

Rolf Derenbach

Ludwig van B. und der Dreisatz: Eine musikalische Einführung in die Rechen- und Tonkunst (ohne die lästigen Details)



7	P	1	2	3	4	M	N	&	9	8	6	E			
F	I	C	A	B	G	H		G ₂	H ₂	+	D				
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	b	b	b	
2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	8	9	10	
													2	2	2
													4	5	5
													10	6	7
													7	8	9
													7	8	9

Passacalles. Prim^a. Diferen^a Segunda Diferencia. Terc.

Die Bilder sind aus einem spanischen Lehrbuch über die Gitarre entnommen. Musik, Zahlen, Töne und Tanz. Wir wollen jetzt mal sehen, was sie miteinander zu tun haben.

Rolf Derenbach

Ludwig van B. und der Dreisatz: Eine musikalische Einführung in die Rechen- und Tonkunst

Publikation der Universitätsbibliothek der Freien Universität Berlin

Bonn, im August 2017

Dr. Rolf Derenbach
Lahnweg 24
53129 Bonn

ISBN 978-3-944675-22-0 (print)
ISBN 978-3-96110-042-2 (online)

Eine der riesigsten Tatsachen der Geschichte des Geistes war die Entstehung der Mathematik.

Aus "Weltgeschichtliche Betrachtungen" von Jacob Burckhardt

„Sie wissen unsereins rechnet und rechnet und kommt aus der Regula-de-tri gar nicht mehr heraus, aus dem alten Ansatz: Wenn das und das, so viel bringt, wie viel bringt das und das“.

Aus "Frau Jenny Treibel" von Theodor Fontane

Man sieht die Höhe, die der Künstler erreicht hat, nicht lebhafter, als wenn man versucht, ihm einige Stufen nach zu klettern.

Johann Wolfgang von Goethe

An die Musik

Du holde Kunst, in wieviel grauen Stunden,
Wo mich des Lebens wilder Kreis umstrickt,
Hast Du mein Herz zu warmer Lieb entzunden,
Hast mich in eine bessre Welt entrückt!

Oft hat ein Seufzer, deiner Harf' entflossen,
Ein süßer, heiliger Akkord von dir
Den Himmel beßrer Zeiten mir erschlossen,
Du holde Kunst, ich danke dir dafür!

Von Franz von Schober vertont von Franz Schubert

Widmung: für Hannah (Klavier) und Jaspar (Trompete)

Inhaltsverzeichnis

VORWORT	5
DIE RECHENKUNST	10
Ludwigs Kaffeegeschmack	10
Wie viele Tassen Kaffee trank Ludwig am Tag?	11
Messen und Vergleichen	14
Das Anordnen in Tabellenform ist wichtig!	15
Ludwig hat eine sehr gute Idee	16
Vorsorgen ist besser als nachsorgen	17
Aufteilen und Haushalten	18
Nie im Übermaß! - die Zeit	19
Ludwig als Gastgeber	22
Die Haushälterin kauft ein	24
Zahlen, wie man sie braucht!	25
Ludwig besucht das Kaffeehaus seines Bruders Johann	28
Am Jahresende zieht Johann Bilanz	32
Johann vergleicht	33
Die Tabellenkalkulation	34
Johann berechnet Varianten	35
Noch mehr Vergleiche	36
Gewinn und was macht Johann damit?	38
Johann spart: Zinsrechnung	39
Johann investiert und / oder konsumiert	39
Die Bilanz der Kaffeegäste	41
Ludwig zählt nicht mehr Bohnen, er misst! Rauminhalt und Gewicht	42
Ludwig und Johann besuchen: Weg, Zeit und Bewegung	45
Ludwig, Johann, und Nanette sammeln, ordnen und tauschen	48
Skalieren	53
Die Brücke zur Musik	54
DIE TONKUNST	55
Das Dreiergefüge der Musik	55
Tonbildung und Hören	56
Messen der Tonhöhenunterschiede	57
Die musikalischen Töne	59
Die C-Tonleiter und die Diatonik	61

Töne und Stimmlagen im Überblick	64
Die Stimmlagen der Instrumente	66
Andere Tonleitern	67
Tondauer, Metrik, Rhythmik und Tempo	69
Komponieren	71
Tonpaare und Melodien	74
Tra - ri - ra “analytisch”	76
Komponieren durch „Aufspalten“ langer Noten	77
Mehrstimmige Musik	78
Die harmonischen Eigenschaften der Tonpaare und der Akkorde	79
Der Baukasten der Akkorde	82
Belle qui tiens ma vie - „analytisch“	83
Ludwigs Tonkunst - das Erzherzogtrio	85
Die Notenschrift	90
Ludwig van Beethoven	92
Ars magna	95
Literatur	96

VORWORT

Das Rechnen ist nicht jedermann's Lust. Durch eine Umfrage in Amerika stellte man fest, dass nur 15% der Befragten eine Dreisatzaufgabe verstehen und lösen konnten. Dabei ist es doch so einfach. Jede Stunde lösen wir eine im Nachdenken und Sprechen. Man fragt sich doch immer wieder: WENN das so ist UND WENN etwas weiteres so ist, WAS ergibt sich daraus? Oder an einem Rechenbeispiel: Wenn fünf Kilogramm Äpfel 6 Euro kosten, welcher Preis ergibt sich, wenn ich nur 2 Kilogramm kaufen will?

Welchen Nutzen hat das Rechnen? Sie macht vieles von dem, was wir tun, nicht nur einfacher, sondern auch richtiger. Vor allem dann, wenn wir mit Materialien umgehen. Wie viele Bausteine muss ich mir besorgen, wenn ich in meinem Haus eine Wand aus Backsteinen errichten will? Nicht zu viele und nicht zu wenige. Wenn ich es ausgerechnet habe, habe ich sachgerecht gehandelt, die Arbeit gut vorbereitet. Und dazu auch wirtschaftlich, denn unnötig gekaufte Backsteine kosten Geld. Und gedankenlos mehr zu kaufen, als ich wirklich brauche, ist ja einfach und schlicht gesagt dumm. Der berühmte Rechenkünstler Carl Friedrich Gauß hat es so gesagt: „Es ist der Charakter der Mathematik der neueren Zeit, dass durch unsere Zeichensprache und Nomenklatur wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltesten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reduziert werden“.

Diesen Mechanismus zu kennen und anwenden zu können, ist in fast jeder Lebenslage sehr nützlich. Auch Kommerzienrat Treibel antwortet, als ihn die Hofdame Majorin Ziegenhals auf eine Entscheidung, die sie nicht verstehen kann, anspricht, so: „Sie wissen unsereins rechnet und rechnet und kommt aus der Regula-de-tri gar nicht mehr heraus, aus dem alten Ansatz: Wenn das und das, so viel bringt, wie viel bringt das und das“. Es geht aber nicht um seine Handelsgeschäfte, sondern um die Frage, ob er sich der konservativen oder der fortschrittlichen Partei zuwenden soll. (Aus „Frau Jenny Treibel“ von Theodor Fontane). Der Dreisatz ist auch die Kunst des Abwägens, aus dem Möglichen das Richtige auszuwählen, in allen Lebenslagen.

Auf den folgenden Seiten wird an Hand einer Geschichte aus dem Leben des berühmten Musikers Ludwig van Beethoven - er lebte zur selben Zeit wie Carl Friedrich - ausprobiert, ob er Recht hat. Natürlich ist die Geschichte erfunden. Aber ich dachte mit Musik geht manches besser und daher werden im Verlauf der Geschichte einige Musikstücke erwähnt, die mir besonders

gefallen haben. Und die Musikkunst hat auch einiges mit Erfinden und Errechnen zu tun. Man sagt ja, Carl Friedrich war ein Rechenkünstler wie Ludwig ein Künstler auf seinem Gebiet der Musik war. Viele Wissenschaftler, wie zum Beispiel Albert Einstein, waren große Musikliebhaber und Interpreten, weil sie sahen, dass viel Gemeinsames zu erkennen ist.

Die Rechenkunst macht vieles einfacher, so sagte es Carl Friedrich. Und dazu nur ein Beispiel. In Worten ausgedrückt lautet eine ganz einfache Aufgabe so: ich nehme fünf Äpfel und dann nehme ich noch 3 Äpfel dazu und erhalte nun 8 Äpfel. Warum nur so viele Worte? In der Sprache der Rechenkunst geht es schneller zu: $5 + 3 = 8$. Viele Sachverhalte, die viel verwickelter als dieses Beispiel sind, könnte man in Worten überhaupt nicht ausdrücken. Die wichtigste Arbeit von Albert Einstein ist nicht in Form eines dicken Buches niedergeschrieben worden, sondern in der Sprache der Rechenkunst, auf gerade mal 8 Seiten! Da sieht man schnell den Vorteil. Warum viele Worte machen, wenn es kürzer und schneller geht?

Die Rechenkunst, wie wir sie heute anwenden, ist in Schritten über viele Jahrhunderte hin entwickelt worden. Adam Riese hatte vor 400 Jahren ein Lehrbuch der Rechenkunst verfasst. Da steht schon alles drin, was wir heute so rechnerisch für den Alltag anwenden. Und noch heute sagt man manchmal: Nach Adam Riese ist $5 + 10 = 15$. Die meisten Rechnungen sind wirklich einfach, man muss nur etwas üben, dann verwendet man das Rechnen genauso flüssig, wie wir unsere Sprache verwenden. Auch beim Sprechen geht das Nachdenken voraus. Beim Nachdenken fragen wir uns: was weiß ich? Und wie füge ich das, was ich weiß, so zusammen, dass jedermann versteht, was ich mitteilen will? Beim Rechnen ist es kein bisschen anders. Es gilt: lieber vorher gründlich nachdenken als falsch rechnen! Man soll nicht denken: ach, das ist schon richtig, was ich da mache. Besser ist es, wenn man sich Schritt für Schritt in die Art der Aufgabe hineindenkt. Am besten ist es, wenn man immer wieder sich Aufgaben stellt und diese im Kopf oder auf dem Papier ausrechnet. Es ist wie beim Turnen: die erste Rolle vorwärts sieht vielleicht nicht so gut aus, die zweite? Da geht es schon besser. Und wer 20 mal geübt hat, ist fast schon ein Meister und kann sich schwierigeren Aufgaben zuwenden.

Wenn man sich Lehrbücher der Rechenkunst so anschaut, dann ist man jedoch oft sehr abgestoßen. Warum eigentlich? Es wimmelt von Theorie einerseits und oft folgen höchst banale Beispiele andererseits. Etwa nach dem

Muster: zwei Pumpen füllen ein Gefäß in zwei Stunden, wie lange brauchen drei Pumpen? Nun, normalerweise sind wir nicht damit beschäftigt Wasser hin und her zu pumpen. Viel besser ist es doch, wenn man Beispiele benutzt, die aus dem Alltag gegriffen werden, was wir tatsächlich und oft machen. Dann ist das Beispiel anschaulich. Was machen wir oft? Wir gehen mit Stoffen um und kombinieren sie. Wir kochen zum Beispiel einen Kaffee. Da muss man abwägen, so viel Kaffee, so viel Wasser, so groß ist die Tasse und weiteres. Oder wir schauen in den Geldbeutel, so viel ist drin, so viel kostet etwas.

Und noch besser ist es, wenn wir Rechnungen in eine Geschichte einflechten. Man macht ja nicht nur eine Rechnung, sondern auf die erste folgt die nächste, und darauf noch eine. Und bei jeder neuen Rechnung kommt eine andere Art zu rechnen dazu. Wir zählen zuerst etwas, dann nehmen wir etwas davon weg, oder wir teilen etwas auf. Und wir ordnen die Rechenschritte und dabei sieht man oft, wie man es am geschicktesten macht. So wie Carl Friedrich es gesagt hat. Wir finden eine Methode, um die Welt, die Dinge um uns herum, zu verstehen.

In den Rechenübungen dieser Geschichte geht es um das, was man die Grundrechenarten nennt. Wir werfen einen Blick in den Haushalt von Ludwig, der nicht nur ein großer Musikkünstler war, sondern auch ein großer Kaffeeliebhaber. Meistens geht es um das Rechnen mit Kaffeebohnen. Aber wir sind es Ludwig schuldig, dass es auch um Musik geht. Um diese holde Kunst geht es im zweiten Teil.

Gibt es denn eine Verbindung zwischen der Musikkunst und der Rechenkunst? Mal sehen. Jedenfalls sagte der spanische Mönch Raymundus Lullus vor 700 Jahren, die Rechenkunst ist eine umfassende Kunst, eine *Ars magna*. Was bedeutet, dass sie ein allgemein gültiges Verfahren ist, um die Wahrheit herauszufinden. Ob da jeder mit einverstanden ist, lassen wir offen. Für die Philosophen, die Naturwissenschaftler, die Künstler aller Gattungen und natürlich für die Mathematiker war diese Idee eine große Herausforderung, und was sie entdeckten und erfanden wurde überall verwandt, auch in der Musik, wie ja das Titelbild zeigt. Alles in der Welt ist verhältnismäßig, aufeinander bezogen, proportional, wenn etwas nicht gelingt, ist es disproportional. Das gilt für das ganz Große am Sternenhimmel, für alles, was auf der Erdoberfläche geschieht und in der ganz kleinen Welt der Atome. Rechenkunst ist auf der Spur der Gründe, weshalb sich etwas fügt oder nicht.

Diese Schrift geht auf eine Frage meiner Schwägerin Brigitte zurück: wie kann man Kindern, die mit dem Rechnen Schwierigkeiten haben, den Weg in die Rechenkunst erleichtern? Das war beim Kaffeetrinken, und der Kaffee spielt ja eine große Rolle in der Geschichte, die nun erzählt wird. Außerdem musste ich beim Schreiben an Helmut denken. Helmut konnte schon mit 10 Jahren wunderbar Klavier spielen. Vom Notenblatt oder ganz frei, da war er ein Komponist. Und ich stand daneben und habe ihn sehr bewundert. Aber in der Rechenstunde in der Schule, wenn er eine Aufgabe lösen sollte, da bekam er regelrecht einen Krampfanfall, schon wenn das Wort Dreisatz fiel. Und manche lachten. Und später musste er die Schule verlassen. Armer Helmut, bis heute muss ich daran denken, wie schlecht man ihn damals behandelt hat und welche Schwierigkeiten sich daraus ergaben. Das darf nicht sein!

Die Hauptperson unserer Geschichte ist Ludwig. Ludwig ist einerseits ein Mensch wie Du und ich. Er gestaltet seinen Lebensablauf und wir beobachten ihn in seinem Alltagsleben und picken uns da Situationen heraus, für die das Rechnen nützlich ist. Und dabei dringen wir immer weiter in das ein, was die Rechenkunst so beinhaltet. Das ist der Inhalt des ersten Teils dieser Schrift.

Andererseits ist Ludwig Komponist und zwar einer der wichtigsten. Im zweiten Teil behandeln wir die Frage, wie seine Kunst beschaffen ist. Da nutzen wir das Wissen aus dem ersten Teil. Wir schauen mit Hilfe der Rechenkunst in seinen Werkzeugkasten, auf die Stimmen der Instrumente und auch auf einige Melodien, auf Lieder, die wir alle kennen und auch auf die Ludwigs.

Die Verbindung Musik und Rechenkunst ist übrigens uralte. Der erste von dem wir wissen, dass er so vorging, war Pythagoras vor 2500 Jahren. Er benutzte ein einfaches Musikinstrument, ein einsaitiges Monochord. Der Steg in der Mitte war beweglich und so konnte er vergleichen, wie hängt das zusammen, die Tonhöhe und die Länge der Saite, wenn ich den Steg nach rechts oder links bewegt habe? Da gab es viel zu entdecken, eine typische Dreisatzaufgabe. Damals war manches viel einfacher, weil man sich das, was interessierte, zum ersten und somit zum grundsätzlichsten Mal erklärte. In der Folge sind Rechenkunst und Tonkunst immer weiter ausgebaut worden. Es sind jetzt erschreckend hohe Wissensgebirge und Hunderte von Begriffen vorhanden, deren Inhalt wir nicht oder nur andeutungsweise kennen. Und wir Laien stehen da notgedrungen ziemlich ratlos davor, oft sogar verängstigt über so viel Gelehrsamkeit. Wir möchten doch aber auch das Wichtigste wis-

sen! Wie geht man als Anfänger, Laie, Einsteiger damit um? Am besten so, dass wir sagen: wir lassen uns nicht beeindrucken und gehen so vor, dass wir sagen: Was ist eine Zahl, was ist ein Ton? Was kann man damit anfangen? Für welche Zwecke werden sie genutzt? Wir gehen vom Einfachsten aus. Und wie weit wir kommen oder kommen wollen, das werden wir schon sehen. Und wir machen uns immer Bilder, stellen uns Situationen vor, wo wir den Zweck einer Rechnung sehen oder die Wirkung einer Tonfolge empfinden und stellen immer wieder Fragen: warum ist das so? Es ist ja so: die Frage aller Fragen lautet; wie lautet die Frage? Aus der richtigen Frage ergibt sich das richtige Wissen und aus dem wiederum das richtige Handeln.

Ludwig, behandeln wir ihn nicht ein bisschen ungerecht, wenn wir ihn, das musikalische Weltgenie, zunächst als Kaffeetrinker vorstellen? Er wird es verzeihen wegen der pädagogischen Absicht. Ich selbst habe ihn in ganz jungen Jahren auf überraschende Weise kennen gelernt. Es war nämlich so: ich war 12 Jahre alt und ein Herr kam in unsere Schule und wir mussten ihm vorsingen. Und, überraschend genug, ich wurde ausgewählt, und so kam es, dass ich an einer Aufführung des Chors im vierten Satz der 9. Symphonie von Ludwig mitwirkte.

Das war mein erster und bisher einziger Beitrag zur Welt der großen, ja der größten Musik, die wir kennen. Tja, Glück muss man haben, und an der „Ode an die Freude“ mitwirken dürfen. Die Freude an der Musik ist mir immer geblieben. Mit 13 bekam ich mein erstes Fahrrad und schon bei der ersten Ausfahrt knallte ich auf ein Auto. Der Meister im Fahrradladen sagte: „Mein lieber Junge, das Rad ist ganz kaputt, der Rahmen ist auch gebrochen“. Zerschmettert saß ich in der Küche, der Verlust und die Schande! Und da ertönte im Radio Franz Schuberts Streichquintett (opus 163). Musik hilft in traurigen und in lustigen Momenten. Franz Schubert hat ein Lied „An die Musik“ geschrieben. Das sind die ersten Musikempfehlungen, denen weitere, wenn es sich ergibt, folgen werden.

Rolf Derenbach

DIE RECHENKUNST

Wir fangen ganz einfach an. Ludwig hat viel gearbeitet und sagt sich jetzt: eine Tasse Kaffee könnte mir jetzt richtig gut tun!

Ludwigs Kaffeegeschmack

Ludwig trank sehr gerne eine Tasse Kaffee. Aber das Getränk durfte nicht zu schwach und nicht zu stark sein. Er hatte sehr empfindliche Geschmacksnerven und konnte sich ziemlich ärgern, wenn der Kaffee nicht genau so zubereitet wurde, wie er ihm am besten schmeckte. Über manche Verstimmung konnte er sich so ärgern, dass er sich gleich daran machte, ein Musikstück zu schreiben. Damit konnte er seinen Ärger besänftigen. So das Stück „Die Wut über den verlorenen Groschen“. Er war wohl auch ziemlich sparsam, aber man muss bedenken, dass man zu seiner Zeit für einen Groschen (später 10 Pfennig) mehr kaufen konnte als mit 10 Cent heute.

Können wir heute feststellen, wie Ludwigs Kaffee schmeckte? Wir können es, weil überliefert ist, dass er verlangte, dass für eine Tasse Kaffee genau 66 Kaffeebohnen zu nehmen waren. Aber leider nicht ganz genau, denn wir wissen nicht, wie groß seine Tasse war, wie viel Wasser in seine Tasse ging. Gleichwohl kann man, da man die Zahl 66 weiß, eine Schätzung vornehmen und dann eine Tasse Kaffee nach seiner Art herstellen. Es ist ganz einfach, man zählt 66 Bohnen, mahlt sie, schüttet das Pulver in eine Tasse, so groß, wie man sich die Tasse zur damaligen Zeit vorstellt (oder im Museum Beethoven-Haus nachgefragt hat) und gießt heißes Wasser nach. Das heiße Wasser löst die Aromastoffe des Pulvers und der Kaffee ist fertig. Ludwig freut sich schon! Ich habe das so zubereitet und muss sagen: ganz schön gehaltvoll! Wenn Ludwigs Tasse kleiner gewesen sein sollte, dann würde ich sagen, er trank eher Mokka als kräftigen Kaffee heutzutage. Aber man sieht, ganz genau können wir nicht mehr den Kaffeegeschmack von Ludwig feststellen, weil uns, wie gesagt, die Information über die Fassengröße fehlt, aber doch annähernd, das heißt ziemlich genau.

Man sieht, zwischen Kaffee (nun als Pulver), der Kaffeetasse (ein Gefäß oder ein Hohlraum) und dem Wasser (die Menge Wasser, die in das Gefäß hineingefüllt werden kann) besteht ein Verhältnis oder eine Proportion. Dieses kann man, wenn man die Mengen (oder Quantitäten) einmal festgestellt und mit Zahlen bestimmt hat, wieder anwenden, Kaffee nach Ludwigs Art

herzustellen. Übrigens auch dann, wenn die Tasse größer oder kleiner sein sollte als die, die Ludwig benutzte. Oder Ludwig sagt zu seiner Haushälterin: ich möchte ausnahmsweise eine doppelt so große Tasse Kaffee. Somit: WENN eine Tasse 66 Bohnen enthält, DANN enthält eine doppelt so große Tasse 132 Bohnen. Oder machen wir es etwas umfangreicher: WENN eine Tasse 66 Bohnen enthält UND WENN in eine Tasse 1 Löffel Zucker hineinkommt, DANN enthält eine doppelt so große Tasse 132 Bohnen und 2 Löffel Zucker. Nur wenn das Mischungsverhältnis (die Proportion) jedes Mal bei kleineren oder größeren Gefäßen eingehalten wird, kommt das gewünschte Ergebnis heraus. Da sind wir schon ganz nahe „dran“ am Dreisatz!

