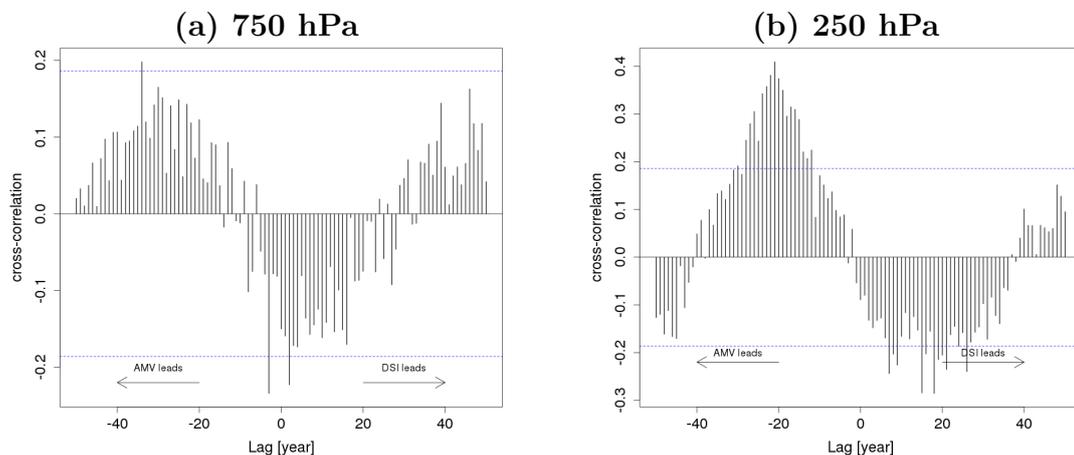
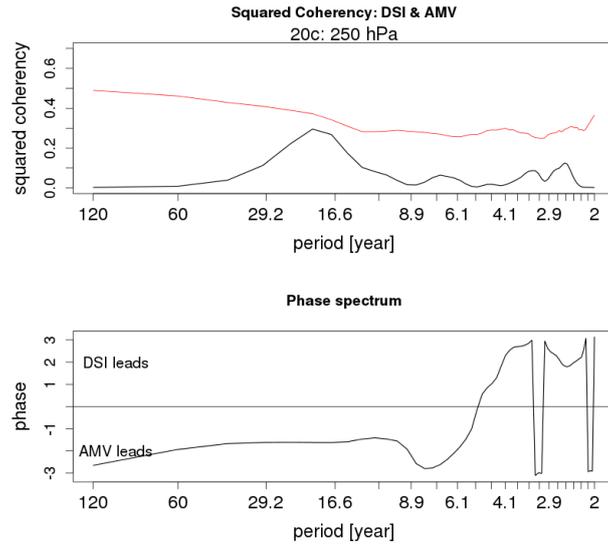


Abbildung 9.14.: Kreuzkorrelation zwischen dem AMV-Index und dem über Europa gemittelten $|DSI|$ für 750 hPa (a) und für 250 hPa (b) für ERA 20c. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine DSI-Änderung zeitlich früher auftritt als eine Variation der AMV. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

Abbildung 9.15: Oben: Quadratische Kohärenz zwischen dem über Europa gemittelten $|DSI|$ für 250 hPa und der AMV (schwarze Linie) für ERA 20c. Die rote Linie stellt dabei das 95te Konfidenzlevel dar, welches mithilfe eines parametrischen Bootstrapping berechnet wurde. Unten: Phase in [rad] zwischen diesen Zeitreihen.



9.5.1. Kopplung zwischen DSI und Tropopausenhöhe

Die PV ist über der Tropopause größer als darunter und nimmt mit der Höhe zu Hoskins et al. 1985, was auf die höhere Stabilität ($\frac{\partial \Theta}{\partial z}$) der Stratosphäre und die Abnahme der Dichte zurückzuführen ist. Denn in $\Pi = \frac{1}{\rho} \vec{\zeta}_a \cdot \nabla \Theta$ geht sowohl die Dichte invers, als auch die vertikale Stabilität über den Gradienten der potentiellen Temperatur Θ ein. Somit wird auch ersichtlich, dass sich mit einem Absinken der Tropopause und der damit verbundenen Zunahme der PV und der Stabilität auch der DSI erhöht, da beide Größen in den DSI eingehen ($DSI := \frac{1}{\rho} \nabla \Pi \cdot (\nabla \Theta \times \nabla B)$). Diesbezüglich zeigt Abb. 9.16 die Kreuzkorrelation zwischen dem Druck auf der 2 PVU-Fläche und dem DSI auf der 250 hPa-Fläche, welche ungefähr auf der Höhe der Tropopause liegt. Hierbei ist die hohe Korrelation von ungefähr 0,6 zwischen diesen Größen bei keiner zeitlichen Verschiebung zu sehen, was den oben beschriebenen Zusammenhang bestätigt. Weiterhin ist aber auch ein Bereich mit signifikanter Korrelation zu erkennen, wenn der Druck um etwa 10 Jahre vorausläuft. Verantwortlich hierfür ist wohl eine Rückkopplung mit der NAO. Hierzu wird in Abschnitt 9.5.2 in Abb. 9.19 gezeigt, dass es eine signifikante Anti-Korrelation zwischen NAO und der Tropopausenhöhe bei einer zeitlichen Verschiebung von 10 Jahren gibt. Da der $|DSI|$ und die NAO in dieser Höhe anti-korreliert sind (siehe Abbildung 9.12) führt dies wiederum zu einer positiven Korrelation zwischen der Tropopausenhöhe und dem $|DSI|$ für jene zeitliche Verschiebung.

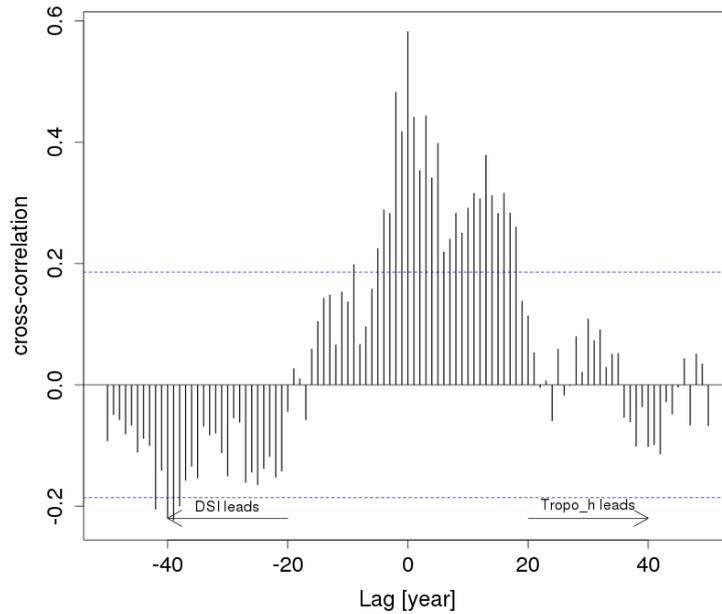


Abbildung 9.16.: Kreuzkorrelation zwischen dem über Europa gemittelten $|DSI|$ (250 hPa-Fläche) und dem Druck (2 PVU-Fläche) für ERA 20c. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine Änderung der Tropopausenhöhe zeitlich früher auftritt als eine Variation des DSI. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

Im vorherigen Teil dieser Arbeit konnte dargelegt werden, dass die AMV ein durchaus prognostisches Potential auf den DSI in der oberen Troposphäre auf der dekadischen Zeitskala hat. Nun soll analysiert werden, wie groß der Zusammenhang zwischen dem DSI in der oberen Troposphäre und dem DSI in der mittleren Troposphäre ist, wo sich ein Großteil des Wettergeschehens abspielt. Hierzu wird der Betrag des DSI wieder über Europa gemittelt. Anschließend wird die $|DSI|$ -Zeitreihen für jedes Drucklevel mit allen anderen Höhen korreliert. Dies ist in Abbildung 9.17 dargestellt, wobei beachtet werden muss, dass die Korrelationskoeffizienten entlang einer diagonalen Achse gespiegelt sind, da bei der Berechnung der Korrelation die Reihenfolge keine Rolle spielt. Hierbei fällt auf, dass der $|DSI|$ in der mittleren Troposphäre zwischen 700 hPa und 400 hPa erwartungsgemäß am besten mit den umliegenden Schichten korreliert sind, denn dieser Bereich wird sowohl von der unteren Troposphäre als auch von der oberen beeinflusst, da er genau zwischen diesen beiden liegt. Die Korrelation zwischen der oberen Troposphäre in 250 hPa und der in 500 hPa liegt bei ungefähr 0,5 und somit über dem 95ten Signifikanzlevel von 0,19. Ein weiterer interessanter Aspekt ist die erhöhte positive

Korrelation zwischen der unteren Troposphäre (1000 hPa bis 925 hPa) und der oberen Troposphäre (400 hPa bis 225 hPa), da es hier anscheinend einen Transfer gibt, der die mittlere Troposphäre unbeeinflusst lässt (in diesem Bereich ist die Korrelation geringer und größtenteils nicht signifikant). Die Erklärung hierfür ist, dass die Entstehung einer Zyklone in den mittleren Breiten in Verbindung mit Baroklinität in der unteren Troposphäre steht. Diese barokline Störung führt zu einer positiven PV-Anomalie und somit zu einer Zunahme des DSI im unteren Bereich der Atmosphäre. Gleichzeitig kommt es in der oberen Troposphäre zu einer Störung der planetaren Wellen, welche im zyklonalen Bereich wiederum positive PV-Anomalien (Hoskins et al., 1985) und somit auch dort eine Zunahme des DSI bewirken.

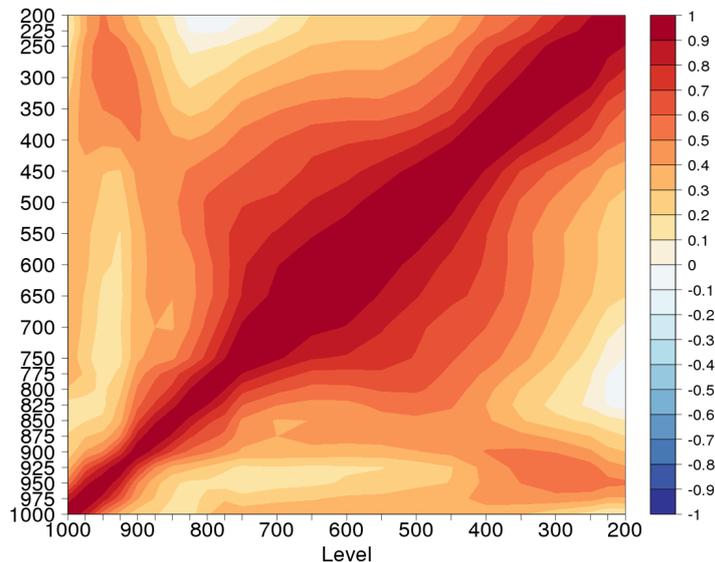


Abbildung 9.17.: Korrelation des über Europa gemittelten $|DSI|$ zwischen allen Druckleveln. Dadurch, dass es bei der Berechnung der Korrelation die Reihenfolge der eingehenden Zeitreihen keinen Unterschied macht, ist die Abbildung entlang einer diagonal, durch den Nullpunkt verlaufenden Achse gespiegelt. Das 95 % Signifikanzniveau liegt bei 0,19.

9.5.2. Einfluss der NAO auf die Tropopausenhöhe

Im vorherigen Abschnitt wurde ein Zusammenhang zwischen dem $|DSI|$ in 250 hPa und der Tropopausenhöhe gezeigt. Nun soll untersucht werden, ob sich die NAO,

ähnlich wie beim $|DSI|$, auch auf die Tropopausenhöhe auswirkt. Hierzu zeigt Abb. 9.18a die Korrelation des NAO-Index mit dem Druckfeld auf der 2 PVU-Fläche. Besonders prominent sind hierbei die zwei diagonal verlaufenden Bänder mit hoher positiver Korrelation bei etwa 60° N und 20° N und das Band mit hoher negativer Korrelation dazwischen, welches sich bis über den europäischen Kontinent erstreckt. Wie dieses Muster physikalisch durch die NAO verursacht wird, kann über Abb. 9.18b erklärt werden. Hierbei wurde der NAO-Index mit dem Feld des Zonalwindes auf der 250 hPa-Fläche korreliert. Durch eine Zunahme der NAO und dem damit verbundenen Druckgradienten zwischen der Subpolar-Region und den Subtropen, kommt es zu einer Verschiebung der Jetstreams und somit auch des Zonalwindes in nördliche Richtung. Bei einer Abnahme der NAO verhält sich dies entsprechend umgekehrt. Aus diesem Grund ist in den mittleren Breiten jeweils ein Streifen mit positiver (circa 50° N) und südlich davon ein Streifen mit negativer Korrelation zu erkennen, da sich in diesem Bereich der Polarjet befindet. Weiter südlich gibt es aber eine Modifizierung des Subtropenjets durch die NAO, sodass sich in den Subtropen nochmal äquivalent zu den mittleren Breiten zwei Bänder mit positiver negativer Korrelation befinden. Nun kommt es also bei einer Zunahme der NAO bei etwa 10° N auch zu einer Zunahme des Zonalwindes und bei ungefähr 30° N zu einer Abnahme, somit kommt es im Gebiet dazwischen zu einer zyklonalen Zirkulation, was gleichbedeutend mit einer positiven PV-Anomalie ist. Diese PV-Anomalie ist auch in Abb. 9.18a bei etwa 20° N in Form einer herabgesetzten Tropopause wiederzufinden. Weiter nördlich führt die NAO+ bedingte Zunahme des Zonalwindes bei etwa 50° N und die bereits erwähnte Abnahme bei 30° N, zu einer antizyklonalen Zirkulation beziehungsweise zu einer negativen PV-Anomalie in dem Gebiet dazwischen. Auch dies ist in Abb. 9.18a durch eine höhere Tropopause bei 40° N wiederzufinden. Demzufolge wird die herabgesetzte Tropopause nördlich von etwa 60° N durch die Abnahme des Zonalwindes in der Polarregion nach dem gleichen Mechanismus ausgelöst. Letztlich lässt sich über Nordeuropa eine Abnahme der Tropopausenhöhe und über Südeuropa eine Zunahme feststellen, wobei letztere ein größeres Gebiet einnimmt und vom Betrag größer ist. Dies führt dazu, dass die Korrelation der über Europa gemittelten Tropopausenhöhe negativ mit der NAO korreliert ist, was in Abb. 9.19a in der Kreuzkorrelation

zwischen diesen Größen, bei keiner zeitlichen Verschiebung, zu erkennen ist. Wie bereits erwähnt wurde, gibt es im Bereich der Tropopause (~ 250 hPa) eine Anti-Korrelation zwischen dem DSI und der NAO (siehe Abb. 9.12), welche genau auf diese Zunahme der Tropopausenhöhe zurückzuführen ist.

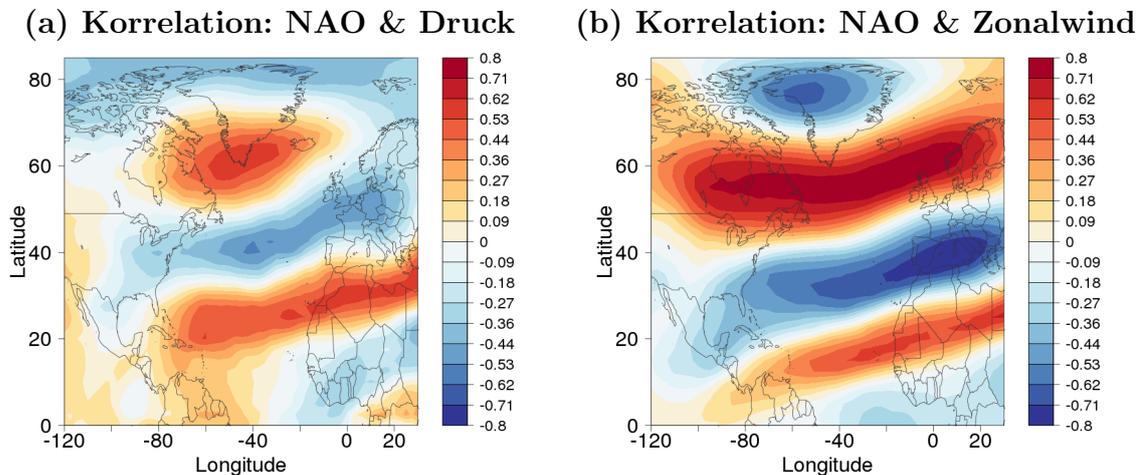


Abbildung 9.18.: Korrelation der NAO mit dem a) Druckfeld auf der 2 PVU-Fläche und b) dem Zonalwind auf der 250 hPa Fläche für ERA 20c. Hierbei sind Werte $< -0,19$ und $> 0,19$ signifikant ($p < 0,05$).

9.5.3. Einfluss der AMV auf die Tropopausenhöhe

Im vorherigen Abschnitt wurde die Auswirkung der NAO auf die Tropopausenhöhe untersucht. Nun soll äquivalent hierzu die Auswirkung der AMV untersucht werden. Diesbezüglich zeigt Abb. 9.19b die Kreuzkorrelation zwischen dem AMV-Index und dem über Europa gemittelten Druck auf der 2 PVU-Fläche. Auffällig hierbei ist, dass der Verlauf der Kurve sehr ähnlich ist, wie bei der Kreuzkorrelation zwischen dem DSI und der AMV in 250 hPa (siehe Abb. 9.14b), was an dem bereits erwähnten Zusammenhang zwischen DSI und der Tropopausenhöhe liegt. Der Unterschied ist allerdings, dass die Extrema der Korrelationskoeffizienten zwischen der Tropopausenhöhe und der AMV größer sind, was mit einer geringeren Variabilität der Tropopause zu erklären ist. Dies spiegelt sich auch in der quadratischen Kohärenz wider (Abb. 9.20), da die lokalen Maxima ähnlich sind, wie bei der Kohärenz zwischen DSI und AMV (siehe Abb. 9.15), jedoch diesmal wesentlich größer. Die Maxima im dekadischen und semi-dekadischen Bereich liegen

dabei sogar über beziehungsweise auf dem 95ten Signifikanzlevel. Auch bei einer räumlichen Betrachtung der Korrelation zwischen der AMV und dem Druckfeld auf der 2 PVU-Fläche, wird eine hohe Korrelation zwischen diesen Größen bei einem Vorauslaufen der AMV um 21 Jahre über Europa sichtbar (Abb. 9.21a). Darüber hinaus zeigen sich noch jeweils über Nordamerika und dem Nordatlantik Gebiete mit einer positiven Korrelation, welche wellenartig mit der besagten Struktur über Europa verbunden sind. Das heißt, in diesen Gebieten liegt die Tropopausenhöhe während positiver AMV-Phasen niedriger. Die Entstehung dieser Struktur lässt sich über die Korrelation der AMV mit dem Geopotentialfeld in 250 hPa bei gleichem zeitlichen Lag erklären (siehe Abb. 9.21b), wo eine Anti-Korrelation in dem Bereich mit der niedrigeren Tropopausenhöhe aus Abb. 9.21a zu erkennen ist. Diese Struktur der Geopotentialanomalien ist jedoch charakteristisch für negative NAO-Phasen, da dort die planetaren Wellen über dem Atlantik mehr mäandrieren und der Jetstream südlicher verläuft, als während positiver NAO-Phasen. Ferner wurde die besagte Anti-Korrelation zwischen der AMV und der NAO bei einem Vorauslaufen der AMV um den gleichen Zeitraum bereits in Abschnitt 9.2 gezeigt. Somit kommt es während positiver AMV-Phasen zu einer Abnahme der Baroklinität über dem Atlantik (Abschnitt 8.3), was zu einer Abschwächung und einem weniger zonalen Verlauf der Zyklonen und folglich auch zu einer Abnahme

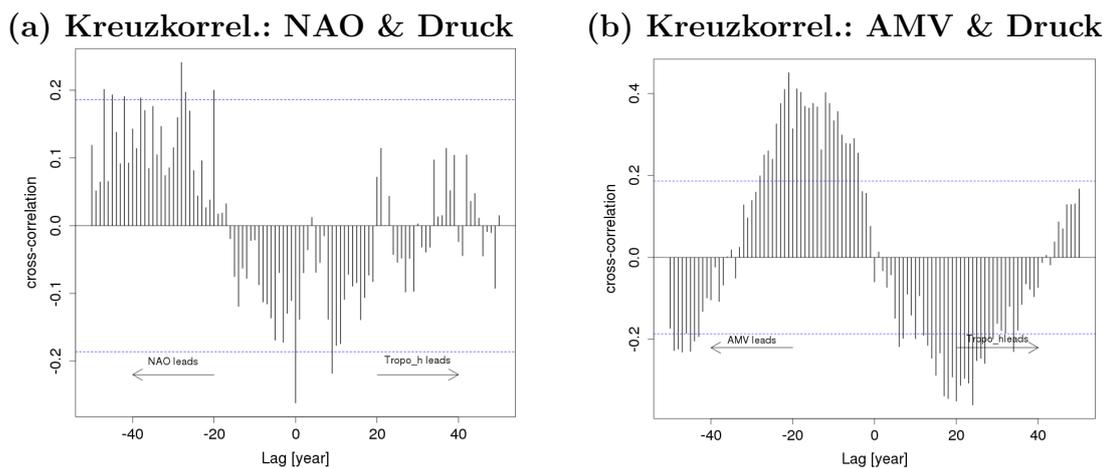
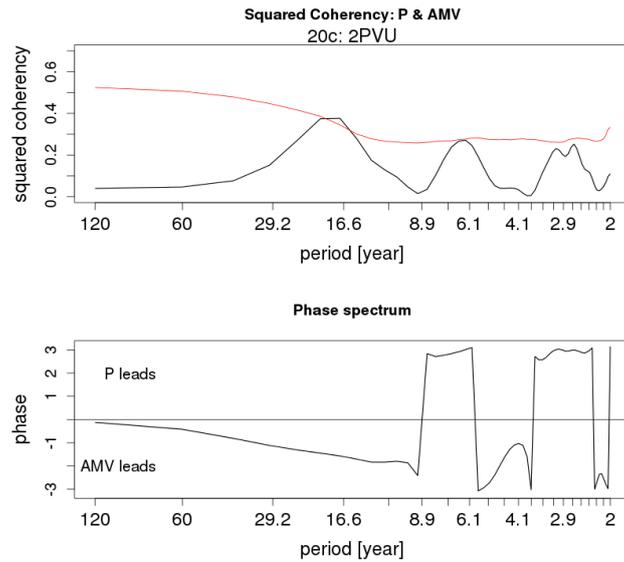


Abbildung 9.19.: Kreuzkorrelation zwischen dem a) NAO-Index bzw. b) AMV-Index und dem über Europa gemittelten Druck auf der 2 PVU-Fläche. Hier impliziert ein positiver Lag, dass eine Änderung der Tropopausenhöhe zeitlich früher auftritt als eine Variation der NAO beziehungsweise AMV. Ein negativer Lag beschreibt entsprechend das Gegenteil.

Abbildung 9.20: Oben: Quadratische Kohärenz zwischen dem über Europa gemittelten Druckfeld auf der 2 PVU-Fläche und der AMV (schwarze Linie) für ERA 20c. Die rote Linie stellt dabei das 95te Konfidenzlevel dar, welches mithilfe eines parametrischen Bootstrapping berechnet wurde. Unten: Phase zwischen diesen Zeitreihen.



der NAO führt. Die Wechselwirkungen zwischen diesen Prozessen können hierbei einen Zeitraum von bis zu 20 Jahren einnehmen. Dieses Mäandrieren der Zyklen während positiver AMV-Phasen wird zum einen in der Korrelation mit dem Geopotentialfeld durch negative Korrelationskoeffizienten deutlich. Andererseits kommt es dort zu einer Zunahme der Vorticity, welche eine positive PV-Anomalie bewirkt, die wiederum, wie oben erläutert, zu einer Abnahme der Tropopausenhöhe führt. Daraus resultiert dementsprechend auch eine Zunahme des DSI in diesen Gebieten.

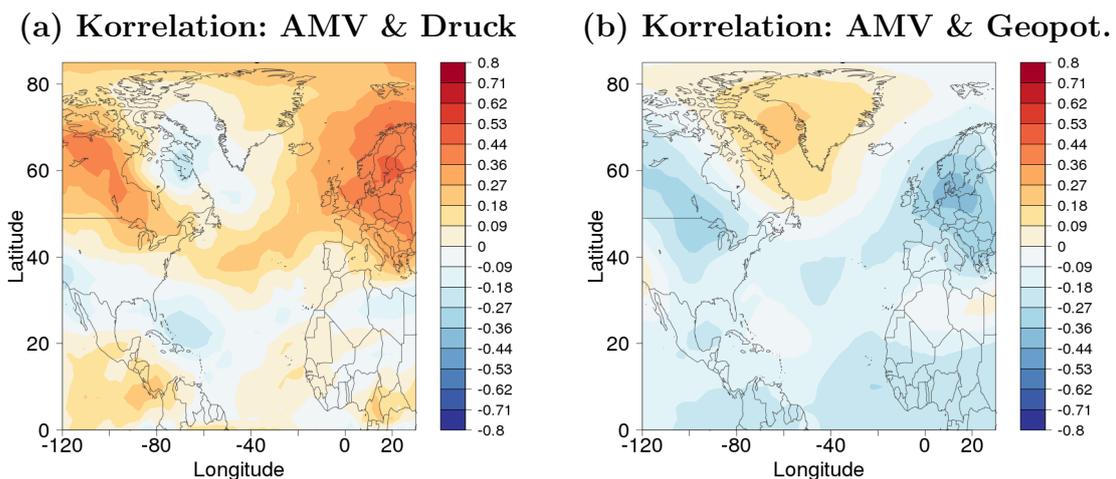


Abbildung 9.21.: Korrelation der AMV mit dem a) Druckfeld auf der 2 PVU-Fläche und b) dem Geopotential auf der 250 hPa Fläche für ERA 20c. Bei der Korrelation läuft die AMV 21 Jahre voraus. Hierbei sind Werte $< -0,19$ und $> 0,19$ signifikant ($p < 0,05$).

9.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde anhand von ERA 20c-Reanalysedaten untersucht, inwieweit sich eine Änderung der NAO und der AMV auf den DSI auswirkt. Hierbei konnte zunächst gezeigt werden, dass die für die Reanalysedaten berechneten NAO- und AMV-Indizes die gleichen spektralen Eigenschaften haben, wie die Indizes aus den Beobachtungsdaten. Somit kann auch eine Kopplung zwischen AMV und NAO gefunden werden, wenn die AMV um 15 Jahre vorausläuft und umgekehrt, wenn die NAO um 20 Jahre führt. Dies führt ein gewisses prognostisches Potential für den dekadischen Bereich mit sich. Allerdings liegen nur wenige Werte über dem, durch die äquivalente Anzahl, berechneten Signifikanzniveau, was das Ergebnis nicht ganz eindeutig macht. Dennoch erlauben die Ergebnisse eine Untersuchung des Einflusses der AMV-NAO-Kopplung auf den DSI. Diesbezüglich zeigt sich in der unteren Troposphäre eine hohe Korrelation zwischen der NAO und dem DSI über Europa, wenn diese Indizes zeitlich nicht zueinander verschoben sind. Im Gegensatz dazu, kann bei einer entsprechenden zeitlichen Verschiebung kein signifikanter Zusammenhang festgestellt werden. In der oberen Troposphäre ist die NAO, bei keiner zeitlichen Verschiebung, mit dem DSI über Europa signifikant anti-korreliert, was auf die vertikale Neigung der Polarfront und dem somit nordwärts verschobenen Zirkulationsmuster zurückzuführen ist.

Bezüglich des Einflusses des Ozeans auf den DSI, ergibt sich eine hohe Korrelation, wenn die AMV dem DSI über Europa um etwa 20 Jahre vorausläuft. Der Zusammenhang zwischen Ozean und DSI in der oberen Troposphäre ist mit Hilfe der Tropopausenhöhe zu erklären, welche sich je nach Anregung der planetaren Wellen herab- beziehungsweise heraufsetzt. Dabei übernimmt die Tropopause, als Grenzfläche zwischen der Troposphäre und der stabilen Stratosphäre, eine Pufferrolle ein und weist, ähnlich wie die AMV, eine große Variabilität im hohen Periodenbereich auf. Folglich ist die Korrelation der AMV mit der Tropopausenhöhe höher als die Korrelation mit dem DSI, welcher aufgrund seiner Eigenschaft als Proxy für alle nicht balancierten Prozesse in der Atmosphäre, über ein viel breiteres Spektrum angeregt ist. Somit macht sich der Einfluss des Ozeans auf den DSI erst über die von

der Troposphäre angeregte Tropopause bemerkbar, denn die Korrelation zwischen dem DSI und der AMV in der unteren Troposphäre ist nur sehr gering. Weiterhin ist die Korrelation zwischen der NAO und dem DSI, bei einer Verschiebung von 20 Jahren, in der oberen Troposphäre beziehungsweise der Tropopausenhöhe viel geringer, als bei der Korrelation der AMV mit diesen Größen. Das ist darauf zurückzuführen, dass die NAO zeitlich viel variabler ist, als die AMV. Dies unterstreicht letztendlich die Bedeutung der troposphärischen Grenzflächen Ozean und Tropopause bei der prozessorientierten Vorhersage im dekadischen Bereich, denn nur bei einer gekoppelten Betrachtung von Ozean, Atmosphäre und Tropopause ergibt sich ein prognostisches Potential. Die soeben beschriebenen Telekonnektionsmechanismen werden in Abb. 9.22 nochmal schematisch dargestellt.

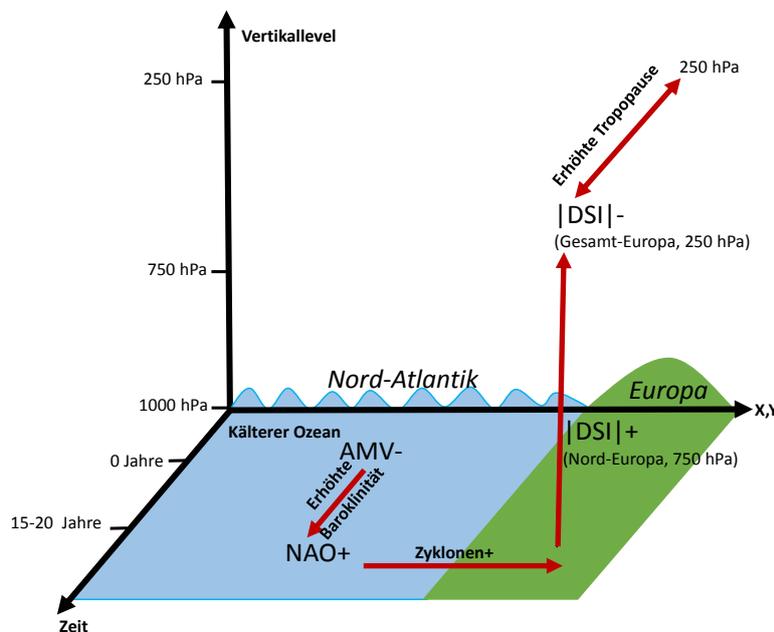


Abbildung 9.22.: Schaubild über die zeitliche und räumliche Auswirkung der AMV-NAO-Kopplung auf den DSI. Hierbei zeigt die Abbildung exemplarisch den Verlauf für eine negative AMV. Die erhöhte Baroklinität während einer negativen AMV führt 15 - 20 Jahre später zu einer positiven bzw. stärkeren NAO. Dies führt in der unteren Troposphäre zu einem Anstieg der Zyklonenaktivität und somit auch des $|DSI|$ über Nordeuropa und entsprechend zu einer Abnahme über Südeuropa. Aufgrund der vertikalen Neigung der Polarfront ergibt sich so für die obere Troposphäre eher eine Abnahme des $|DSI|$ für Gesamt-Europa, was auch mit Zunahme der Tropopausenhöhe zusammenfällt. Für eine positive AMV ist der beschriebene Zusammenhang entsprechend umgekehrt.

Teil III.

Bewertung einer modellbasierten, dekadischen DSI-Prognose

10. Analyse des DSI in einem dekadischen Vorhersagesystem

Dekadische Vorhersagen von Extremereignissen sind für eine Vielzahl von Nutzern wie zum Beispiel Energieunternehmen, (Rück-)Versicherungsunternehmen und Politik von großer Relevanz. Während saisonale Vorhersagen zu kurz für die Einbeziehung in längerfristige Planungen sind, liegen Projektionen über Jahrhunderte hinter dem unternehmerischen und politischen Handlungshorizont. Die Erfassung und Analyse von Extremereignissen und ihrem ursächlichen Zusammenhang zu dekadischer Variabilität kann für die mittelfristige Planung und Adaption ökonomischer Strukturen eine geeignete Basis darstellen. Aus diesem Grund wurde im Rahmen der Fördermaßnahme "Mittelfristige Klimaprognosen", kurz MiKlip, ein Modellsystem zur Vorhersage der Klimaänderungen auf der dekadischen Zeitskala geschaffen. Hierzu werden im Rahmen dieser Arbeit drei Experimente mit unterschiedlichen Initialisierungsmethoden analysiert. Die Fragestellung ist hierbei, ob der DSI im Rahmen des MiKlip-Modellsystems ein dekadisches Vorhersagepotential aufweist und ob dieses größer ist als das des Niederschlags. Dadurch, dass der DSI alle nicht-balancierten Prozesse diagnostiziert, weist dieser eine hohe Variabilität auf, was die Prognose auf der dekadischen Zeitskala erschwert. Dennoch ist dies erstrebenswert, da der DSI aufgrund seiner verhältnismäßig einfachen Berechnung, durch meteorologische Standardvariablen, einen guten Proxy für die Variabilität des, sonst nur über Parametrierungen bestimmbar, Niederschlags darstellt. Als Referenz dienen hierbei die ERA-Interim Reanalysedaten des Europäischen Zentrums für Mittelfristige Wettervorhersage (ECMWF), wobei diese auf einem wesentlich höher aufgelösten Modellgitter zur Verfügung stehen. Die unterschiedliche Modellauflösung von Modell und Reanalyse kann problematisch sein,

denn dadurch, dass der DSI nicht-balancierte Prozesse auflöst, ist dieser abhängig von der zugrundeliegenden Modellauflösung. Aus diesem Grund soll im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, welchen Einfluss die Auflösung des zugrunde liegenden Modellgitters auf den Betrag des DSI hat und inwiefern sich dadurch der Zusammenhang zum Niederschlag ändert.

10.1. Verwendete Daten

10.1.1. Dekadische Experimente des MPI-ESM-LR

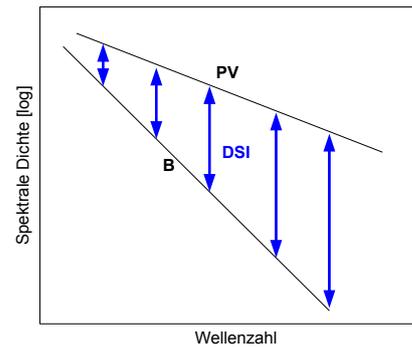
Die für diesen Abschnitt verwendeten Daten wurden vom MPI-ESM-LR-Modell (Max-Planck Institute Earth System Model Low-Resolution) berechnet. Hierbei handelt es sich um ein gekoppeltes Atmosphären-Ozean-Modell. Die atmosphärische Komponente ist ECHAM6 (Stevens et al., 2013) mit einer T63L47 Auflösung und der ozeanische Anteil besteht aus dem MPIOM (Jungclaus et al., 2013) mit einer horizontalen Auflösung von $1,5^\circ$ und 40 vertikalen Schichten. In dieser Arbeit werden drei verschiedene Ansätze zur dekadischen Vorhersage analysiert. Jeder dieser Ansätze beinhaltet jeweils 34 retrospektive Vorhersagen der Vergangenheit (Hindcasts), die jeweils am 1. Januar der Jahre 1979 bis 2012 starten und dann von diesem Startpunkt aus 10 Jahre simulieren. Der Unterschied zwischen den Ansätzen besteht in der Art und Weise der Initialisierung, welche in Tab. 10.1 zusammengefasst sind. Den Anfang machte das Baseline0-System, welches das erste dekadische Vorhersagemodell des MiKlip-Projekts darstellt. Die Initialisierungsmethode ist dabei identisch zur CMIP5-Initiative. Um die Startbedingungen für die Baseline0-Hindcasts festzulegen, wird zunächst das Ozeanmodell MPIOM gestartet, welches mit den Atmosphärendaten der NCEP/NCAR-Reanalysen angetrieben wurde (Kalnay et al., 1996). Die so gewonnenen Anomalien der Ozeantemperatur und der Salinität wurden anschließend für ein Nudging des gekoppelten Atmosphären-Ozeanmodell verwendet. Diese Simulation liefert schließlich die Startwerte der Baseline0-Hindcasts. Im Gegensatz dazu findet bei den Baseline1-Hindcasts noch eine Initialisierung der Atmosphäre statt. Hierzu werden die atmo-

sphärischen Felder (Bodendruck, spektrale Temperatur, Vorticity und Divergenz) aus den Reanalysedaten ERA40 (Uppala et al., 2005) für die Periode 1960 bis 1989 und ERA-Interim (Dee et al., 2011) für die Periode von 1990 bis 2012 direkt in das MPI-ESM eingepflegt. Das heißt, das Modell wird in Richtung der absoluten Reanalysefelder angestoßen (Full-Field-Initialisierung) und nicht in Richtung der Anomalien. Der Ozean wird auf eine ähnliche Weise wie schon Baseline0 initialisiert, wobei die ORA-S4 Ozean-Reanalysedaten (Balmaseda et al., 2013) verwendet werden. Die atmosphärische Initialisierung der Prototype-Hindcasts erfolgt, wie schon bei Baseline1, über eine Full-Field-Initialisierung aus den Feldern von ERA40 und ERA-Interim. Der Unterschied besteht darin, dass bei Prototype der Ozean nun nicht über Anomalien, sondern auch über die absoluten Werte der GECCO2 (Köhl, 2015) Ozean-Reanalyse-Daten initialisiert wird. Ein weiterer Unterschied zwischen den drei Hindcasts besteht in der Anzahl der Ensemble-Mitglieder, denn Baseline0 hat nur drei, die den gesamten Zeitraum abdecken, wohingegen für diese Arbeit für Baseline1 und Prototype zehn Mitglieder verwendet werden können. Als Referenz dienen die uninitialisierten Historical-Läufe, dessen zehn Ensemble-Mitglieder aus einem vorindustriellen Kontrolllauf gestartet und anschließend mit historischen Aerosol- und Treibhausgas-Konzentrationen angetrieben werden. Für die Berechnung des DSI werden die Felder der drei Windkomponenten, der Temperatur und des Geopotentials auf den Druckflächen von 1000 hPa bis 200 hPa verwendet. Außerdem wird noch der Gesamtniederschlag herangezogen.

Hindcast Experiment	Ozean Initialisierung	Atmosphären Initialisierung	Ensemble-Mitglieder
Baseline0	NCEP/NCAR Anomalien	keine	3
Baseline1	ORA-S4 Anomalien	Full-Field ERA40/ERA-Int	10
Prototype	Full-Field GECCO2	Full-Field ERA40/ERA-Int	10

Tabelle 10.1.: *Diese Tabelle zeigt eine Übersicht über die Initialisierungsmethoden der in dieser Arbeit verwendeten, dekadischen Hindcasts.*

Abbildung 10.1: Scherenmodell des DSI nach Selz (2010). Die spektrale Anregung des DSI-Felds (blaue Pfeile) ist abhängig von der spektralen Anregung der Bernoulli-Funktion (B) und der Ertel'schen potentiellen Vorticity (PV). Mit zunehmender Wellenzahl wird die Schere zwischen B und PV immer größer, was zu einem Anwachsen der DSI-Amplitude führt.



10.1.2. ERA-Interim-Reanalysedaten

Für diesen Teil der Arbeit werden die ERA-Interim-Reanalysedaten (Dee et al., 2011) verwendet. Diese stehen zunächst auf einem T255 Gitter ($\sim 0,75^\circ$) mit 60 vertikalen Leveln für den Zeitraum von 1979 - 2012 zur Verfügung. Von den ursprünglich 6-stündlichen Daten (0 UTC, 6, UTC, 12 UTC, 18 UTC) werden Wintermittel über die Monate Dezember, Januar und Februar (DJF) gebildet. Weiterhin werden nur die Druck-Level zwischen 1000 hPa und 200 hPa zur Analyse herangezogen. Die betrachteten Variablen der Reanalyse sind auch wieder die Felder der drei Windkomponenten, der Temperatur, des Geopotentials sowie des Gesamtniederschlags.

10.2. Spektrale Eigenschaften des DSI

Für die Analyse des dekadischen Vorhersagepotentials des DSI innerhalb des MiKlip-Systems werden die ERA-Interim Reanalysedaten als Referenz verwendet. Diese liegen auf einem wesentlich höher aufgelösten Gitter vor als die Vorhersagedaten. Somit kann die unterschiedliche Modellauflösung von Modell und Reanalyse problematisch sein, denn dadurch, dass der DSI nicht-balancierte Prozesse auflöst, ist dieser abhängig von der zugrundeliegenden Modellauflösung. Diesbezüglich zeigt Selz (2010) mit einer umfangreichen Spektralanalyse, dass das DSI-Feld mit zunehmender Wellenzahl auch eine Zunahme der spektralen Anregung aufweist. Diese Eigenschaft unterscheidet den DSI von allen anderen meteorologischen Variablen, welche eine Abnahme der spektralen Anregung mit steigender Wellenzahl zeigen.

Verantwortlich für die erwähnte DSI-Charakteristik sind die spektralen Eigenschaften der Bernoulli-Funktion und der potentiellen Vorticity, aufgrund derer von Selz (2010) ein Scherenmodell des DSI formuliert wurde: Für einen stationären, adiabatischen Fall verlaufen die Isolinien der Bernoulli-Funktion und der PV parallel. Somit weisen beide Felder die gleiche spektrale Dichte auf. In einer realen Atmosphäre geht die Schere zwischen der Energie und der Wirbelhaftigkeit mit zunehmender Wellenzahl immer weiter auseinander. Hierbei ist die PV deutlich höher angeregt, als die Bernoulli-Funktion. Somit wird die im Idealfall auftretende Parallelität zwischen Energie- und Wirbelfunktion immer weiter gestört, was zu einem Anwachsen der DSI-Amplituden mit kleiner werdender Skala führt. Das beschriebene Scherenmodell ist in Abb. 10.1 schematisch dargestellt. Aufgrund der spektralen Charakteristika des DSI lassen sich DSI-Felder aus verschiedenen Modellen nur schwer vergleichen, da es eine starke Abhängigkeit des DSI von der Modellauflösung gibt.

Des Weiteren wirft die spektrale Eigenschaft des DSI die Frage auf, ob dessen Amplitude in der realen Atmosphäre für immer kleiner werdende Skalen ein stetes Wachstum aufweist. Hierbei ist die Kleinskaligkeit und die hohe Amplitude des DSI aus den Lokalmodell-Daten in Claußnitzer et al. (2008) ein Indiz für eine Verstärkung von Bernoulli-Funktion und PV bis in die konvektive Skala. Führt man diesen Gedanken weiter, bedeutet das, dass sich die Atmosphäre für immer kleiner werdende Skalen von ihrem stationären und adiabatischen Grundzustand entfernen würde beziehungsweise, dass der Grundzustand durch die großen Skalen beschrieben wird.

Im Folgendem soll untersucht werden, inwieweit sich das Amplitudenwachstum des DSI mit kleiner werdender Skala für die ERA-Interim Reanalyse Daten quantifizieren lässt. Die ursprüngliche horizontale Auflösung, der für die DSI-Berechnung benötigten monatlichen Felder (T , Φ und \vec{v}) von ERA-Interim liegt bei T255 ($0,75^\circ \times 0,75^\circ$). Nun wurde die horizontale Auflösung besagter Eingangsfelder des DSI um $0,25^\circ \times 0,25^\circ$ über ein konservatives remapping verringert, sodass sich nun eine Auflösung von $1^\circ \times 1^\circ$ ergibt. Anschließend wurde aus den nun gröberen Eingangsfeldern der DSI berechnet. Dieser Vorgang wurde schrittweise wiederholt,

bis eine Auflösung von $10^\circ \times 10^\circ$ erreicht wurde. Für eine bessere Vergleichbarkeit wurde der Betrag der berechneten DSI-Felder gebildet. Diese wurden daraufhin zeitlich (von 1979 bis 2012), vertikal über 14 Drucklevel (von 850 hPa bis 300 hPa) sowie räumlich über verschiedene Gebiete, welche in Abb. 10.2 gekennzeichnet sind, gemittelt.

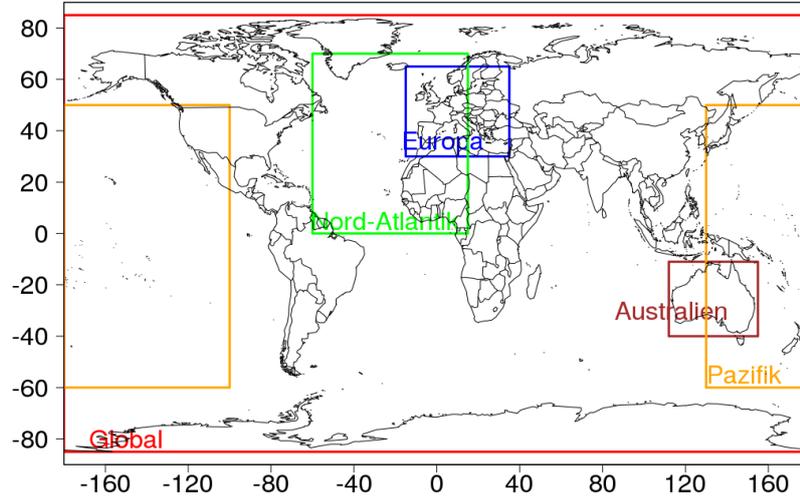


Abbildung 10.2.: Übersicht über die Lage, der für dieses Kapitel verwendeten Gebietsmittel.