Übrigens: schon vor Tausenden von Jahren stellten die Assyrer fest, dass, wenn man Kupfer (ein Metall) mit Zinn (ein anderes Metall) mischt, ein besseres Metall, Bronze, entsteht. Aber nur dann, wenn das Verhältnis 9 zu 1 ist, d.h. auf neun Teile Kupfer ein Teil Zinn kommt. (Damit begann eine neue Epoche der Menschheitsgeschichte.) Beim Kochen ist es auch so, das Rezept besagt, in welchem Verhältnis die Nahrungsmittel zusammengefügt werden müssen. Das sind jeweils Dreisatzrechnungen. Es gilt: der Dreisatz ist eine der gebräuchlichsten Rechenmethoden, die jeweils richtigen Verhältnisse herzustellen. Aber bevor wir näher auf den Dreisatz eingehen, wenden wir uns wieder Ludwig zu.

Wie viele Tassen Kaffee trank Ludwig am Tag?

Das wissen wir nicht. Aber sicher trank Ludwig mehr Kaffee als nur eine Tasse. Sagen wir mal, er trank 10 Tassen am Tag. Wie viel Bohnen mussten vorrätig sein? Sehr einfach: es mussten 66 Bohnen (pro Tasse) \times 10 Tassen = 660 Bohnen täglich vorhanden sein, in Kürze: $66 \times 10 = 660$.

Das ist eine Gleichung, die aus 3 Gliedern besteht, zwei links und eines rechts. Die Glieder links enthalten die Informationen, die man weiß. Und rechts, da steht das, was man ausrechnen will. Diese Anordnung nennt man deshalb eine Gleichung, weil die rechte Seite zur linken Seite einen gleichgroßen Zahlenwert aufweist, erst dann ist die rechte Seite richtig berechnet. Aber meistens ist es besser, wenn man sagt, die rechte Seite ergibt sich aus der linken. Oder: die rechte ist von der linken abhängig. Die Glieder links sind die bekannten Größen, und das Glied rechts ist die (noch) unbekannte Größe, das Ergebnis oder Resultat der Berechnung. Jedes der drei Glieder kann man im Wechsel als unbekannt ansehen. Wenn man $660 : 66 = 10$ rech-

net, dann haben wir ausgerechnet, wie viele Tassen Kaffee nach Ludwigs Geschmack zubereitet werden können, wenn 660 Bohnen vorrätig sind. Das ist eine Aufteilungsrechnung. $660 : 10 = 66$ bedeutet, dass für eine Tasse 66 Bohnen verwendet wurden. Das ist eine besonders wichtige Berechnung, nämlich eine Größe bezogen auf die Grundeinheit, im Beispiel 66 Bohnen für eine Tasse. Wenn man dieses Verhältnis weiß (wir wussten es ja, weil es überliefert ist, dass Ludwig nur dann zufrieden war, wenn dieses Verhältnis eingehalten worden war), kann man errechnen, welche Größen man braucht, wenn mehr Tassen hergestellt werden sollen.

$1 : 66 = 4 : ?$ ist die Grundform einer Dreisatzaufgabe, aus drei Gliedern das vierte Glied, die noch unbekannte Größe, zu berechnen. Es ist oft nützlich, die Glieder mit Worten zu kennzeichnen, weil man schnell verwechseln kann. Eine Tasse zu 66 Bohnen = 4 Tassen zu ? Bohnen. So sind die Glieder richtig positioniert. $1 : 66 = ? : 4$. Das kann man zwar auch berechnen, aber eine Lösung der Aufgabe ist das nicht.

Es gibt auch Ungleichungen: so ist $5 + 3 < 9$ und $5 + 3 > 6$. „Kleiner als“ und „größer als“ sind Worte der Sprache und „<“ und „>“ sind die entsprechenden „Worte“ oder Zeichen der Rechensprache. Auch das sind Verhältnisse, aber nicht stimmige. 65 Bohnen oder 67 Bohnen? Das merkte Ludwig sofort, weil er besonders feine Geschmacksnerven hatte, aber noch viel feinere Ohren und eine besonders hohe Erfindungsgabe.

Die Gleichungen enthalten Rechenregeln, eine Anweisung, wie die Glieder rechnerisch verknüpft werden. Nehmen wir uns zuerst das Zeichen „+“ (in der Sprache sagt man „und“ oder „plus“) vor. Es besagt, die Größen werden zusammen gezählt oder addiert und daraus ergibt sich das Ergebnis. Übrigens: viele Begriffe der Rechenkunst sind Fremdworte, weil die Mathematiker früherer Jahrhunderte das Latein benutzten. Da hilft nichts, man muss wissen, dass für ein und dieselbe Sache oft verschiedene Worte gebraucht werden. Die Zeichensprache der Rechenkunst ist aber ziemlich konsequent: (fast) immer wird ein und dasselbe Zeichen für eine Rechenart benutzt.

Und noch einmal Achtung! Es dürfen nur gleiche Dinge addiert werden. 3 Äpfel + 5 Äpfel = 8 Äpfel. Das geht, aber 3 Äpfel und 5 Birnen, das geht nicht. Aber man kann sich behelfen, indem man sagt: 3 Stück Äpfel und 5 Stück Birnen = 8 Stücke (Obst). Rechnen wir in Strecken: 3 cm + 5 cm = 8 cm. Das geht, da die Glieder gleichartig sind, d.h. die Strecken sind beide in Zentimeter gemessen. Aber 3 cm + 5 m, das geht nicht. Die Glieder sind un-

gleichartig, einmal in Zentimeter und zum andern in Meter, sie sind unterschiedlicher Art (oder Dimension). Man kann sich aber auch hier behelfen, indem man vor der eigentlichen Rechnung die Glieder gleichartig macht. So $3 \text{ cm} + 500 \text{ cm} = 503 \text{ cm}$, so geht es. Ganz wichtig in der Vorbereitung einer Rechnung: gleichartig machen der Glieder ist unbedingt nötig!

Das Malnehmen oder Multiplizieren ist eine vereinfachte Form der Addition, wenn die Glieder gleichartig sind. Man kann, wenn Ludwig 4 Tassen trinkt, es ja so berechnen: $66 + 66 + 66 + 66 = 264$. Es sind 4 Glieder und, damit die Rechnung übersichtlicher ist, nimmt man die Anzahl der Glieder, hier 4, und sagt $4 \times 66 = 264$.

Angenommen wir wissen, wie viele Bohnen wir haben, nämlich 300. Und wir wollen jetzt ausrechnen, wie viel Tassen nach Ludwigs Art hergestellt werden können. Man nimmt zuerst 66 Bohnen für die erste Tasse weg, dann für die zweite, dann für die dritte usw. weg. $300 - 66 - 66 - 66 = 300 - 264 = 36$. Das ist der Rest, also es reicht für 4 Tassen. In der fünften Tasse sind nur 36 Bohnen enthalten. Und da sagt sich Ludwig: heißes Wasser mit Kaffeegeschmack, so etwas dürrtiges trinke ich nicht.

Das Zeichen „-“ bedeutet wegnehmen oder abziehen, auch minus oder subtrahieren. Beim abziehen darf man nicht wie beim hinzuzählen die Glieder vertauschen. $8 - 5 = 3$. Aber $5 - 8 = ?$, da bekommt man ein ganz anderes Ergebnis heraus. Somit: beim Addieren ist es gleichgültig, an welcher Stelle die Glieder stehen. $3 + 5 = 8$ und $5 + 3 = 8$, beim subtrahieren aber nicht. Auch beim abziehen gibt es, wenn die Glieder gleich sind, eine einfachere Methode, das Teilen oder Dividieren. Die Rechnung lautet: 300 Bohnen „geteilt“ oder „:“ oder durch 66 Bohnen pro Tasse = 4, es bleibt ein Rest von 36 Bohnen übrig.

Sprache oder „in Worten“	Rechensprache	Beispiel
Hinzunehmen, addieren	+	$2 + 6 = 8$
Malnehmen, multiplizieren	x oder ·	$2 \times 6 = 12$
Abziehen, subtrahieren	-	$8 - 6 = 2$
Teilen, dividieren	/ oder :	$8 : 2 = 4$
Gleich, ist, ergibt	=	$8 = 8$
Kleiner als	<	$6 < 8$
Größer als	>	$8 > 6$

Jede Kunst muss sich ausdrücken, die Schreib- oder Redekunst macht es mit Worten, die Malkunst mit Flächen und Farben, die Baukunst mit Kuben, die Rechenkunst mit Symbolen. Sie stehen für die Anweisung, die Art, wie Zahlen (genauer die

Zahlenwerte) verknüpft werden sollen. Bei den Rechnungen, die man alltäglich ausführt, reichen die ersten vier Anweisungen der Tabelle, es sind die

Grundrechenarten. Die 3 unteren Zeichen stehen zwischen dem linken und dem rechten Glied der Rechnung. Sie teilen die Gleichung in ihre zwei Hälften. Auf der linken Seite stehen die bekannten Größen, rechts die (noch) unbekannte und nach der Rechnung das Ergebnis.

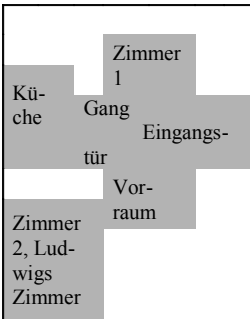
Was wird berechnet?	Anzahl der Bohnen	Anzahl der Tassen	Bohnen pro Tasse
Bohnen pro Tasse	x	x	?
Anzahl der Tassen	x	?	x
Anzahl der Bohnen	?	x	x

Wenn eine Gleichung drei Glieder hat und jeweils zwei davon bekannt sind, dann gibt es, wie wir es schon ein-

mal getan haben, immer drei alternative Rechenmöglichkeiten, so wie sie in der Tabelle gezeigt werden. X steht hier für eine bekannte Größe, ? für die (noch) unbekannte. Man sieht, beim Rechnen geht es oft wie beim Turnen zu: Rolle vorwärts, Rolle rückwärts.

Messen und Vergleichen

Eine sehr wichtige Art von Rechnungen entsteht dann, wenn etwas verglichen wird. 5000 Einwohner in dem Ort A sind weniger (<) als 8000 in Ort B. Kaffee nach Ludwigs Art ist stärker (hat mehr Bohneninhalte, ist gehaltvoller) als der Kaffee in der Autobahnraststätte. Aber auch da muss die Grundlage des Vergleichs gleichartig sein, d.h. die Tassen müssen gleich groß sein (das selbe Volumen haben).



Die Wohnung Ludwigs - eine Aufteilung innerhalb des Hauses, in dem Ludwig wohnt.

Schauen wir uns mal kurz die Wohnung von Ludwig an, sie besteht aus zwei Zimmern, der Küche, einem Gang und einem Vorraum vor Ludwigs größtem Zimmer. Wenn er sich einen neuen Teppich kaufen will, wäre es nicht gut, wenn er sagt: der Teppich im Laden wird schon passen. Also misst er lieber die Fläche aus. Und holt das Messgerät heraus. Sein Messgerät könnte sein Fuß sein, das größte Zimmer ist 9

Füße in der einen Richtung und 12 Füße in der anderen Richtung lang, $9 : 12$. Ludwig sagt sich, der Teppich sollte den ganzen Raum ausfüllen, aber zu den Wänden soll ein halber Fuß Abstand sein. Wie groß soll er somit sein? Einfach: $9 - 1/2$ und $12 - 1/2$ Fuß = $8 \frac{1}{2} : 11 \frac{1}{2}$. So kann er den Teppich in der richtigen Größe bestellen. Da macht man sich das Leben einfacher, nichts geht schief und verursacht Ärger, wenn der Teppich schließlich ausgerollt wird.

Vergleichsrechnungen sind ganz besonders wichtig, denn unser Wissen ergibt sich sehr oft daraus, dass wir einen Unterschied festgestellt haben. Größenverhältnisse fallen oft ja unmittelbar ins Auge. Wir messen mit dem Auge, das reicht oft aus, wenn es aber genauer zugehen soll, dann kommt die Technik des Messens ins Spiel.

Die einfachste Art zu Messen ist das Abzählen. Zählt man zum Beispiel die Zahl der Bohnen in zwei Dosen nach, so wird man sehen, in der einen Dose sind 50 Bohnen, in der anderen nur 20, 30 weniger. Man nennt diesen Vorgang auch quantifizieren, die Anzahl feststellen. Man sagt auch „die Elemente einer Menge“ feststellen, das Element ist die Bohne, die Gesamtzahl der Bohnen ist die Menge. Oft müssen wir feststellen, wie viel Elemente brauchen wir um das gewünschte Ergebnis zu erreichen. Da hilft das Rechnen. Ein Architekt macht es so: seine Elemente sind die Bausteine, sein Ziel ist es, die Anzahl der Bausteine zu berechnen, damit die Nordwand seines Gebäudes errichtet werden kann. Und zwar: nicht weniger (dann wird die Wand nicht fertig gestellt werden können) und nicht mehr (dann kann er zwar die Wand fertig stellen, aber es bleiben Bausteine übrig und die liegen dann nutzlos herum). An Zwecken sich orientieren, das ist vernünftig und die Rechenkunst hilft da ungemein!

Übrigens mit „Füßen“ (etwa 30 cm) zu rechnen, war zu Ludwigs Zeit sehr üblich. Das heute gebräuchliche Metermaß war eine sehr nützliche Vereinheitlichung, die sich aber in Amerika nicht durchgesetzt hat. Dort wird immer noch mit „feet“ gemessen. Zur Zeit Ludwigs gab es noch zahlreiche Messeinheiten. Die spätere Vereinheitlichung der Maße (oder Dimensionen) hat vieles einfacher gemacht.

Das Anordnen in Tabellenform ist wichtig!

Es ist immer besser, wenn man sich eine Ordnung ausdenkt, bevor man rechnet. Die allerwichtigste und allereinfachste ist die Ordnung nach der Position links und rechts vom Gleichheitszeichen. Aber wenn mehrere Rechnungen durchgeführt werden, dann überlegt man sich eine Ordnung in Tabellenform. Man schreibt die Rechnungen nicht wild auf das Papier, sondern untereinander und nebeneinander.

Was ist eigentlich eine Tabelle? Es ist entweder eine quadratische (wie beim Schachfeld $8 \times 8 = 64$ Felder oder wie im Beispiel, da sind es $6 \times 4 = 24$ Felder. Statt Felder sagt man auch Zellen.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4						

Senkrecht (oder vertikal) gesehen stehen die Spalten, alle Zellen, die untereinander stehen. Waagrecht oder horizontal gesehen sind es die Zeilen, alle Zellen, die nebeneinander stehen. Jede Zelle ist im Schnittpunkt einer der Spalten und einer der Zeilen. Es gibt

noch weitere Spalten und Zeilen, diejenigen, die sich am linken und am oberen Rand befinden. Sie gehören nicht zum Rechenfeld, sondern beschreiben den Inhalt der Zellen in Worten. Die Spalten zum Beispiel mit Buchstaben und die Zeilen mit Ziffern. Dann hat jede Zelle eine Adresse, zum Beispiel C 3 (die dunkel gefärbte Zelle).

Tabellen sind etwas besonders Nützliches in der Rechenkunst, denn sie schaffen Ordnung. Man schreibt die Zahlen und Rechnungen nicht mehr da und dorthin auf dem Papier, sondern man ordnet sie in die Zellen ein. Das Schulheft für das Rechnen ist ja auch in gleiche Kästchen aufgeteilt, die Seite im Rechenheft ist also auch so eine Tabelle. Eine Tabelle oder ein Raster ist ja eine höchst einfache Form und deshalb vergisst man leicht, wie wichtig gerade das Einfache ist.

Ludwig hat eine sehr gute Idee

Wir wissen, dass es mit dem Kaffeekochen in Ludwigs Haushalt öfters nicht so richtig klappte. Zu oft war der Kaffee zu „dünn“ oder zu „dicke“. Und es gab dann unnötigen Ärger zwischen Ludwig und der Haushälterin. Dem könnte man doch abhelfen, denkt Ludwig. Er nimmt einen Kasten und teilt ihn auf in Kästchen, die so groß sind, dass jeweils 66 Bohnen hinein passen. Dann muss bei jeder neuen Kaffe Zubereitung nicht mehr umständlich abgezählt werden, sondern die Haushälterin nimmt einfach den Inhalt des ersten, des zweiten Kästchens heraus. Und noch besser, der Kasten ist so in so viele Kästchen aufgeteilt, dass gleich für eine Woche Kaffeekochen alles vorbereitet ist. Ordnung ist das halbe Leben.

Das Wort Tabelle stammt aus der lateinischen Sprache (tabella) und meinte dort einfach Merk- oder Rechentafel. Und ein Sieb ist auch eine, ein Gitter- oder Rasternetz, indem die kleinen Steinchen durchfallen und die großen bleiben auf dem Gitternetz liegen. Schon habe ich die kleinen und großen Steine getrennt, oder sortiert. Wohin man schaut, wird man das auffinden, was man in der Rechenkunst als Tabelle oder als Raster bezeichnet.

Und natürlich kann man die Zellen weiter unterteilen, wenn man zum Bei-

spiel Fächer für einen besonderen Zweck braucht. Oder das Gitternetz verengen, wenn ich erreichen will, dass besonders feiner Sand heraus gesiebt werden soll. Jedenfalls gilt, bevor man etwas beginnt, sollte man sich eine Ordnungsmethode überlegen, die Tabelle ist da meistens das Nächstliegende. Aber es gibt natürlich auch andere Möglichkeiten, eine kreisförmige Anordnung zum Beispiel, die Natur ist da besonders einfallreich, wie man an den Blüten der Pflanzen sehen kann.

Vorsorgen ist besser als nachsorgen

Als Ludwig mal wieder zu schwachen Kaffee getrunken hatte, war er richtig verbittert und brummte die Haushälterin an, oft in heftigen Worten. Manchmal rief er sogar: „ich kündige Ihnen“. Er zog auch dauernd um und manchmal vergaß er, dass er die letzte Wohnung noch gar nicht gekündigt hatte und dann musste er für zwei oder sogar drei Wohnungen Miete bezahlen. Aber die neu eingestellte Haushälterin kriegte das Kaffeekochen vielleicht auch nicht so hin, wie er es unbedingt haben wollte. Der Grund war der, dass zur Zeit Ludwigs die meisten Menschen nicht zur Schule gegangen waren und deshalb konnten sie gar nicht bis 66 zählen und Rechnungen anstellen. Das hatte Ludwig nicht bedacht, sein Rezept konnte gar nicht verwirklicht werden. Wir sind oder waren glücklicherweise in der Schule und können deshalb Kaffee nach Ludwigs Rezept herstellen.

Aber auch wir sind manchmal nicht aufmerksam genug und sorgen nicht für einen ausreichenden Vorrat. So ist es Sonntag, die Geschäfte sind geschlossen und wir haben nur 500 Bohnen. Zuerst rechnen wir aus, wie viele fehlen, 660 (die Zahl der Bohnen, die gebraucht werden) - 500 (so viele sind vorhanden) = 160 (so viele fehlen). Tja, Vorratsplanung ist besser, als sich hinterher ärgern. Man nennt das Haushalten und das hat ja immer mit Zahlen und Rechnen zu tun.

Rechnen ist die Mutter des Haushaltens und wer sich das Leben richtig schwer machen will, der beachtet diesen Grundsatz nicht. Was kommt denn heraus, wenn das Verhältnis Mehl zu Wasser zu Eier nicht stimmt: jedenfalls kein wohlschmeckender Pfannkuchen. Übrigens: es müsste ja eigentlich nicht Eier, sondern Zahl und eigentlich sogar Anzahl der Eier heißen. Es ist ja oft so, dass man in der Sprache kürzt, weil jeder weiß, was gemeint ist, aber in der Rechenkunst sollte man im Zweifelsfall genauer sein.

Aufteilen und Haushalten

Ständig teilen wir etwas auf: Zum Beispiel wird der Kuchen auf einem Kuchenblech in Kuchenstücke aufgeteilt. Und dieses Aufteilen ist auch ein Haushalten, denn wir wollen ja, dass jeder Gast ein gleichgroßes Stück erhält. Wenn wir dem ersten Gast ein sehr großes Stück gegeben haben, schauen die anderen Gäste „in die Röhre“ und ärgern sich vermutlich. Oder es geht anders: Ein Gast sagt, für mich bitte nur ein kleineres Stück, dann entsprechend wir diesem Wunsch, die anderen Gäste bekommen etwas mehr ab vom Kuchen. Dann ärgert sich auch niemand.

Auch Ludwigs Haushälterin hat eine Tüte mit Kaffeebohnen gekauft und nun teilt sie die Anzahl der Bohnen so auf, dass immer Häufchen mit 66 Bohnen entstehen. Nun wollen wir wissen, um ein bisschen zu üben, wie viele Tassen mit 66 Bohnen Ludwig trinken konnte, wenn nur 500 Bohnen da waren und wie „dünn“ der Kaffee war, als noch ein Rest Bohnen vorhanden war. Man kann es ja erstmals ausprobieren. Sagen wir $8 \times 66 = 528$. Das geht also nicht! Sagen wir $7 \times 66 = 462$, das geht, aber für die nächste, die 8. Tasse, bleiben nur 38 Bohnen übrig. Brrrrr, da konnte sich Ludwig aber gleich dreifach ärgern. Nur 7 Tassen richtigen Kaffee, und die achte nur lasches Gebräu. Und die 9. und die 10. fällt sogar aus.