Die gemittelten $|DSI|$ -Felder sind in Abb. 10.3 (links und rechts) in einem log-log-Plot dargestellt. Hierbei stellt die vertikale Achse die $|DSI|$ -Amplitude in PV^2/s dar. Die verwendete Auflösung wird auf der horizontalen Achse über die charakteristische Zeitskala dargestellt. Jene charakteristische Zeitskala T_c lässt sich aus dem Kolmogorov-Gesetz der Energiedissipation (Kolmogorov, 1941) aus der Gitterpunktauflösung berechnen, welches besagt:

$$\varepsilon = \frac{dE_{kin}}{dt} = \frac{L_c^2}{T_c^3} = const. \quad (10.1)$$

Dabei ist die Energiedissipation $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s^3}$ und L_c die charakteristische Längenskala. Der russische Wissenschaftler Andrej Nikolaevic Kolmogorov (1903-1987) beschäftigte sich mit dem Zerfall von großen Wirbeln in immer kleinere Wirbel bedingt durch Reibungsprozesse. Die Idee dahinter war, dass eine Strömung aus unterschiedlich großen Turbulenzwirbeln besteht, welche in einer sogenannten turbulenten Energiekaskade in immer kleinere Wirbel zerfallen, bis ihre kinetische

Energie schließlich dissipiert und in innere Energie umgewandelt wird. Die Annahme Kolmogorovs hierbei war, dass die kinetische Energie mit konstanter Rate ε von der größeren auf die kleinere Skala übertragen wird. Die Energiedissipation ε ist somit über alle Skalenbereiche hinweg konstant.

Stellt man 10.1 entsprechend um, so ergibt sich für die charakteristische Zeitskala

$$T_c = \frac{L_c^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}. \quad (10.2)$$

Um T_c in 10.2 zu bestimmen, muss zunächst die charakteristische Längenskala L_c aus der Gitterauflösung für die mittleren Breiten (45°N) mit

$$L_c = R \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{3 \cdot \alpha}{360}. \quad (10.3)$$

berechnet werden. Hierbei sei α die zonale Gitterpunktauflösung entlang des Breitenkreises $\varphi = 45^\circ\text{N}$.

Für den Erdradius R gilt: $R = 6378000$ m. Ferner wurde die Auflösung α mit 3 multipliziert, da mindestens 3 Gitterpunkte benötigt werden, um eine Welle hinreichend aufzulösen.

Gitter [°]	0,75	1	2	4	6	8	10
Ch. Längenskala [km]	177	236	472	945	1417	1189	2361
Ch. Zeitskala [h]	11	13,4	21,2	33,7	44,2	53,5	62

Tabelle 10.2.: Diese Tabelle zeigt zu einigen verwendeten Gitterauflösungen die jeweiligen charakteristischen Längen- sowie Zeitskalen.

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens gibt T_c nun im weiteren Zusammenhang die kleinste auflösbare Skala wieder. Eine Übersicht über einige verwendete Gitterauflösungen und die zugehörigen charakteristischen Längen- und Zeitskalen nach 10.3 und 10.2 ist in Tabelle 10.2 zu finden. Bei einem Blick auf Abb. 10.3 fällt auf, dass die höchsten DSI-Beträge für das jeweilige Gebiet bei der kleinsten Auflösung von ca. 11 Stunden auftreten. Daraufhin nehmen die $|DSI|$ -Amplituden mit der Auflösung kontinuierlich ab. Dieser Zusammenhang ist darauf zurückzuführen, dass für eine feinere Auflösung mehr nicht-balancierte Prozesse aufgelöst wer-

den, welche sich wiederum in stärkeren $|DSI|$ -Amplituden widerspiegeln. Nicht-balancierte Prozesse können unter anderem in der Atmosphäre zu Stürmen und Niederschlag führen. Des Weiteren können jeweils zwei Ausgleichsgeraden für die $|DSI|$ -Amplituden der entsprechenden Gebiete gebildet werden. Da es sich bei Abb. 10.3 um eine doppelt-logarithmische Darstellungen handelt, lässt sich die Funktion der Ausgleichsgerade folgendermaßen darstellen:

$$y(T_c) = b \cdot T_c^m. \quad (10.4)$$

Bei einer doppelt-logarithmischen Darstellung ist der Skalenexponent m gleichbedeutend mit der Steigung und der Faktor b entspricht dem y-Achsenabschnitt einer Geraden. Neben der jeweiligen Steigung ist zusätzlich noch das Bestimmtheitsmaß R^2 in der Abbildung angegeben. Es fällt auf, dass der $|DSI|$ für den Wertebereich von 11 bis 62 Stunden (Abbildung: 10.3, links) für alle betrachteten Regionen mit hoher Genauigkeit (es werden Bestimmtheitsmaße zwischen 0,93 und 0,98 erreicht) linear abfällt. Die erreichten Steigungen liegen hierbei zwischen -0,8 für Australien und -0,9 für den Pazifik. Ferner wird deutlich, dass die DSI-Beträge für Europa für alle Skalen am größten sind, was mit der vergleichsweise hohen Lage dieser Region zusammenhängt. Denn mit der Abhängigkeit des DSI von der Ertel'schen PV und somit auch der Corioliskraft, welche an den Polen ihr jeweiliges Maximum aufweist, nimmt auch der DSI polwärts zu. Folglich weisen Australien und der Pazifik die geringsten DSI-Beträge auf, da diese eher in den niedrigeren Breiten liegen. In Gleichung 10.4 wird die Abhängigkeit des Gebietsmittel von der geographischen Lage durch den Faktor b beschrieben.

Wie in Kapitel 5.3 beschrieben, wird der DSI von den Feldern der Bernoulli-Funktion sowie der Ertel'schen PV (PV) maßgeblich beeinflusst. Aus diesem Grund wird äquivalent zum DSI auch die Ertel'sche PV und der Bernoulli-Funktion für verschiedene Gittergrößen berechnet. Anschließend werden auch diese beiden Variablen zeitlich (von 1979 bis 2012), vertikal (von 850 hPa bis 300 hPa) sowie räumlich über die selben Gebiete aus Abb. 10.2 gemittelt. Die gemittelten Werte der PV und der Bernoulli-Funktion sind in Abb. 10.4a und in Abb. 10.4b in

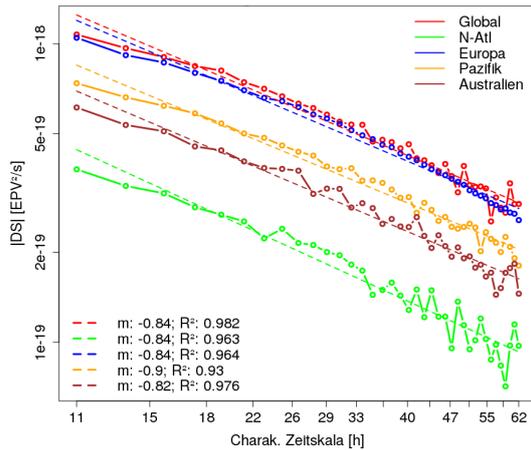


Abbildung 10.3: Vertikal integrierter $|DSI|$ von ERA-Interim in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala. Dargestellt ist jeweils ein Gebietsmittel über die entsprechenden Regionen. Außerdem ist für jedes Gebiet eine Regressionsgerade eingezeichnet (gestrichelte Linie).

Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala dargestellt. Auch für die genannten Abbildungen wird wieder eine doppelt logarithmische Darstellung gewählt und entsprechend eine Ausgleichsgerade nach 10.4 berechnet. Es lässt sich feststellen, dass sowohl die PV als auch die Bernoulli-Funktion nahezu konstante Werte für alle Skalen zeigen. Folglich ist auch der Skalenexponent m annähernd Null und somit sind die Gebietsmittel der beiden Felder nur noch von ihrer geographischen Lage abhängig.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob sich eine Abnahme der $|DSI|$ -Amplitude mit größer werdender Skala auch auf die Verbindung zwischen Niederschlag und DSI bemerkbar macht. In diesem Kontext stellt Abb. 10.5 den Korrelationskoeffizienten nach Spearman zwischen dem gesamten Niederschlag und vertikal integrierten $|DSI|$ für die besagten Gittergrößen dar. Die $|DSI|$ - und Niederschlagsfelder werden räumlich über Europa gemittelt. Beim Niederschlag wird allerdings nur das Ausgangsfeld auf dem $0,75^\circ \times 0,75^\circ$ -Gitter räumlich gemittelt, da es bei einer reinen Mittelung unerheblich ist, ob das Feld zuerst auf ein größeres Gitter gemittelt und anschließend ein Mittelwert über ein bestimmtes Gebiet (in diesem Fall Europa) gebildet wird oder ob gleich der Mittelwert aus dem Ausgangsfeld über das entsprechende Gitter berechnet wird. Aus den so entstandenen Zeitreihen wird dann der Korrelationskoeffizient für die jeweilige Auflösung des $|DSI|$ -Feldes berechnet. Diese Koeffizienten sind in Abb. 10.5 in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala logarithmisch dargestellt. Es zeigt sich eine Abnahme der Korrelation mit wachsender Zeitskala. Die Regressionsgerade, für deren Berech-

nung die beiden Ausreißer um 62h nicht berücksichtigt werden, hat eine Steigung von $-0,15$ mit einem Bestimmtheitsmaß von $0,92$. Die erklärte Varianz durch die maximale Korrelation ($0,64$) liegt bei ca. 41% und durch die minimale Korrelation ($0,5$) bei 25% . Dies führt schließlich zu einem Verlust von ungefähr 16% an erklärter Varianz zwischen DSI und Niederschlag über Europa.

10.3. Verifikation der MiKlip-Läufe

Zuvor wurde gezeigt, wie sich eine Änderung der Auflösung auf die Amplitude des DSI auswirkt. Durch ein feineres Gitter können mehr nicht-balancierte Prozesse aufgelöst werden, was zu einem Anwachsen der DSI-Amplitude führt. Nun soll untersucht werden, wie sich unterschiedliche Initialisierungen der dekadischen Hindcasts des MPI-ESM-Modells auf den DSI auswirken. Bei den dekadischen Läufen handelt es sich um Baseline0, Baseline1 und Prototype (siehe Kapitel 10.1.1). Hierzu zeigt Abb. 10.6 den zeitlichen Verlauf des über Europa gemittelten $|DSI|$ in 500 hPa für Baseline0, Baseline1 und Prototype für das erste Vorhersagejahr (ly1).

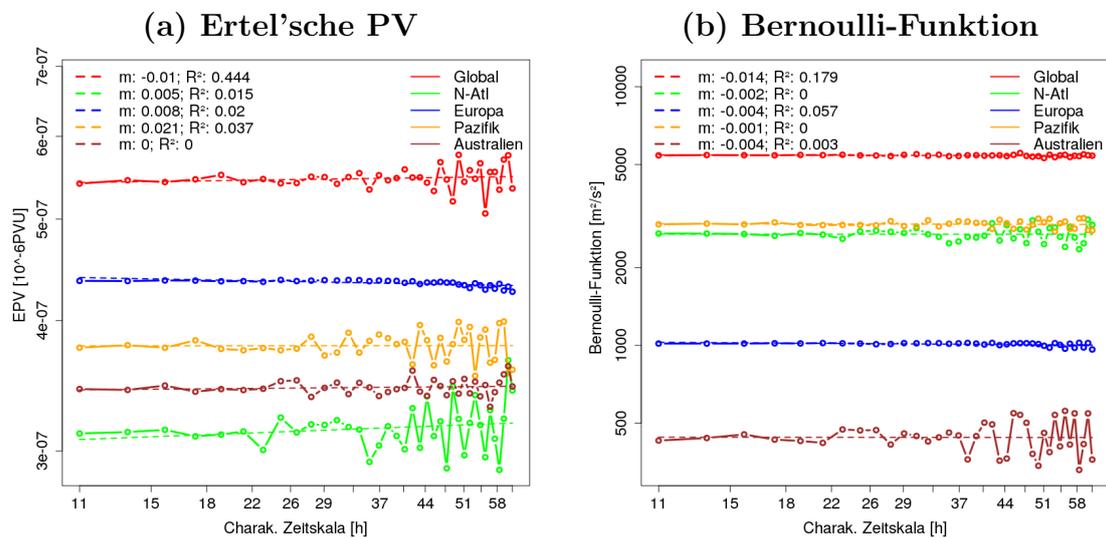


Abbildung 10.4.: Vertikal integrierte Ertel'sche potentielle Vorticity (a) und Bernoulli-Funktion (b) von ERA-Interim in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala. Dargestellt ist jeweils ein Gebietsmittel über die entsprechenden Regionen. Hierbei bezieht sich die Regressionsgerade auf den Wertebereich zwischen 11 und 62 Stunden.

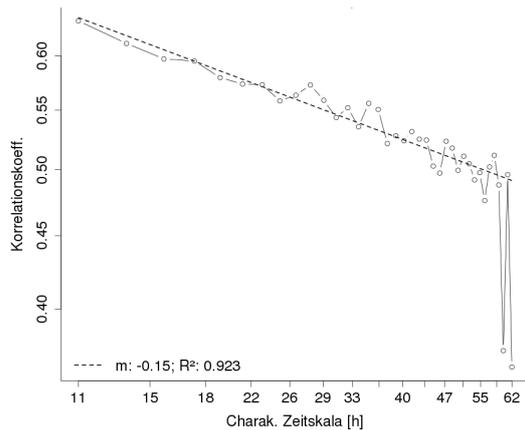
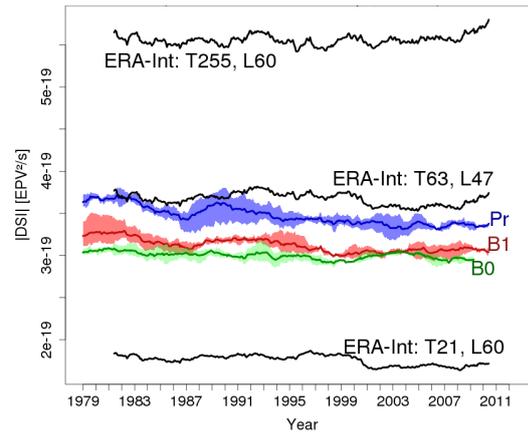


Abbildung 10.5: Korrelationskoeffizient zwischen dem vertikal integrierten $|DSI|$ und dem Gesamtniederschlag in ERA-Interim in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala. Dargestellt ist ein Gebietsmittel über Europa. Hierbei bezieht sich die Ausgleichsgerade Wertebereich zwischen 11 und 62 Stunden.

Hierbei ist sowohl das jeweilige Mittel als auch der Bereich zwischen dem entsprechenden Minimum und Maximum der ersten drei Ensemblemitglieder dargestellt. Weiterhin ist noch der zeitliche Verlauf des $|DSI|$ von ERA-Interim für drei verschiedene horizontale und vertikale Auflösungen dargestellt. Dabei handelt es sich um eine horizontale Auflösung von $0,75^\circ \times 0,75^\circ$ sowie $5^\circ \times 5^\circ$ mit jeweils 60 Druckleveln (T255, L60 und T21, L60) und um eine horizontale Auflösung von $1,875^\circ \times 1,875^\circ$ mit 47 Druckleveln (T63, L47). Die zuletzt genannte Auflösung von ERA-Interim entspricht auch der Auflösung der decadal hindcasts und kann daher als Referenz für die dekadischen Vorhersageläufe herangeführt werden. Unter der Annahme, dass die Reanalyse die atmosphärische Realität beziehungsweise die Beobachtung perfekt repräsentiert, könnte man in diesem Fall den DSI aus ERA-Interim als Grenze für die maximal auflösbaren nicht-balancierten Prozesse der Modelle verstehen. Die Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass der DSI in den Reanalysen und in den Modellen aus gleich aufgelösten Ausgangsfeldern berechnet wird. Es wird deutlich, dass Baseline0, das mit Hilfe von Ozean-Anomalien initialisiert wird, die geringsten DSI-Beträge aufweist. Das Ensemblemittel der zweiten Modellsimulation Baseline1, das noch zusätzlich mit atmosphärischen Feldern initialisiert wird, weist dabei nahezu über den gesamten Zeitraum höhere DSI-Beträge auf als Baseline0. Letztlich zeigt das Ensemblemittel der dritten Modellsimulation Prototype, welches wiederum neben der Atmosphäre nun auch den Ozean ohne Anomalien für die Initialisierung verwendet, die höchsten $|DSI|$ -Werte und kommt somit der Reanalyse betragsmäßig am nächsten. Es ergibt sich also eine Zunahme des DSI in den Modellen über eine Erweiterung der Initialisierung.

Abbildung 10.6: Zeitlicher Verlauf des $|DSI|$ in 500 hPa für ERA-Interim in verschiedenen horizontalen und vertikalen Auflösungen. Außerdem ist der Verlauf der dekadischen Experimente Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype mit der Auflösung T63, L47 für das lead-year 1 dargestellt. Für die Darstellung wurde ein räumliches Mittel über Europa gewählt.



Da die dekadischen Vorhersageläufe jeweils nur im ersten Jahr initialisiert werden und danach frei laufen, ist es von Interesse zu untersuchen, ob sich das für das erste Vorhersagejahr festgestellte Verhalten auch für die weiteren Vorhersagejahre fortsetzt. Im Bezug darauf zeigt Abb. 10.7a das zeitliche Mittel des $|DSI|$ über Europa in 500 hPa für Baseline0, Baseline1 und Prototype für die Vorhersagejahre 1 bis 10. Es ist zu erkennen, dass sich die unterschiedlichen Initialisierungsmethoden im ersten Vorhersagejahr am meisten bemerkbar machen, da für dieses Jahr der Abstand zwischen den Läufen am größten ist. Für die folgenden Vorhersagejahre nähern sich die DSI-Beträge immer weiter an, was darauf zurückzuführen ist, dass die einzelnen Läufe nach der Initialisierung frei laufen. Trotzdem bleibt die ursprüngliche Rangfolge (Prototype vor Baseline1 und Baseline1 vor Baseline0) auch für die restlichen Vorhersagejahre bestehen, wobei alle Läufe den Betrag des DSI in Bezug auf ERA-Interim unterschätzen. Nun ist die Frage, ob sich dieses Verhalten auch für andere, von nicht-balancierten Prozessen geprägte, Variablen feststellen lässt. Im Hinblick darauf zeigt Abb. 10.7b das zeitliche Mittel des Niederschlags über Europa für Baseline0, Baseline1 und Prototype für die Vorhersagejahre 1 bis 10. Hier wird deutlich, dass der Niederschlag aus allen drei dekadischen Hindcasts den Niederschlag überschätzt, wobei, ähnlich wie schon beim DSI, die Prototype-Läufe auch für den Niederschlag den Reanalysen für alle Vorhersagejahre am nächsten kommen. Zwischen Baseline0 und Baseline1 lassen sich hingegen, was den betragsmäßigen Abstand zu der Reanalyse angeht, kaum Unterschiede ausmachen. Generell macht sich ein Widerspruch zwischen den DSI- und den Niederschlags-Ergebnissen bemerkbar, denn der DSI wird gegenüber ERA-

Interim unterschätzt und der Niederschlag überschätzt. Dies ist ein Widerspruch, da der DSI beziehungsweise dessen Betrag ($|DSI|$) alle nicht-balancierten Prozesse in der Atmosphäre diagnostiziert, welche wiederum für Niederschlag verantwortlich sind. Somit sind beide Größen positiv miteinander korreliert (siehe Abb. 10.5), was dazu führt, dass erhöhte DSI Beträge auch erhöhte Niederschlagswerte zur Folge haben müssten. Der sich so ergebende Widerspruch zu den DSI-Ergebnissen lässt sich damit erklären, dass das zugrunde liegende MPI-ESM-LR-Modell zu viel Niederschlag simuliert, welcher keine Verbindung mit, durch den DSI beschriebenen, auslösenden und nicht-balancierten Prozessen aufweist.

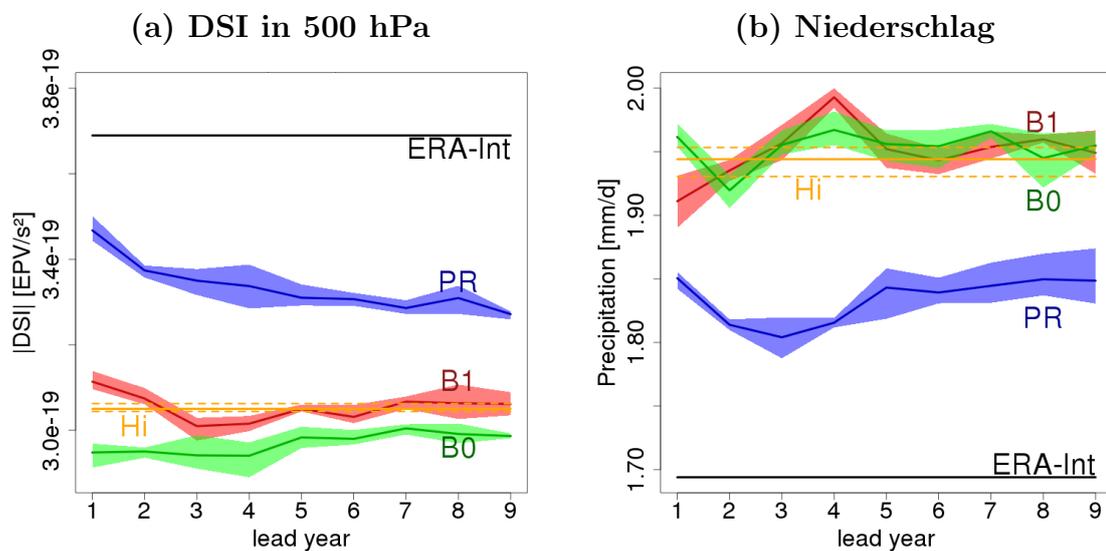


Abbildung 10.7.: $|DSI|$ in 500 hPa (a) und Niederschlag (b) für Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype für die lead-years 1 bis 9. Die schwarze Linie zeigt das Mittel der ERA-Interim Daten über den betrachteten Zeitraum. Die Darstellung bezieht sich auf ein räumliches Mittel über Europa.

Ein objektives Maß für die Genauigkeit einer dekadischen Vorhersage ist der Mean Square Error Skill Score (MSESS), welcher von Goddard et al. (2013) für dekadische Vorhersagen eingeführt wurde. Dieser wird durch den Quotienten des Mean Square Error (MSE) zwischen den Hindcasts H und den Beobachtungen O (MSE_H) für alle Zeitschritte $j = 1, \dots, n$ sowie des MSE zwischen den Beobach-

tungen für $j = 1, \dots, n$ zu der Klimatologie \bar{O} ($MSE_{\bar{O}}$) berechnet:

$$MSESS(H, \bar{O}, O) = 1 - \frac{MSE_H}{MSE_{\bar{O}}} = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (H_j - O_j)^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (O_j - \bar{O})^2}. \quad (10.5)$$

Diese Form des MSESS beschreibt die Genauigkeit der Vorhersage der Hindcasts gegenüber einer Klimatologie und beinhaltet im Grunde genommen die Korrelation und den Conditional Bias (Goddard et al., 2013). Eine Berechnung des Mean-Square-Error-Skill-Score (MSESS) mit der Klimatologie von ERA-Interim als Maß für das dekadische Vorhersagepotential zeigt für Europa, dass der Prototype-Lauf unter den Versionen des Vorhersagesystems sowohl für den DSI (siehe Abb. 10.8a) als auch für den Niederschlag (siehe Abb. 10.8b) den größten Skill für alle Vorhersagejahre aufweist. Darüber hinaus wird ersichtlich, dass der MSESS für den DSI allgemein größer ist, als der des Niederschlags, was für ein besseres Vorhersagepotential des DSI spricht. Hierbei wurde jeweils zuerst ein Ensembelmittel aus den ersten drei Mitgliedern und dann erst der MSESS berechnet. Allerdings fällt auch auf, dass der MSESS für beide Variablen (beim DSI auch auf allen Druckleveln, wobei die 500 hPa hier nur exemplarisch dargestellt ist) für alle dekadischen Vorhersageläufe negativ ist, was bedeutet, dass diese schlechter als die Klimatologie und somit eigentlich für die dekadische Vorhersage nicht geeignet sind. Das Problem ist, dass die Initialisierung die Modelle zu nah an die Beobachtung gesetzt werden und es aber gleichzeitig Diskrepanzen zwischen den Beobachtungen und der eigenen Modellklimatologie gibt. Folglich drifteten die dekadischen Vorhersagemodelle von ihrem Startwert in Richtung der uninitialisierten Läufe. Dies ist exemplarisch in Abb. 10.9a und 10.9b dargestellt, welche den zeitlichen Verlauf der Ensembelmittel vom DSI und vom Niederschlag für Prototype für die verschiedenen Initialisierungsjahre (1979 - 2012) zeigt. Hierbei ist zunächst zu erkennen, dass sowohl für den DSI als auch den Niederschlag ein Bias zwischen den Beobachtungen (ERA-Interim) und den uninitialisierten Läufen (historical-runs) besteht. Die Prototype-Läufe starten dabei in etwa bei den ERA-Interim-Werten, da sie über die Beobachtungsdaten initialisiert wurden (siehe Abschnitt 10.1.1), und bewegen sich dann in Richtung historical-runs, also zu ihrem eigenem Gleich-

gewichtszustand. Dieser systematische und nicht stationäre Fehler (die Abweichung ist abhängig von der Zeit) trägt dazu bei, dass das Vorhersagepotential der dekadischen Hindcasts von vornherein gemindert wird. Diesbezüglich wurde von Kharin et al. (2012) eine Methode vorgestellt, die eine Bias-Korrektur für ein vom Vorhersagejahr abhängigen Drift ermöglicht. Darauf aufbauend wurde von Kruschke et al. (2015) ein parametrischer Ansatz entwickelt, um den vom Vorhersagejahr abhängigen Drift der dekadischen Vorhersageläufe über eine polynomiale Funktion 3. Ordnung zu korrigieren:

$$\hat{H}_{i,\tau,j} = H_{i,\tau,j} - (b_0 + b_1t) - (b_2 + b_3t)\tau - (b_4 + b_5t)\tau^2 - (b_6 + b_7t)\tau^3. \quad (10.6)$$

Hierbei beschreibt $H_{i,\tau,j}$ eine Vorhersage für eine bestimmte Initialisierung i und dem Ensemblemitglied j mit dem Vorhersagejahr (lead year) τ . Dadurch, dass die Beobachtungen und die Modellklimatologie in unterschiedliche Richtungen laufen können (d. h. Konvergieren oder Divergieren), kann es sein, dass der Bias zwischen den dekadischen Hindcasts und den Beobachtungen zeitabhängig ist. Somit wäre zum Beispiel der Unterschied zwischen ERA-Interim und Prototype für lead year 1 im Jahr 1979 ein anderer als für lead year 1 im Jahr 2012. Diese Problematik wird durch die Zeitabhängigkeit der Parameter b_0, \dots, b_7 berücksichtigt. Diese Parameter b_0 bis b_7 wurden über die Methode der kleinsten Quadrate aus der Differenz der Hindcasts bezüglich i, j und τ zu den Beobachtungen im entsprechenden Zeitraum berechnet. Somit ist $\hat{H}_{i,\tau,j}$ der jeweilige Hindcast nach der lead year abhängigen und nicht-stationären Driftkorrektur.

Hierzu zeigen Abb. 10.9c und Abb. 10.9d den zeitlichen Verlauf der Ensemblemittel vom DSI und vom Niederschlag für Prototype für die verschiedenen Initialisierungsjahre (1979-2012) nach der Driftkorrektur nach Gleichung 10.6. Hierbei ist zu erkennen, dass die einzelnen Prototype-Initialisierungen nach wie vor auf der Höhe von ERA-Interim starten, aber nun nicht mehr wegdriften. Darüber hinaus wurde zusätzlich noch der Bias des uninitialisierten Laufs zu den Beobachtungen über ein lineares Regressionsverfahren korrigiert. An dieser Stelle sollte noch erwähnt werden, dass eine lead year abhängige Driftkorrektur nur für full-field in-

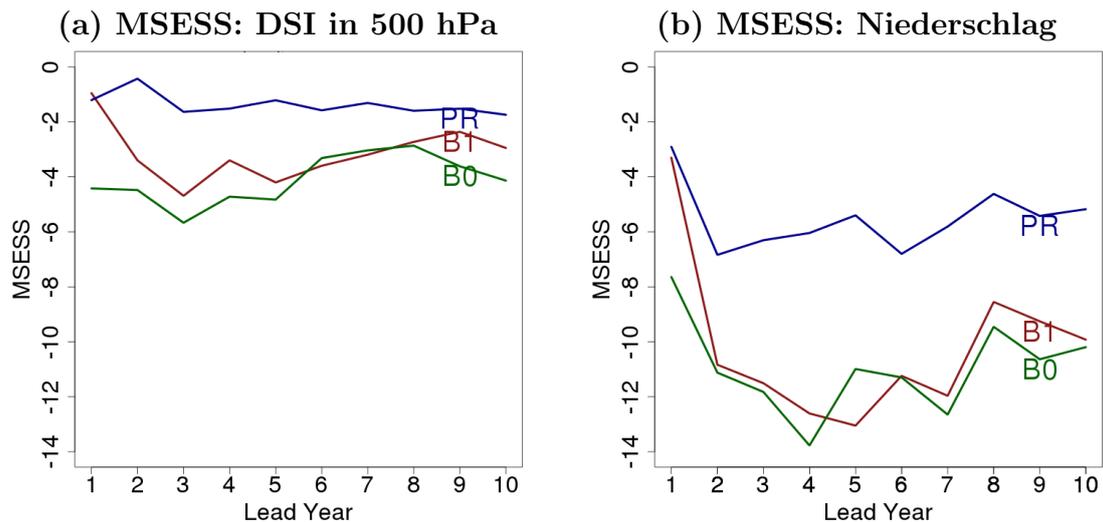


Abbildung 10.8.: MESS des $|DSI|$ in 500 hPa (a) und des Niederschlags (b) für Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype für die lead-years 1 bis 10. Als Referenz diente jeweils die entsprechende ERA-Interim Klimatologie.

initialisierte Hindcasts (hier Baseline0 und Baseline1) wirklich sinnvoll ist, da nur diese einem Initialisierungsschock ausgesetzt sind und dann wegdriften. Bei den über Anomalien initialisierten Hindcasts (Baseline0) kann zwar auch die Driftkorrektur 10.6 angewendet werden, diese gestaltet sich dann aber eher als eine lineare Biaskorrektur, da der vom Vorhersagejahr abhängige Drift nicht vorhanden ist.

Nun soll im weiteren Verlauf analysiert werden, in wie weit sich eine Verbesserung des Vorhersagepotentials nach der Driftkorrektur einstellt und ob die DSI-Vorhersage mehr Potential als die Niederschlagsvorhersage hat. Hierzu wird in Abb. 10.10 der MESS des driftkorrigierten Niederschlags von Baseline0, Baseline1 sowie Prototype bezüglich ERA-Interim gezeigt. Hierbei ist ein Mittel aus den ersten drei Ensemblemitgliedern dargestellt, welches vor der Berechnung des MESS für jedes lead year gebildet wurde. Es ist zu erkennen, dass es eine deutliche Verbesserung des MESS gegenüber der nicht-driftkorrigierten Hindcasts (Abb. 10.8b) gibt. Für das Vorhersagejahr 6 erreicht Baseline1 einen signifikanten, leicht positiven MESS und Prototype erreicht für das Vorhersagejahr 7 einen signifikanten Wert von ungefähr 0,3. Die Signifikanz wurde hierbei über ein Bootstrapping-Verfahren mit 1000 Iterationsschritten berechnet. Allerdings sind die übrigen MESS-Werte trotz der, durch die Driftkorrektur, verbesserten Werte

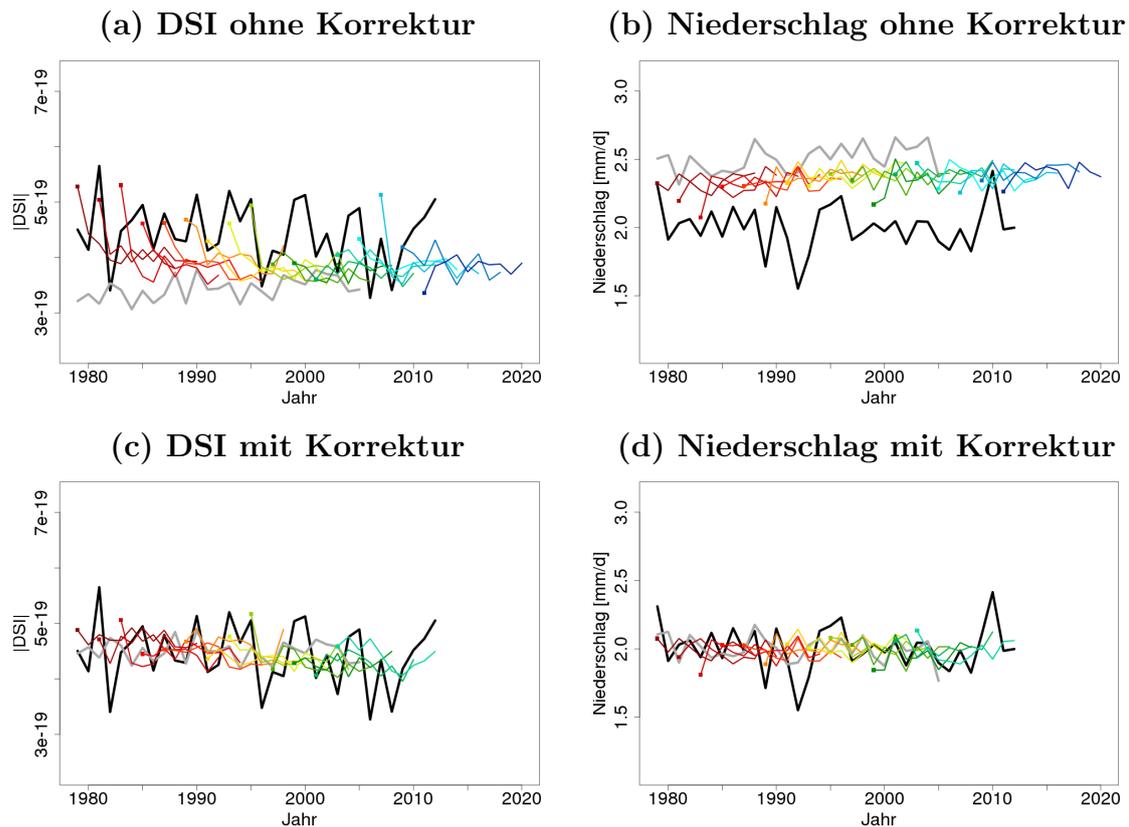
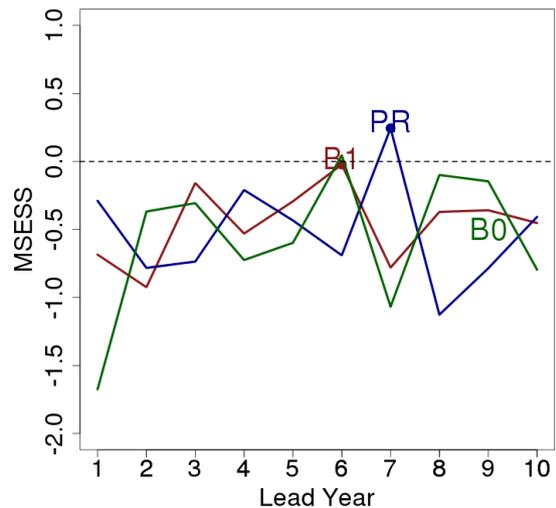


Abbildung 10.9.: Zeitlicher Verlauf des (a) $|DSI| [\frac{PVU^2}{s}]$ in 500 hPa und (b) des Niederschlags $[\frac{mm}{d}]$ des Ensemblemittels von Prototype (farbige Linien) ohne Driftkorrektur sowie entsprechend (c) und (d) nach einer Driftkorrektur. Die farbigen Linien stehen dabei jeweils für ein Initialisierungsjahr. Die schwarze Linie stellt den Verlauf der ERA-Interim Reanalyse dar und die graue das Ensemblemittel der historical-runs mit Driftkorrektur. Dargestellt sind dabei immer Flächenmittel und Wintermittel (DJF) über Europa.

immer noch negativ, womit diese schlechter sind als die Klimatologie. Dass sich bei allen drei Hindcasts eine Verbesserung nach der Driftkorrektur einstellt, ist nicht weiter verwunderlich. Denn die Hindcasts wurden schließlich in Richtung Beobachtungen korrigiert, mit denen sie anschließend über den MSESS auch wieder verglichen wurden. Damit ist auch zu erklären, dass nun, anders als vor der Driftkorrektur, keine eindeutige Verbesserung mehr von Baseline0 über Baseline1 zu Prototype auszumachen ist.

Zuvor konnte über Abb. 10.8 gezeigt werden, dass der DSI generell ein größeres Vorhersagepotential hat als der DSI. Dennoch war auch hier auf allen Druckleveln die Klimatologie besser als die Hindcasts (Abb. 10.8a zeigt nur die 500 hPa-Fläche).

Abbildung 10.10: MESS des Niederschlags für die Ensemblmittel (Ensemblemember: 1 - 3) von Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype für die lead-years 1 bis 10 nach der Driftkorrektur der decadal hindcasts. Als Referenz diente jeweils die entsprechende ERA-Interim Klimatologie. Die Punkte kennzeichnen die Werte, die über dem 95 % Signifikanzniveau liegen.



Aus diesem Grund soll untersucht werden, ob der DSI auch noch nach der Driftkorrektur ein größeres Vorhersagepotential aufweist als der Niederschlag. Da eine allgemeine Verbesserung gegenüber den nicht driftkorrigierten Hindcasts zu erwarten ist, wird das Vorhersagepotential des DSI im Folgenden auch auf verschiedenen Druckleveln analysiert. In diesem Zusammenhang zeigt Abb. 10.11 den MESS des $|DSI|$ gegenüber ERA-Interim für Baseline0 (10.10(a)), Baseline1 (10.10(b)) sowie Prototype (10.10(c)) auf verschiedenen Druckleveln für die Vorhersagejahre 1 - 10. Bei der Betrachtung dieser Abbildungen fällt vor allem auf, dass in allen drei Modellen signifikante positive MESS-Werte für die Vorhersagejahre 7 bis 9 auf der 925 und der 850 hPa-Fläche und für Prototype und Baseline0 zum Teil auch noch in höheren Schichten zu finden sind. Die signifikanten Werte liegen hierbei zwischen 0,1 und 0,4. Eine Erklärung für den besseren Skill in den späteren Vorhersagejahren könnte sein, dass jedes Vorhersagejahr einen anderen Zeitraum zur Evaluierung abdeckt. Somit könnte eine höhere potentielle Vorhersagbarkeit am Ende der Evaluierungsperiode dazu führen, dass spätere Vorhersagejahre einen besseren MESS aufweisen, Für den erwähnten Bereich scheint diesmal Baseline0 am besten abzuschneiden, gefolgt von Prototype, wobei dieser noch für die Jahre 3 bis 5 signifikante positive MESS-Werte aufweist. Insgesamt zeigt sich also vor allem in den unteren Schichten ein Vorhersagepotential des DSI für alle drei hindcasts. Weiterhin wird deutlich, dass der DSI in den besagten Schichten verglichen mit dem Niederschlag höhere MESS-Werte zeigt.

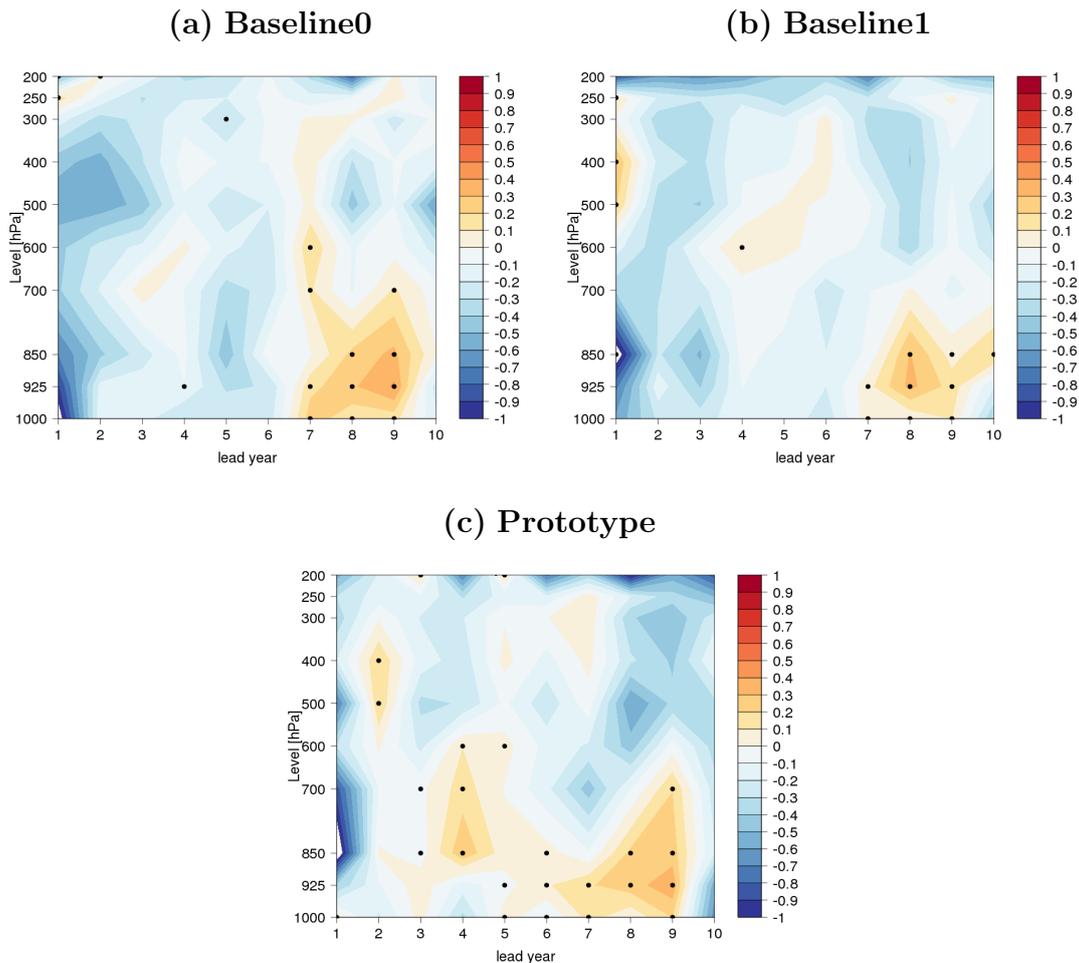
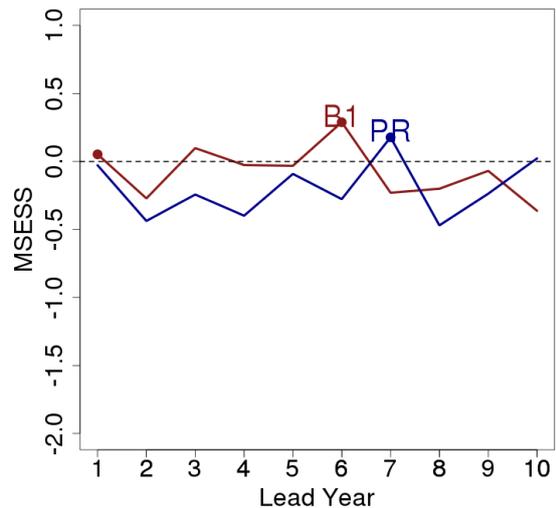


Abbildung 10.11.: MSESS des $|DSI|$ für die Ensemblmittel (Ensemblemember: 1-3) von Baseline0-LR (a), Baseline1-LR (b) sowie Prototype (c) für die lead-years 1 bis 10 auf verschiedenen Druckleveln nach der Driftkorrektur der decadal hindcasts. Als Referenz diente jeweils die entsprechende ERA-Interim Klimatologie. Die Punkte kennzeichnen die Werte, die über dem 95 % Signifikanzniveau liegen.

Mit den Abbildungen 10.10 und 10.11 konnte gezeigt werden, dass es möglich ist, über eine Driftkorrektur sowohl für den Niederschlag als auch den DSI eine bessere Vorhersagbarkeit als die der Klimatologie zu erreichen. Um eine bessere Vergleichbarkeit gegenüber Baseline0, wo nur die ersten drei Ensemblemitglieder zur Verfügung standen, zu gewährleisten, wurden für die anderen Hindcasts auch nur Ensemblmittel aus den ersten drei Mitgliedern berücksichtigt. Nun ist die Frage inwieweit sich der MSESS verbessert, wenn neben der Driftkorrektur auch noch die Anzahl der berücksichtigten Mitglieder auf zehn erhöht wird. Hierzu zeigt Abb. 10.12 zunächst den MSESS des Niederschlags für Baseline1 und Prototype

Abbildung 10.12: MESS des Niederschlags für die Ensemblmittel (Ensemblemember: 1-10) von Baseline1-LR sowie Prototype für die lead-years 1 bis 10 nach der Driftkorrektur der decadal hindcasts. Als Referenz diente jeweils die entsprechende ERA-Interim Klimatologie. Die Punkte kennzeichnen die Werte, die über dem 95% Signifikanzniveau liegen.



gegenüber ERA-Interim für ein Ensemblmittel aus den ersten zehn Mitgliedern. Verglichen mit Abb. 10.10 zeigt sich hierbei für Prototype eine leichte Verbesserung in den negativen Bereichen, wobei diese Bereiche auch für zehn Ensemblemitglieder immer noch kleiner Null sind. Dahingegen hat sich Baseline1 soweit verbessert, dass nun drei MESS-Werte positiv sind, wobei nur zwei (Vorhersagejahr 1 und 6) wirklich signifikant sind.

Äquivalent dazu zeigen Abb. 10.13a und Abb. 10.13b den MESS des driftkorrigierten $|DSI|$ für die ersten zehn Ensemblemitglieder von Baseline1 und Prototype auf verschiedenen Druckleveln. Auffällig ist, dass sich bei beiden Hindcasts vor allem in den Bereichen, wo der MESS des DSI negativ war, eine Verbesserung eingestellt hat, sodass diese nur noch leicht negativ ($> -0,1$) oder leicht positiv sind. Allerdings hat sich die Anzahl der signifikant positiven Werte kaum erhöht. Lediglich in den unteren Schichten gibt es vereinzelt Vorhersagejahre, die nun signifikant sind.