Diese Rechnung ist aber umständlich. Man kann es einfacher machen. Man teilt die 500 Bohnen durch 66, dann hat man die Zahl der möglichen 66 Bohnen-Tassen und einen Rest, die Bohnen für die 7. Tasse. Die 8. und 9. Tasse fallen ja aus.

Da droht aber Sturm im Hause Ludwigs! Und deshalb ging die Haushälterin an dem Morgen, als nur 500 Bohnen vorrätig waren und die Läden geschlossen waren, zu Ludwig und sagte: „Herr Ludwig, heute ist Sonntag, die Läden sind zu, ich habe nur 500 Bohnen, ich schlage Ihnen vor, heute gibt es 10 Tassen mit jeweils 50 Bohnen“. Na, ob Ludwig damit zufrieden war? Ich fürchte nein! Was tun?

Es gibt viele Möglichkeiten, die man alle ausrechnen kann. Drei davon sind in der Tabelle angezeigt. Ich hätte mich für die dritte Varianten entschieden. Aber mit dem Unterschied, dass ich die 8. und 9. Tasse mit 38 Bohnen genommen hätte und dann kurz vor dem schlafen gehen die 10. mit 66 Bohnen. Nichts ist so schön wie die erste und die letzte Tasse am Tage, da soll sie schön stark sein. Und als Zugabe zum abendlichen Kaffeegenuss, da höre ich

mir noch die „Mondscheinsonate“ von Ludwig an, oder „Die kleine Nachtmusik“ von Wolfgang Amadeus Mozart.

Tasse	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Variante 1	66	66	66	66	66	66	66	(38)		
Variante 2	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
Variante 3	66	38	66	38	66	38	66	38	66	38

Das nennt man eine Optimalrechnung. Optimal heißt das bestmögliche, wenn das Maximum (nämlich 10 Tassen mit 66 Bohnen) nicht möglich ist. Optimalrechnungen spielen eine ganz große Rolle im Leben, denn es ist meistens so, dass etwas nicht ausreichend ist, wenn man zum Beispiel „knapp bei Kasse“ ist. Dann muss man wählen, Varianten ausrechnen und prüfen welchen Nutzen man von der einen oder einer anderen hat. Und dann die Varianten mit dem möglichst größten Nutzen auswählen.

Übrigens: wir haben jetzt wieder eine neue Art von Zahlen verwendet, die mit dem Punkt dahinter, die erste, zweite usw. Tasse. Das sind Ordnungs- oder Ordinalzahlen, sie bilden auch eine aufsteigende Reihenfolge, aber sie sagen nicht das selbe wie die bisher benutzten Zahlen aus. Die anderen sind die Anzahlen oder Größen oder Werte oder Kardinalzahlen.

Wenn man seine Hand anschaut, dann geht es so: entweder will ich wissen, wie viele Finger ich habe, es sind 10, das ist die Kardinalzahl, die Anzahl der Finger. Oder ich will wissen, welches ist der erste, der zweite Finger usw. bis zum zehnten. Dabei muss ich aber vorher festlegen, an welcher Stelle man anfängt. So zum Beispiel am kleinen Finger der linken Hand. Jedes Haus in der Stadt hat eine Adresse, Goethestraße Nummer 10. Das heißt, es ist das 10. Haus von der Stelle aus, wo die Nummerierung beginnt (zum Beispiel dort, wo die Schillerstraße einmündet).

Eine besonders wichtige Ordnung ist die nach der Zeit, die erste, die zweite usw. Stunde nach Mitternacht, dem Zeitpunkt, wenn der neue Tag beginnt. Auch Ludwig schaute öfters auf die Uhr, besonders dann, wenn er wissen wollte, wie lange es noch dauert bis zur nächsten Kaffeetasse.

Nie im Übermaß! - die Zeit

„Nie im Übermaß“, so stand es über dem Tor des Orakels von Delphi in Griechenland. 10 Tassen am Tag, das geht in Ordnung. Aber wer 10 Tassen auf einmal trinkt, darf sich nicht wundern, wenn ihm danach übel ist. Man muss die Tassen in Abständen trinken, das heißt über den Tag verteilt. Jetzt

geht es also um die Abfolge in der Zeit. Und die Rechnung ist eine Verteilungsrechnung, auch da geht es um ein Optimum, die richtige Aufteilung des Kaffeetrinkens im Lauf des Tages. Ganz sicher ist es kein Optimum, wenn ich Mittags schon alle Tassen getrunken habe. Wir wollen mal sehen, wie Ludwig es besser macht, man sagt auch dazu haushälterisch denken. Und das hat viel mit vorausschauendem Rechnen zu tun. Haushälterisch denken bedeutet nicht geizig sein (dann ist man habsüchtig) und auch nicht verschwenderisch (dann hat man bald nichts mehr in der Kasse), sondern auf richtige Weise sparsam, dann ist und handelt man vernünftig.

Der Tag hat 24 Stunden, Ludwig schläft 8 Stunden, da träumt er von schöner Musik, kann aber keinen Kaffee trinken. 16 Stunden ist er wach, da kann er Kaffeetrinken. 10 Tassen trinkt er täglich und zwar ganz regelmäßig. Er ist ja ein systematischer Mensch und daher trinkt er den Kaffee in gleichen Abständen. Wie lang ist nun der zeitliche Abstand zwischen einer und der nächsten Tasse? Das ist einfach. Am besten rechnet man die 16 Stunden in Minuten um (eine Stunde = 60 Minuten), also 960 Minuten: 10 Tassen = 96 Minuten, eine Stunde und 36 Minuten, so sind die Zeitabstände, wirklich?.

Es ist jetzt 11 Uhr und 23 Minuten. Er verspürt schon Lust auf eine Tasse. Wie lange muss er noch warten? Da gilt es zunächst Informationen zu sammeln. Wann ist er aufgestanden? Und wann hat er die erste Tasse getrunken? Ohne diese Informationen kann man die Aufgabe nicht ausrechnen. Er ist, sagen wir, um 8 Uhr aufgestanden und die erste Tasse hat er eine halbe Stunde später getrunken. 8 Uhr 30 Minuten, die zweite um ?, die dritte um ?. Am besten rechnet man wieder in Minuten. Um 8 Uhr sind 8×60 Minuten seit Mitternacht (= 0 Uhr) vergangen, 480 Minuten, und 30 Minuten später trinkt er die erste.

Wann trinkt er die nächste? 96 Minuten später? Er trinkt sie früher. Denn bei der ersten Rechnung haben wir nicht bedacht, dass er die erste Tasse erst 30 Minuten nach dem Aufwachen trank und die letzte, die 10., eine halbe Stunden vor dem Einschlafen trinken wird. Also muss neu gerechnet werden! Zwischen der ersten und letzten Tassen liegen nur 15 Stunden, bzw. 900 Minuten und deshalb trinkt Ludwig alle 90 Minuten eine Tasse, gerade alle 1:30 Stunden. Und erst jetzt, nachdem man sich alles noch einmal überlegt hat, kann man die Aufgabe lösen. 8:30 die erste Tasse, 10:00 die zweite und 11:30 die dritte. Um 11:23 kann sich Ludwig schon mal vorfreuen, denn in 7 Minuten geht die Tür auf, die Haushälterin kommt herein, es duftet sehr an-

genehm nach frischem Kaffee und Punkt 11:30 schlürft er den ersten Schluck der (wievielten ?) Tasse! Vorher war er ja ganz nett zu der Haushälterin und hat ihr Danke gesagt. Da freuten sich beide.

Und danach hat er in glücklicher Stimmung den ersten Satz des Erzherzogtrios komponiert. Der Erzherzog Rudolf war nicht nur der Bruder des Kaisers, sondern ein Liebhaber der Musik und deshalb ein Schüler Ludwigs. Ludwig hatte viele Schüler und noch mehr Schülerinnen. Lauter Gräfinnen und Prinzessinnen waren das. Und Ludwig war auch öfters in eine seiner Schülerinnen unsterblich verliebt. Das verstehen wir, denn die Muse des Verliebtseins, das ist so nahe an der Musik wie sonst etwas. Es ist eine Hochstimmung! Und wenn Graf Almaviva in Susanna verliebt ist, dann begehrt er sie. Wie kann man dieses Begehren durch Musik umsetzen? Wolfgang Amadeus konnte es, gleich mal nach hören; wenn Graf Almaviva seufzt: „in giardino, in giardino?“ im Garten, im Garten? (Wolfgang Amadeus' Oper „Figaros Hochzeit“).

Übrigens haben wir jetzt eine andere Art kennen gelernt, das Zeichen „:“ zu verwenden. Es trennt die Stunden von den Minuten. Es ist jetzt 9 Uhr und 23 Minuten oder 9:23. Bisher kannten wir es nur als Zeichen für die Rechenregel „geteilt durch“. Warum schreibt man nicht einfach 9,30? Der Grund ist der: die Stunde wird nicht in hundert gleiche Zeitabschnitte (Minuten) aufgeteilt, sondern in 60. Da müssen wir etwas wichtiges anmerken. Unsere Art, Zahlen aufzuschreiben, ist die Zehner- oder Dezimalmethode. Wir ordnen die Zahlen in Tabellenform. Und die sieht so aus: In der rechten Spalte stehen die Einerzahlen, dann kommen die Zehner usw. und jedes Mal braucht man also nur 10 Zahlwörter (auch Ziffern genannt). Die Rechner im alten Rom kannten noch keine Zahlen, sondern benutzten Buchstaben: M für 1000, D für 500, C für 100, L für 50, X für 10, V für 5 und I für 1.

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Beispiel
0-9	0-9	0-9	0-9	
			8 x 1	8
		8 x 10	8 x 1	88
	8 x 100	8 x 10	8 x 1	888
8 x 1000	8 x 100	8 x 10	8 x 1	8888

Und diese Ziffern wurden nacheinander zusammengefügt. 8888 auf römisch MMMMMMMM DCCCLXXXVIII. Da gerät

man ja schnell in Kopfverwirrung weil so unübersichtlich. Genial also unsere Zehneranordnung, die wir den Indern verdanken, und die Ziffern 0 bis 9 den Arabern. Danke! Da sieht man was die Rechenkunst auch ist, nämlich die Er-

findung des möglichst Einfachen. Man muss aber drauf kommen.

Aber warum rechnet man die Zeit auf andere Weise? Man hat versucht, das Zehnersystem auch dort anzuwenden, aber das hat sich nicht durchgesetzt. Und deshalb gibt es Schwierigkeiten. So zum Beispiel, wenn ich mit dem Auto unterwegs bin und ich fahre mit 120 km die Stunde und ich schaue auf die Uhr, es ist 18:30, und ich schaue auf das Autobahnschild und dort steht noch 144 km bis zu meinem Ziel, die Stadt B, und ich frage mich: wann werde ich dort ankommen (vorausgesetzt es wird keinen Stau geben)?

Da muss der Dreisatz mal wieder ran. Zuerst kann ich die Aufgabe in Worten ausdrücken: WENN ich 120 km in einer Stunde zurücklege und WENN ich noch 144 km fahren muss, DANN brauche ich mehr als eine Stunde aber weniger als 2 Stunden. Das ist eine grobe Schätzung und damit gibt man sich nicht zufrieden. Mit dem Dreisatzdenken geht es genau. Ich suche mir die Einheit, wie viel km in einer Minute? Das sind $120 : 60 = 2$ km. Und wenn ich noch 144 km fahren muss und 2 km in einer Minute zurücklege, dann brauche ich $144 \text{ km} : 2 \text{ km} = 72$ Minuten. Und dann springe ich in das 60er System der Zeitmessung und addiere zu 18:30 72 Minuten: das sind 30 bis zur vollen Stunde und dazu noch 42 Minuten. Wenn nichts dazwischen kommt, steige ich 19:42 aus dem Auto in B.

Ludwig als Gastgeber

Ludwig hat gern Gäste eingeladen und natürlich auch für sie den Kaffee nach seiner Art zubereiten lassen. Und die Gäste kamen gerne, weil sie wussten, bei Ludwig gibt es wunderbare Musik und obendrein einen vorzüglichen Kaffee. Nun muss gerechnet werden. Das ist wieder eine Planungs- oder Vorratsrechnung.

Sagen wir mal, es kommen 10 Gäste und jeder Gast soll eine Tasse bekommen, dann muss man 10 und 1 Tassen zubereiten, denn Ludwig trinkt ja auch eine. Somit 11 mal 66 Bohnen kaufen und 11 Tassen Wasser erhitzen und aufbrühen in einer Kanne, die mindestens 11 mal Tasseninhalt groß ist. $11 \times 66 = 726$ Bohnen. Dies alles zusammengenommen ergibt Kaffee nach Ludwigs Art für 10 Besucher und für den Gastgeber auch eine. Da Ludwig an diesem Tag ja noch 9 weitere Tassen trinkt, 5 vor und 4 nach dem Besuch, mussten an diesem Tag 1320 Bohnen vorrätig sein. Und was spielte Ludwig an diesem schönen Nachmittag seinen Gästen vor? Möglicherweise Auszüge aus der „Kaffeekantate“ seines Kollegen Johann Sebastian Bach. Na, der

scheint ja auch ein Kaffeefreund gewesen zu sein! Da waren alle zufrieden, die Gäste und Ludwig.

Wenn aber weniger Bohnen vorrätig waren, dann hat es für die Gäste gereicht, aber Ludwig hätte sich, nachdem die Gäste gegangen waren, mal wieder ärgern müssen. Wie viel Tassen konnte er noch trinken, wenn der Vorrat nicht ausreichend war, sagen wir 1000 Bohnen waren da, dann fehlten 320 Bohnen. Dann konnte er, nachdem die Gäste gegangen waren, noch 4 Tassen nach seiner Art trinken. Und noch eine, aber da waren nur noch ? Bohnen drin, so einen schwachen Kaffee konnte er kaum trinken, es war zu geschmacklos und er ärgerte sich, schimpfte.

Und die Haushälterin war gekränkt und sagte: „Machen Sie doch Ihren Kaffee selber, ich kündige“, packte ihre Sachen zusammen und ging. Und die Moral der Geschichte: wenn man verärgert ist, sollte man seine Zunge hüten, denn der Schaden kann sehr groß sein. Das nur nebenbei. Jedenfalls saß Ludwig am nächsten Tag um 8:30 am Kaffeetisch ohne Kaffee! Und war sehr verärgert, aber diesmal über sich selbst. So ist es im Leben, mal freut man sich, mal ärgert man sich, mal über andere, mal über sich selbst. Oft ärgert man sich beim Einkaufen, weil die Waren sehr teuer sind. Da rechnet man nicht in Dingen (Bohnen), sondern über Preise (damals gab es Geldstücke in Taler und Groschen, wir nehmen aber Euro und Cent).

Und wie ging der Streit mit der Haushälterin aus? Er hat sich entschuldigt für seine momentane Heftigkeit. Da fällt auch einem Genie kein Zacken aus der Krone! Und die Haushälterin sagte: „perdono, perdono“, ich verzeihe Ihnen! Sie wusste ja, dass Ludwig sehr lange und sehr angestrengt arbeitete und oft das, was er gestern gearbeitet hatte, am nächsten Tag wieder verwarf, um es noch besser zu machen.

Und es war gerade einige Tage her, dass sie in der Oper, oben auf dem obersten Rang, dort wo es (kostenlose) Stehplätze gab für die Musikliebhaber, die arm waren, stand und so ergriffen war, als die Gräfin dem untreuen Grafen Almaviva verzieh. Es ist die schönste Verzeihmusik, die ich kenne und sie ist die Schlusszene aus „Figaros Hochzeit“. Gleich auch dieses mal anhören, da hat man was fürs eigene Leben.

Dass es heute so ist, dass sich viele den Besuch einer Operaufführung nicht leisten können, und schon gar nicht, wenn sie Kinder haben, das ist ganz schlimm und ärmlich für unsere Zeit, die ja viel reicher ist als die zu Ludwigs Zeiten.

Und Ludwig? Er kannte Wolfgang Amadeus, er hatte ihn kurz vor dessen frühen Tod im Winter 1791 besucht, er, der junge Musiker des Bonner Hoforchesters tauchte ein in die Musikwelt, die wir heute die Wiener Klassik nennen. Eine Folge, ja eine Explosion großer Musikwerke, die damals entstanden sind. Wer die Werke der großen Meister Joseph Haydn, Wolfgang Amadeus Mozart, Ludwig van Beethoven und Franz Schubert nicht kennt, hat viel verpasst im Leben.

Die Haushälterin kauft ein

Also, die Streitepisode ging gut aus! Und am nächsten Morgen schaut die Haushälterin in die Kaffeebüchse, mein Gott, die ist leer! Ludwig schläft noch. Also geht sie schnell zum Laden um die Ecke. Und was liest sie da: Sonderangebot! 1000 Kaffeebohnen für nur 6 Euro. Sie braucht aber nur 660, so viel für den heutigen Tag. Sie möchte also wissen, was sie bezahlen muss, wenn sie weniger braucht. Das ist eine Dreisatzaufgabe und die benutzen wir jetzt, um die Rechenmethode Schritt für Schritt zu erläutern. Im ersten Satz wird die Aufgabe niedergeschrieben nach der Methode WENN und WENN DANN. Der erste Satz lautet: 1000 Bohnen : 6 Euro = 660 Bohnen : ? Euro. Das Zeichen „:“ besagt dieses Mal „zu“ oder „entspricht“.

Dann kommt ein Sprung zum zweiten Satz und dieser Sprung ist der wichtigste. Man rechnet nämlich aus, was eine Bohne (die Grundeinheit) kostet. $6 \text{ Euro} : 1000 \text{ Bohnen} = 0,006 \text{ Euro}$. Und dann der zweite Sprung zum dritten Satz. Ich nehme die gewünschte Zahl von Bohnen und multipliziere sie mit dem Preis für eine Bohne. $660 \text{ Bohnen} \times 0,006 \text{ Euro für eine Bohne} = 3,96 \text{ Euro}$.

Mit drei Sätzen und zwei Sprüngen zum Ziel! Dreisatzrechnung heißt: Aus einem Verhältnis (zum Beispiel) 5 zu 3 auf das einfachste 1 zu ? schließen und dann mit Hilfe dieses Wertes das Ergebnis 4 zu ? berechnen.

Sie geht nach Hause, richtig zufrieden, denn der Kaffeevorrat für den Tag ist gesichert (wenn keine Gäste kommen). Und was machte Ludwig inzwischen? Er ist aufgestanden und freut sich auf den ersten Kaffee. Aber als er hört, 3,96 Euro sind ausgegeben, da brummelt er schon wieder, weil er halt auch etwas geizig war. Aber das ist eine ganz andere Geschichte, nämlich mit dem Geld haushalten. Sollte er vielleicht nur 50 Bohnen-Kaffee trinken? Oder eine oder zwei Tassen weniger? Dann sind die Kosten für den Kaffee geringer. Es gab Zeiten, da hatte Ludwig wirklich schwere Geldsorgen.

Übrigens, wir haben jetzt zum ersten Mal mit einer Zahl gerechnet, die zwei Teile hat, nämlich einen Teil vor oder links vom Komma und einen weiteren nach oder rechts vom Komma. Wie im Fall 3,96 Euro. Dies ist eine Erweiterung des Zahlenbereichs, die nötig geworden ist, damit Teilungsrechnungen ausführbar sind. Man könnte so vorgehen, dass Ergebnis ist 3 Euro und es bleibt ein Rest übrig. Statt dessen schreiben wir einfach 3,96.

Jetzt können wir uns ein Bild der Zahlen und Rechenregeln machen, die wir schon kennen gelernt haben. Es wird jetzt ein bisschen theoretisch, was besagt, wir nehmen die grundsätzlichen Eigenschaften bei der Rechenarbeit ins Visier. Lieber Leser, liebe Leserin, wenn Sie lieber Ludwigs Geschichte weiter verfolgen wollen, dann überspringen Sie einfach das nächste Kapitel und lesen Sie es später.

Zahlen, wie man sie braucht!

Wie alles, was die Natur wie wir Menschen tun, es steht ein Zweck, eine Absicht dahinter. Der Löwenzahn zum Beispiel ordnet die Samen in seiner Blüte so an, dass möglichst alle, und es sind ja viele, vom Wind erfasst werden und mit Hilfe ihres Federhütchens weit gestreut werden. Man kann nun die Zahl der Samen zählen und sich überlegen, wie viele und wie weit sie von einem heftigen Wind gestreut werden. Nun gut, der Löwenzahn hat nicht gerechnet. Aber unser Denken kann am Beispiel des Löwenzahns den Bauplan erfassen und seinen Zweck verstehen. Wir bewundern einerseits die Raffinesse der Anordnung und andererseits die Üppigkeit des Samenstandes, Zahl und Raum und Energie (der Windstoß) bilden eine zweckvolle Einheit.

Um diese zu verstehen, ist an erster Stelle das Abzählen nötig, das ist der erste Zweck, wofür wir Zahlen brauchen. Da liegt ein Häufchen Bohnen und wir wollen wissen, wie viele es sind. Die erste Bohne, die wir herausnehmen, bekommt die Zahl 1, die zweite die Zahl 2 usw. Nachdem wir alle Bohnen weggenommen haben, wissen wir das Ergebnis, die Anzahl. Es sind so und soviel Bohnen im Häufchen, sagen wir mal 300. Aus einer anderen Dose nehmen wir die Bohnen heraus und zählen sie ab, es sind 120. Nun bilden wir ein neues Häufchen aus allen Bohnen, wir vereinigen die beiden Häufchen. Wir brauchen jetzt nicht mehr abzählen, sondern - das ist der zweite Zweck - wir nehmen etwas zusammen und brauchen nur noch $300 + 120 = 420$ ausrechnen.