10.4. Zusammenfassung

Das Ziel dieses Abschnitts war es, zu untersuchen, inwieweit eine modellbasierte Vorhersage des DSI auf der dekadischen Zeitskala möglich ist. Hierfür wurden die dekadischen Vorhersagemodelle des MiKlip-Modellsystems Baseline0-LR,

Baseline1-LR sowie Prototype verwendet, welche auf dem MPI-ESM-LR-Modell basieren. Aufgrund der Eigenschaft des DSI alle instationären, diabatischen und reibungsbehafteten Prozesse in der Atmosphäre zu diagnostizieren und zu visualisieren, ist dieser ein guter Proxy für den Niederschlag, welcher durch die besagten Prozesse ausgelöst wird. Die Niederschlagsvorhersage hingegen gestaltet

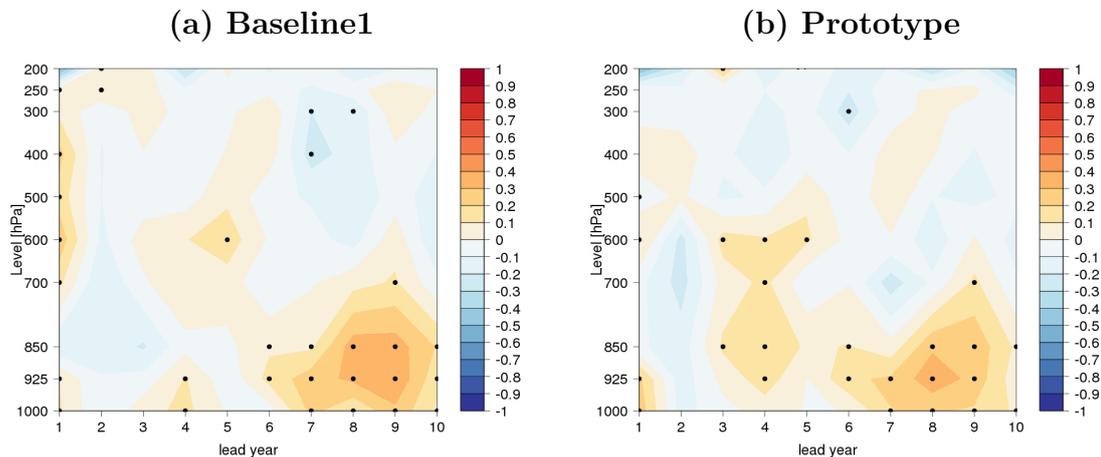


Abbildung 10.13.: MSESS des $|DSI|$ für die Ensemblmittel (Ensemblemember: 1-10) von Baseline1-LR (a) sowie Prototype (b) für die lead-years 1 bis 10 auf verschiedenen Druckleveln nach der Driftkorrektur der decadal hindcasts. Als Referenz diente jeweils die entsprechende ERA-Interim Klimatologie. Die Punkte kennzeichnen die Werte, die über dem 95 % Signifikanzniveau liegen.

sich als schwierig, da bei der Niederschlagsbildung Prozesse beteiligt sind, die vom Modell nicht mehr aufgelöst werden können und somit parametrisiert werden müssen. Infolgedessen hat sich gezeigt, dass der DSI ein größeres Vorhersagepotential aufweist als der Niederschlag. Ein weiterer Grund für das größere Vorhersagepotential des DSI könnte auch sein, dass dieser auch großskalige Prozesse, wie Gebirgsüberströmungen visualisiert, welche wiederum nicht im Zusammenhang mit Niederschlag stehen müssen. Als Referenz dienten hierbei die ERA-Interim-Reanalysedaten, welche allerdings höher aufgelöst sind, als das für die dekadische Vorhersage verwendete MiKilp-Modellsystem. Da instationäre, diabatische und reibungsbehaftete Prozesse durchaus von der aufgelösten räumlichen Skala abhängig sein können, musste zunächst untersucht werden, inwieweit sich der Betrag des DSI mit der Modellauflösung ändert. Diesbezüglich wurde die Auflösung des ERA-Interim-Gitters stückweise von $0,75^\circ$ auf 10° erhöht. Hierfür konnte gezeigt werden,

dass der Betrag des DSI bezüglich der räumlichen Auflösung einem Potenzgesetz unterliegt, und somit mit geringer werdender Auflösung abnimmt. Dieser algebraische Abfall konnte hingegen nicht in den DSI prägenden Größen der Bernoulli-Funktion und der PV gefunden werden, was dafür spricht, dass die Abnahme des DSI für größere Skalen durch Abnahme der Abweichung vom Energie-Wirbel-Gleichgewichtszustand kommt. Letztlich macht sich das auch auf die Korrelation mit dem Niederschlag bemerkbar. Da immer weniger nicht-balancierte Prozesse dargestellt werden können, nimmt auch die Korrelation zwischen dem DSI und dem Niederschlag exponentiell ab. Der Aspekt, dass der Betrag des DSI abhängig von der Auflösung des Modells ist, muss auch bei der Evaluierung der Dekadischen-Hindcasts Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype berücksichtigt werden, da ihre räumliche Auflösung, wie bereits erwähnt, nicht der zur Evaluierung verwendeten ERA-Interim-Reanalyse entspricht. Somit wurde der DSI für ERA-Interim auf der gleichen räumlichen und vertikalen Auflösung, wie die der MiKlip-Modelle berechnet, um so eine sinnvolle Referenz gegenüber den dekadischen Vorhersagemodellen darzustellen. Hierbei zeigt sich, dass alle drei Versionen der dekadischen-Hindcasts im Verhältnis zu den Reanalysen zu geringe DSI-Beträge aufweisen. Allerdings ist eine diesbezüglich stetige Verbesserung von Baseline0 über Baseline1 zu Prototype für alle Vorhersagejahre zu beobachten. Ferner wird deutlich, dass der über die Modellparametrisierungen produzierte Niederschlag für alle drei Hindcasts gegenüber ERA-Interim überschätzt wird, wobei auch hier wieder Prototype für alle Vorhersagejahre am besten abschneidet. Der sich daraus ergebende Widerspruch zu den DSI-Ergebnissen lässt sich damit erklären, dass das zugrunde liegende MPI-ESM-LR-Modell zu viel Niederschlag simuliert, welcher keine Verbindung mit, durch den DSI beschriebenen, auslösenden und nicht-balancierten Prozessen aufweist. Eine Berechnung des Mean-Square-Error-Skill-Score (MSESS) als Maß für das dekadische Vorhersagepotential zeigt für Europa, dass der Prototype-Lauf unter den Versionen des Vorhersagesystems sowohl für den DSI als auch für den Niederschlag den größten Skill für alle Vorhersagejahre aufweist. Darüber lässt sich feststellen, dass der MSESS für den DSI allgemein größer ist, als der des Niederschlags, was für ein besseres Vorhersagepotential des DSI spricht. Allerdings stellte sich heraus, dass die dekadischen Vorhersagemodelle für beide Größen für alle Vor-

hersagejahre schlechter waren als die Klimatologie. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das zugrunde liegende MPI-ESM-LR Modell einen anderen Trend aufweist als die Beobachtungen. Folglich driften insbesondere die Baseline1-LR und Prototype von ihrem Startwert, der durch Beobachtungsdaten festgelegt wurde, in Richtung der Modellklimatologie. Nach Berücksichtigung dieses Aspekts über eine von Kruschke et al. (2015) vorgestellte Driftkorrektur konnte eine deutliche Verbesserung des MSESS sowohl für den Niederschlag als auch den DSI festgestellt werden, so dass diese Variablen nun auch für bestimmte Vorhersagejahre besser waren als die ERA-Interim-Klimatologie. Beim DSI kann insbesondere in den unteren Druckniveaus ein signifikantes Vorhersagepotential festgestellt werden, welches sowohl für drei als auch für zehn Ensemblemitglieder für alle drei dekadischen Vorhersagemodelle größer war als das des Niederschlags. Somit konnte gezeigt werden, dass der DSI auf der dekadischen Zeitskala besser vorherzusagen ist als der Niederschlag. Dies hängt damit zusammen, dass der DSI auch Prozesse, wie die Anregung planetarer Wellen, visualisiert, die ein höheres prognostisches Potential aufweisen, aber nicht unmittelbar mit Niederschlag in Verbindung stehen müssen. Dennoch könnte mit Hilfe der dekadischen Variabilität des DSI auch eine Aussage über die Niederschlagsvariabilität auf der dekadischen Zeitskala getroffen werden.

Hierbei muss erwähnt werden, dass im Rahmen dieser Arbeit nur das deterministische Vorhersagepotential des DSI untersucht wurde, weshalb im Rahmen dieser Arbeit nur der Drift korrigiert wird. Es wäre aber auch wichtig, aufgrund der Unsicherheit der Startbedingungen bei Wetter- und Klimavorhersagen über Ensemble-Vorhersagen auf probabilistische Verfahren zurückzugreifen. Ein häufiges Problem der probabilistischen Vorhersage ist jedoch, dass die Vorhersagen nicht verlässlich sind und rekali­briert werden müssen, sodass die vorhergesagten Wahrscheinlichkeiten mit den beobachteten Häufigkeiten übereinstimmen. Diesbezüglich wurde von Pasternack et al. (2018) bereits ein Verfahren vorgestellt, dass dekadische Vorhersagen für normalverteilte Variablen rekali­briert, sodass das Vorhersagepotential des DSI auch auf der probabilistischen Ebene untersucht werden kann.

11. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit umfasst drei Teile, mit dem dynamischen Zustandsindex (DSI) als verbindendes Element. Hierbei wurde der DSI sowohl von theoretischer als auch von diagnostischer und prognostischer Seite beleuchtet.

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde zunächst das theoretische Konzept, das dem DSI zu Grunde liegt, vertieft. Grundlage hierfür ist die Nambu-Theorie, die auf das atmosphärische Grundgleichungssystem angewandt wurde. Die Nambu-Theorie verdeutlicht, dass die atmosphärische Dynamik, neben der Energie, durch weitere Erhaltungsgrößen, den sogenannten Casimir-Funktionalen, in gleichberechtigter Weise beschrieben wird. Die Casimir-Funktionalen sind als Ausdruck der inneren Zwangsbedingungen des hydro-thermodynamischen Phasenraums zu bewerten und schränken die Bewegung im Phasenraum ein. In diesem Zusammenhang wurden im Rahmen dieser Arbeit jene Casimir-Funktionalen und die daraus resultierenden thermodynamischen Modelle hinsichtlich ihrer fluiddynamischen Komplexität hierarchisch eingeordnet. In der Hierarchie an oberster Stelle steht das allgemeinste Casimir-Funktional, welches algebraisch von einer beliebigen Funktion der PV und der Entropie abhängig ist, denn es beschreibt ein kompressibles, baroklines und wirbelbehaftetes Modell, ohne eine konkrete Funktion für die PV und die Entropie vorzugeben. Auf der Ebene darunter folgen die Casimir-Funktionalen Enstrophie, Entropie sowie Masse, die als Approximationen des allgemeinsten Casimir-Funktionalen anzusehen sind. So beschreibt das Enstrophie-Casimir zwar ein baroklines, wirbelbehaftetes Modell, aber die algebraische Abhängigkeit zwischen Entropie und PV fehlt bei diesem Funktional. Hingegen fehlt beim Entropie-Casimir der wirbeldynamische Freiheitsgrad und beim Massen-Casimir fehlt zusätzlich noch der thermodynamische Freiheitsgrad.

Die Nambu-Darstellung des primitiven Gleichungssystems zeichnet sich weiterhin dadurch aus, dass aus dem resultierendem Gleichgewicht zwischen Energie und dem Casimir-Funktional die jeweilige stationäre Lösung des Grundgleichungssystems analytisch gewonnen werden kann. Die stationären Lösungen der Modelle, die sich jeweils mit Hilfe des Enstrophie-, Entropie-, sowie Massen-Casimir ergeben, können hierbei nicht ineinander umgeformt werden. Ausgangspunkt für die stationären Lösungen ist die, innerhalb eines sogenannten Energie-Casimir-Funktional, über global konstante Lagrange'sche Parameter, stattfindende, Kopplung zwischen Energie und Casimir-Funktional. Diesbezüglich konnten die Lagrange'schen Parameter der entsprechenden Casimir-Funktionale erstmals quantifiziert werden, wobei sich herausstellte, dass jene Parameter außerhalb des Grundzustandes ihre globale Erhaltung verlieren und lokal abhängig werden. Somit tragen die Lagrange'schen Parameter einen bedeutenden Teil zur Charakterisierung des Grundzustandes bei.

Weiterhin wurde in dieser Arbeit erstmals ein Zusammenhang zwischen dem Bernoulli-Theorem und der, auf dem Energie-Casimir-Funktional basierenden, stationären Lösung hergestellt. Hierzu wurde eine weitere, geschlossene Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems aufgestellt. Grundlage hierfür ist eine, in dieser Arbeit erstmals angewandte, konkrete Form des allgemeinen Energie-Casimir-Funktional und die daraus resultierende stationäre Lösung. Es konnte gezeigt werden, dass die Bernoulli-Funktion für einen stationären, adiabatischen und reibungsfreien Zustand entlang der Stromlinien der PV und der Entropie erhalten ist. Dies ist ein Fortschritt gegenüber der Verallgemeinerung nach Schär (1993), welche zwar eine Erhaltung der Bernoulli-Funktion entlang von Stromlinien beinhaltet, diese aber nicht näher spezifiziert. Erst durch die Überführung des primitiven Gleichungssystems von der klassischen Darstellung zur Nambu-Felddarstellung, ist es möglich die algebraische Abhängigkeit zwischen Bernoulli-Funktion, PV und Entropie im Bernoulli-Theorem offenzulegen. Darüberhinaus hat die geschlossene Verallgemeinerung des Bernoulli-Theorems die Eigenschaft, dass sich aus ihr die historisch erste Verallgemeinerung nach Schär (1993) und für einen wirbelfreien und barotropen Zustand das klassische Bernoulli-Theorem ableiten lassen. Ferner

konnte neben den bekannten Formen des Bernoulli-Theorems erstmals ein baroklines, wirbelfreies Bernoulli-Theorem aus dem geschlossenen, verallgemeinerten Bernoulli-Theorem abgeleitet werden, das hierarchisch zwischen dem klassischen Bernoulli-Theorem und der Verallgemeinerung von (Schär, 1993) steht. Jenes barokline, wirbelfreie System zeichnet sich dadurch aus, dass die Bernoulli-Funktion auf isentropen Flächen konstant und die stationäre Temperatur global erhalten ist.

Darüberhinaus wurde im Rahmen dieser Arbeit deutlich, dass neben der Darstellung der Bernoulli-Funktion auch die, über das Energie-Casimir-Funktional abgeleiteten, stationären Temperatur- und Winddarstellungen Teil des Bernoulli-Theorems sind. Zusammen vervollständigen diese drei Darstellungen den stationären Zustand der Hydro- und Thermodynamik. Folglich ist der DSI, aufgrund seiner Eigenschaft innerhalb eines stationären, adiabatischen und reibungsfreien Zustandes zu verschwinden, auch ein Ausdruck jenes geschlossenen, verallgemeinerten Bernoulli-Theorems. Diese Erkenntnis unterstreicht die Bedeutung der Nambu-Felddarstellung, da sich hieraus der beschriebene, geschlossene Charakter des Bernoulli-Theorems, anders als bei der klassischen Schreibweise, direkt ergibt.

In einer, im Rahmen dieser Arbeit, erstmaligen Anwendung der stationären Temperaturdarstellung, stellte sich heraus, dass diese, ähnlich wie der DSI, die Eigenschaft hat Abweichungen vom atmosphärischen Grundzustand, also instationäre, diabatische sowie reibungsbehaftete Prozesse, in der Atmosphäre zu diagnostizieren. Der Vorteil gegenüber dem DSI besteht darin, dass sich Abweichungen vom Grundzustand erstmals über eine Temperatur-Differenz zwischen der beobachteten Temperatur (oder der Temperatur im Modell) und der stationären Temperaturdarstellung beschreiben lassen, was eine völlig neue physikalische Interpretationsmöglichkeit ermöglicht. In diesem Zusammenhang konnte mit Reanalysedaten gezeigt werden, dass die Abweichungen von der stationären Temperatur frontartige Strukturen bildet, welche in guter Übereinstimmung mit den DSI- und den Niederschlagsfeldern der Reanalysedaten sind. Allerdings stellte sich heraus, dass die stationäre Temperatur in diesen Regionen viel höher ist als die Temperatur der

Reanalysedaten. Aus physikalischer Sicht sind diese Abweichungen ein Ausdruck der unterschiedlichen Entropieerzeugung bei diabatischen und adiabatischen Prozessen, da die stationäre Temperaturdarstellung auch für Regionen, die vom atmosphärischen Grundzustand abweichen, auch auf einer adiabatischen Annahme beruht. Dies äußert sich auch im Berechnungsverfahren des stationären Temperaturfeldes, da es zur Berechnung auf Temperatur- und Windfelder zurückgreift, die nicht unbedingt stationär sind. Um die stationären Felder näherungsweise bestimmen zu können, wurde ein Iterationsverfahren herausgearbeitet, welches auf den Eigenschaften des DSI im Grundzustand beruht. Das Bestimmen der stationären Felder könnte so zum Beispiel einen Beitrag für die Datenassimilation leisten oder aber dabei helfen Ensemble-Modelle physikalisch zu generieren indem die stationären Felder unterschiedlich gestört werden.

Der zweiten Teil dieser Arbeit befasste sich mit einer prozessorientierten Analyse des DSI, indem die dekadischen Wechselwirkungen zwischen AMV, NAO und DSI untersucht wurden. Dabei ging es um die Fragestellung, ob sich zeitlich großskalige Änderungen der Meeresoberflächentemperatur im Nordatlantik, welche durch die AMV quantifiziert werden, auch mit dem DSI über dem europäischen Festland diagnostizieren lassen. Hierbei nimmt die NAO, als Maß für die Variation des Druckgradienten über dem Nordatlantik, eine wichtige Rolle ein. Denn über die Schwankungen der NAO lassen sich die Variationen der Sturmzugbahnen über Europa beschreiben, welche wiederum auch durch den DSI ausgedrückt werden. Hierzu wurden in dieser Arbeit zunächst die Wechselwirkungen der AMV und der NAO mit Hilfe von Beobachtungsdaten ausgewertet, wobei die Frage, ob sich diese beiden Indizes mit einer zeitlichen Verschiebung beeinflussen, von besonderem Interesse war. Zahlreiche Beobachtungs- und Modellstudien haben sich bereits direkt oder indirekt mit dem Zusammenhang zwischen der AMV und der NAO für verschiedene zeitliche Perioden auseinandergesetzt. Hierzu herrscht ein großer Konsens darüber, dass es eine Kopplung zwischen diesen beiden Indizes sowohl auf der dekadischen bis multi-dekadischen, als auch auf der jahreszeitlichen bis interannuellen Zeitskala gibt. Für die längere Zeitskala zeigen viele Studien, dass der Ozean die Atmosphäre mit einer zeitlichen Verschiebung von vier bis neun Jahren beein-

flusst, wohingegen auf der kürzeren Zeitskala der Einfluss der Atmosphäre auf den Ozean größer ist als umgekehrt. Diese Ergebnisse konnten auch im Rahmen dieser Arbeit bestätigt werden. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass der für die ERA-Interim Reanalysedaten berechnete NAO und AMV-Index die gleichen spektralen Eigenschaften aufweisen, wie die Indizes aus den direkten Beobachtungsdaten.

Das Ziel bestand nun darin, zu überprüfen, ob sich die NAO-AMV-Kopplung auch durch den DSI diagnostizieren lässt. Diesbezüglich zeigt sich in der unteren Troposphäre ohne zeitliche Verschiebung eine hohe Korrelation zwischen der NAO und dem DSI über Europa. Bei einer zeitlichen Verschiebung zwischen diesen beiden Größen gibt es allerdings keinen signifikanten Zusammenhang. Erst in der oberen Troposphäre, in der Nähe der Tropopause, ist eine signifikante Korrelation bei einer zeitlichen Verschiebung zu erkennen. Bemerkenswerterweise ergibt sich vor allem in der Nähe der Tropopause eine gute Korrelation, wenn der AMV-Index dem DSI über Europa um etwa 20 Jahre vorausläuft. Hierbei konnte gezeigt werden, dass die Variation der Tropopausenhöhe, welche wiederum mit der Anregung durch planetare Wellen in Verbindung gebracht werden kann, im engen Zusammenhang zu der Telekonnektion zwischen AMV, NAO und DSI steht. Dies unterstreicht letztendlich die Bedeutung der troposphärischen Grenzflächen Ozean und Tropopause für die prozessorientierten Vorhersage im dekadischen Bereich, denn nur bei einer gekoppelten Betrachtung von Ozean, Troposphäre und Tropopause ergibt sich ein prognostisches Potential.

Im Gegensatz zum vorangegangenen Teil wurde im dritten Teil dieser Arbeit das mittelfristige, prognostische Potential des DSI anhand des, für die Klimavorhersage verwendeten, Erdsystemmodelles MPI-ESM-LR untersucht. Die Fragestellung war hierbei, ob der DSI im Rahmen des MiKlip-Modellsystems ein dekadisches Vorhersagepotential aufweist und ob dieses größer ist, als das des Niederschlags. Hierbei lag der Fokus auf dem Nordatlantik und Europa. Als Referenz dienten die ERA-Interim Reanalysedaten des Europäischen Zentrums für mittelfristige Wettervorhersage (ECMWF), wobei diese auf einem wesentlich höher aufgelösten Modellgitter zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund musste zudem untersucht werden, welchen Einfluss die räumliche Auflösung des zugrunde liegenden Modell-

gitters auf den Betrag des DSI hat und inwiefern sich dadurch der Zusammenhang zum Niederschlag ändert. Hierfür konnte gezeigt werden, dass der Betrag des DSI bezüglich der räumlichen Auflösung einem Potenzgesetz unterliegt und mit geringer werdender Auflösung algebraisch abnimmt. Dieser Abfall zeigt sich hingegen nicht in den Feldern der Bernoulli-Funktion und der PV, die für die Berechnung des DSI essentiell sind. Dies spricht dafür, dass die Abnahme des DSI für größere Skalen durch eine Abnahme der Abweichung vom Energie-Wirbel-Gleichgewichtszustand herbeigeführt wird. Letztlich macht sich das auch auf die Korrelation mit dem Niederschlag bemerkbar. Denn dadurch, dass immer weniger nicht-balancierte Prozesse aufgelöst werden können, nimmt auch die Korrelation zwischen dem DSI und dem Niederschlag algebraisch ab.