Der dritte Zweck ist: wir nehmen etwas heraus, sagen wir 66 Bohnen für

die erste Tasse Ludwigs am Morgen. Das müssen wir abzählen, 1, 2, 3 66. Nun haben wir zwei Häufchen; eins für die Tasse und eins ohne die weggenommenen 66 Bohnen. Das brauchen wir nicht wieder abzählen, sondern wir rechnen einfach $420 - 66 = 354$ Bohnen.

Der nächste Zweck ist, wir unterteilen. Bilden 66 Bohnen-Häufchen für die 1., 2., 3. Tasse usw. Das geht ohne weiteres, aber nach dem 6. Häufchen ($6 \times 66 = 396$) ist das ursprüngliche Häufchen sehr klein geworden, es sind nur noch 24 Bohnen vorhanden. Für die nächste Tasse fehlen 22.

Und an dieser Stelle kamen die Rechenkünstler mal wieder auf eine sehr gute Idee. Sie sagten sich nämlich, um alle Abziehrechnungen, zum Beispiel $8 - 13 = ?$, ausführen zu können, verlängern wir die Zahlenfolge über die 0 hinaus in die Gegenrichtung. Die 0 ist der Mittelpunkt und nach rechts läuft die Reihenfolge der positiven Zahlen und nach links die der entgegengesetzten Zahlen, die wir die negativen Zahlen nennen. Die Rechenkünstler nennen diesen Vorgang, eine neue Zahlenfolge zu bilden, die Erweiterung des Zahlenraums (und davon gibt es noch weitere). Man sieht sofort den Vorteil. Denn jetzt ist die Rechnung $8 - 13 = -5$ ausführbar. Und für die Häufchenbildung bringt das auch sehr viel, denn nun können wir weiter rechnen: 24 Bohnen waren noch da, und 42 fehlen, das sind die „Negativbohnen“, also die, die wir noch kaufen müssen, damit wir das Häufchen für Ludwigs 7. Tasse zusammen bekommen.

Usw.	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	Usw.
Das sind die negativen Zahlen.							Die 0 (Null).	Das sind die positiven Zahlen.						
Alle zusammengenommen sind es die ganzen Zahlen.														

Dieser Zahlenraum ist wie ein Bild der Gegensätze. Und die beherrschen doch unsere Welt: die vorhandenen und die fehlenden Bohnen, rückwärts oder vorwärts fahren usw. Der Kaufmann hat Geld in der Kasse, muss zugleich noch Rechnungen bezahlen. Aus dem Zusammenziehen der beiden Seiten entsteht das eigentlich wichtige Ergebnis. So sagt der Kaufmann zum Beispiel: „Ich habe mehr Geld in der Kasse als Schulden“. Und freut sich.

Vor dieser Neuerung im Rechnen ging es viel unpraktischer zu. Da machten sich die Kaufleute Kerben auf Stöckchen, eines für die Guthaben und eines für die Schulden. Und legten sie dann nebeneinander, da wussten sie, ob

sie sich Sorgen machen mussten oder nicht. Und heute sagt man noch sprichwörtlich, der hat was auf dem Kerbholz (aber nichts Gutes!). Und selbst in den Gefühlen kann man so vorgehen: froh sein oder traurig sein und in der Mitte sind wir es weder noch, da sind die Gefühle im Stillstand, aber sicher wird es sich ändern, entweder in Richtung missgelaunt oder frohgelaunt.

Alle die Zahlen, die sich links von der 0 befinden muss man kennzeichnen, damit sie unterschieden werden können, von denen, die rechts stehen. Das macht man, indem man ein „-“ das Minuszeichen davor setzt. +5 ist rechts der 0, und -5 ist links der 0. Das + vor den Zahlen rechts der Null lässt man aber fast immer weg, das sind die stillschweigenden Vereinbarungen, die man doch im Hinterkopf haben muss, wenn es einmal unklar wird. $5 - 8 = -3$. Man sieht, das Zeichen „-“ ist einmal eine Rechenanweisung und zugleich ein Zeichen dafür, dass die Zahl 3 sich links von der Null befindet. So eine Doppelbedeutung kommt vor, da muss man aufpassen.

Es gibt ja nun Rechnungen, die sehen schon sehr seltsam aus: $-5 - -5 = ?$ Da gelten nun einige Regeln: Erstens in Klammern setzen: $(-5) - (-5) = ?$ Klammersetzen schafft Überblick. Zweitens muss man beachten, dass jede Zeichensprache Zeichenzusammenstellungen ermöglicht, die nicht gleich verständlich sind. Und daraus folgt drittens, dass man prüfen muss, welchen Zweck man gerade verfolgt. Man muss immer wissen, was die Glieder bedeuten und das ergibt sich immer aus dem Zweck der Rechnung. Also: nicht von der Rechnung aus sich die Frage stellen, was hat denn das zu bedeuten, sondern umgekehrt vom Zweck und Ziel auf die Rechnung schauen, wofür ist sie nützlich.

Wie kann man nun den seltsamen Fall $(-5) - (-5) = ?$ verstehen? Doch nur so, dass einem Kaufmann von seinen Schulden in Höhe -5 Schulden in Höhe -5 abgehen (er hat sie nämlich mittlerweile bezahlt) und daher ist sein Schuldenkonto ausgeglichen. Das Ergebnis ist also 0. Da kommt man aber doch in Kopfverwirrung und da ist es das beste die Gegensätze nicht hintereinander zu schreiben, sondern sie neu zu ordnen. In einer Tabelle wird man in der ersten Spalte alles, was man hat, und auf der rechten, alles was man schuldet, auflisten. Dann kommen so unübersichtliche Rechnungen wie $(+20) - (-5) + (+5) + (-8) - (+5) = ?$ gar nicht zustande. Übersichtlichkeit herstellen, bevor ausgerechnet wird. $20 - 5 = 15$, aber $20 + (-5) = ?$ Auch 15.

Und noch etwas muss man bedenken. Wie geht man mit den Gliedern einer Rechnung um, die + und - einerseits und x und : andererseits enthält?

Auch da helfen Klammern. $6 + 10 \times 10$ ist eine ganz andere Rechnung als $(6 + 10) \times 10$. Das erste Ergebnis ist 106, das zweite 160. Klammern setzen ist dann, wenn die Berechnung etwas schwieriger wird, eine sehr gute Methode, da sie die Abfolge der Rechenschritte verdeutlicht. Und diese geht so: Zuerst den Wert der Klammer berechnen, dann die Punktrechnung ausführen (multiplizieren / dividieren) und zum Schluss die Strichrechnung (addieren / subtrahieren). Das darf nicht durcheinander gebracht werden!

Wie kann man jede Rechnung verwirklichen, wenn geteilt wird? Wenn also die Zahl 3,96 entsteht, weil die Teilungsrechnung nicht aufgeht. Dafür hat man die nächste Erweiterung, die der rationalen Zahlen erfunden. Gemeint ist mit „rational“ nicht, dass diese Zahlen „vernünftig“ sind (alle Zahlen sind vernünftig), sondern dass man mit ihnen eine „ratio“, eine Teilung ausführen kann. Die Idee ist mal wieder sehr einfach (gleichwohl man sie erst spät gefunden hat): man teilt die Zwischenräume zwischen den ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... usw. in gleiche, kleinere Zwischenräume auf, natürlich nach der Zehnermethode. Eine rationale Zahl ist also eine Erweiterung des Zahlenraums zwischen den 1, 2, 3 usw. Zahlen. Und diese Teilzahlen werden rechts vom Komma geschrieben. 88,1432 ist also eine rationale Zahl. Zwischen 88 und 89 ist noch etwas zusätzliches enthalten. Beim Messen sind die rationalen Zahlen ganz besonders wichtig, wenn zum Beispiel etwas passgenau zugeschnitten werden soll. In der Musik ebenfalls, das aber später.

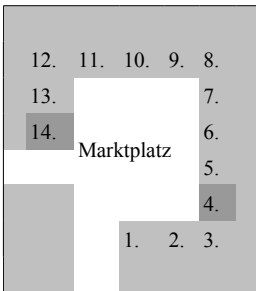
Ludwig besucht das Kaffeehaus seines Bruders Johann

Das Haushalten ist einer der größte Anwendungsbereiche der Rechenkunst. Beim Haushalten muss man sehr aufpassen, denn wenn es schief geht, stehen wir dumm da. Haushalten ist ja immer eine Sache, an dem mehrere Menschen beteiligt sind: einmal, die, die etwas brauchen, und die, die es hergestellt haben. Und einmal sind wir Hersteller und einmal „Braucher“. Früher tauschte man, ein Fuder Hafer gegen ein Kessel für die Küche, den man zum Kaffeekochen brauchte. Heute macht man diese Tauschgeschäfte mit Hilfe des Geldes und seither wird heftig gerechnet. In den Lehrbüchern von Adam Riese geht es hauptsächlich um dieses kaufmännische Rechnen.

Wir gehen mit Ludwig in ein Kaffeehaus und dort lernen wir den Bruder von Ludwig, Johann, kennen. Johann ist auch ein Musikliebhaber, das lag so in der Familie. Aber neben dem Musikspielen macht er seine Hauptarbeit, er hat nämlich ein Kaffeehaus eröffnet: „Johanns Kaffeestube“, geöffnet von 10

bis 16 Uhr. (Der wirkliche Johann war übrigens ein erfolgreicher Apotheker).

Kaffeehäuser waren in Wien, dort wo die beiden lebten, damals große Mode geworden, und ist es bis heute. Und natürlich: Auch Johann nimmt immer 66 Bohnen, auch das Kaffee trinken liegt in der Familie, das war schon damals in Bonn bei ihren Eltern so. Musik ist ein Genuss und Kaffee ist ein anderes Genussmittel. Und es ist immer gut, wenn man nicht nur eine Sache tut, sondern mehrere, das belebt. Wenn man nur eine Sache all die ganze Zeit tut, dann wird man leicht mürrisch und die Aufmerksamkeit und damit die Leistung der Arbeit nimmt dann ab.



„Johanns Kaffeestube“ befindet sich am Marktplatz Nr. 5, Ludwigs Wohnung in Nr. 14. Das ist - wie schon mit Blick auf die Zeit behandelt - eine Ordnungszahl, eine Nummerierung. Wie viele Häuser befinden sich zwischen dem ersten und dem fünften Haus? Die Häuser mit den Nummern 2, 3 und 4, also 3 Häuser. Es kommt schon mal vor, dass man denkt, $5 - 1 = 4$. Da sieht man gleich, mit Ordinalzahlen kann man nicht so wie mit Kardinalzahlen umspringen.

Es sind ja 3 Häuser. Aber da kann man sich auch behelfen, man sagt zwei Häuser sind ja schon weg von den fünf alle zusammengekommen, nämlich das erste und das letzte. Und dann wird die Rechnung richtig: 5 Häuser insgesamt - 2 (das erste und das fünfte) = 3. In der Musik spielen die Ordinalzahlen eine sehr große Rolle, da muss man sehr aufpassen.

Johann als Betreiber eines Kaffeehauses ist Kaffeekoch einerseits (verantwortlich für guten Kaffee) und Kaufmann (verantwortlich dafür, dass sein Kaffeehaus gut „läuft“). Das heißt, er rechnet einmal in Material (Kaffeebohnen, Wasser, Geschirr usw.) und zum andern in Preisen, also in Geld. Aufwand (Materialkosten) und Ertrag, was übrig bleibt, wenn am Abend die Einnahmen festgestellt werden und die Materialkosten abgezogen werden. Johann ist ein doppelter Haushälter, nach Material und nach Kosten. Da bestehen offenbar zahlreiche Notwendigkeiten für den Einsatz des Dreisatzes!

Außerdem ändert sich seine Rechnung immer wieder, weil die Zahl der Gäste der Zeit nach unterschiedlich ist. Sagen wir, letztes Jahr kamen jeden Tag 50 Kunden (eine Tasse pro Kunde gerechnet) und im laufenden Jahr sind es 10 mehr, also 60. Es hat sich nämlich herumgesprochen, dass der Kaffee bei Johann besonders gut schmeckt, und, wenn grade Zeit ist, setzt sich Lud-

wig in Johanns Kaffeehaus ans Klavier. Schöner kann es gar nicht kommen an so einem Tag, wenn es draußen kalt ist und es regnet.

Zuerst einige Informationen über das erste Jahr. Es kommen jeden Tag 50 Besucher. Das Kaffeehaus ist an jedem Tag der Woche offen, also 7 Tage die Woche oder 365 Tage das Jahr. Die Materialrechnung: 66 Bohnen x 50 Tassen Kunden = 3.300 Bohnen, das ist die Zahl der benötigten Bohnen für einen Tag, und 3.300 Bohnen x 7 Tage = 23.100 für eine Woche. Die Gäste kommen und trinken eine Tasse und dementsprechend wird der Bestand immer kleiner. Im ersten Jahr, genau am 5. Juni, ein Montag, hat Johann morgens nachgezählt und stellt fest, er hat heute einen Vorrat von 20.000 Bohnen. Das schauen wir uns mal in der Tabelle genauer an. Das ist die Rechnung des Materialabgangs im Verlauf der Zeit.

Tag ab Montag (Ordinalzahl)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Bohnenbestand am Morgen	20.000	16.700	13.400	10.100	6.800	3.500	200
Verbrauch an Bohnen (50 Gäste pro 66 Bohnen)	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3 Tassen!
Bohnenbestand am Abend	16.700	13.400	10.100	6.800	3.500	200	2
Kalendertag im Juni (Ordinalzahl)	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

Anmerkung: Der Punkt ist kein Rechenzeichen, er trennt nur die Tausender optisch.

Wie lange wird der Vorrat ausreichen, wann muss Johann wieder Bohnen besorgen? Man sieht, am Abend des Samstags, der 10. Juni, waren nur noch 200 Bohnen übrig. Und das Geschäft zum Nachkaufen hat schon geschlossen. Die reichen nur für 3 Tassen, und dann bleiben nur noch 2 Bohnen übrig. 47 Gäste kommen noch und die bekommen keinen Kaffee und natürlich sind sie sehr verärgert. Und Johann ja auch über sich selbst. Erstens, weil er nicht rechtzeitig vorgesorgt hat, und zweitens, weil er keinen Ertrag machen konnte, und drittens, weil er zu Recht vermutet, dass die Gäste, die vergeblich gekommen sind, so verärgert sind, dass sie nicht mehr kommen werden. Da hat er in der Not einen klugen Gedanken gefasst: heute gibt es zwar keinen Kaffee, aber solange die Gäste da sind, spiele ich ihnen Ludwigs Musik vor, kostenlos natürlich! Situation gerettet!

Der Philosoph Immanuel Kant hat gesagt, man muss das Schwere leicht machen können. Aber oft geht es in die andere Richtung und dann verderben sich viele Leute das, was sie gerade vorhaben, oder sogar ihr ganzes Leben. In vielen Fällen (aber nicht in den besonders schwierigen) hilft da das vorausschauende Rechnen (die Planung) ungemein. Was man tut zur rechten Zeit,

vermeidet jede Schwierigkeit! Sprich: Johann hätte am verkaufsoffenen Samstag nachkaufen müssen, das ergab sich aus der vorausschauenden Rechnung. Na ja, es gilt: aus Schaden wird man klug.

Und wie verändert sich die Zeit (die Dauer bis zum nächsten Einkauf), solange der Vorrat reicht, wenn die Zahl der täglichen Besucher zunimmt? So wie im zweiten Jahr, als 60 Kunden pro Tag kommen? Früher war es so: $66 \text{ Bohnen} \times 50 \text{ Gäste} = 3.300 \text{ Bohnen}$. Und $20.000 \text{ Bohnen} / 3.300 \text{ Bohnen (für einen Tag)} = 6 \text{ Tage}$ und ein wenig mehr. Spätestens am 6. Tag und zwar morgens musste Ludwig also nachkaufen.

Bei der zweiten Frage, wie lange der Vorrat reicht, wenn 10 mehr Kunden kommen, muss Johann kurz nachdenken, das Ergebnis „überschlagen“: wenn mehr Kunden kommen, reicht der Vorrat für weniger Tage. Die Zahl der Kunden nimmt ja zu, aber die Dauer bis zum nächsten Einkauf verringert sich. Der Vorrat ist früher erschöpft. Bitte ausrechnen. Stimmt das Ergebnis? Es sind jetzt nur noch 5 Tage und ein bisschen mehr. Wie viel mehr? Er muss also schon am Donnerstag nachkaufen.

Nun denkt Johann, ich kaufe so viele Bohnen, dass sie für eine ganze Woche reichen und zwar dann, wenn - wie neuerdings - 60 Kunden kommen. Die Rechnung geht nun so: $7 \text{ Tage} \times 66 \text{ Bohnen} \times 60 \text{ Gäste am Tag} = 27.720 \text{ Bohnen}$. So viel Bohnenvorrat braucht Johann für eine Woche, und er muss nur einmal einkaufen, am Montag Morgen, bevor die ersten Kunden kommen.

Das nennt man Planung: WAS muss ich WANN tun, damit der Betrieb nicht ins Stocken gerät und das Einkommen gleich mit. Oder: WAS muss ich tun, damit ich nicht unnötigerweise oft einkaufen gehen muss. Übrigens freut er sich, dass mehr Kunden kommen, obwohl er ja mehr arbeiten muss. Die Freude ist aber größer als die Belastung durch mehr Arbeit.

Wie kann er Freude berechnen? Und die Last? Und wenn der Kaffee so gut schmeckt, dann trinken einige der Kunden gleich 2 Tassen. Wie verändert sich dann die Berechnung? Materialmäßig hat er schon alles im Griff, jetzt wollen wir mal sehen, ob er auch kaufmännisch alles im Griff hat. Jetzt rechnet Johann als Kaufmann, der sich fragt, komme ich zurecht? Womit? Mit dem Preis, den er für eine Tasse verlangt.

Übrigens: kann man Freude berechnen? Ja, natürlich! Es ist die Zahl der Stunden oder Tage, die freudig waren, im Vergleich zu denen, in denen das Gegenteil zutraf. Aber, dass die Stunde und der Tage freudig sind, da müssen

wir uns selbst drum bemühen. Kaffee trinken und Musik hören können da durchaus nützlich sein, in Maßen natürlich!

Am Jahresende zieht Johann Bilanz

Er rechnet rückblickend aus, welchen Gewinn er für seine Arbeit erreichte. Oder anders herum gesagt, wie hoch muss er den Preis für eine Tasse setzen, damit ein Gewinn herauskommt. Das nennt man eine Bilanz, eine Rechnung des Aufwands und Ertrags. Der Gesichtspunkt hat sich geändert. Er rechnete ja bisher materialwirtschaftlich (mit Blick auf die Vorräte an Kaffeebohnen), als Hersteller von Kaffee. Jetzt rechnet er als Kaufmann, der wissen will, ob sich sein Betrieb lohnt. Er rechnet somit in Preisen. Er verkauft eine Tasse für 2 Euro. Er muss sich die Frage stellen, ist der Preis lohnend? Das ist die Frage aller Fragen! Lohnend oder nicht, Sein oder Nichtsein, das ist hier die Frage! Denn wenn es nicht lohnend ist, dann macht er Verlust und muss sein Kaffeehaus früher oder später schließen. Dann wäre er doch sehr verärgert! Übrigens: Verärgert sein ist nicht so schlimm, wie man immer denkt. Denn verärgert sein heißt doch: da ist was schief gelaufen, was muss ich tun, dass es nicht noch einmal so passiert? Das ist das, was man eine Herausforderung nennt, es besser als bisher zu machen.

Johann denkt nach, er rechnet. Im ersten Jahr hatte er 50 Gäste pro Tag. Somit hat er, auf das ganze Jahr gerechnet $50 \text{ (Tassen pro Tag)} \times 365 \text{ Tage} = 18.250 \text{ Tassen}$ verkauft. Eine Tasse Kaffee kostet bei ihm 2 Euro und somit hat er $18.250 \text{ Tassen} \times 2 \text{ Euro} = 36.500 \text{ Euro}$ eingenommen. Er hatte aber Kosten, die muss er von den Einnahmen abziehen. Gehen wir davon aus, dass die Materialkosten für eine Tasse (Kaffee, Wasser, Energie für das Erhitzen) 0,40 Euro für eine Tasse ausmachen. Somit hatte er $18.250 \text{ Tassen} \times 0,40 \text{ Euro} = 7.300 \text{ Euro}$ Materialkosten.

Und hinzu kommen 12.000 Euro für die Miete und 15.000 für seinen Lebensunterhalt, seinen persönlichen Verbrauch für Lebensmittel, Kleidung und Heizung und Theaterbesuche. Jetzt hat er alle Einnahmen und Kostenbestandteile zusammen und kann die Bilanz erstellen. $36.500 - 7.300 - 12.000 - 15.000 = 2.200 \text{ Euro}$.

Er hat also einen Gewinn gemacht, das sind die Euros, die in seiner Kasse verblieben sind. Er freut sich und zu Recht, seine Arbeit hat sich gelohnt mit dem Preis von 2 Euro kommt er gut aus.

	1. Jahr	Pro Tasse	2. Jahr	Pro Tasse
Verkaufte Tassen	18.250		21.900	
Einnahme	36.500		43.800	
Material	7.300	0,4	8.760	0,4
Miete	12000	0,6	12.000	0,5
Lebensunterhalt	15.000	0,8	15.000	0,67
Gewinn	2.200	0,2	9.490	0,43
Preis pro Tasse		2		2

Und wie sieht es für das zweite Jahr aus, als 60 Gäste pro Tag kamen? Er hat jetzt 60 Tassen x 365 Tage = 21.900 Tassen verkauft und x 2 Euro = 43.800 Euro eingenommen. Der Materialaufwand ist gestiegen,

21.900 Tassen x 0,40 = 8.760 Euro. Die Miete und die Lebensunterhaltskosten blieben gleich. Und somit gilt 43.800 Euro - 8.760 Euro - 12.000 Euro - 15.000 Euro = 9.490 Euro. Sehr schön! So kann es immer weitergehen.

Aber wie so oft kommt es anders als man denkt. Zunächst stellen wir aber die errechneten Zahlen in die obige Bilanztafel ein.

Johann vergleicht

Johann hat alle Euros umgerechnet auf eine Tasse. Das ist ja einfach. Man muss nur die Werte für Einnahmen und Ausgaben durch die Zahl der Tassen teilen: Also zum Beispiel: 12.000 Euro für die Miete : 18.250 Tassen = 0,60 Euro. Auf diese Weise erhält man für die Kosten und den Gewinn den Wert bezogen auf den Preis für eine Tasse. Diese Rechnung ist ungemein wichtig, weil sie ermöglicht zu vergleichen. Und vergleichen, das ist so mit das Wichtigste im Leben. Und wir machen es ja ständig, wenn wir sagen, dieser oder das ist kleiner, größer, dicker, dünner, länger oder kürzer als derjenige oder dasjenige.

Im Beispiel ist der Gewinn des zweiten Jahres größer als im vorangegangenen Jahr. Und zwar erheblich. Aus dem Vergleich kommt immer wieder eine Anleitung für das Handeln zustande, auch dazu gleich mehr. Jedenfalls kann sich Johann sagen: Aus dem Vergleich ergibt sich, dass mein Kaffeehaus im zweiten Jahr schon viel besser läuft als im ersten. Es hat sich gelohnt, den Kaffee so gut zu machen, wie er ihm und seinen Kunden schmeckt, gehaltvoll nämlich. Als Kaufmann macht Johann auch in jedem der folgenden Jahre eine Bilanztafel. Wäre es nicht gut, wenn er diese Rechenarbeit vereinfachen könnte? Schade, dass es zu seiner Zeit noch keine automatisierte Tabellenkalkulation gab, er musste alles mit der Hand ausrechnen. Heute haben wir großartige Helfer für so etwas.

Die Tabellenkalkulation

Die Tabellenkalkulation ist wirklich ein sehr nützliches Werkzeug, weil man nicht mehr bei jeder neuen Rechnung alle Einzelrechnungen durchführen muss, sondern nur noch die Werte, die sich verändert haben, einträgt. Sie ist auf jedem Computer vorhanden (man kann sie kostenlos aus dem Internet herunterladen). Was eine Tabelle ist, haben wir ja schon beschrieben. Was unterscheidet eine Tabellenkalkulation von einer Tabelle? Wie in der einfachen Tabelle ist die Tabellenkalkulation eine Tafel aus Zellen, die untereinander (Spalten) und nebeneinander (Zeilen) angeordnet sind, und zusätzlich mit Randfeldern versehen sind. Der Unterschied ist allein der, dass wir jetzt Infozellen und Ergebniszellen unterscheiden. In die Infozellen schreiben wir, wie der Name ja sagt, das hinein, was wir wissen, die bekannten Werte. Bekannt ist ja schon, die Zahl der Tassen und die Ausgaben. Die erste Berechnung ist die der Einnahmen. Danach folgt die Berechnung der Materialkosten. Dann werden von den Einnahmen, die Kosten für Material, die Miete und die Lebenshaltungskosten von den Einnahmen abgezogen und daraus ergibt sich der Gewinn als eine Folge von Berechnungen: Zahl der Tassen für das gesamte Jahr = Zahl der Gäste x 365 Tage (jeder Gast trinkt eine Tasse). Einnahme = Zahl der Tassen x 2 Euro. Kosten = Zahl der Tassen x 0,40 Euro + Mietkosten + Lebensunterhaltung. Gewinn = Einnahmen - Kosten. Diese Rechenfolge bleibt bei den jährlichen Bilanzrechnungen immer dieselbe.

Wie führt nun der Computer diese Berechnungen aus? Was die Infozellen angeht, so sind in diese die bekannten Informationen durch den Nutzer hineingeschrieben worden. Es ist jeweils ein Wert. Die Ergebniszelle enthält aber eine doppelte Information und zwar die Rechenanweisung und das Ergebnis der Berechnung. Der erste Inhalt ist nicht sichtbar, der zweite, das was ja interessiert, das Ergebnis, wird in der Zelle angezeigt. Je nach den veränderten Informationen ergeben sich bei jeder nächsten Rechnung neue Werte in den Ergebniszellen.

	Spalte A	Spalte B	Spalte C
Zeile 1	A1 (5)	B1	C1
Zeile 2	A2	B2 (40)	C2
Zeile 3	A3	B3	C3 (8)

Zwei Fragen ergeben sich: wie informiert man die Ergebniszelle, was sie berechnen muss. Dazu

braucht man eine (aber nur eine) Anweisungszelle. In der wird abwechselnd für jede Ergebniszelle vorgeschrieben, was zu berechnen ist. Und eine weitere Frage ist, wie weiß die Ergebniszelle auf welche Infozellen zugegriffen

werden muss. Sie weiß es, weil jede Zelle eine Adresse hat. Das hatten wir ja schon. Sie wird gebildet aus der Nummerierung der Spalten nach dem Alphabet, A, B, C usw. und die Zeilen nach Ordnungszahlen 1., 2., 3. Zeile usw. Wenn für die Spalten Z erreicht ist, dann geht es mit AA, AB, AC usw. weiter. Jede Zelle hat nun eine bestimmte Adresse, zum Beispiel A 5, die fünfte Zeile der Spalte A. Und so lautet die Anweisung für die Ergebniszeile so: Nimm die Zelle A 2 und multipliziere sie mit der Zelle A 3. Damit ist der Computer programmiert und weist das Ergebnis in Zelle A 5 aus.

Der Vorteil liegt auf der Hand: Ich brauche, wenn sich die Informationen verändern, nur noch diese eintragen und dann erscheint das nun neu berechnete Ergebnis. Und da der Computer die Tabellenkalkulation speichert, kann ich das immer wieder wiederholen. Wie Johann, wenn er seine Bilanzrechnung ein Jahr später (oder öfters) wiederholt. Wer sich das ausgedacht hat, dem oder der gebührt ein ganz dickes Lob. Als es vor einigen Jahrzehnten den Computer noch nicht gab, musste man Stunden für Stunden Zahlen ausrechnen; jetzt dauert dieselbe Arbeit ein paar Sekunden.

Als Beispiel: Wir wollen berechnen 5×8 . Und was macht der Computer? Wir haben die Zelle B 2 mit Hilfe der Anweisungszelle so programmiert: Nimm die Zelle A1, nimm die Zelle C3, multipliziere die Werte und schreibe das Ergebnis in die Zelle B 2; $5 \times 8 = 40$. Wir müssen, um den Vorteil zu verstehen, nur feststellen, wie viel Zeit wir auf einem Tischrechner brauchen und dann vergleichen mit der Zeit, die der Computer (eine Millionste Sekunde vielleicht) benötigt. Und der Zeitvorteil bei vielen und schwierigen Rechnungen wird sehr schnell riesig groß. Auch die Bilanzrechnung Johanns ist ja sehr vereinfacht, es müssen bei den wirklichen Bilanzen noch weitere Bestandteile berücksichtigt werden, so zum Beispiel die Steuern, denn der Staat „trinkt“ bei jeder verkauften Tasse Kaffee gewissermaßen mit.

Johann berechnet Varianten

Und es kommt so manches zusammen, was immer wieder neue Berechnungen verursacht. So wird leider der Kaffeepreis erhöht und auch die Miete. Wie entwickelt sich nun der Gewinn? Kann er seinen Preis halten? Muss er vielleicht seine Lebenshaltungskosten verringern? Auf der folgenden Seite sind so Beispiele zusammengestellt, wie es kommen kann. Im ersten Jahr machte Johann einen schönen Gewinn, im zweiten Jahr einen noch höheren, wie in der ersten Kalkulation ausgerechnet wurde. Aber danach kommt es

„dicke“, die Kosten werden höher, der Gewinn fällt.

	Info	Absolut	Pro Tasse	Info	Absolut	Pro Tasse
Besucher	60	21.900		60	21.900	
Ertrag	2	43.800		2	43.800	
Material	0,5	10.950	0,50	0,5	10.950	0,50
Miete		12.000	0,55		13.000	0,59
Lebenskosten		15.000	0,68		16.000	0,73
Gewinn		5.850	0,27		3.850	0,18
Preis			2			2
	Da der Kaffee teurer geworden ist, ist der Gewinn niedriger als vorher, aber immer noch höher als im ersten Jahr.			Jetzt sind auch die Kosten für Miete und Lebensunterhalt gestiegen. Der Gewinn fällt durch 3 Ursachen. Den Preis 2 Euro kann Ludwig noch halten.		
		Absolut	Relativ	Jetzt sind die Kosten für den Kaffee weiter gestiegen und auch die Kosten für die Miete und den Lebensunterhalt sind wiederum höher, oh je, Johann macht Verlust, den Preis von 2 Euro kann er nicht mehr halten.		
Besucher	60	21.900				
Ertrag	2	43.800				
Material	0,7	15.330	0,70			
Miete		13.000	0,59			
Lebenskosten		16.000	0,73			
Gewinn		-530	-0,02			
Preis			2			

Tja, so ist es im Leben: man muss immer vorausschauend bilanzieren, den Überblick behalten, und auch den Gefahren ins Auge sehen!

Noch mehr Vergleiche

Er kann jetzt noch die Bilanz pro Tasse sich genauer anschauen. 7.300 Euro : 18.250 = 0,40 Euro. Von den 2 Euro für eine Tasse entfallen 40 Cent auf die Materialkosten, 60 Cent auf Miete, 80 Cent auf Lebensunterhalt und 20 Cent bleiben für ihn übrig. Das ist eine sehr nützliche Rechnung, denn man sieht jetzt deutlicher als bei den Gesamt- oder Absolutzahlen, in welche Bestandteile sich die Kostenlage seiner Bilanz aufteilt. Man nennt dies die Umwandlung einer Gesamt- oder absoluten Zahl in eine Bezugs- oder Relativzahl.

Sie geht zum Beispiel so: Die Zahl, die bezogen werden soll, hier die Kosten für das Material = 7.300 Euro, auf die Zahl der Tassen. Dann hat man die Kosten für eine Tasse, es sind ja 40 Cent. Und danach relativiert man noch

einmal. Jetzt aber nicht waagrecht, sondern senkrecht auf die Bezugszahl 2 Euro ausgerichtet. Diese Zahl hat keine Dimension, es ist eine reine Bezugszahl, die eigentlich nur dann, wenn man sie mit anderen Werten vergleicht, eine Information darstellt.

Und meistens multipliziert man diesen Wert mit 100 und sagt 20 und setzt das Zeichen % dahinter. Dies ist die oft benutzte Prozentzahl, d.h. auf Hundert bezogen. Die Rechnung geht jetzt so: $(0,40 \text{ Euro} \times 100) : 2,00 \text{ Euro} = 20\%$. Und die Interpretation lautet: 20 % der Einnahme pro Tasse muss ich für die Herstellung des Kaffees verwenden. Und er könnte sich ja überlegen, wie er diesen Anteil (Prozentanteil) verringern könnte. Da gibt es viele Möglichkeiten, aber bitte nicht die Zahl der Bohnen verringern!

Warum macht man das? Der Grund ist, die Information, die man mitteilen will, anschaulich zu machen. Ständig liest man in der Zeitung Prozentwerte. So wenn das Ergebnis einer Wahl mitgeteilt wird: 40 % haben bei den Wahlen zum Parlament ihre Stimme für die Partei A abgegeben, 35% für die Partei B und 25% für die Partei C. Alle Stimmabgaben (in Prozent gerechnet) ergeben zusammen 100. Da hat man doch gleich das eigentliche Ergebnis und das hat man nicht so anschaulich, wenn mitgeteilt worden wäre, wie viele Wähler für Partei A, B und C ihre Stimme abgegeben hatten.

Noch so eine wichtige Vergleichszahl benutzt man, wenn es um die Zeit geht. Wie ist der Verkauf von Tassen im zweiten Jahr gegenüber dem ersten Geschäftsjahr angestiegen? Schon wieder bildet man einen Dreisatz. Einnahmen im Vorjahr zu Einnahmen im zweiten Jahr = 100 % zu ?

Donnerwetter, sagt Johann, der Gewinnzuwachs ist ja höher als der Zuwachs der verkauften Tassen. Warum ist der Anstieg für den Gewinn eigentlich höher als für den der verkauften Tassen Kaffee? Da kann ich nur sagen, weil der Anteil (der Prozentwert) für die Miet- und Lebensunterhaltungskosten (das sind Festkosten, die sich ja nicht verändert haben) relativ geringer geworden ist, das ergibt sich ja aus der Tabelle. So bekommt man durch die Vergleichsrechnungen einiges mitgeteilt, was so leicht nicht erkennbar war. Man nennt diese Rechnungen "analytisch", weil sie uns neue Informationen zum Nachdenken vermitteln.

Alle Wissenschaften beruhen darauf und das gilt auch für die Hauswirtschaft oder Ökonomie. Da findet man übrigens oft Fremdworte. Sie sind Übernahmen aus anderen Sprachen, hier dem Griechischen, denn Öko ist das griechische Wort für Haus. Ökonomie heißt also das Haus in Ordnung halten,

vereinfacht haushalten. Ich denke oft, wenn ein Wort aus der eigenen Sprache vorhanden ist, sollte man es auch nehmen. Gerade unsere deutsche Sprache ist sehr sich selbst-erklärend. Das Haus erhalten, die Natur erhalten, da weiß man gleich, was gemeint ist. Na ja, jeder sagte heute Öko, da kann man dann nichts machen. Wenn so ein Fremdwort auftaucht, schaut man am besten gleich in einem Bedeutungswörterbuch nach. Es gibt da schon sehr groteske Beispiele. So sagte vor kurzem ein Professor im Radio, der Staatshaushalt weist im letzten Rechnungsjahr ein Minus-Wachstum auf. Er meinte, die Schulden sind größer geworden. Man soll Leuten, die aus Wichtigkeit oder sonst welchen Gründen so reden, nicht vertrauen (Immanuel Kant).

Gewinn und was macht Johann damit?

Was macht Johann mit dem Gewinn? Es gibt verschiedene Möglichkeiten, er muss also wählen. Und beim Wählen hilft eine Rechnung ungemein. Er kann den Gewinn zur Bank bringen, ihn ihr ausleihen, da bekommt er nach einem Jahr einen Betrag als Gegenleistung der Bank dazugerechnet. Er spart und vermehrt seinen Gewinn. Er kann auch sein Kaffeehaus verschönern, den Kaffee noch besser machen oder sein Angebot vergrößern, eine Kuchentheke würde sich bestimmt lohnen. Er investiert, er verbessert sein Angebot und denkt, dann kommen noch mehr Gäste. Er kann sein Leben bequemer machen, wofür er sich zum Beispiel ein neues Klavier anschafft. Er konsumiert. Oder er sagt sich, wenn ich weniger Zeit als Kaffeehausbetreiber verbräuche, dann habe ich mehr Zeit für die Musik und kann öfters bei Ludwig vorbeischauen.

Er ordnet seine Wünsche, seine Präferenzen, seine Lebensgestaltung, die ja viel mit dem Haushalten zu tun hat. Aber bitte, Johann, zuerst die Möglichkeiten, die Varianten und die Folgen prüfen! Und das gilt auch für Ludwig! Das musste auch mal Ludwig gesagt werden, denn Ludwig war, das wissen wir schon, ziemlich unstet. So entschloss er sich öfters, in eine andere Wohnung zu ziehen, ohne die bisherige zu kündigen. So steigert man ganz unnötigerweise die Lebenshaltungskosten. Er soll einmal für drei Wohnungen zugleich Miete bezahlt haben müssen! Ludwig! Ludwig! Sage ich da bloß, wenn man das Haushalten richtig gestaltet, hat man weniger Sorgen und mehr Zeit für die Dinge, die erfreulich sind. Heute gibt es viele Leute, die kaufen immer neue Sachen. Und dann sind sie überschuldet und dann ist aber echt Sturm in der Bude. Das soll nicht sein, denn dann ist man überhaupt

nicht mehr frei und muss immer nur gehorchen, was andere wollen.

Nun, bei Johann war es ja nicht so und wir schauen jetzt mal, was er mit seinem hübschen Gewinn so machte. Übrigens: Auch Ludwig war ein gewiefter Kaufmann. Seine Produkte, seine Musikwerke, hat er drucken lassen, und mit dem Verlag schon mal tüchtig geschimpft, ganz zu Recht, denn aus Arbeit, und das Komponieren ist Arbeit, nicht nur der Zeit nach, sondern auch dem Wissen nach, das man vor der Arbeit erworben hat, soll Gewinn entstehen.

Johann spart: Zinsrechnung

Johann fragt sich also, was passiert, wenn er den Gewinn zur Bank in der Goethestraße Nr. 19 bringt. Er hatte ja am Jahresende (im ersten Jahr) 3.650 Euro mehr als zu Beginn des Jahres, das war sein Gewinn. Und da er das Geld nicht braucht, bringt er es zur Bank, die ihm einen Zins anbietet für die Ausleihe. Sagen wir einen Zins von 4 %. Das heißt, die Bank fügt auf Johanns Konto nach einem Jahr etwas hinzu. Er ist also reicher. Der Zins ist eigentlich der Zinssatz und dieser besagt, dass die Bank für jede 100 Euro 4 Euro hinzufügt. Wenn ich mehr als 100 Euro der Bank gegeben habe, erhöht sich der Betrag entsprechend. Er bekommt 4 % Zins. Das ist natürlich ein Dreisatz!

Erster Satz	Die Aufgabe	$100 \text{ Euro} : 4 \text{ Euro} = 3500 \text{ Euro} : ? \text{ Euro}$
Zweiter Satz	Der Einheitswert	$4 \text{ Euro} : 100 \text{ Euro} = 0,04 \text{ Euro}$
Dritter Satz	Der Ergebniswert (Zinsgewinn)	$3500 \text{ Euro} \times 0,04 \text{ Euro} = 140$

Johann ist etwas vergesslich und deshalb fragt er sich am Ende des Ausleihejahres, 3.500 Euro habe ich der Bank geliehen und 3.640 bekomme ich jetzt zurück, wie hoch war eigentlich der Zinssatz? Oder er fragt sich 3.640 Euro habe ich bekommen und der Zinssatz war 4%, wie viel hatte ich vor einem Jahr eigentlich eingezahlt? Das sind die drei Fragen, die man ohne weiteres mit Hilfe des Dreisatzes lösen kann.

Johann investiert und / oder konsumiert

Johann hat gehofft, dass er 4% Zinsen bekommt, aber das stimmt leider nicht, er bekommt nur 1%. Das ist aber wenig, denkt er und fängt an zu grübeln. Sollte er nicht doch investieren, denn er kann ja hoffen, dass mehr Kunden kommen und nicht nur eine Tasse trinken sondern auch einen Kuchen

dazu essen wollen. Er denkt, ich könnte ja noch eine Kuchentheke anschaffen. Oder wenn ich bequemere Stühle anschaffe, dann kommen bestimmt auch mehr Kunden. Er ist also bereit zu investieren. Das heißt er vergleicht, den Ertrag, den er von der Bank bekommt mit dem höheren Ertrag, den er bekommt, wenn - so vermutet er - demnächst sogar 70 Kunden pro Tag kommen, weil sie bequemer sitzen können und zudem noch nicht nur Kaffee trinken, sondern auch zu einem Kuchen greifen können?

Jetzt geht es also um Investitionsrechnungen. Diese sind zweigeteilt: Wenn der Gewinn ausreichend ist, um neue Stühle oder eine Kuchentheke zu beschaffen, dann ist die Rechnung einfach: Der Gewinn des ersten Jahres reicht aus und Johann muss nur die Investitionskosten vom Gewinn abziehen. Wenn es aber nicht so ist, dann muss Johann zur Bank gehen und sich Geld ausleihen. Die Bank gibt ihm Geld, aber zu einem höheren Zinssatz als dem Sparzins. Aus diesem Unterschied zwischen Sparzins und Investitionszins ergibt sich die Einnahme der Bank. Das ist richtig so, denn nur dadurch ergibt sich für sie, dass sie ihre Kosten decken kann und, wie Johann ja auch, Gewinn aus ihrer Arbeit erzielt.

Ich denke, das brauchen wir jetzt im Einzelnen nicht durchrechnen. Nur eins ist wichtig, Johann macht noch eine weitere Zeile in seiner Bilanz auf, in der er einträgt, was ihn der Kredit kostet und ob er sich lohnt. Nun überlasse ich es Ihnen, liebe Leserin, lieber Leser, diese Frage in die Tabellenkalkulation einzufügen.