Bei der Evaluierung der dekadischen Hindcasts Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype wurde dann der Aspekt, dass der Betrag des DSI abhängig von der Auflösung des Modells ist, berücksichtigt. Somit wurde der DSI für ERA-Interim auf der gleichen räumlichen und vertikalen Auflösung, wie die der MiKlip-Modelle berechnet, um so eine sinnvolle Referenz gegenüber den dekadischen Vorhersagemodellen darzustellen. Hierbei zeigte sich, dass alle drei Versionen der dekadischen Hindcasts im Verhältnis zu den Reanalysen zu kleine DSI-Beträge aufweisen. Dennoch ist eine stetige Verbesserung von Baseline0 über Baseline1 zu Prototype für alle Vorhersagejahre zu beobachten. Die Ergebnisse zeigen, dass das Verhältnis zwischen balancierten und nicht-balancierten Prozessen im Klimamodell geringer ist, als in den Reanalysedaten. Andererseits stellte sich heraus, dass der Niederschlag für alle drei Hindcasts gegenüber ERA-Interim überschätzt wird, wobei auch hier wieder Prototype für alle Vorhersagejahre am besten abschneidet. Dies verdeutlicht, dass das zugrundeliegende MPI-ESM-LR-Modell zu viel Niederschlag simuliert, welcher keine Verbindung mit, durch den DSI beschriebenen, auslösenden und nicht-balancierten Prozessen aufweist. Die Erklärung hierfür könnte in einer künstlichen Niederschlagsgenerierung des Klimamodells über Modellparametrisierungen liegen. Allgemein zeigen diese Resultate, dass der DSI auch grundsätzlich dafür verwendet werden kann, verschiedene Wetter- und Klimamodelle hinsichtlich ihres Verhältnis zwischen balancierten und nicht-balancierten Prozessen mit-

einander zu vergleichen. Weiterhin konnte eine Berechnung des Mean-Square-Error-Skill-Scores (MSESS), als Maß für das dekadische Vorhersagepotential gegenüber der Klimatologie, zeigen, dass der DSI auch nach der von Kruschke et al. (2015) vorgeschlagenen Driftkorrektur auf der dekadischen Zeitskala besser vorherzusagen ist als der Niederschlag. Der Grund ist, dass der DSI auch Prozesse diagnostiziert, die ein höheres prognostisches Potential aufweisen, aber nicht unmittelbar in Verbindung mit Niederschlag stehen müssen. Dennoch könnte mit Hilfe der dekadischen Variabilität des DSI auch eine Aussage über die Niederschlagsvariabilität auf der dekadischen Zeitskala getroffen werden. Die Voraussetzung hierfür wäre aber, dass es mittelfristig keine Verschiebung der atmosphärischen Dynamik in Richtung von mehr nicht-balancierten Prozessen gibt, die nicht zwangsläufig im Zusammenhang mit Niederschlag stehen.

Um die Ergebnisse der gesamten Arbeit zusammenzufassen, kann festgehalten werden, dass nicht nur das theoretische Konzept des DSI weiter vertieft wurde, sondern dass auch eine mittelfristige Vorhersagbarkeit des DSI, sowohl prozessorientiert, als auch modellbasiert, gezeigt werden konnte.

A. Alternative Herleitungen des verallgemeinerten Bernoulli-Theorems

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass sich aus der stationären Lösung eines konkreten Energie-Casimir-Funktional eine Abhängigkeit zwischen der Bernoullifunktion, PV und Entropie ableiten lässt. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass es sich bei dieser stationären Lösung aufgrund einer stationären Temperatur- und Winddarstellung um ein geschlossenes Bernoulli-Theorem handelt. Der Vorteil des verallgemeinerten Bernoulli-Theorems des Energie-Casimir-Funktional besteht darin, dass sich aus ihm sowohl das klassische Bernoulli-Theorem, die Verallgemeinerung nach Schär (1993) sowie das in dieser Arbeit erstmals vorgestellte Thermische Bernoulli-Theorem direkt ableiten lassen.

Dennoch besteht die Möglichkeit, diese drei Formen des Bernoulli-Theorems auch jeweils einzeln aus dem Enstrophie-, Entropie- und Massen-Casimir abzuleiten. Diese drei Casimir-Funktional sind auch Lösung des in Kapitel 3 vorgestellten allgemeinen Casimir-Funktional $\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$.

A.1. Die stationäre Wind- und Temperaturdarstellung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich sowohl die stationäre Winddarstellung nach Schär (1993) als auch die stationäre Temperaturdarstellung aus dem Energie-Wirbel-Gleichgewicht ableiten lassen.

Ausgangspunkt ist die Nambu-Darstellung des primitiven Gleichungssystems, wo-

bei für ein System mit jeweils einem wirbel-, einen thermo- sowie massendynamischen Freiheitsgrades zunächst gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{H}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma}, \quad (\text{A.1})$$

mit der Zwangsbedingung:

$$\{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{C}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{C}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{C}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma} = 0, \quad (\text{A.2})$$

Diese Bedingung wird durch die Ertel'schen potentiellen Enstrophie $\mathcal{C} = \mathcal{E}_p$ erfüllt, welches für $f = \frac{1}{2}\Pi^2$ aus dem allgemeinen Casimir-Funktional $\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$ folgt. Weiterhin gilt auch:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{N}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{N}\}_{\sigma, \vec{v}, \sigma}, \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s] - \lambda_e \mathcal{E}_p[\vec{v}, \rho, s]. \quad (\text{A.4})$$

In dem so gebildeten Energie-Wirbel-Funktional \mathcal{N} besteht eine Abhängigkeit von ρ, s und \vec{v} . Für die Bestimmung des stationären Zustandes müssen für die Funktionalableitungen des Energie-Wirbel-Funktional somit folgende Lösungen gefunden werden:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}, s} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta \vec{v}} \right|_{s, \rho} = 0, \quad (\text{A.5})$$

wobei an dieser Stelle bei den entsprechenden Funktionalableitungen die jeweils andere Größe festgehalten wird:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} = \lambda_e \left. \frac{\delta \mathcal{E}_p[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}}, \quad (\text{A.6})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = \lambda_e \left. \frac{\delta \mathcal{E}_p[\vec{v}, \rho, s]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho}, \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s} = \lambda_e \left. \frac{\delta \mathcal{E}_p[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s} \quad (\text{A.8})$$

Daraus folgt dann die stationäre Lösung eines kompressiblen, baroklinen und wir-

belbehafeten Zustandes:

$$B = -\lambda_e \frac{1}{2} \Pi^2 \quad (\text{A.9})$$

$$\rho T = \lambda_e \vec{\xi}_a \cdot \nabla \Pi - \lambda_f k_s \rho \quad (\text{A.10})$$

$$\rho \vec{v} = \lambda_e \nabla s \times \nabla \Pi \quad (\text{A.11})$$

A.2. Das Bernoulli-Theorem für barokline und wirbelfreie Fluide

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich das Bernoulli-Theorem für barokline und wirbelfreie Fluide auch über ein Energie-Entropie-Gleichgewicht herleiten lassen. Ausgangspunkt hierfür ist das Grundgleichungssystem in trilinearärer Nambu-Klammer-Form, welches sich aufgrund des fehlenden wirbeldynamischen Freiheitsgrad, wie folgt darstellt:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}_{s, \vec{v}, s} \quad (\text{A.12})$$

Dieses System ist nun aufgrund des thermodynamischen Freiheitsgrades baroklin und aufgrund des massendynamischen Freiheitsgrades kompressibel. Das Casimir-Funktional eines solchen Systems ist das Entropie-Funktional, welches sich für $f = s$ aus dem allgemeinen Casimir-Funktional \mathcal{C}_f ergibt ($\mathcal{C}_{f=s} = \mathcal{S}$). Für die entsprechende Zwangsbedingung gilt dann:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{S}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{S}\}_{s, \vec{v}, s} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Daraus folgt dann für (A.12):

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} + \{\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{N}\}_{s, \vec{v}, s}. \quad (\text{A.14})$$

Das Energie-Casimir-Funktional (3.54) wird nun zu einem Energie-Entropie-Funktional:

$$\mathcal{N}[\vec{v}, \rho, s] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s] - \lambda_s \mathcal{S}[\rho, s]. \quad (\text{A.15})$$

Für die Lösung des stationären wirbelfreien Zustandes gibt es eine nicht-triviale und eine triviale Lösung. Die allgemeinere nicht-triviale Lösung basiert darauf, dass das Casimir-Funktional \mathcal{S} , des baroklinen und wirbelfreien Zustandes nur von ρ und s abhängig ist und somit nur eine Zwangsbedingung für die Masse und die Entropie vorgibt. Somit muss zunächst ein Minimum des Energie-Entropie-Funktional nur für diese Funktionalableitungen gefunden werden:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}, s} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Die Funktionalableitungen nach der Dichte und der Entropie des Energie-Entropie-Funktional (A.16) lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} = \lambda_s \left. \frac{\delta \mathcal{S}[\rho, s]}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}}, \quad (\text{A.17})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = \lambda_s \left. \frac{\delta \mathcal{S}[\rho, s]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho}. \quad (\text{A.18})$$

Bildet man die entsprechenden Funktionalableitungen, so folgt die bereits gezeigte nicht-triviale stationäre Lösung, allerdings ohne konstanten Faktor, der sich beim Gleichgewicht zwischen Bernoullifunktion und Entropie (A.19) hinzu addiert:

$$B = \lambda_s s, \quad (\text{A.19})$$

$$\rho T = \lambda_s \rho. \quad (\text{A.20})$$

Dennoch zeigt dieses Resultat auch, dass die Bernoulli-Funktion entlang der isentropen konstant ist und dass die Temperatur global konstant ist. Weiterhin ergibt sich bei dieser stationären Lösung nach äquivalenter Umformung auch wieder ein Gleichgewicht zwischen der mechanischen Energie und der freien Enthalpie.

Bei der Herleitung der trivialen Lösung kann zusätzlich ein Minimum bezüglich der kinetischen Energie gefunden werden, da das barokline und wirbelfreie System

A.15 auch die kinetische beinhaltet.

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}, s} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, s, \vec{v}]}{\delta \vec{v}} \right|_{s, \rho} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Diese drei Funktionalableitungen (A.21) lassen sich über die Definition des Energie-Entropie-Funktional (A.31) auch wie folgt ausdrücken:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}} = \lambda_s \left. \frac{\delta \mathcal{S}[\rho, s]}{\delta \rho} \right|_{s, \vec{v}}, \quad (\text{A.22})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho} = \lambda_s \left. \frac{\delta \mathcal{S}[\rho, s]}{\delta s} \right|_{\vec{v}, \rho}, \quad (\text{A.23})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho, s]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s} = \lambda_s \left. \frac{\delta \mathcal{S}[\rho, s]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho, s}. \quad (\text{A.24})$$

Bildet man nun die entsprechenden Funktionalableitungen, so ergibt sich Folgendes:

$$B = \lambda_s s \quad (\text{A.25})$$

$$\rho T = \lambda_s \rho \quad (\text{A.26})$$

$$\rho \vec{v} = 0 \quad (\text{A.27})$$

Auch bei dieser Lösung fehlt der konstante Term bei der Beziehung zwischen der Bernoullifunktion und der Entropie (A.25). Diese Tatsache ändert, aber auch hier nichts an der Lösung. So ergibt sich auch nach äquivalenter Umformung aus (A.25-A.27) ein chemischer Gleichgewichtszustand.

A.3. Das klassische Bernoulli-Theorem

Dieser Abschnitt zeigt eine alternative Herleitung des klassischen Bernoulli-Theorems aus dem Energie-Massen Gleichgewicht. Hierbei ist für den Fall $f = 1$ das Casimir-Funktional $\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$ nur von der Dichte abhängig, womit dann

auch $\mathcal{C} = \mathcal{M}$ gilt. Durch die Wahl des Massen-Casimirs fallen die wirbel- und die thermodynamischen Freiheitsgrade weg, womit nur noch der Energie-Masse-Term übrig bleibt:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho}. \quad (\text{A.28})$$

Dieser Zustand hat die Zwangsbedingung

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{M}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} = 0, \quad (\text{A.29})$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}\}_{\rho, \vec{v}, \rho}. \quad (\text{A.30})$$

Das Energie-Casimir-Funktional \mathcal{N} (3.54) kann aufgrund der Zwangsbedingung (A.29) als Energie-Masse-Funktional ausgedrückt werden:

$$\mathcal{N}[\rho, \vec{v}] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho] - \lambda_m \mathcal{M}[\rho]. \quad (\text{A.31})$$

Für die Lösung des stationären Zustandes gibt es eine nicht-triviale und eine triviale Lösung. Die allgemeinere nicht-triviale Lösung basiert darauf, dass das Casimir-Funktional \mathcal{M} des barotropen und wirbelfreien Zustandes nur von der Dichte abhängig ist und somit nur eine Zwangsbedingung für die Masse vorgibt. Dementsprechend kann zunächst nur eine Funktionalableitung nach der Dichte gebildet werden, um eine nicht-triviale stationäre Lösung zu erhalten:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}} = 0, \quad (\text{A.32})$$

Die Funktionalableitung nach der Dichte des Energie-Massen-Funktional (A.32) lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}} = \lambda_m \left. \frac{\delta \mathcal{M}[\rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}}, \quad (\text{A.33})$$

Dies stellt eine Energie-Massen-Balance dar. Woraus dann, über die Definition von \mathcal{M} die stationäre Lösung folgt:

$$B = \lambda_m = \text{const.} \quad (\text{A.34})$$

Ungeachtet dessen beinhaltet das System (A.30) aber auch die kinetische Energie, somit existiert neben dem Minimum bezüglich der Masse zusätzlich auch eines bezüglich der kinetischen Energie:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, \vec{v}]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\rho, \vec{v}]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Die triviale stationäre Lösung beinhaltet neben der Funktionalableitung nach der Dichte auch eine Funktionalableitung nach der Geschwindigkeit. Diese beiden Funktionalableitungen (A.35) lassen sich über die Definition des Energie-Massen-Funktional (A.31) auch wie folgt ausdrücken:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}} = \lambda_m \left. \frac{\delta \mathcal{M}[\rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}}, \quad (\text{A.36})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho} = \lambda_m \left. \frac{\delta \mathcal{M}[\rho]}{\delta \vec{v}} \right|_{\rho}, \quad (\text{A.37})$$

woraus dann, nach der Bildung der Funktionalableitung, über die Definition von \mathcal{M} auch die triviale stationäre Lösung folgt.

$$B = \lambda_m = \text{const.} \quad (\text{A.38})$$

$$\rho \vec{v} = 0. \quad (\text{A.39})$$

Formt man diese Beziehung um, erhält man, wie schon zuvor gezeigt, das hydrostatische Gleichgewicht.

A.3.1. Analyse des Energie-Massen-Wirbel-Gleichgewichtes

In diesem Unterabschnitt wird ein weiteres Casimir-Funktional diskutiert, welches sich nicht einfach aus der allgemeinen Casimir-Definition $\mathcal{C}_f = \int_V d\tau \rho f(\Pi, s)$ ablei-

ten lässt. Denn es besteht auch die Möglichkeit, die Summe aus den Funktionalen der absoluten Helizität h_a und der Masse zu bilden, womit ein wirbeldynamischer Freiheitsgrad hinzukommt:

$$\mathcal{C} = \lambda_m \mathcal{M} + \lambda_h h_a, \quad (\text{A.40})$$

wobei λ_h wieder ein konstanter Eichfaktor ist. Für einen solchen Fall würde der thermodynamische Freiheitsgrad verschwinden, sodass sich eine barotrope Atmosphäre ergibt. Somit ist neben der Masse auch die absolute Helizität eine globale Erhaltungsgröße. Das System kann nun wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{H}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}_{\rho, \vec{v}, \rho}. \quad (\text{A.41})$$

Für die entsprechende Zwangsbedingung gilt dann:

$$\{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{M} + h_a\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{M} + h_a\}_{\rho, \vec{v}, \rho} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Das Energie-Casimir-Funktional (3.54) wird nun zu einem Energie-Massen-Wirbel-Funktional:

$$\mathcal{N}[\rho, s] = \mathcal{H}[\vec{v}, \rho] - \lambda_m \mathcal{M}[\rho] - \lambda_h h_a[\vec{v}]. \quad (\text{A.43})$$

Die zeitliche Entwicklung (A.41) kann nun aufgrund der Zwangsbedingung (A.42) auch mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \{\mathcal{F}, h_a, \mathcal{N}\}_{\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}} + \{\mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}\}_{\rho, \vec{v}, \rho} \\
&= - \int_V d\tau \left[\frac{1}{\rho} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{v}} \cdot \left(\frac{\delta h_a}{\delta \vec{v}} \times \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \vec{v}} \right) \right] \\
&\quad - \int_V d\tau \left[\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{v}} \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \rho} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \vec{v}} \right) \right] \quad (\text{A.44})
\end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Damit das System stationär wird, muss ein Minimum für die Funktionalableitung nach der Dichte und der Geschwindigkeit gefunden werden ($\frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \rho} = 0, \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \vec{v}} = 0$), sodass sich Folgendes ergibt:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}, s} = \lambda_m \left. \frac{\delta \mathcal{M}[\rho]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}, s} + \lambda_h \left. \frac{\delta h_a[\vec{v}]}{\delta \rho} \right|_{\vec{v}, s}, \quad (\text{A.45})$$

$$\left. \frac{\delta \mathcal{H}[\vec{v}, \rho]}{\delta \vec{v}} \right|_{s, \rho} = \lambda_m \left. \frac{\delta \mathcal{M}[\rho]}{\delta \vec{v}} \right|_{s, \rho} + \lambda_h \left. \frac{\delta h_a[\vec{v}]}{\delta \vec{v}} \right|_{s, \rho}. \quad (\text{A.46})$$

Wenn man nun die Funktionalableitungen bildet, so folgt aus (A.45) und (A.46):

$$B = \lambda_m = \text{const.} \quad (\text{A.47})$$

$$\rho \vec{v} = \lambda_h \frac{1}{2} \vec{\xi}_a. \quad (\text{A.48})$$

Diesmal ergibt sich aus (A.47) für die Bernoulli-Funktion folgende Darstellung, da der thermodynamische Freiheitsgrad verschwindet, der Wind aber ungleich Null ist:

$$B = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (\text{A.49})$$

Der aus (A.47) folgende Zustand $B = \text{const.}$ beziehungsweise $\frac{dB}{dt} = 0$ wird Bernoulli-Zustand oder auch Bernoulli-Theorem genannt. Weiterhin gilt, dass λ_m nicht orts-

abhängig ist, was dazu führt, dass die Bernoulli-Funktion global konstant ist. Des Weiteren deutet (A.48) an, dass der stationäre Zustand eines barotropen Systems einer Beltrami-Strömung entspricht, da wegen $\vec{v} \sim \vec{v}(\vec{\xi}_a)$ der Geschwindigkeitsvektor und der Wirbelvektor parallel zueinander sind. Das heißt, dass sich die absolute Vorticity entlang einer Stromlinie nicht ändert.

B. Herleitung der stationären Zustände aus dem primitiven Gleichungssystem

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich der DSI sowie die stationären Darstellungen des Windes und der Temperatur nicht nur über die Nambu-Darstellung des primitiven Gleichungssystems, sondern auch über dessen klassische Schreibweise herleiten lassen. Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung nach der Webertransformation (B.17):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\xi}_a \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \Phi + h \right) - \vec{F}_R - T \nabla s = 0.$$

Nach Annahme von Stationarität und Reibungsfreiheit der Definition der Bernoulli-Funktion ($B = \vec{v}^2 + \Phi + h$) ergibt sich somit:

$$\vec{\xi}_a \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \Phi + h \right) - T \nabla s = 0. \quad (\text{B.1})$$

B.1. Stationäre Winddarstellung

Der stationäre Wind ergibt sich nun mit $\nabla s \times (\text{B.1})$, was zu folgendem Ausdruck führt:

$$\nabla s \times (\vec{\xi}_a \times \vec{v}) + \nabla s \times \nabla B - \nabla s \times T \nabla s = 0. \quad (\text{B.2})$$

Hierbei verschwindet das Kreuzprodukt zwischen den beiden Entropiegradienten und das doppelte Kreuzprodukt kann mit der Grassmann-Identität umgeformt werden:

$$\vec{\xi}_a (\vec{v} \cdot \nabla s) - \vec{v} (\vec{\xi}_a \cdot \nabla s) + \nabla s \times \nabla B = 0. \quad (\text{B.3})$$

Über den 1. Hauptsatz der Thermodynamik im stationären Fall ($\vec{v} \cdot \nabla s = 0$) und der PV-Definition ($\Pi = \frac{1}{\rho} \vec{\xi}_a \cdot \nabla s$) folgt:

$$-\vec{v}(\rho\Pi) + \nabla s \times \nabla B = 0. \quad (\text{B.4})$$

Somit hat der stationäre Wind folgenden Ausdruck:

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \nabla B \times \nabla s. \quad (\text{B.5})$$

B.2. Stationäre Temperaturdarstellung

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der stationären Temperatur ist (B.1). Diese wird mit dem absoluten 3D-Wirbelvektor $\vec{\xi}_a$ multipliziert, sodass sich folgendes ergibt:

$$\vec{\xi}_a \cdot (\vec{\xi}_a \times \vec{v}) + \vec{\xi}_a \cdot \nabla B - T \vec{\xi}_a \cdot \nabla s = 0. \quad (\text{B.6})$$

Der erste Term auf der linken Seite verschwindet aufgrund des Spatprodukts zweier gleicher Größen. Außerdem kann bei (B.6) wieder die PV-Definition eingeführt werden, was letztendlich nach Umstellen zur stationären Temperaturdarstellung führt:

$$T_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \vec{\xi}_a \cdot \nabla B. \quad (\text{B.7})$$

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass sich die stationäre Wind- und Temperaturdarstellung auch direkt aus dem primitiven Gleichungssystem und nicht nur über dessen Nambu-Schreibweisen ableiten lassen. Diese Tatsache unterstreicht nochmal das Konzept der stationären Zustände. Allerdings erlaubt die direkte Herleitung aus dem primitiven Gleichungssystem keinen Einblick in den theoretischen Hintergrund dieser stationären Zustände. Diesbezüglich zeigt erst die Ableitung aus der Nambu-Schreibweise, dass die Grundlage ein Gleichgewicht zwischen Energie, Wirbel, Entropie und Masse ist. Der Grund hierfür ist, dass das primitive Grundgleichungssystem aufgrund seiner Euler'schen Darstellung die Lagrange'schen Eigenschaften der Erhaltungsgrößen PV, Entropie und Masse nicht

wiedergeben kann.

B.3. Dynamischer Zustandsindex

Der dynamische Zustandsindex (Dynamic State Index, DSI) wurde erstmals von Névir (2004) hergeleitet. Ausgangspunkt für die Herleitung des DSI sind die prognostischen Gleichungen für die Impuls- und Massenbilanz sowie für die Bilanz der inneren Energie. Dabei wird die Luft als homogenes, trockenes und ideales Gasgemisch betrachtet.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \nabla\phi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{c_p T} \cdot q. \quad (\text{B.10})$$

Hierbei beschreibt t die Zeit, \vec{v} den dreidimensionalen Windvektor, Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, ϕ das Geopotential, ρ die Dichte der trockenen Luft, $\underline{\underline{T}}$ den Reibungs-Spannungstensor, c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstanten Druck, T die absolute Temperatur und q die spezifische diabatische W armerate. Ferner ist Θ die potentielle Temperatur, welche über

$$\Theta = T \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \quad (\text{B.11})$$

definiert ist. Dabei ist R die spezifische Gaskonstante für trockene Luft ($287,1 \frac{J}{\text{kmol} \cdot K}$), p der Luftdruck und dementsprechend p_0 der Luftdruck bei 1000 hPa.