Oder soll er doch lieber konsumieren? Den Gewinn für sich verbrauchen? Ein besseres Klavier kaufen? Fragen über Fragen! Und jedes Mal muss er Dreisatzaufgaben lösen. Wie ja auch Kommerzienrat Treibel, den wir in der Einleitung schon kennen gelernt haben, als ihn die Hofdame Fräulein Ziegenhals ausfragte. Das Lesen dieser Novelle von Theodor Fontane gehört übrigens zu den weiteren Dingen, die man sich unbedingt leisten sollte. Da lernen wir etwa 40 Personen kennen, wie sie sich verhalten, was für Gedanken sie sich machen, und was schließlich daraus wird. Und der alte Treibel argumentiert sogar nach dem Dreisatzverfahren!

Die Bilanz der Kaffeegäste

Johann macht eine Bilanz, seine Kunden natürlich auch. Seine Gäste konsumieren. Oder einfacher gesagt, sie trinken einen Kaffee, und zwar einen guten. Die Gäste denken, 2 Euro, das ist ein fairer, angemessener Preis. Für

manche möglichen Gäste, die gern kommen würden, ist aber der Preis 2 Euro zu hoch, weil sie arm sind. Wie denken sie? Was habe ich davon, wenn ich in einem anderen Kaffeehaus billigeren Kaffee trinke, aber feststellen muss, das ist nur heißes Wasser mit Kaffeegeschmack. Nichts habe ich davon oder sie begnügen sich notgedrungen mit der minderen Qualität. Aber besser ist es doch, wenn sie sagen, ich kaufe Kaffeebohnen und mache den Kaffee selbst zu Hause. Das ist dann billiger bei gleicher Qualität. Sie ersetzen (subsumieren) einen für sie zu hohen Preis, durch die Arbeit, die sie selbst leisten.

Grade, wenn man arm ist, muss man sich sehr genau überlegen, wie man vorgeht, wie man aus den denkbaren Möglichkeiten die Beste wählt. Als Student war ich auch ziemlich arm. Oder anders gesagt „echt knapp bei Kasse“. Aber ein wenig konnte ich doch zurücklegen. Und deshalb konnte ich eines Tages in den Musikladen in der Berliner Hardenbergstraße gehen und eine Schallplatte kaufen, die Musik hatte ich einmal im Radio gehört, es war „Das musikalische Opfer“ von Johann Sebastian Bach. Das war ein glücklicher Tag, den ich nie vergessen werde. Heute bin ich nicht mehr arm. Aber ich bin manchmal richtig traurig, weil das Musikerlebnis, das uns unser Johann Sebastian, Ludwig, Wolfgang Amadeus und Franz geschenkt haben, wenn man arm ist und es doch miterleben will, doch oft so teuer ist, dass viele nicht hingehen können. Wenn sich zu viele Menschen einer Bevölkerung die Musik, die uns geschenkt wurde, nicht mehr leisten können, dann geht etwas verloren. Was man nicht kennen kann, weil es zu teuer ist, daran kann man sich nicht mehr erfreuen. Und wenn die Kinder, deren Eltern es nicht mehr erlebt haben und somit ihren Kindern nicht mehr mitteilen können, dann werden auch sie zum Beispiel Ludwigs Musik nicht mehr erleben. Es ist seltsam, wir leben im Wohlstand, und doch geht vieles, was das Leben, das ja vor allem ein Erleben ist, verloren. Nun ja, das sind traurige Gedanken.

Zurück in Ludwigs Haushalt, denn da hat sich ein neues Problem ergeben. Die Sache mit den 66 Bohnen, der Kaufmann in der Schillerstraße verkauft die Bohnen nicht mehr einzeln, sondern nur noch in Tüten!

Ludwig zählt nicht mehr Bohnen, er misst! Rauminhalt und Gewicht

Kehren wir also zurück zur Materialwirtschaft in Ludwigs Haushalt. Wir haben ja mit Bohnen gerechnet, weil wir wissen, dass Ludwig auch damit rechnete. Wenn aber die Haushälterin beim Einkaufen verlangen würde: „bitte, geben Sie mir 20.000 Kaffeebohnen“, dann würde man sie für verrückt er-

klären. Natürlich: es gibt viele Fälle, da rechnet man immer mit Stücken: kein Autohändler kauft beim Werk gleich 50.000 Autos, sondern vielleicht 50, um sie dann weiter zu verkaufen. Der Autohändler rechnet also mit Stücken. Ein Maler in Leinwand, Flächen und Farbtuben, im Porzellanladen wird in Tassen, Kannen, Unterteller, Löffel unterschiedlicher Größe gedacht. Das geht, aber Kaffeebohnen? Die sind einfach zu klein.

Ludwig und die Haushälterin müssen sich also jetzt bequem in Gewichten zu rechnen, eben weil die Kaffeebohnen so klein sind und eine Abgabe nach Anzahl schrecklich umständlich ist. Im praktischen Leben erhält man nicht Bohnen in beliebiger Zahl, sondern Bohnen in Tüten oder, heute meistens, schon gemahlen in Vakuumverpackungen. Auch im Laden in der Goethestraße 15, dort wo Ludwig seinen Kaffee einkauft, stellt der Kaufmann den Kaffee in seinen Regalen in „handelsüblichen Größen oder Verpackungen“ bereit, jede wiegt 500 Gramm.

Aber das heißt nun noch lange nicht, dass Ludwig seine Maxime „66 Bohnen gehören in die Tasse“ aufgibt. Er muss nur umrechnen. Er zählt jetzt nicht Bohnen, sondern misst ihr Gewicht. Und die Tüte mit den Bohnen teilt er jetzt in Portionen auf, die einem Kaffee aus 66 Bohnen entsprechend sind. Er zählt nicht mehr, er misst und teilt dann auf.

Was heißt eigentlich Gewicht? Diese Frage müssen wir vorab klären. Dazu machen wir einen kleinen Ausflug in die Physik, in die Lehre von den schweren oder leichten Sachen und den Aufwänden, um sie zu bewegen: entweder hochheben oder zur Seite schieben. Eine Tasse hochheben ist leicht, das neue Klavier in den ersten Stock des Hauses von Ludwig hinauf zu schaffen, ist schwer, da müssen schon mehrere Leute anpacken. Was leicht und schwer ist, und ob man es stemmen kann, kann man natürlich berechnen, wozu ist denn das Rechnen da?

Noch zu Ludwigs Zeiten hat man mit allen möglichen Gewichtsangaben gerechnet. In seine Zeit fällt aber das sehr wichtige Ereignis, dass man um die Schwierigkeiten, die sich daraus ergeben, zu vermeiden, ein Einheitsgewicht festgelegt hat, wie wir es ja noch heute benutzen (aber die Leute in Amerika rechnen noch auf andere Weise): Es ist das Kilogramm und der 1000. Teil ist das Gramm. Ein Kilogramm, das spürt man schon, wenn man es hochhebt, aber eine Tonne, das sind 1.000 Kilogramm? Da geht man hurtig in die Knie!

Das Einheitsgewicht Kilogramm hat man während der französischen Re-

volution so festgelegt: das Wasser, das in einen Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hineinpasst, legen wir als Einheitsgewicht 1 Kilogramm fest. Das kann man ja nachprüfen mit der Waage. Tatsächlich meine Waage zeigt auf der Skala 1.000 Gramm oder ein Kilogramm an.

Meine Messkiste, so groß wie der Wasserwürfel, schüttele ich jetzt voll mit Kaffeebohnen. Die müsste doch jetzt schwerer sein, oder? Sie ist leichter, die Waage zeigt nur 400 Gramm an. Seltsam, Bohnen sind leichter als eine gleichgroße Wassermenge. Das ist aber ein Trugschluss, ich habe nämlich nicht bedacht, dass in dem Würfel nicht nur Bohnen drin sind, sondern auch noch Luft in den Zwischenräumen. Und Luft, die ist nun mal ganz entschieden leichter als Wasser, das ja ohne Luft den ganzen Würfel ausfüllt. Ich mahle jetzt den Kaffee zu Pulver und fülle wieder ein. Schon schwerer aber noch leichter als ein Kilogramm, es ist ja immer noch Luft mit enthalten. Nun nehme ich einen Stößel und drücke das Pulver zusammen und damit die Luft heraus. Ich verdichte das Pulver und damit steigt auch das Gewicht.

„Halt“, ruft Ludwig, „was machst Du da“! Mit dem Pulver kann man ja gar nichts mehr anfangen, das Kaffeepulver muss locker sein, damit das heiße Wasser an die Körnchen herankommt und das Aroma herauszieht. Und jetzt kommt die Haushälterin dazu und sie bringt einen gleichgroßen Holzwürfel herbei und dieser ist erwartungsgemäß schwerer als der Wasserwürfel, oder?

Man sieht, beim Messen des Gewichts muss man mehr nachdenken als beim Zählen. Die erste Information, die man braucht, ist das jeweilige oder spezifische Gewicht des Gegenstandes, den man messen will. Dieses Maß wird berechnet, wenn man einen Vergleich herstellt, zwischen einem Würfel des Stoffes mit 10 cm Kantenlänge mit einem Wasserwürfel dieser Größe. So zum Beispiel 600 Gramm Kaffeebohnen (das festgestellte Gewicht) zu 1000 Gramm = 0,60, das ist das spezifische Gewicht der Kaffeebohnen und im Fall des gepressten Kaffeepulvers = 0,70. Und im Fall des leichten Tannenholzes oder bei dem noch schwereren Eichenholz liegt es auch noch unter 1,00 der Wassereinheit (deshalb schwimmt Holz auf dem Wasser). Da muss man in den Tabellen im Physiklehrbuch nachsehen. Und nun schleppt die Haushälterin auch noch einen Eisenwürfel herbei und der ist 7 mal schwerer als der Wasserwürfel. Holz ist nicht Holz, denn das schnell wachsende Tannenholz ist weniger dicht zusammengefügt, als das langsam wachsende Eichenholz. Und so schwer wie Eisen kann kein Holz sein.

Wenn man das spezifische Gewicht weiß, kann man berechnen, was eine größere oder kleinere Menge eines Stoffes wiegt. Ein Dreisatz natürlich. Die Naturwissenschaftler haben ausgerechnet, wie hoch das spezifische Gewicht der Sonne ist. Sie ist 2,2 mal so schwer wie eine gleichgroße Wasserkugel. Die Erde ist 5,5 mal so schwer. Aber als Körper in Kugelform ist die Erde im Vergleich zur Sonne nur ein Staubkörnchen.

Es sind die zwei unterschiedlichen Betrachtungsweisen: Zum einen schaut man auf den Rauminhalt oder das Volumen, zum anderen auf das spezifische Gewicht. In der einen Betrachtungsweise ist die Sonne im Vergleich zur Erde riesig (aber im Vergleich zu anderen Sternen ist sie nur mittelgroß). Aber sie ist nur ein großer Gasball, und die Erde, so klein im Volumen sie auch ist, ist ein fester Brocken, im Inneren zwar eine heiße Kartoffel, an der Oberfläche aber schon erkaltet und nur noch von der Sonne erwärmt, weshalb wir uns dort tummeln können.

Das tatsächliche Gewicht ist also, wenn wir nun über Kaffeetüten reden: Volumen (Rauminhalt oder Größe der Tüte) x spezifisches Gewicht = ? Kilogramm. Und wenn ich das Volumen und das Gewicht kenne, kann ich das spezifische Gewicht ausrechnen und wenn ich spezifisches Gewicht und Gewicht kenne das Volumen und wenn ich das Volumen und das spezifische Gewicht das Gewicht.

Die Haushälterin hat inzwischen eine Tüte mit Bohnen und eine Vakuumentüte mitgebracht, beide wiegen ja 500 Gramm und da in der Tüte mit Bohnen zwangsläufig (wegen den größeren Abständen) mehr Luft drin ist, ist die Bohntüte um einiges größer. „Klar“, sagt Ludwig, „nehmen Sie die Tüte mit den Bohnen“. Denn er weiß ja, frisch gemahlener Kaffee ist einfach besser! Man zählt einmal die Bohnen und weiß dann, wie viele Bohnen drin sind. Auch für künftige Tüten Käufe. Das Kaffeekochen mit 66 Bohnen kann wie gewohnt weitergehen.

Übrigens hat sich Ludwig sehr für so technische Dinge interessiert. Mit seiner Freundin Nanette Streicher, eine Klavierbauerin, hat er oft darüber gesprochen, wie die Technik der Pianoforte, der Flügel, verbessert werden könnte. Und sie mit ihm, wenn er Sorgen hatte.

Jetzt haben wir mit Körpern gerechnet, und wie läuft die Rechnung, wenn wir von unserer Wohnung zu einem entfernten Ort reisen wollen. Da haben die Revolutionäre vor 200 Jahren sich gesagt, wir brauchen auch dafür so ein praktisches, weil allgemein gültiges Einheitsmaß. Und das ist der Meter und

der Kilometer. Mal sehen, wie man mit diesem Einheitsmaß rechnen kann. Und dabei müssen wir ja auch an die Zeit denken, denn es dauert halt, bis wir von einem Ort zu einem anderen gelangen. Länge des Wegs (in Kilometer) und Dauer (in Minuten und Stunden) sind die beiden Größen, die mit Hilfe des Dreisatzes in Beziehung oder Proportion gesetzt werden.

Ludwig und Johann besuchen sich: Weg, Zeit und Bewegung

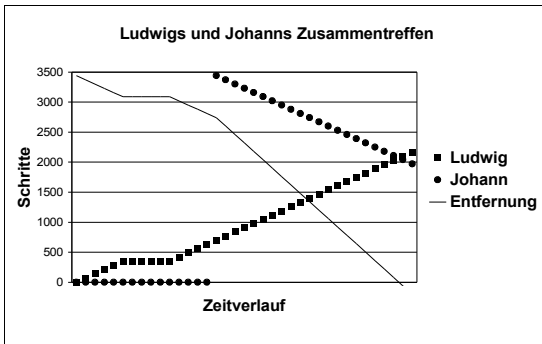
Johanns Kaffeehaus ist - wie wir schon wissen - gegenüber Ludwigs Wohnung auf dem Marktplatz. Aber seine Wohnung liegt außerhalb der Stadt auf dem Lande, 4 km entfernt. Am Sonntag vereinbaren Ludwig und Johann sich zu treffen, „auf halbem Weg“. Damals ging man zu Fuß, heute ist man ja schneller unterwegs. Jetzt gilt es mit Wegen in Kilometern und Metern und in Zeit zu rechnen. Wie lange werden die beiden gehen, bis sie aufeinander treffen?

Beide brechen um 10:00 Uhr auf. Wo und wann, das ist jetzt die Frage. Erwachsene machen - wenn es gemütlich zugeht, jede Sekunde einen Schritt und der ist etwa ein Meter lang. Wenn die beiden zur gleichen Zeit losgehen, und keine Unterbrechung einlegen, treffen sie sich genau in der Mitte des 4 km langen Wegs, also bei 2 km. Und sie können auch leicht ausrechnen, wie lange sie brauchen. $60 \text{ Sekunden} = 60 \text{ Schritte} = 60 \text{ Meter} = 4000 \text{ Meter} / 60 \text{ Meter} = 66 \text{ Minuten}$. Da sie aufeinander zugehen, verringert sich der Abstand zwischen ihnen doppelt so schnell, jeder ist 33 Minuten unterwegs. Sie treffen sich um 10:33.

Nun machen wir die Rechnung etwas gehaltvoller. Ludwig verlässt um 9:30 das Haus, Johann um 9:45. Und Ludwig bleibt, als er nach einigen Minuten durch das Stadttor getreten ist, 5 Minuten stehen, warum wird gleich erklärt. Beide laufen ja gleich schnell, aber Ludwig hat ja schon einen Weg zurückgelegt, bevor Johann sich 9:45 auf den Weg macht. Da 60 Schritte auf die Minute allzu langsam sind, erhöhen wir auf 70 pro Minute. Das Verhältnis $60 \text{ Schritte} : 60 \text{ Sekunden}$ (eine Minute) oder $1 : 1$ verringert sich jetzt auf $1 : 0,85$.

Den Verlauf des Zusammentreffens kann man auch graphisch lösen, und wiederum mit Hilfe einer Tabellenkalkulation, die ja auch eine Möglichkeit bietet, die Rechnung in ein Bild umzuwandeln. Die Griechen der Antike, also vor 2500 Jahren, lösten ihre Aufgaben oft graphisch. Kein Wunder sie hatten ja noch keine Computer. Die Abbildung ist so zu lesen: Zum Zeitpunkt 0 sind

die beiden 4000 Meter oder 3440 Schritte voneinander entfernt. 9:31 hat Ludwig 70 Schritte zurückgelegt, der Abstand von Johanns gegenwärtigem Aufenthalt in Schritten gemessen ist jetzt schon ein wenig geringer und verringert sich nach jeder Minute weiter. Ludwigs Schritte ist die aufsteigende Linie mit den quadratischen Kästchen. Johann macht sich 9:45 auf den Weg, seine abfallende Linie mit den Kreisen beginnt an seinem Haus, also am oberen Ende der Abbildung. Die dritte Linie, der Strich, ist die Entfernung, die zu jedem Zeitpunkt zwischen den beiden besteht, dort wo sie die untere Linie erreicht, sie also Null ist, ist der Treffpunkt.



Warum blieb Ludwig eine Weile stehen, nachdem er aus dem Stadttor getreten war? Das hat damit zu tun, dass Ludwig ein beobachtender und hörender Mensch war. Er lief nicht nur einfach eine Strecke ab, sondern er nutzte die Zeit, sich an der Natur zu erfreuen. Und da

kamen ihm gleich Gedanken, wie er sie als Musiker empfand. Man kann heute noch erleben, wie es war, denn er schrieb eine große Symphonie, die 6. Symphonie, die Pastorale. Er war glücklich, als er den Lärm der Stadt hinter sich gelassen hatte und nun das „Erwachen heiterer Empfindungen bei der Ankunft auf dem Lande“ (so ist der erste Satz überschrieben) genoss. Wenn man dieses große Werk anhört, ist man entzückt und man freut sich schon darauf, seine anderen Werke kennen zu lernen. Danach ging er beschwingt weiter und etwas später machte sich Johann auf den Weg. Man sieht in der Tabellenabbildung, wann die beiden sich schließlich trafen.

Bei dieser Gelegenheit kann man gleich den Begriff "Funktion" erläutern, der eine große Rolle in der höheren Rechenkunst spielt. Eine Funktionsrechnung besteht darin, dass zwischen zwei oder mehr Größen eine Abhängigkeit besteht. Erhöht man den Wert der einen Größe im Beispiel Ludwigs Zahl der Schritte in der Zeit, so verkürzt sich der räumliche wie zeitliche Abstand zu Johanns Position, und wenn auch Johann aufbricht, um so mehr. In diesem Fall muss man nicht unbedingt wissen, zu welchem Zeitpunkt, der Zahl der

zurückgelegten Schritte, sich Ludwig und Johann jeweils befinden und wie viele Schritte sie noch zurücklegen müssen, bevor sie sich treffen.

Aber es sieht ganz anders aus, wenn wir zum Beispiel an das Funktionieren einer Maschine denken. Da greifen Bewegungen der Räder zum Beispiel ineinander und es wäre schlimm, wenn das auf die Zehntelsekunde genau nicht klappt, denn dann geht die Maschine kaputt. Alles was wir als Technik kennen, ist einmal erfunden und danach errechnet. Und genau so geht es am Himmel zu, was die Sterngucker seit Tausenden von Jahren ergründen wollten. Der griechische Philosoph Eratosthenes hat mit einem wahrhaft genialen Experiment, dem Vergleich des unterschiedlichen Schattenwurfs eines Stabes in der Mitte und an der Mündung des Nils ermitteln können, dass die Erde eine Kugel ist und den Durchmesser der Erde hat er schon sehr genau errechnet, aber niemand glaubte ihm, denn die Erde ist doch eine Scheibe, nicht wahr? Nikolaus Kopernikus verstand aufs Neue, wie das abläuft; und Johannes Kepler errechnete schließlich das Gesetz der Himmelsbewegungen. Und Isaac Newton machte sich auch lebenslang Gedanken darüber und begründete und errechnete WARUM es so ist. Damit ist das Gesetz, die Funktion, die das Ineinandergreifen bewirkt, letztendlich so festgelegt, dass alle Zweifel beseitigt sind. Und weil es so ist, kann man genau berechnen, wo zum Beispiel am 15. Januar im Jahr 5000 um 16:45 die Sonne und die Planeten - von uns aus gesehen - am Himmel stehen werden. Das ist eine Prognoserechnung und - wenn nichts dazwischen kommt - stimmt sie „haargenau“.

Leonardo Fibonacci, hat vor vielen Jahrhunderten Wachstumsprozesse untersucht. Wachstum ist ja auch Bewegung, zum Beispiel bekommen Hasenpaare Kinder und diese bekommen auch Kinder und diese wiederum Kinder. Na ja, um die Geschichte kurz zu machen, wenn das so weitergeht, wäre ganz Italien, sein Heimatland, nur noch von Hasen bevölkert, obwohl die Lebenszeit von Hasenpaaren ziemlich kurz ist. Nun es gibt Ausgleichsvorgänge oder -prozesse, die allerdings für die einzelnen Hasen bitter sind, wie man sich leicht denken kann. So ist zu wenig Futter vorhanden und Hasenbraten sind ja für andere Lebewesen sehr begehrt. Diese dem ungezügelten Wachstum entgegenstehende Sachverhalte begrenzen die Zahl der Hasen, sie schaffen ein Gleichgewicht zwischen den Hasen und ihrer Umwelt. Da sind wir unvermittelt mitten in sehr schwierigen Fragen angelangt, was man als die Grenzen des Wachstums bezeichnet. Die Natur macht uns vor, wie ausgeglichenes oder harmonisches (ein Wort, das uns noch oft begegnen wird) Wachstum zu

wundervollen Formen führt, so zum Beispiel der Blütenstand einer Sonnenblume. Hat sie Fibonaccis Lehrbuch gelesen oder hat Leonardo im großen Buch der Natur nachgeschaut?

Und selbst Johann in seiner kleinen Welt seines Kaffeehauses muss sich damit auseinandersetzen. So hat er beschlossen, eine Kuchentheke aufzustellen. Aber er hat vielleicht nicht bedacht, dass diese Platz einnimmt und er somit auf eine Sitzgruppe verzichten muss. Wie ist dann die Rechnung für den Erfolg seines kleinen Unternehmens zu sehen? Hat er vielleicht eine Fehlentscheidung begangen? Hoffentlich nicht, er könnte ja die Sitzgruppen enger zusammenrücken, aber ist das noch bequem für seine Gäste? Aber eines sollte er nicht tun, das Klavier in der linken Ecke, darauf darf er nicht verzichten! Denn eine Tasse Kaffee und Klaviermusik passt doch sehr gut zusammen.

Übrigens: mit diesem Verfahren der graphischen Umsetzung von Bewegungsverläufen, am sehr einfachen Beispiel dargestellt, werden die Fahrpläne der Bahn erstellt, die Koordination der Züge in Raum und Zeit im Streckennetz. Früher waren die Pläne der Zugbewegungen als Graphik an die Kursbücher angehängt. Der Erfinder dieser Methode war der Philosoph René Descartes und der Mathematiker Leonhard Euler hat sie wesentlich verbessert. Noch heute nennt man sie das cartesische Koordinatensystem.

Mit der 6. Symphonie sind wir fast bei dem angelangt, was Ludwig so meisterhaft konnte, das Komponieren von Musik. Vorher befassen wir uns noch mit einer anderen Art von Rechenkunst, dem Anordnen oder Kombinieren. Da sind wir ebenfalls schon ziemlich nahe an dem, was ein Komponist macht. Denn was anderes ist Musik als das Anordnen von Tönen unterschiedlicher Höhe im Zeitverlauf nach harmonischen Grundsätzen?

Ludwig, Johann, und Nanette sammeln, ordnen und tauschen

Bisher ist u.a. mit Bohnen, Tassen, Einnahmen und Ausgaben, Wegstrecken gerechnet worden. Jedes Mal sind sie mit Maßeinheiten gemessen und mit Hilfe des Dreisatzes in Beziehung gesetzt worden. Allen diesen Dingen ist gemeinsam, dass sie Einzelstücke (Elemente) eines größeren Ganzen sind (einer Menge). Man kann von den Eigenschaften der Dinge absehen, um das Gemeinsame der Rechenvorgänge zu untersuchen.

Wir haben - so gesehen - drei Sachverhalte: das Element, die Menge und die Beziehung oder Relation zwischen ihnen. An einem Dreieck z.B. sind die Ecken die Elemente, alle Ecken zusammen die Menge und die Seiten sind die

Verbindungen, Relationen, von denen es drei gibt. Nun kann man eingreifen, eine Seitenlänge, eine Relation, verändern, schon verändert sich die Form des Dreiecks, es wird spitzwinkelig, gleichseitig, rechtwinkelig und viele andere Formen mehr. Wenn noch ein Element, ein Eckpunkt einbezogen wird, wird es zum Viereck. Kurz und gut, man sammelt Informationen über geometrische Formen und fängt an zu unterscheiden: das heißt man ordnet, was durch zwei Handlungen, das Verändern der Seitenlänge und durch das Hinzufügen eines weiteren Elementes, eines Eckpunktes, sich an Formenvielfalt ergibt. Diese Handlungen nennt man Ursachen, ihr Ergebnis die Wirkung.

Kaffeekochen ist eine Handlung. Man gruppiert Tasse, Wasser, Pulver. Und man denkt, dabei brauche ich nun wirklich keine Rechenkunst anzuwenden. Weit gefehlt, unser Denkvermögen, dieses sehr geheimnisvolle Organ in unserem Kopf, hat blitzschnell errechnet, was hier zu gruppieren ist (im Raum unserer Küche zu tun ist) und die notwendigen Befehle an die Bewegungsorgane erteilt. Wir merken es bloß nicht, weil es eine oft wiederholte Handlung ist und auch das Denkvermögen auf die gesammelten Erfahrungen zurückgreift, sich erinnert. Das Erinnerungsvermögen ist fast das Wichtigste, was wir im Denken leisten.

Beim Umgruppieren der Möbel ist es schon anders, da gruppiert man mit Bedacht, d.h. man hat nach- oder weitergedacht. Und auch die Erde handelt: sie dreht sich um sich selbst und um die Sonne, die Wirkungen sind, dass alle Teile der Erdoberfläche Licht und Wärme (zwei Formen von Energie) erhalten und der jahreszeitliche Wechsel. Das sind „unabdingbare“ Voraussetzungen für das Leben auf der Erdoberfläche.

Die Rechenkunst, die hier benötigt wird, ist die der Untersuchung von Gefügen, zusammenhängende und sich in ihren Teilen gegenseitig bedingende Sachverhalte. Man braucht dazu erst in zweiter Linie Messungen durchführen und Gleichungen ausrechnen. Bevor sie möglicherweise nötig werden, geht es um die Rechenkunst „ohne Zahlen“, das Verständnis von Ursachen, Bewegungen, und Wirkungen, sich daraus ergebenden Veränderungen in der Zeit und vieles mehr. Das zuständige Gebiet der Mathematik, sie hat ja noch viele andere, ist die leider nicht so bekannte und gelehrte Methode, Elemente, Mengen und Relationen zu fügen. Der große Mathematiker Georg Cantor hat das alles ausgearbeitet, die Mengenlehre. Ihre Ergebnisse sind bestmögliche Gruppierungen, das Ordnen und Unterteilen dessen, was man vorfindet, und die Bewertung von Bewegungen und Veränderungen.

Am besten, man nimmt sich wieder ein sehr einfaches Beispiel aus dem realen Leben vor. Nehmen wir an, dass Ludwig, Johann und Nanette gerne Bücher lesen und, wenn die Bücher schon durchgelesen sind, austauschen. Welche Möglichkeiten von Verbindungen in einem Dreiergefüge „rund ums Buch“ können bestehen? Die Handlungen sind sammeln, ordnen und tauschen, das Ergebnis eine zufriedenstellende, d.h. nach Zielen (aufräumen, Überblick behalten) bedachte Anordnung.

Durch Sammeln ist im Lauf der Zeit schon eine ziemlich große Menge von Büchern zusammengekommen. Die Bücher sind noch ziemlich ungeordnet in den Räumen von Ludwigs Wohnung verteilt. Ein Stapel auf dem Tisch im Arbeitszimmer, ein anderes auf dem Nachttisch, auch unter dem Bett oder in den Zimmerecken. Endlich will er Ordnung schaffen und beschafft sich ein Regal, was nichts anderes ist als eine Tabelle in Form eines aus Brettern erstellten Gefüges. Er gruppiert die Einrichtung um, das Regal wird an der Längswand seines Zimmers, dort, wo auch das Bild seines verehrten Musikkollegen Wolfgang Amadeus Mozart aufgehängt ist, aufgestellt. Da Ludwig - wie man weiß - sehr oft umgezogen ist, muss er ja öfters umgruppiert haben.

Der erste Schritt ist das Ordnen seines Bücherbestandes. Sinnvoll ist es Sachbücher, Musikalien (d.h. Partituren) und schöne Literatur zu unterscheiden. Allgemein gesprochen, er erstellt innerhalb der Gesamtmenge drei entsprechende Untermengen, konkret drei Bücherstapel. Und diese sortiert er nach dem Alphabet, das macht Sinn, denn dann wird das Aufsuchen eines Buches sehr beschleunigt. Nun kommt der nächste Schritt, das Einordnen in die Fächer des Regals. Da kann die Tücke der materiellen Gegenstände sich störend bemerkbar machen. So passen die schöngeistigen Bücher nicht alle wie gewünscht in das untere Regalbrett hinein, manche sind vom Format zu hoch, das oberste Regalbrett ist nicht lang genug, um alle Notenbücher aufzunehmen und weitere Schwierigkeiten, die sich da einstellen können.

Nachdem auch dafür eine Lösung gefunden wurde, sind alle zufrieden, nicht nur Ludwig, auch Wolfgang Amadeus lächelt vergnügt aus seinem Bilderrahmen (auch eine Tabelle mit nur einem Feld allerdings), die Haushälterin, die mit geholfen hat, wischt sich den Staub von der Schürze und sagt: „Nach getaner Arbeit, Herr Ludwig, haben wir uns eine Extratasse Kaffee verdient, nicht wahr?“ Ludwigs Antwort auf diesen Vorschlag darf der Leser, die Leserin sich selbst ausdenken.

Waren diese Folgen von Handlungen Taten auf dem Feld der Dreisatzrechnungen? Dreisatzrechnungen nicht gerade, denn es wurde nur mit dem Auge errechnet, ob alles zusammenpasst, aber Dreisatzhandlungen ganz gewiss! Die schöne Kunst der Kombinatorik, auch ein Teilgebiet der Rechenkunst, erforscht die Möglichkeiten. Am nächsten Tag kommt der Postbote und bringt ein Paket mit einem beigefügten Schreiben von Johann mit folgendem Inhalt „Lieber Ludwig, ich schicke Dir Bücher, die ich schon gelesen habe und von denen ich glaube, dass sie auch für Dich von Interesse sind, als Geschenk. Dein Johann“.

Wie geht Ludwig nun vor. Er überlegt sich, was er tun könnte. Auch er hat Bücher, die er Johann schenken könnte, außerdem weiß er, dass Nanette, die öfters mal bei ihm vorbeikommt um haushälterisch da einiges in Ordnung zu bringen (was sehr nötig war), sehr gerne liest. Das wäre für ihn eine Möglichkeit, ihr für ihre Hilfe zu danken. Geben und nehmen, es geht jetzt um das Thema der Verbindungen zwischen Personen, auch eine Gruppierung.

Übrigens: Die wirkliche Nanette Streicher war eine der großen Frauen im damaligen Wien und neben den vielen Aufgaben, die sie bewunderungswürdig erfüllte, sie war nämlich die Chefin eines Betriebes, der besonders gute Flügel herstellte, schrieb Bücher, und kümmerte sie sich auch noch um Ludwigs „Haushalt“. Man muss das in Anführungszeichen setzen, denn es ging da chaotisch zu. Ludwig war auch ein Technikfreak und wenn was Neues im Bereich Musikinstrumente und besonders dem der Flügel auf den Markt kam, war er Feuer und Flamme und Nanette und Ludwig sprachen oft darüber, was man in der schwierigen Technik dieses wunderbaren Instruments verbessern könnte.

Jedenfalls steht Ludwig im Beispiel vor einer Entscheidungsaufgabe. Er denkt, auch ich habe schon viele meiner Bücher gelesen und schenke die gelesenen Bücher an Johann und an Nanette. Er sagt sich, die Bücher, die Johann mir geschenkt hat, will er ja nicht mehr zurückhaben. Johann bekommt Bücher aus der Teilmenge der Bücher, die ich gelesen habe. Und Nanette bekommt Bücher, die ich schon gelesen habe und Bücher von Johann, die mich nicht so interessieren oder die ich schon gelesen habe.

Es ergeben sich jetzt 6 Möglichkeiten:

1. er behält Bücher seines Bestands,
2. er behält Bücher aus der Schenkung,
3. er schenkt Johann Bücher aus seinem Bestand,

4. er schenkt Nanette Bücher aus seinem Bestand,
5. er schenkt Johann Bücher aus der Schenkung (diese Teilmenge hat aber keine Elemente, denn man gibt ja geschenkte Bücher nicht an den Schenker zurück, es ist eine „Nullmenge“) und
6. er schenkt Nanette Bücher aus der Schenkung (die er schon kannte oder ihn nicht so interessieren).

Ludwigs Bestand an Büchern	Er behält	
	Er verschenkt	An Johann
		An Nanette
Johanns Geschenk	Er behält	
	Er verschenkt	An Johann
		An Nanette

Das kann man auch tabellarisch-graphisch in einer Entscheidungstabelle deutlich machen. Die Entscheidung „Behalten“ kommt zweimal vor, aus seinem Bestand und aus dem Geschenk. Die Entscheidung „Verschenken“ viermal, wobei es noch einmal gesagt wird: aus dem Geschenk Johanns wird natürlich nichts an Johann zurück geschenkt, diese Entscheidungsvariante ist also leer. Es sei denn, Ludwig gibt ein Buch zurück, zum Beispiel, weil er meint, da sollte Johann noch mal reinschauen.

In diesem Beispiel wird nicht mit Zahlen gerechnet. Oft meint man ja, dass die Rechenkunst nur dann „greift“, wenn tatsächlich etwas mit Zahlen berechnet wird. Es ist ein Beispiel dafür, dass vor der eigentlichen Rechnung gefragt werden muss, wie der Zusammenhang, das Gefüge, der anschließenden Rechnung beschaffen ist. Das ist der erste Schritt und der wichtigere.

So sind es drei Anwendungsbereiche der Rechenkunst in der Reihenfolge: Zunächst erkennt man das Gefüge, dann misst man (zum Beispiel die Weglänge und die Schrittlänge) und dann kommt die Lösung, das ausrechnen (zum Beispiel, wie lange Ludwig und Johann wandern und wo sie sich treffen).

So sind es drei Anwendungsbereiche der Rechenkunst in der Reihenfolge: Zunächst erkennt man das Gefüge, dann misst man (zum Beispiel die Weglänge und die Schrittlänge) und dann kommt die Lösung, das ausrechnen (zum Beispiel, wie lange Ludwig und Johann wandern und wo sie sich treffen).

Erster Schritt	Zweiter Schritt	Dritter Schritt
Das Gefüge und die Fragestellungen. Der Weg von A nach B und B nach A. Wo ist der Treffpunkt zwischen A und B? Und wann wird er erreicht?	Informationen sammeln Wie weit liegen A und B auseinander? Wie viel Meter pro Zeiteinheit legen Johann und Ludwig zurück? Machen Sie Pausen? Wann brechen Johann und Ludwig auf?	Berechnen mit Hilfe des Dreisatzes Wie weit sind die beiden zu einem bestimmten Zeitpunkt noch auseinander? Wann und Wo treffen sie sich.

Vor allem muss man nachdenken, wer oder was beteiligt ist und welche Wirkungen und Gegenwirkungen zustande kommen. Je nachdem, was wir wissen wollen, entsteht ein Gefüge aus zwei, drei oder mehr Wirkungen, die wiederum Gegen- und Folgewirkungen verursachen. Je nach dem um was es

geht, muss man sich die W - Fragen stellen: Wer, Was, Wie, Wann, Wo und Warum?

Skalieren

Alles was bisher behandelt wurde, ist nicht nur eine Einführung in praktische Rechenkunst, sondern auch eine Vorschule für die Grundlagen der Tonkunst. Und da ist es sehr nützlich, das Skalieren, das Aufteilen einer Strecke nach praktischen Gesichtspunkten kurz zu behandeln. Der allbekannte Metermaß ist eine Skala, 2 Meter werden in je einen Meter, in 20 Dezimeter, in 200 Zentimeter und 2000 Millimeter aufgeteilt. Der positiv-rationale Zahlenraum wie man sieht.

Das Interessanteste beim Skalieren ist der Maßstabswechsel. Er begleitet uns das ganze Leben lang. Das Baby orientiert sich in seinem Bettchen, das Kind in der Wohnung, das größere Kind in den Straßen um die Wohnung, dann überblickt man die Stadt und schließlich die Erdoberfläche, falls wir weite Reisen unternehmen. Dann nehmen wir einen Atlas zur Hand, der ein verkleinertes Modell der Erdoberfläche ist. Das Kartenblatt der iberischen Halbinsel ist im Maßstab 1 : 4 Millionen dargestellt. Was besagt das? Auf der Karte misst man in cm. Und es besagt daher, dass eine Strecke auf der Karte von 1 cm 4 Mio. cm in der Wirklichkeit entspricht, das sind, die vielen Nullen entfernt = 40 km. Nicht immer sind die Rechenkünstler nett zu uns, denn es wäre in diesem Fall ja viel einfacher, wenn die Dimension der Rechnung, die cm, angegeben wäre. Von Lissabon bis nach Coimbra, beide sehr schöne Städte, misst man 5 cm, somit eine Distanz von 200 km.

Es gibt auch Skalierungen, die nicht eine gemeinsame Grundeinheit aufweisen. Die Längengrade auf der Erdkugel zum Beispiel: zwischen den runden Längengraden am Äquator ist der Abstand jeweils 111 km, am Nordpol aber Null, denn dort laufen sie alle zusammen. Und auch in der Musik ist die Skalierung nicht wie ein Raster aus immer gleichen Abständen. Das wird uns einiges Kopfzerbrechen bereiten, aber viel weniger als im Fall der Erdkugel.

Die Brücke zur Musik

Inwieweit sind Rechen- und Tonkunst verschwistert? Viele hören das gar nicht gerne, wenn man Musik und Rechnerei in einem Atemzug nennt. Musik ist doch Empfindung, das hat doch nichts mit der öden Welt des Rechnens zu tun! Natürlich hat Musik mit Empfinden zu tun, aber das, was da empfunden

wird, muss vorher geschaffen worden sein. Komponieren heißt nach bestimmten Gesetzen Töne zusammenstellen, ordnen, in Bewegung setzen und überprüfen, ob die Zusammenstellungen das gewünschte Ergebnis, das Empfinden auf der Seite der Zuhörer, bewirken.

Die Welt der Töne gehorcht in ihren Grundlagen Naturgesetzen, wie ja alles, was wir auf der Erdoberfläche und im All vorfinden. Und der Schlüssel, den sich die Menschheit geschaffen hat, um zu verstehen, ist die Ars magna der Rechenkunst.

Ihre Anwendung auf das Musikalische reicht zurück in die Antike. Unter den Musiktheoretiker finden wir nicht nur praktizierende Musiker, sondern prominente Namen der Philosophie wie Platon oder René Descartes und der Mathematik, so Leonhard Euler. Sie waren Musikliebhaber und es ging ihnen um das Aufspüren des musikalischen Bauplans, um das Gefüge aus Proportionen, die in dieser Kunst herrschen, sie in Gang setzen.

Von Johann Wolfgang von Goethe ist der Satz überliefert: „Man sieht die Höhe, die der Künstler erreicht hat, nicht lebhafter, als wenn man versucht, ihm einige Stufen nachzuklettern“. Das machen wir anschließend. Die Rechenkunst liefert uns Seil und Steigeisen. Und der Rucksack darf auch nicht fehlen. In ihm befinden sich die Erfahrungen aus den Werken der vielen großen Musiker, auch die der Musiktheoretiker und der Instrumentenbauer und - nicht zu vergessen - der Applaus von uns Hörern.

DIE TONKUNST



So nannten die Griechen die Muse der Musik. Für das Flötenspiel war Euterpe im Götterhimmel zuständig.

Wir versetzen uns zunächst in eine Stimmung, wie sie der Musik entsprechen kann. Es ist Mittagszeit, die Hitze flimmert, es ist ganz still in der Stadt. Die Läden vor den Fenstern sind geschlossen. Doch da setzt sich jemand, wer es ist, wissen wir nicht, an das Klavier und spielt die ersten Noten einer Musik, die Ludwig oder Wolfgang Amadeus oder Johann Sebastian komponiert haben. Es ist jetzt so: wir vergessen, was uns vielleicht bedrückt hat, als wir den Weg entlang gingen. Wir bleiben stehen und lauschen. Schon der erste angeschlagene Ton macht uns neugierig auf den nächsten. Es ist eine andere Welt außerhalb der Alltagsgeräusche, eine des Gefühls, des anmutigen oder erhabenen, des freudigen, des überraschten und viele andere mehr. Oder man summt noch einmal die Lieder, die jedermann kennt: „Am Brunnen vor dem Tore“ (Franz Schubert), „Der Mond ist aufgegangen“ (Johann Peter Abraham Schulz), „Stille Nacht, heilige Nacht“ (Franz Xaver Gruber) und „Freude schöner Götterfunken“ (Ludwig) - wir sind uns einig, auf diesen Gefühlswerten bauen wir auf.

Wir wollen aber nicht allein schwärmen, wir wollen den Bauplan verstehen. Das ist das Programm der folgenden Seiten, die uns bis zu einem der schönsten Werke von Ludwig führen sollen. So einfach wie möglich bleibt das Motto, gleichwohl so ganz einfach wie bisher kann es nicht mehr zugehen.

Das Dreiergefüge der Musik

Fangen wir mit dem Allgemeinen an! Musik ist ein Dreiergefüge bestehend aus den Komponisten, die früher ganz einprägsam Tonsetzer genannt wurden, den ausführenden Musikern, die entweder ihre Stimmen oder ihre Instrumente einsetzen, und den Hörern. Jeder Mensch kann diese drei Rollen ausüben. Ein Komponist, das können auch wir sein, denn wer hat nicht einmal etwas gesungen, was man sich ausgedacht hat. Kleine Kinder machen das sehr oft, sie trällern lustig drauf los und die Eltern sind ganz entzückt über so viel Lebensfreude. Unsere Stimme ist unser eigenes Instrument, das Töne und Tonfolgen (Melodien) sendet, und unser Ohr ist das Organ, das

empfängt. Der Komponist schreibt Musik für ein oder mehrere Instrumente oder für unsere Stimme. Aber es gilt ja auch die Gegenrichtung, denn das Instrument, für das er Töne setzt, bestimmt, welche Töne überhaupt gespielt werden können. Jede Stimme ist begrenzt, ein Mann kann nicht so hoch wie eine Frau singen und umgekehrt eine Frau nicht so tief wie ein Mann. Auch zwischen Instrument und Hörer geht es wechselseitig zu. Das Instrument bringt Töne hervor und der Mensch hat das Organ sie hören zu können. Und wie sieht es aus zwischen Komponist und Hörer? Der Komponist setzt Töne nicht nach Belieben, sondern er setzt sie im Bewusstsein seiner und seiner Hörer Musikerfahrungen, bildet diese durch seine Werke weiter.