Die Navier-Stokes'sche Bewegungsgleichung (B.8) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Beschleunigung der Luftpartikel und den auf sie wirkenden Kräften, wie Geopotentialgradientbeschleunigung, Reibung und Coriolisbeschleunigung. Wobei letztere nur eine Scheinkraft ist, welche aus der Rotation der Erde resultiert. Die Kontinuitätsgleichung (B.9) beschreibt die Massenerhaltung. Weiterhin wird die thermodynamische Energieerhaltung über den 1. Hauptsatz der Thermodyna-

mik beschrieben (B.10) . Die Gleichungen (B.8) bis (B.10) beschreiben ein nicht geschlossenes Gleichungssystem, da es Terme für Reibung und Antrieb enthält. Nun ist das Ziel, dieses Gleichungssystem weiter zu vereinfachen und in zwei Teile aufzuspalten. Der erste Teil beschreibt die Grunddynamik, welche auf stationären und adiabatischen Prozessen beruht. Relativ dazu soll der zweite Teil instabile antriebsbehaftete Störungsdynamiken beinhalten.

Zunächst soll die individuelle zeitliche Ableitung in Gleichung (B.8) über die Euler-Aufspaltung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (\text{B.12})$$

durch eine lokalzeitliche Änderung und eine entsprechende Advektion ersetzt werden. Weiterhin kann in der selben Gleichung der Reibungs-Spannungstensor in einen Reibungstensor $\underline{\underline{F}}$ und einen isotropen Anteil p (Luftdruck) aufgespalten werden:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{F}} - p\underline{\underline{E}} \quad (\text{B.13})$$

$\underline{\underline{E}}$ ist dabei der Einheitstensor. Es ergibt sich somit:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \nabla \phi + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{F}} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Dabei lässt sich der zweite Term von (B.14) über die Weber-Transformation

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{\xi} \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right), \quad (\text{B.15})$$

umformen, wobei $\vec{\xi}$ der 3D-Wirbelvektor ist. Für den wiederum gilt:

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{v}. \quad (\text{B.16})$$

Zusätzlich dazu kann Gleichung (B.14) noch über die Definitionen der Enthalpie $dh = T ds + \frac{dp}{\rho}$, des absoluten 3D-Wirbelvektors $\vec{\xi}_a = \vec{\xi} + 2\vec{\Omega}$ und der Reibungsbeschleunigung $\vec{F}_R = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{F}}$ weiter umgeformt werden. Es ergibt sich somit:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\xi}_a \times \vec{v} + \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \phi + h \right) - \vec{F}_R - T \nabla s = 0. \quad (\text{B.17})$$

Der dritte Term in (B.17) ist nichts anderes als die Bernoulli-Funktion B

$$B = \frac{\vec{v}^2}{2} + \phi + h, \quad (\text{B.18})$$

welche die spezifische Gesamtenergie der betrachteten Strömung angibt. Unter Annahme eines idealen Gases gilt $h = c_p T$, sodass sich für B nun Folgendes ergibt:

$$B = \frac{\vec{v}^2}{2} + \phi + c_p T. \quad (\text{B.19})$$

Die letzten beiden Terme stellen hierbei das Montgomery-Potential dar:

$$M = \phi + c_p T. \quad (\text{B.20})$$

Es empfiehlt sich nun, die Ertel'sche potentielle Vorticity (Ertel, 1942) einzuführen:

$$\Pi := \frac{1}{\rho} \vec{\xi}_a \cdot \nabla \Theta. \quad (\text{B.21})$$

Diese ist genau wie die potentielle Temperatur in Abwesenheit von Antrieben individuell erhalten:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} = 0. \quad (\text{B.22})$$

Nun wird die Bewegungsgleichung (B.17) mit $\times \nabla \Theta$ multipliziert, somit kann die potentielle Vorticity über die Graßmann-Identität in die Bewegungsgleichung eingeführt werden. Mit $\nabla s \times \nabla \Theta = 0$ ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla B \right) + \nabla \Theta + \rho \Pi \vec{v} - \vec{\xi}_a \cdot (\vec{v} \cdot \nabla \Theta) - \vec{F}_R \times \nabla \Theta = 0. \quad (\text{B.23})$$

Der Term $\vec{v} \cdot \nabla \Theta$ kann über die Euler-Aufspaltung (B.12) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla B \right) \times \nabla \Theta + \rho \Pi \vec{v} + \vec{J} + \vec{\xi}_a \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.24})$$

Dabei ist \vec{J} der Reibungs- und Antriebsterm:

$$\vec{J} = -\vec{\xi}_a \frac{d\Theta}{dt} - \vec{F}_R \times \nabla\Theta. \quad (\text{B.25})$$

Unter Vernachlässigung sämtlicher diabatischer Terme, wie Reibung, Kondensation, Strahlungsabsorption und so weiter, verschwindet der Antriebsterm \vec{J} . Zusätzlich soll noch Stationarität angenommen werden ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), was zu einer weiteren Vereinfachung von (B.24) führt:

$$\rho\Pi\vec{v} = \nabla\Theta \times \nabla B. \quad (\text{B.26})$$

Die Kontinuitätsgleichung (3.26) sieht im stationären Fall folgendermaßen aus:

$$\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (\text{B.27})$$

Somit geben unter Vernachlässigung aller Antriebsterme die Gleichungen (B.26) und (B.27) den Grundzustand einer stationären und adiabatischen Atmosphäre wieder. Um diese Gleichungen miteinander zu verbinden, wird Gleichung (B.26) durch Π dividiert und anschließend mit dem Nablaoperator ∇ multipliziert. Es ergibt sich:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\Pi} (\nabla\Theta \times \nabla B) \right) = \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (\text{B.28})$$

Beziehungsweise:

$$\nabla\Pi \cdot (\nabla\Theta \times \nabla B) = 0. \quad (\text{B.29})$$

Die Gleichung (B.29) steht somit für den Grundzustand der Atmosphäre, in dem das Spatprodukt der Gradienten von potentieller Vorticity, potentieller Temperatur und Bernoulli-Funktion verschwindet. Da aber (B.26) in der Regel von Null verschiedene Werte ergibt, gibt einem diese Gleichung die Möglichkeit, die Abweichungen von dem oben beschriebenen Grundzustand zu identifizieren. Eine Normierung auf die Dichte ergibt nun den von Névir (2004) beschriebenen dy-

namischen Zustandsindex (DSI).

dynamischer Zustandsindex

$$DSI := \frac{1}{\rho} \nabla \Pi \cdot (\nabla \Theta \times \nabla B).$$

(B.30)

C. Herleitungen des Grundzustandes auf Zustandsflächen

In diesem Abschnitt werden die Darstellungen des stationären Windes sowie des DSI auf den Zustandsflächen der PV, der Entropie sowie der Bernoulli-Funktion hergeleitet.

C.1. Charakterisierung der stationären Winddarstellung

Ausgangspunkt ist die algebraische Abhängigkeit zwischen B , Π und s , die sich für einen adiabatischen, reibungsfreien und stationären Grundzustand ergibt:

$$B = B(\Pi, s). \quad (\text{C.1})$$

Mit Hilfe dieser algebraischen Abhängigkeit lassen sich aus der, bereits von Schär (1993) hergeleiteten, stationären Winddarstellung

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \nabla s \times \nabla B, \quad (\text{C.2})$$

auch wieder die beiden anderen Winddarstellungen aus Kapitel 4 ableiten. Hierzu muss zunächst für (6.6) der Gradient berechnet werden und dieses Ergebnis nach ∇s umgestellt werden, wobei aufgrund der Kettenregel $\frac{\partial s}{\partial \Pi} = \frac{\partial s}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \Pi}$ weiterhin gilt:

$$\nabla s = \frac{\partial s}{\partial B} \nabla B - \frac{\partial s}{\partial \Pi} \nabla \Pi. \quad (\text{C.3})$$

Setzt man nun (6.14) beziehungsweise (6.16) in C.2 ein, so folgen die anderen beiden Winddarstellungen. Vergleicht man die Winddarstellungen (6.17) und (6.18) mit den in Kapitel 4, aus dem Energie-Wirbel-Casimir, hergeleiteten Winddarstellungen $\vec{v}_{st1} = \frac{1}{\rho}\lambda_e\nabla s \times \nabla\Pi$ beziehungsweise $\vec{v}_{st3} = \frac{1}{\rho}\lambda_x\nabla B \times \nabla\Pi$, so fällt eine Äquivalenz zwischen den Ableitungen $\frac{\partial B}{\partial\Pi}$ in (6.17) sowie $\frac{\partial s}{\partial\Pi}$ in (6.18) und den Lagrange'schen Parametern λ_e und λ_x ins Auge. Äquivalent hierzu lässt sich auch für den in Kapitel 4.2.1 eingeführten Lagrange'schen Parameter λ_s aufgrund vom $B = \lambda_s s$ folgender Zusammenhang finden:

$$\frac{\partial B}{\partial s} \sim \lambda_s, \quad (\text{C.4})$$

Diese drei stationären Winddarstellungen und die daraus folgende Form des DSI

$$DSI := \frac{1}{\rho}\nabla\Pi \cdot (\nabla\Theta \times \nabla B) \quad (\text{C.5})$$

sind koordinateninvariant. Die Lagrange'schen Größen, die in den drei Winddarstellungen und vor allem im DSI zu tragen kommen sind die potentielle Temperatur Θ beziehungsweise die Entropie s , die Bernoulli-Funktion B sowie die PV Π . Alle drei Größen sind im stationären, adiabatischen und reibungsfreien Grundzustand individuelle Erhaltungsgrößen, welche eine entscheidende Rolle in der Energie-Wirbel-Theorie einnehmen, indem sie im Grundzustand die Bedingung $B = B(s, \Pi)$ aufstellen, was gleichbedeutend mit $\Pi = \Pi(B, s)$ oder $s = s(\Pi, B)$ ist. Die Voraussetzung für die Verwendung von Π , Θ und B als Vertikalkoordinaten ist hierbei, dass $\frac{\partial\Pi}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial\Theta}{\partial z} \neq 0$ sowie $\frac{\partial B}{\partial z} \neq 0$ gilt. Diese Bedingungen werden aber auf der synoptischen Skala weitgehend erfüllt.

Abhängig von der Vertikalkoordinate nehmen auch die stationären Winddarstellungen eine andere Form an, wobei pro Fläche jeweils nur zwei Winddarstellungen möglich sind. Dies lässt sich am Beispiel von $B = B(s(\Pi))$ erklären, wo das Kreuzprodukt in $\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi}\nabla s \times \nabla B$, wegen der funktionalen Abhängigkeit von B und s verschwindet. Die anderen beiden Winddarstellungen nehmen, da in diesem Fall Π die Vertikalkoordinate ist, folgende Form an:

$\Pi = \text{const} :$	$\Theta = \text{const} :$	$\mathbf{B} = \text{const} :$
$\vec{v}_{st} = -\frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Pi} \times \nabla_h s$	$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \vec{k}_{\Theta} \times \nabla B$	$\vec{v}_{st} = -\frac{1}{\rho\Pi} \vec{k}_B \times \nabla s$
$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial s}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Pi} \times \nabla_h B$	$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Theta} \times \nabla \Pi$	$\vec{v}_{st} = -\frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial s}{\partial \Pi} \vec{k}_B \times \nabla \Pi$
$DSI_{\Pi} :=$ $\frac{1}{\rho} \vec{k}_{\Pi} \cdot (\nabla_h B \times \nabla_h s)$	$DSI_{\Theta} :=$ $\frac{1}{\rho} \vec{k}_{\Theta} \cdot (\nabla_h \Pi \times \nabla_h B)$	$DSI_B :=$ $\frac{1}{\rho} \vec{k}_B \cdot (\nabla_h s \times \nabla_h \Pi)$

Tabelle C.1.: Diese Tabelle zeigt eine Übersicht der Darstellung des stationären Windes und des DSI auf PV-, Theta- und Bernoulli-Flächen.

$\Pi = \text{const} :$

$$\vec{v}_{st} = -\frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Pi} \times \nabla_h s, \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial s}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Pi} \times \nabla_h B. \quad (\text{C.7})$$

Für ein θ -System folgt dann:

$\Theta = \text{const} :$

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \vec{k}_{\Theta} \times \nabla B, \quad (\text{C.8})$$

$$\vec{v}_{st} = \frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Theta} \times \nabla \Pi. \quad (\text{C.9})$$

Letztendlich folgt für ein System auf konstanten Flächen der Bernoullifunktion:

$\mathbf{B} = \text{const} :$

$$\vec{v}_{st} = -\frac{1}{\rho\Pi} \vec{k}_B \times \nabla s, \quad (\text{C.10})$$

$$\vec{v}_{st} = -\frac{1}{\rho\Pi} \frac{\partial s}{\partial \Pi} \vec{k}_B \times \nabla \Pi. \quad (\text{C.11})$$

C.1.1. Charakterisierung des DSI

Über die Winddarstellungen im jeweiligen System lässt sich auch für jedes System der DSI ableiten. Hierzu muss die jeweilige Gleichung mit ρ multipliziert und anschließend die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot (\rho\vec{v})$ eingearbeitet werden.

$\Pi = \text{const}$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho \Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Pi} \times \nabla_h s \right) = 0, \quad \text{da } (\nabla \times \nabla_h s) = 0, \\ \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho \Pi} \frac{\partial s}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Pi} \times \nabla_h B \right) = 0, \quad \text{da } (\nabla \times \nabla_h B) = 0.\end{aligned}$$

Da für den Grundzustand auf der Π -Fläche $B = B(s(\Pi))$ gilt, gilt auch:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \vec{k}_{\Pi} \cdot (\nabla_h B \times \nabla_h s) = 0 \\ \Rightarrow DSI_{\Pi} &:= \frac{1}{\rho} \vec{k}_{\Pi} \cdot (\nabla_h B \times \nabla_h s)\end{aligned}\tag{C.12}$$

Für die anderen Flächen ist die Herleitung des DSI etwas direkter:

$\Theta = \text{const}$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho \Pi} \vec{k}_{\Theta} \times \nabla B \right) = \vec{k}_{\Theta} \cdot (\nabla \Pi \times \nabla B) = 0 \\ \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho \Pi} \frac{\partial B}{\partial \Pi} \vec{k}_{\Theta} \times \nabla \Pi \right) = 0, \quad \text{da } \nabla \Pi \times \nabla \Pi = 0 \\ \Rightarrow DSI_{\Theta} &:= \frac{1}{\rho} \vec{k}_{\Theta} \cdot (\nabla_h \Pi \times \nabla_h B)\end{aligned}\tag{C.13}$$

$B = \text{const}$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho \Pi} \vec{k}_B \times \nabla s \right) = -\vec{k}_B \cdot (\nabla \Pi \times \nabla s) = 0 \\ \nabla \cdot (\rho \vec{v}_{st}) &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho \Pi} \frac{\partial s}{\partial \Pi} \vec{k}_B \times \nabla \Pi \right) = 0, \quad \text{da } \nabla \Pi \times \nabla \Pi = 0 \\ \Rightarrow DSI_B &:= \frac{1}{\rho} \vec{k}_B \cdot (\nabla_h s \times \nabla_h \Pi)\end{aligned}\tag{C.14}$$

Auch auf den B -, Θ - und Π -Flächen ist der DSI eine Größe, um die Abweichung vom Grundzustand zu diagnostizieren. Denn für den Grundzustand gilt $B = B(s(\Pi))$, $\Pi = \Pi(B(s))$ oder $s = s(\Pi(B))$, was dazu führt, dass die einzelnen Kreuzprodukte in (C.12), (C.13) und (C.14) verschwinden und den DSI gleich Null werden lassen. Die Darstellung des stationären Windes und des DSI auf den jeweiligen Zustandsflächen sind hierbei in Tabelle zusammenfassend C.1 aufgelistet.

Literaturverzeichnis

- H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transact. on Autom. Contr.*, 19:716–723, 1974.
- V. L. Anderson und R. A. McLean. *Design of Experiments: A Realistic Approach*. CRC Press, 1974.
- M. A. Balmaseda, K. Mogensen, und A. T. Weaver. Evaluation of the ecmwf ocean reanalysis system oras4. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 139(674):1132–1161, 2013.
- J. J. Barsugli und D. S. Battisti. The basic effects of atmosphere- ocean thermal coupling on middle-latitude variability. *J. Atmosp. Sc.*, 55:477–494, 1998.
- J. Bjerknes. Atlantic air-sea interaction. advances in geophysics. *Acad. Pr.*, 10: 1–2, 1964.
- V. Bjerknes. Das problem der wettervorhersage, betrachtet vom standpunkte der mechanik und der physik. *Meteorol. Z.*, 21:1–7, 1904.
- C. Cassou, C. Deser, und M. A. Alexander. Investigating the impact of reemerging sea surface temperature anomalies on the winter atmospheric circulation over the north atlantic. *J. Clim.*, 20:3510–3526, 2007.
- D. R. Cayan. Latent and sensible heat-flux anomalies over the northern oceans—driving the sea-surface temperature. *J. Phys. Oceanogr.*, 22:859–881, 1992.
- J. G. Charney. The dynamics of long waves in baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, 4:135–163, 1947.

- A. Claußnitzer und P. Névir. Analysis of quantitative precipitation forecasts using the dynamic state index. *Atmos. Res.*, 94(4):694–703, 2009.
- A. Claußnitzer, P. Nevir, I. Langer, und U. Reimer, E. ; Cubasch. Scale-dependent analyses of precipitation forecasts and cloud properties using the dynamic state index. *Meteorol. Z.*, 17:813–825, 2008.
- A. Claußnitzer, I. Langer, P. Nevir, E. Reimer, und U. Cubasch. Process-oriented statistical-dynamical evaluation of lm precipitation forecasts. *Adv. Geosc.*, 16: 33–41, 2008b.
- A. Czaja und C. Frankignoul. Observed impact of atlantic sst on the north atlantic oscillation. *J. Clim.*, 15:606–623, 2002.
- A. Czaja, A. W. Robertson, und T. Huck. *The Role of Atlantic Ocean-Atmosphere Coupling in Affecting North Atlantic Oscillation Variability*. The North Atlantic Oscillation: Climatic Significance and Environmental Impact, 2003.
- D. P. Dee, S. M. Uppala, A. J. Simmons, P. Berrisford, P. Poli, S. Kobayashi, U. Andrae, M. A. Balmaseda, G. Balsamo, P. Bauer, P. Bechtold, A. C. M. Beljaars, L. van de Berg, J. Bidlot, R. Dragani M. Fuentes A.J. Geer L. Haimberger S. B. Healy H. Hersbach E. V. Holm L. Isaksen P. Kallberg M. Koehler M. Matricardi A. P. McNally B. M. Monge-Sanz J. J. Morcrette B. K. Park C. Peubey P. de Rosnay C. Tavolato J. . N. Thepaut N. Bormann, C. Delsol, und F. Vitart. The era-interim reanalysis: configuration and performance of the data assimilation system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc*, 137(656):553–597, 2011. doi: doi:10.1002/qj.828.
- T. L. Delworth, S. MManabe, und R. J. Stouffer. Interdecadal variations of the thermohaline circulation in a coupled ocean– atmosphere model. *J. Clim.*, 6: 1993–2001, 1993.
- C. Deser und M. L. Blackmon. Surface climate variations over the north atlantic ocean during winter. *J. Clim.*, 6:1743–1753, 1993.
- M. Dima und G. Lohmann. A hemispheric mechanism for t he atlantic multide-

- cadal oscillation. *J. of Clim.*, 20:2706–2719, 2007.
- E. T. Eady. Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1:33–52, 1949.
- ECMWF. IFS documentation cy38r1. Technical report, ECMWF, 2013. URL <http://www.ecmwf.int/research/ifsdocs/CY38r1>.
- C. Eden und T. Jung. North atlantic interdecadal variability. *J. Clim.*, 14:676–691, 2001.
- D.B. Enfield, A.M. Mestas-Nunez, und P.J. Trimble. The atlantic multidecadal oscillation and its relationship to rainfall and river flows in the continental u.s. *Geophys. Res. Lett.*, 28:2077–2080, 2001.
- H. Ertel. Ein neuer hydrodynamischer wirbelsatz. *Meteorol. Z.*, 59 (1942):271–281, 1942.
- F. M. Exner. Über eine erste annäherung zur vorausberechnung synoptischer wetterkarten. *Meteorol. Z.*, 25 (1908):57–67, 1908.
- C. Frankignoul und E. Kestenare. Observed atlantic sst anomaly impact on the nao. *J. Clim.*, 18:4089–4094, 2005. doi: doi:10.1175/JCLI3523.1.
- C. Franzke, S. Lee, und S.B. Feldstein. Is the north atlantic oscillation a breaking wave? *J. Atmos. Sci.*, 61:145–160, 2004.
- C. Franzke, R. Blender, K. Fraedrich, und F. Lunkeit. Dynamische antriebsmechanismen der nao. *promet*, 34, H3/4:79–88, 2008.
- A. Gassmann. Deviations from a general nonlinear wind balance: Local and zonal-mean perspectives. *Meteorol. Z.*, 23, No.5:467–481, 2014.
- G. Gastineau und C. Frankignoul. Cold-season atmospheric response to the natural variability of the atlantic meridional overturning circulation. *Clim. Dynam.*, 39: 37–57, 2012.
- L. Goddard, A. Kumar, A. Solomon, D. Smith, und W. Merry [U+FB01]eld C. Deser S.J. Mason B.P. Kirtman R. Msadek R. Sutton E. Hawkins T. Fricker G.

- Hegerl C.A.T. Ferro D.B. Stephenson G.A. Meehl T. Stockdale R. Burgman-A.M. Greene Y. Kushnir M. Newman J. Carton I. Fukumori T. Delworth. G. Boer and P. Gonzalez, V. Kharin. A verification framework for interannual-to-decadal predictions experiments. *Clim. Dyn.*, 40:245–272, 2013.
- R. J. Greatbatch und T. Jung. Local versus tropical heating and winter north atlantic oscillation. *J. Clim.*, 20:2058–2075, 2007.
- E. J. Highwood. *The Tropopause*. PhD thesis, Dep. of Meteorology, University of Reading., 1997.
- J. R. Holton, P. H. Haynes, M. E. McIntyre, A. R. Douglass, R. B. Rood, und L. Pfister. Stratosphere-troposphere exchange. *Rev. geoph.*, 33(4):403–439, 1995.
- B. J. Hoskins, M. E. McIntyre, und A. W. Robertson. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 111:877–946, 1985.
- J. W. Hurrell. Decadal trends in the north-atlantic- oscillation regional temperatures and precipitation. *Science*, 269:676–679, 1995.
- J. W. Hurrell und H. van Loon. Decadal variations in climate associated with the north atlantic oscillation. *Clim. Change*, 36:301–326, 1997.
- J. W. Hurrell, Kushnir Y., Ottersen G., und Visbeck M. *An overview of the North Atlantic Oscillation*. American Geophysical Union, Washington, DC, 2003.
- T. Jung, F. Kucharski, M. Visbeck, und G. Krahnemann. Wechselwirkung der nao mit dem ozean und meereis interaction of the nao with the ocean and sea ice. *promet*, Jahrgang 34, Nr 3/4:113–121, 2008.
- J. H. Jungclaus, Haak H., Latif M., und Mikolajewicz U. Arctic-north atlantic interactions and multidecadal variability of the meridional overturning circulation. *J. Clim.*, 18:4013–4031., 2005.
- J. H. Jungclaus, N. Fischer, H. Haak, K. Lohmann, J. Marotzke, D. Mateiand U. Miko-lajewicz, D. Notz, und J. S. von Storch. Characteristics of the ocean simulations in the max planck institute ocean model (mpiom) the ocean component

- of the mpi-earth system model. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, 5(2):422–446, 2013.
- M. Kalnay, E., R. Kanamitsu, W. Kistler, D. Collins, L. Deaven, M. Gandin, S. Iredell, G. Saha, J. White, Y. Woollen, M. Zhu, W. Chelliah, W. Ebisuza-ki, J. Higgins, K. C. Janowiak, C. Mo, J. Ropelewski, A. Wang, R. Leetmaa, R. Reynolds, Jenne, und D. Joseph. The ncep/ncar 40-year reanalysis project. *Amer. Me- teor. Soc.*, 77(3):437–471, 1996.
- M. Kaplan, A., Y. Cane, A. Kushnir, M. Clement, Blumenthal, und B. Rajagopa- lan. Analyses of global sea surface temperature 1856-1991. *J. Geoph. Res.*, 103, 18:567–589,, 1998.
- R. A. Kerr. A north atlantic climate pacemaker for the centuries. *Science*, 288: 1984–1986, 2000.
- V. V. Kharin, G. J. Boer, W. J. Merryfield, J. F. Scinocca, und W.-S. Lee. Sta- tistical adjustment of decadal predictions in a changing climate. *Geoph. Res. Lett.*, 39.19:L19705, 2012.
- J. R. Knight, C. K. Folland, und A. A. Scaife. Climate impacts of the atlantic multidecadal oscillation. *Geoph. Res. Lett.*, 33:L17706, 2006.
- A. N. Kolmogorov. Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large reynolds numbers. *Doklady Acad Sci. USSR*, 31:301–305, 1941.
- T. Kruschke, H. W. Rust, C. Kadow, W. A. Müller, H. Pohlmann, G. C. Lecke- busch, und U. Ulbrich. Probabilistic evaluation of decadal prediction skill regarding northern hemisphere winter storms. *Meteorol. Z.*, 01:–, 2015. doi: 10.1127/metz/2015/0641.
- F. Kucharski und F. Molteni. On linearities in a forced north atlantic oscillation. *Clim. Dyn.*, 21:677–687, 2003.
- Y. Kushnir. Interdecadal variations in the north atlantic sea temperature and associated atmospheric conditions. *J. Clim.*, 7:141–157, 1994.
- Y. Kushnir, Robinson W. A., Chang P., und A. W. Robertson. The physical basis

- for predicting atlantic sector seasonal-to-interannual climate variability. *J. Clim.*, 19:5949–5970, 2006.
- Y. O. Kwon, M. A. Alexander, N. A. Bond, C. Frankignoul, H. Nakamura, B. Qiu, und L. Thompson. Role of the gulf stream and kuroshio-oyashio systems in large-scale atmosphere-ocean interaction: a review. *J. Clim.*, 23:3249–3281, 2010.
- A. Köhl. Evaluation of the gecco2 ocean synthesis: transports of volume, heat and freshwater in the atlantic. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 141(686):166–181, 2015.
- M. Latif. Dynamics of interdecadal variability in coupled ocean-atmosphere models. *J. Clim.*, 11:602–624, 1998.
- M. Latif, E. Roeckner, M. Botzet, M. Esch, H. Haak, S. Hagemann, J. Jungclauss, S. Legutke, S. Marsland, U. Mikolajewicz, und J. Mitchell. Reconstructing, monitoring, and predicting multidecadal-scale changes in the north atlantic thermohaline circulation with sea surface temperature. *J. Clim.*, 7:1605–1614, 2004.
- G. C. Leckebusch, A. Kapala, H. Maechel, J. G. Pinto, und M. Reyers. Indices der nordatlantischen und arktischen oszillation. *promet*, Jahrgang 34, Nr 3/4: 95–100, 2008.
- J. Luterbacher. Historische entwicklung der nao-forschung. *promet*, 34, H.3/4: 79–88, 2008.
- M. E. Mann, R. S. Bradley, und M. K. Hughes. Global-scale temperature patterns and climate forcing over the past six centuries. *Nature*, 392:779–787, 1998.
- P. J. Morrison und J. M. Greene. Noncanonical hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 45 (1980): 790–794, 1980.
- Y. Nambu. Generalized hamiltonian dynamics. *Phys. Rev.*, D, 7,:2403–2412, 1973.
- P. Névir. *Die Hamiltonsche Theorie der Hydrodynamik und ihre Anwendungen in der großräumigen Dynamik der Atmosphäre*. PhD thesis, Freie Universität

- Berlin, 1993.
- P. Névir. *Die Nambu-Felddarstellungen der Hydro-Thermodynamik und ihre Bedeutung für die dynamische Meteorologie*. PhD thesis, Habilitationsschrift, Freie Universität Berlin, 1998.
- P. Névir. Ertel’s vorticity theorems, the particle relabelling symmetry and the energy-vorticity theory of fluid mechanics. *Meteorol. Z.*, 13, Nr. 6:485–498, 2004.
- P. Névir und R. Blender. A nambu representation of incompressible hydodynamics using helicity and enstrophy. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:L1189–L1193, 1993.
- A. Pasternack, J. Bhend, M. A. Liniger, H. W. Rust, W. A. Müller, und U. Ulbrich. Parametric decadal climate forecast recalibration (deforest 1.0). *Geoscientific Model Development*, 11(1):351, 2018.
- J. L. Pelly. *The predictability of Atmospheric Blocking*. PhD thesis, Dep. of Meteorology, University of Reading., 2001.
- S. Peng, W. A. Robinson, und S. Li. North atlantic sst forcing of the nao and relationships with intrinsic hemispheric variability. *Geophys. Res. Lett.*, 29:117–1–117–4, 2002.
- O. Petterson. Über die beziehungen zwischen hydro-graphischen und meteorologischen ph anomenen. *Meteorol. Z*, 13:285–321, 1896.
- J. G. Pinto und C. C. Raible. Past and recent changes in the north atlantic oscillation. *WIREs Clim Change*, 150:79–90, 2011. doi: 10.1002/wcc.150.
- J. G. Pinto, S. Zacharias, A. H. Fink, G.C. Leckebusch, und Ulbrich U. Factors contributing to the development of extreme north atlantic cyclones and their relationship with the nao. *Clim. Dyn.*, 31:p 739, 2008. doi: 10.1007/s00382-008-0525-0.
- P. Poli, H. Hersbach, D. Tan, D. Dee, J.-N. Th epaut, A. Simmons, C. Peubey, P. Laloyaux, T. Komori, P. Berrisford, R. Dragani, Y. Tr emolet, E. Holm, M. Bonavita, L. Isaksen, und M. Fisher. The data assimilation system and

- initial performance evaluation of the ecmwf pilot reanalysis of the 20th-century assimilating surface observations only (era-20c). *ERA Report Series*, 14:59 pp, 2013.
- D. Renggli. *Seasonal predictability of wintertime climate over the North Atlantic and Europe*. PhD thesis, Freie Universität Berlin., 2011.
- C. Schär. A generalization fo bernoulli’s theorem. *J. Atmos. Sci*, 50:1437–1443, 1993.
- T. Selz. *Der Dynamische Zustandsindex - Berechnung aus Reanalysedaten und Anwendung auf das El Niño-Phänomen*. PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2010.
- M. Stevens, B., M. Giorgetta, T. Esch, T. Mauritsen, S. Crueger, M. Rast, H. Salzmann, J. Schmidt, K. Bader, R. Block, I. Brokopf, S. Fast, L. Kinne, U. Kornblueh, R. Lohmann, T. Pincus, Reichler, und E. Roeckner. Atmospheric component of the mpi-m earth system model: Echem6. *J. Adv. Model. Earth Syst*, 5(2):146–172, 2013. doi: 10.1002/jame.20015.
- R. T. Sutton und D. L. R. Hodson. Atlantic ocean forcing of north american and european summer climate. *Science*, 309:115–118, 2005.
- R. T. Sutton, W. A. Norton, und S. P. Jewson. The north atlantic oscillation - what role for the ocean? *Atm. Sci. Lett*, 1:89–100, 2001. doi: 10.1006/asle.2000.0021.
- C. D. Thorncroft, B.J. Hoskins, und M.E. McIntyre. Two paradigms of baroclinic wave life-cycle behavior. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 119:17–55, 1993.
- A. Timmermann, M. Latif, R. Voss, und A. Groetzner. Northern hemisphere interdecadal variability: a coupled air-sea mode. *J. Clim.*, 11:1906–1931, 1998.
- K. E. Trenberth. Some effects of finite sample size and persistence on meteorological statistics. part i: Autocorrelation. *Mon. Wea. Rev*, 112:2359–2368, 1984.
- U. Ulbrich, A. H. Fink, M. Klawa, und J. G. Pinto. Three extreme storms over europe in december 1999. *Weather*, 56:70–80, 2001.

- S. Uppala, P. Kallberg, A. Simmons, U. Andrae, V. da Costa Bechtold, M. Fiorino, J. Gibson, J. Haseler, A. Hernandez, G. Kelly, X. Li, K. Onogi, S. Saarinen, N. Sokka, R. Allan, E. Andersson, K. Arpe, M. Balmaseda, A. Beljaars, L. van de Berg, J. Bidlot, N. Bormann, S. Caires, F. Chevallier, A. Dethof, M. Dragosavac, M. Fisher, M. Fuentes, S. Hagemann, E. Holm, B. Hoskins, L. Isaksen, P. Janssen, R. Jenne, A. McNally, J.-F. Mahfouf, J.-J. Morcrette, N. Rayner, R. Saunders, P. Simon, A. Sterl, K. Trenberth, A. Untch, D. Vasiljevic, P. Viterbo, und J. Woollen. The era-40 re-analysis. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 131: 2961–3012, 2005.
- M. Vellinga und P. Wu. Low-latitude freshwater influence on centennial variability of the atlantic thermohaline circulation. *J. Clim.*, 17:4498–4511, 2004.
- H. von Storch und F. W. Zwiers. *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge University Press., 2001.
- M. Watanabe und M. Kimoto. Ocean atmosphere thermal coupling in the north atlantic: a positive feedback. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 126:3343–3369, 2000b.
- T. Weber und P. Névir. Storm tracks and cyclone development using the theoretical concept of the dynamic state index (dsi). *Tellus A*, 60:1–10, 2007.
- R. Zhang und T. L. Delworth. Impact of atlantic multidecadal oscillations on india/sahel rainfall and atlantic hurricanes. *Geophys. Res. Lett.*, 33:L17712, 2006.
- F. W. Zwiers und H. von Storch. Taking serial correlation into account in tests of the mean. *J. Clim.*, 8:336–351, 1995.

Veröffentlichungen

Im Rahmen von Teil III dieser Arbeit gab es folgende Veröffentlichung:

- Ulbrich, Uwe; Pasternack, Alexander; Richling, Andy; Höschel, Ines; Grieger, Jens; Landrock, Franz; Nevir, Peter; Redl, Robert; Fink, Andreas; Pinto, Joaquim G.: Verbundvorhaben MiKlip-VESPA: Variabilität von Extremereignissen, ihre Ursachen und ihre Vorhersagbarkeit auf dekadischen Zeitskalen in Ensembles von Klimasimulationen : Verbundschlussbericht, 2016
- Pasternack, A., Bhend, J., Liniger, M. A., Rust, H. W., Müller, W. A., and Ulbrich, U.: Parametric Decadal Climate Forecast Recalibration (DeFoReSt 1.0), *Geosci. Model Dev. Discuss.*, <https://doi.org/10.5194/gmd-2017-162>, 2018.

Symbolverzeichnis

A_{xy}	Amplitudenspektrum
B	Bernoulli-Funktion
b	Eigenwert der Entropie
C	Casimirfunktion
\mathcal{C}_f	allgemeines Casimir-Funktional
\mathcal{C}_{f_s}	konkrete Form des allgemeinen Casimir-Funktional
c_p	spezifische Wärmekapazität (isobar)
D	Dissipationsfunktion
\mathcal{E}_p	Ertel'sche potentielle Enstrophie
$\underline{\underline{E}}$	Einheitstensor
E_{kin}	kinetische Energie
e	innere Energie
F	beliebige Funktion
\mathcal{F}	beliebiges Funktional
$\underline{\underline{F}}$	Spannungstensor
\vec{F}_R	Reibungsbeschleunigung
G	freie Enthalpie
G_i	beliebige Hamiltonfunktion
g	Erdbeschleunigung
H_i	beliebige Hamiltonfunktion
\mathcal{H}	Funktional d. Gesamtenergie
h	Enthalpie
h_a	Helizitäts-Funktional
\vec{J}	Reibungs- und Antriebsterm
k_m	Massenkonstante

k_s	Entropiekonstante
L_c	charakteristische Längenskala
\mathcal{M}	Massen-Funktional
\mathcal{N}	Energie-Casimir-Funktional
N_{eq}	äquivalente Stichprobengröße
$\underline{\underline{P}}$	Poissontensor
\mathcal{S}	Entropie-Funktional
R	universelle Gaskonstante
s	Entropie
T	Temperatur
T_c	charakteristische Zeitskala
$\underline{\underline{T}}$	Reibungs-Spannungstensor
U_c	charakteristische Geschwindigkeit
V	Phasenraumvolumen
v	massenspezifisches Volumen
\vec{V}	3D-Windvektor
Γ_{xy}	Kreuzspektrum
γ_{xy}	Kreuzkovarianzfunktion
ϵ	Energiedissipation
Θ	potentielle Temperatur
λ_f	Lagrange'scher Parameter
λ_g	Lagrange'scher Parameter
$\vec{\xi}_a$	absoluter Wirbelvektor
Π	potentielle Vorticity (PV)
ρ	Dichte
σ	Entropie-Dichte
Φ_{xy}	Phasenspektrum
ϕ	Geopotential
ψ	beliebige Stromfunktion
$\vec{\Omega}$	Winkelgeschwindigkeit der Erde

Abkürzungsverzeichnis

AIC	Akaike Information Criterion
AMOC	Atlantic Meridional Overturning Circulation
AMV	Atlantische Multidekadische Variabilität
AR	Autoregressiver Prozess
DJF	Zeitreihen der Monate Dezember, Januar und Februar
DSI	Dynamischer Zustandsindex (engl.: Dynamic State Index, DSI)
ECMWF	European Center for Medium Range Weather Forecasts
ENSO	El Niño/Southern Oscillation
ESRL	Earth System Research Laboratory
GECCO2	German contribution of the Estimating the Circulation and Climate of the Ocean project
MEZ	mitteleuropäische Zeit
MiKlip	Ein nationales Forschungsprojekt zu Mittelfristigen Klimaprognosen
MPI	Max Planck Institut
MPI-ESM-LR	Max-Planck Institute Earth System Model Low-Resolution
MPIOM	Max-Planck Institute Ocean Model
MSE	Mean Square Error
MSESS	Mean Square Error Skill Score
NAO	Nordatlantische Oszillation
NCAR	National Center for Atmospheric Research
NCEP	National Centers for Environmental Prediction
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration
PV	Potentielle Vorticity
PVU	potential vorticity units
SST	Meeresoberflächentemperatur (engl.: sea surface temperature)

THC	Thermohaline Zirkulation
UTC	Coordinated Universal Time

Abbildungsverzeichnis

3.1. Schaubild über die Hierarchie der Casimir-Funktionale	28
4.1. Schaubild über den Zusammenhang zwischen dem Durchmesser und der Fließgeschwindigkeit einer Röhre	34
5.1. Π , B und DSI (330 K-Fläche)	57
5.2. Zusammenhang zwischen der Systementwicklung und dem DSI	58
5.3. Bodenanalyse vom 26.12.1999 0 UTC	60
5.4. DSI, ΔT und Niederschlag (26.12.1999 12 UTC)	62
5.5. Schema zur Bestimmung der stationären Temperatur und Windfelder	64
6.1. Vertikaler Schnitt der Π -, Θ - sowie B -Flächen	71
6.2. Schaubild über die Richtung von $\nabla\Theta$, ∇B und $\nabla\Pi$	73
8.1. NAO-Index von 1864 bis 2017	85
8.2. AMV-Index von 1864 bis 2017	86
8.3. Tripolares SST-Muster (in K), das mit NAO-Anomalien einhergeht	87
8.4. Composit-Differenz der SST-Felder und der Bodendruck-Felder während positiver und negativer AMV-Phasen	89
8.5. AMV-Index aus den Kaplan SSTs und NAO nach Hurrell (1995)	91
8.6. Spektrale Dichte der trendbereinigten AMV und NAO-Indizes	92
8.7. Kreuzkorrelation zwischen der AMV und der NAO	95
8.8. Quadratische Kohärenz zwischen der AMV und NAO	96
8.9. Exemplarischer Verlauf von zwei Zeitreihen mit jeweils einer Periode von 25	98
9.1. Wintermittel (DJF) des DSI	102

9.2. AMV- und NAO-Index aus ERA 20c	104
9.3. Spektrale Dichte der trendbereinigten AMV und NAO Indizes . . .	105
9.4. Kreuzkorrelation zwischen der AMV und der NAO für ERA 20c . .	106
9.5. Quadratische Kohärenz zwischen der AMV und NAO	107
9.6. Quadratische Kohärenz zwischen der AMV und NAO	109
9.7. Mittel des DSI während positiver und negativer NAO-Phasen . . .	110
9.8. Korrelation des DSI mit dem NAO-Index für ERA 20c	111
9.9. Kreuzkorrelation zwischen dem NAO-Index und dem über Europa gemittelten DSI	112
9.10. Quadratische Kohärenz zwischen dem über Europa gemittelten DSI (750 hPa) und der NAO	113
9.11. Korrelation des DSI-Felds (250 hPa) mit dem NAO-Index für ERA 20c	114
9.12. Kreuzkorrelation zwischen dem NAO-Index und dem über Europa gemittelten DSI für 250 hPa	115
9.13. Korrelation des DSI-Felds in 750 hPa und 250 hPa mit dem AMV- Index für ERA 20c	116
9.14. Kreuzkorrelation zwischen dem AMV-Index und dem über Europa gemittelten DSI für 750 hPa und für 250 hPa	117
9.15. Quadratische Kohärenz zwischen dem über Europa gemittelten DSI für 250 hPa und der AMV für ERA 20c.	118
9.16. Kreuzkorrelation zwischen dem über Europa gemittelten DSI (250 hPa-Fläche) und dem Druck (2 PVU-Fläche)	119
9.17. Korrelation des über Europa gemittelten DSI zwischen allen ande- ren Druckleveln	120
9.18. Korrelation der NAO mit dem Druckfeld auf der 2 PVU-Fläche und dem Zonalwind (250 hPa)	122
9.19. Kreuzkorrelation zwischen dem NAO-Index/AMV-Index und dem über Europa gemittelten Druck auf der 2 PVU-Fläche.	123
9.20. Quadratische Kohärenz zwischen dem über Europa gemittelten Druck- feld auf der 2 PVU-Fläche und der AMV für ERA 20c	124

9.21. Korrelation der AMV mit dem Druckfeld/Geopotential auf der 2 PVU-Fläche/250 hPa Fläche	124
9.22. Schaubild über die zeitliche und räumliche Auswirkung der AMV- NAO-Kopplung auf den DSI	126
10.1. Scherenmodell des DSI nach Selz (2010)	132
10.2. Übersicht über die Lage, der verwendeten Gebietsmittel	134
10.3. Vertikal integrierter DSI (ERA-Interim) in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala	137
10.4. Vertikal integrierte Ertel'sche potentielle Vorticity/Bernoulli-Funktion (ERA-Interim) in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala	138
10.5. Korrelationskoeffizient zwischen dem vertikal integrierten DSI und dem Gesamtniederschlag in ERA-Interim in Abhängigkeit von der charakteristischen Zeitskala.	139
10.6. Zeitlicher Verlauf des DSI in 500 hPa für ERA-Interim in verschie- denen horizontalen und vertikalen Auflösungen.	140
10.7. DSI in 500 hPa und Niederschlag für Baseline0-LR, Baseline1-LR sowie Prototype für die lead-years 1 bis 9	141
10.8. MSESS des DSI (500 hPa)/Niederschlags für Baseline0-LR, Baseline1- LR sowie Prototype für die lead-years 1 bis 10	144
10.9. Zeitlicher Verlauf des DSI und des Niederschlags ohne und mit Drift- korrektur	145
10.10 MSESS des Niederschlags nach der Driftkorrektur	146
10.11 MSESS des DSI auf verschiedenen Druckleveln nach der Driftkorrektur	147
10.12 MSESS des Niederschlags nach der Driftkorrektur (für B1 und Pro- totype)	148
10.13 MSESS des DSI auf verschiedenen Druckleveln nach der Driftkor- rektur (für B1 und Prototype)	149

Tabellenverzeichnis

3.1. Änderungen, die sich beim Übergang von einer Teilchen- zu einer Felddarstellung ergeben	19
3.2. Übersicht über die Funktionalableitungen nach \vec{v}, ρ und σ	22
3.3. Übersicht über die Funktionalableitungen nach \vec{v}, ρ und s	27
3.4. Übersicht der in dieser Arbeit beschriebenen Casimir-Funktionale und den daraus resultierenden Zuständen	30
4.1. Übersicht der in dieser Arbeit beschriebenen Casimir-Funktionale und den daraus resultierenden Zuständen	38
4.2. Übersicht über die verschiedenen Formen des Bernoulli-Theorems	47
10.1. Übersicht über die Initialisierungsmethoden der, in dieser Arbeit verwendeten, dekadischen Hindcasts	131
10.2. Zusammenhang zwischen Gitterauflösungen und den jeweiligen charakteristischen Längen- sowie Zeitskalen	135
C.1. Übersicht der Darstellung des stationären Windes und des DSI auf PV-, Theta- und Bernoulli-Flächen	181

Danksagung

Zunächst bedanke ich mich im besonderen Maße bei Herrn PD Dr. Peter Névir für die Betreuung dieser Arbeit. Außerdem möchte ich mich dafür bedanken, dass er für fachlichen Rat und wertvolle Hinweise jederzeit zur Verfügung stand und dass er mir in zahlreichen fruchtbaren Diskussionen eine neue Sichtweise auf die theoretische Meteorologie eröffnete. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Henning Rust für die Zweitbegutachtung dieser Arbeit und seine Hilfe hierbei bedanken.

Ermöglicht wurden die vorliegenden Arbeiten durch finanzielle Förderung seitens des Bundesministeriums für Bildung und Forschung über das Forschungsprogramm MiKlip.

Darüberhinaus möchte ich mich bei Annette Müller und Andy Richling für das Korrekturlesen und ihre wertvollen Anmerkungen bedanken.

Des weiteren möchte ich mich bei meinen Eltern für das Korrekturlesen und ihre allgemeine Unterstützung während meiner gesamten Promotionszeit bedanken. Ein großes Dankeschön geht auch an Tabea Balcke für ihre Unterstützung und ihren Beistand.

Danke!

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendete Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Ort, Datum

Unterschrift