Tonbildung und Hören

Gleich stellt sich die ebenso allgemeinste Frage, was musikalische Töne sind. Was unterscheidet sie von Geräuschen aller Art? An drei Sachverhalte muss man zuerst denken: wie wird der Ton erzeugt, wie wird er übermittelt und wie wird er gehört ?

Gehen wir erst mal auf das Erzeugen ein. Ein Musiker streicht am oberen Ende einer Saite seiner Violine, dann in ihrer Mitte, dann am entgegengesetzten Ende, also drei Töne. „Streichen“ bedeutet, dass er die Saite, die zwischen dem oberen und dem unteren Ende gespannt ist, in Schwingung (Vibrationen) versetzt. Die Bewegung der Saite setzt die das Instrument umgebende Luft in Schwingung, sie schwingt mit. Wir können das nicht sehen, aber wenn wir einen Stein in einen stillen See werfen, dann kann man schön sehen was passiert. Durch den Druck (oder die Verdrängung) hebt sich das Wasser gleichmäßig nach allen Seiten und fällt wieder zurück, dadurch entsteht wieder ein Druck und das Wasser hebt sich wieder und so geht es weiter bis das Auf und Ab ausklingt. Am Beispiel sieht man, dass diese Schwingungen nicht wirt, sondern gleichmäßig-kreisförmig sich ausbreiten.

Genau so geht es auch in der Luft zu. Und diese Schwingungen oder Wellen der Luft tragen Töne bis zu unserem Ohr. In einem luftleeren Raum können wir nichts hören. Das Ohr ist das aufnehmende oder empfangende Organ. In ihm ist das Trommelfell gespannt, das nun auch in Schwingung gerät und dieses überträgt die Information in unser Denk- und Empfindungsvermögen und dort, an ganz bestimmten Stellen in diesem Organ, wird sie gedeutet, als Ton empfunden. Nun ist aber die Schwingung, die der Musiker auf der Saite erzeugt hat, viel zu schwach, um die Luft ausreichend in Schwingung zu ver-

setzen. Und deshalb ist um die Saite ein Hohlraum, der Resonanzkasten, gebaut, der die ursprüngliche Schwingung verstärkt, ein „Verstärker“. Und die Luft ist der „Leiter“. Begriffe, die man ja auch sonst immer wieder benutzt, in der Radiowelt zum Beispiel.

Die Tonhöhe ergibt sich aus der unterschiedlichen Länge der Saite. Wenn die Saite (oder die Röhre eines Blasinstrumentes) so lang ist oder so kurz, dann entsteht ein tieferer oder höherer Ton. Es ist also ein umgekehrtes Verhältnis. Jedes Instrument hat entsprechend seiner Art, Töne erzeugen zu können, einen bestimmten Tonumfang, d.h. der Abstand zwischen dem tiefsten und dem höchsten Ton, den das Instrument bzw. unsere eigene Stimme erzeugen kann.

Müssen wir das also messen, wenn wir Musik hören? Natürlich nicht, denn unser Denkvermögen, macht das für uns, ohne dass wir zu Papier und Bleistift greifen müssen. Unser organisches Denkvermögen ist nämlich ein ganz vorzüglicher Rechenkünstler, im winzigen Bruchteil einer Sekunde hat es „berechnet“, d.h. interpretiert, dass ein Ton höher oder niedriger, leiser oder lauter, kürzer oder länger ist und wie der Unterschied in der Höhe zum vorangegangenen und nachfolgenden Ton ist. Das sagt ihm die Hörerfahrung. Das Musikhören ist durch Lernen und Gewohnheit erworben und deshalb ist es auch so wichtig, dass den kleinen Kindern etwas Musikalisches „zu Gehör gebracht wird“.

Ein Violinspieler setzt den Bogen nicht willkürlich, sondern an ganz bestimmten Stellen der Saite den Bogen an. Und die Töne, die an diesen und nur an diesen Stellen erzeugt werden, sind die musikalischen Töne. Am Klavier ist es einfacher, da sind die Saiten, die mit einem Hammer über die Tasten angeschlagen werden, jeweils so lang, um einen bestimmten Ton zu bilden. Bei der Flöte sind es die Grifflöcher mit deren Abdeckung die Luftsäule im Inneren verlängert oder verkürzt wird.

Messen der Tonhöhenunterschiede

Aber wie ist die Musikwelt dazu gekommen, dass es gerade diese Stelle sein soll? Es sind Vereinbarungen, an die sich die Musiker halten, oder besser gesagt halten müssen, was viel Können und Übung verlangt. Wenn Violinisten etwas daneben greifen, dann wäre das nicht tönig sondern misstönig, und wir Zuhörer würden das sofort merken! Von Ludwig weiß man, dass er sehr wütend wurde, wenn dies passierte. Einmal hat er, nun als Dirigent, das Kon-

zert unterbrochen und hat gerufen: „Meine Herren, so nicht! Noch einmal, von vorne! Jetzt aber richtig!“ Das von ihm verwöhnte Publikum im Saal war natürlich begeistert und hat ihm heftig zugestimmt.

Die ersten, die durch ihre feinen Ohren und durch Proportionalmessungen am Monochord die für die Musik geltenden Tönen ableiteten, waren wieder die alten Griechen, die Herren Pythagoras und Aristexonos. Die Anhänger der beiden haben ganz schön gestritten, wie es am Besten sein soll, und der große Philosoph Platon hat sich auch eingemischt. So kommt durch positiven Streit das Bessere heraus, die Verfeinerung der Kunst.

Im 19. Jahrhundert hat man Methoden entwickelt, um die Töne zu messen, richtiger gesagt die Tonhöhen und die Abstände (Intervalle) dazwischen. Vor allem der Naturwissenschaftler Hermann von Helmholtz, der wie viele Naturwissenschaftler ein großer Musikliebhaber war, hat sich da sehr verdient gemacht. Die Methode beruht auf der Messung der Schallwellen der von den Instrumenten gebildeten Töne. Eine Luftwelle geht nach oben und sinkt wieder zurück. Und dieses wiederholt sich immer wieder. Nehmen wir eine bestimmte Zeit, eine Sekunde, so kann man feststellen, wie oft sich das Auf und Ab wiederholt. Gemessen wird die Schwingungshäufigkeit oder Frequenz in einer Sekunde.

Ab welcher Frequenz beginnt das menschliche Hören und wie weit reicht es? Wenn die Luft 16 Mal in der Sekunde schwingt, dann beginnen wir zu hören (ganz tiefe Töne) und es endet bei 20.000 Schwingungen (sehr hohe, eigentlich nur noch ein Sirren). Das ist unser Hörbereich, viele Tiere hören besser, ein Delphin über viele Kilometer, auch deswegen, weil Wasser Schall besser überträgt als Luft. Leider ist es so, dass das Hörvermögen im Alter, wenn alle Organe nicht mehr so leistungsfähig sind, geringer wird oder wie im Fall Ludwigs sogar erlischt. Man kann auch durch zu lautes und umso mehr durch ständiges lautes Hören das Hörvermögen sehr schädigen.

Professor Helmholtz hat in seinem Buch über das Tonempfinden auch erläutert, warum Töne auf den verschiedenen Instrumente so besonders erklingen. Es ist nämlich so: Nicht nur die Saite der Violine schwingt im Verhältnis zu ihrer Länge von der Druckstelle des Bogens bis zum Steg, sondern, wenn auch schwächer, die übrigen Teile der Saite, und auch das Holz des Kastens und selbst die Lackierung des Holzes, einfach alles, was bewegt wird. Und daraus ergeben sich beigemischte Schallwellen, das sind die Mit- oder Ober-töne. Und alles zusammengenommen ist ein Ton eigentlich ein mehrtöniger

Klang und dieser ist bei einem Instrument weich-obertonreich und bei einem anderen hart-obertonarm. Ein wirklich „reiner“ Ton (obertonloser) kann nur physikalisch erzeugt werden. Im Internet findet man diese Töne, sie klingen ziemlich ärmlich. Wir bleiben aber bei dem Wort Ton.

Und natürlich hat er auch unsere Fähigkeit, Töne durch Singen zu erzeugen, untersucht. Dafür sind unsere Stimmbänder zuständig. Die sitzen im Hals und werden durch die Luft beim Ein- und Ausatmen bewegt. Hinzu kommen die Bewegungen des Mundes, und die Mundhöhle ist der Resonanzkörper. Da kann man viel gestalten, das üblichste ist das Sprechen und das Singen. Das Kind lernt in seinen ersten Jahren diese Fähigkeiten. Durch Zuhören natürlich, die Eltern müssen mit ihren Kindern viel sprechen und auch mal was vorsingen. Mit drei oder vier Jahren ist diese Fähigkeit schon sehr weit entwickelt. Und das Kind schreit nun nicht mehr, wenn es hungrig ist, sondern sagt „ich bin hungrig“. Und auch singen kann es schon in diesem Alter, es singt „Alle meine Entchen“ ganz richtig, d.h. es hat gelernt selbst die Töne richtig zu formen.

Nun stellt sich die Frage, können wir so viel Töne mit unserer Stimme erzeugen, wie wir hören können? Nein ist die Antwort. Einige Instrumente, das Klavier und die Orgel, haben einen viel größeren Stimmumfang als die menschliche Stimme, Männer und Frauen zusammen genommen.

Und die weitere Frage lautet: welches sind die musikalischen Töne, also die, die ein Tonsetzer verwendet. Es können ja auf einer Saite der Violine an verschiedensten Stellen der Saite Töne erzeugt werden. Es sind aber genau festgelegte Stellen der Saite, an denen die musikalischen Töne erzeugt werden. Die musikalischen Töne sind also eine Auswahl aus den möglichen.

Die musikalischen Töne

Zur ersten Frage: man unterscheidet den Umfang oder Tonraum des Hörbaren, des von uns Singbaren und des auf Instrumenten Spielbaren. So zeigt es die Tabelle auf der nächsten Seite. Und wie zu sehen ist, ist sie unterteilt in Abschnitte, die durch die Buchstaben C 0 bis C 8 abgegrenzt sind. Alle Töne haben einen Namen aus dem Alphabet bekommen, eine Bezeichnung mit dem Zweck, dass man über die Töne sich unterhalten kann. Die C-Töne sind die ersten, die wir kennenlernen, und es gibt noch viel über sie zu berichten. Zunächst lassen wir noch viele Fragen offen und schauen uns die Tabelle näher an.

Teiler	C -1	C 0	C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8	C 9
Schwingungen		16	33	65	131	261	523	1046	2093	4286	8562
Das Hörbare											
Das Singbare											
Das Spielbare											

Anmerkung zur Tabelle: C 1, 2 usw. ist die international gebräuchliche Bezeichnung, im deutschen Sprachraum wird für C 3 c gesetzt und die folgenden Teilungen mit c', c'', c''' gesetzt.

Mit C 0 beginnt das Hörvermögen, mit C 1 das Hören der musikalischen Töne, die Wahrnehmung sehr tiefer Töne, der Frequenzwert ist 33. Dann geht es weiter bis fast C 8. Schwingungen darüber hinaus sind für das Ohr zu hoch, um noch Tonunterschiede wahrnehmen zu können. Der Tonbereich C 3 bis C 5 ist die Mittellage, der Bereich des Singens, der Melodien, dort wo sich das Spielbare „abspielt“, wie auch die Mitte der Klaviertastatur. Das Klavier und das tiefste Streichinstrument, der Kontrabass können Töne erzeugen, die wir hören aber nicht singen können. Meine Bassflöte kann das auch, aber irgendwie habe ich das Gefühl, da kommt nur heiße Luft heraus. Das Klavier und die Violine gehen in der Höhe ihres Stimmumfangs über das hinaus, was selbst sehr gut ausgebildete Frauenstimmen singen können.

Dazu eine kleine Geschichte. In der Oper „Zauberflöte“ von Wolfgang Amadeus singt die Königin der Nacht eine Arie, in der das „dreigestrichene E“ vorkommt, ein sehr hoher Ton. Die Königin ist nämlich sehr erbost über ihren Gegenspieler Sarastro. Frauen heben die Stimme an, wenn sie erbost sind. Männer brummen, gehen in die Tiefe. Nun wusste Wolfgang Amadeus, dass die Sängerin Josefa, seine Schwägerin, diesen „unmenschlich hohen“ Ton singen konnte, somit komponierte er ihn an der Stelle, wo die Königin ihren Zorn besonders deutlich machen wollte. Er hat - dies ist nun der traurige Teil der Geschichte - schon sterbenskrank und weil er wusste, dass die Oper gerade aufgeführt wurde, geflüstert: „jetzt gerade singt die Seppa mein hohes E“. Das berichtete ein Mädchen, das in seinen letzten Stunden anwesend war, in ihren Memoiren, geschrieben als sie selbst alt geworden war. Bis heute haben die Sopranistinnen ganz schön Angst, ob sie das hohe E so glockenrein treffen werden wie die Josefa damals im Dezember des Jahres 1791. Musik und die menschlichen Gefühle in traurigen wie heiteren Stunden ein großes Thema, in dem Lied „An die Musik“ von Franz Schubert in Töne gefasst. Und die Geschichte soll auch dazu dienen, dass ich allen Musikern meine tiefe Bewunderung für ihr Können, das viel unermüdliches Arbeiten notwendig macht, ausdrücken kann.

Nun stellt sich die Frage, wo sind denn diese C's, diese Grundtöne des Musikalischen, verankert im Fluss der ansteigenden Frequenzwerte der Töne? C 4 hat den Frequenzwert 261. Wenn die Luft in der Sekunde 261 mal auf- und abschwingt, dann erklingt der Ton C 4. Das ist eine Setzung, eine Verankerung von der aus sich proportional alles weitere der musikalischen Töne ergibt. Und wie weit ist nun C 5 davon entfernt?

Schaut man sich die Frequenzwerte der C- Werte an, dann stellt man fest, dass sie im Verhältnis 1 : 2 stehen, $C\ 4 = 261$ und $C\ 5 = 523$. Mit Hilfe des Dreisatzes kann man somit die Frequenzen der auf- bzw. absteigenden C-Töne errechnen (auch die aller übrigen). Es besteht ein Verwandtschaftsverhältnis zwischen diesen Tönen. Dieses nimmt der Mensch als Zusammenklängen wahr. Man hört es leicht, wenn auf dem Klavier C 3 und C 4 nacheinander angeschlagen werden und dann gemeinsam. Dazu später noch viel mehr.

Was wir als stetig aufsteigende C-Tonfolge hören, beruht in Wirklichkeit auf einem in Form einer Kurve ansteigenden Verlauf. Die Natur schwingt stetig ansteigend, unser Denkvermögen übersetzt dies in eine einfachere, gleichmäßige auf- oder absteigende Wahrnehmung der Tonhöhen.

Die C-Verwandtschaft wurde schon in der griechischen Antike und auch in anderen Regionen der Erde durch Hören wahrgenommen, also experimentell am Monochord. Die Naturwissenschaft seit der Mitte des 19. Jahrhunderts bestätigte sie durch Messen als naturgegebene Erscheinung. Übrigens: alles, was wir heute „Audio“ nennen, beruht auf diesen naturwissenschaftlichen Erkenntnissen und ihrer technologischen Anwendung. Daraus entstand die Reproduzierbarkeit von Musik auf Tonträgern. Zu Zeiten Ludwigs war es nur einer ganz kleinen Schicht sehr reicher Leute möglich, seine Musik zu hören. In diesem Moment hören vielleicht Hunderttausende auf der ganzen Erde eines der schönsten Klavierwerke Ludwigs, die „Mondscheinsonate“ über das Radio, über eine CD-Rom oder über das Internet. Eine wirklich positive Revolution. Noch sind viele Fragen offen, wir kennen bisher nur wenige Töne und wo das hohe E steckt, ist auch noch nicht erläutert.

Die C-Tonleiter und die Diatonik

Gehen wir, der Einfachheit wegen, vom C 4 - C 5 Abschnitt aus. Er beginnt mit den „Stellen“ auf der Saite oder der Taste C 4 und endet mit C 5. Was zu diesem Tonraum gesagt wird, gilt entsprechend für alle anderen C-Tonräume. Diese Töne sind - wie schon erläutert - durch ihren Frequenzwert

festgelegt, damit jeder Musiker weiß, was mit C ganz genau gemeint ist, was ja notwendig ist, denn es würde für Komponisten, Instrumentenbauer und auch die Hörer ganz verwirrend sein, wenn es nicht so wäre. Es ist eine Norm, eine gemeinsame Verständigung. Die C-Töne sind die Anker, auf denen alles weitere aufbaut.

Es geht jetzt um die Töne, die innerhalb der Strecke von C 4 - C 5 liegen. Das ist eine Aufteilungsaufgabe. Was bietet sich denn als Teiler an? Zwei Überlegungen kommen da zusammen: die Unterteilung der Tonhöhen darf nicht zu eng sein, denn dann würde unser Ohr keine oder keine deutlichen Unterschiede erkennen können. Und sie dürfen nicht zu weit sein, denn dann wäre der Zusammenhalt benachbarter Töne nicht mehr wahrnehmbar.

In der indischen Musik wird ein C - C⁺Tonraum in 22 gleiche Tonabstände unterteilt. In der japanischen Musik, wenn ich es richtig verstanden habe, gibt es, was das Singen angeht, keine, der Gesang der Geishas schwillt an und geht wieder zurück. Sehr ungewohnt wie sehr reizvoll. In der Musik unseres Kulturkreises bestehen zwei, ineinander verflochtene Aufteilungen, die 12er und die 7er Teilung. Die erste heißt die chromatische und die zweite die diatonische Aufteilung. Warum sie so heißen, wird gleich erklärt.

Zunächst muss man sich klar machen, was „Aufteilen“ bedeutet. C 4 ist der Anfangspunkt der Strecke, C 5 der Zielpunkt, zugleich der Anfangspunkt des nächsten, des C 5 - Tonraums. Die Länge dieser Strecke, eine Saite oder eine Luftsäule, wird aufgeteilt, in dem der Spieler einen Sprung macht und dadurch einen höheren Ton greift. Und so geht es weiter bis C 5 erreicht ist.

Jetzt machen wir von C 4 aus einen kleinen Sprung und sagen, der neue Ort auf der Saite ist der nächst höhere Ton, und dann folgt der gleiche Sprung auf den wiederum nächst höheren Ton usw. bis wir das Ziel C 5 erreicht haben. Diese Aufteilung ist so angelegt, dass wir nach 12 Sprüngen im Ziel ankommen, der Teiler ist immer der gleiche. Und diese aus diesen Sprüngen gewonnenen Töne nennen wir Halbtöne und geben ihnen entweder einen Buchstaben des Alphabets oder hängen ihnen ein „is“ an, somit so:

Die Töne	C 4	>	cis	>	D	>	dis	>	E	>	F	>	fis	>	G	>	gis	>	A	>	ais	(b)	>	H	>	C 5
Die Sprünge			1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.		9.		10.		11.		12.	

Und somit sind 11 neue Töne bestimmt worden, die zu den bereits bekannten beiden C-Tönen hinzukommen. Sie füllen den C 4 - C 5 - Tonraum aus, wie auch entsprechend die anderen C-Tonräume. Das ist die chromati-

sche Tonleiter. C 4 ist der Boden, dann kommen die 11 Töne, also insgesamt 12 Töne bis C 5, C 5 ist Ziel wie zugleich der Boden des nächsthöheren Tonraums. Man kann das auch besser mit dem Bild einer Treppe vergleichen, vom Erdgeschoss geht es über zwölf Stufen zum ersten Geschoss und dann weiter zum zweiten.

Diese Aufteilung ist aber nicht das Herzstück des Musikalischen, sondern eine 7er Aufteilung auf der Grundlage der 12er ist maßgebend. Jetzt ist es so: Zuerst nehmen wir zweimal zwei Stufen auf einmal, also wir überspringen cis und dis und landen gleich bei D und E. Diese beiden Sprünge sind also doppelt so lang wie die obigen. Die kleineren Sprünge werden Halbtonsprünge genannt, und dementsprechend nennen wir die größeren Ganztonsprünge.

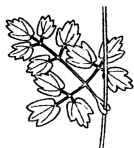
Nun springen wir aber nicht so weiter, sondern wir springen von E nur einen Halbtonschritt und landen bei F. Diese Sprungfolge, Ganzton, Ganzton und Halbton, ist das Herzstück der Musik unseres Kulturkreises. Es zeigt sich so: C>>D>>E>F. Das müssen wir uns unbedingt merken und wir können es auch mit dem ebenfalls aus dem Griechischen stammenden Begriff „Tetrachord“, „viertönig“, benennen.

Bevor wir uns fragen, warum das so und nicht anders ist, ergänzen wir noch den weiteren Verlauf bis zum nächsten C. Zwischen F und G fügen wir einen Ganztonschritt ein und mit G fängt der zweite Tetrachord an: G>>A>>H>C.

Und jetzt das Ganze: C>>D>>E>F>>G>>A>>H>C¹

Das ist die diatonische Tonleiter, das Erbe aus der Antike. Und somit erklärt sich auch das Wort "diatonisch", es stammt aus dem Griechischen und bedeutet „durch Ganztöne gehend“. Die Volkslieder wie die großen Werke der Musik beruhen auf ihr.

Allerdings: so richtig passt das Wort Leiter ja nicht, denn eine Leiter mit unterschiedlichen Stufenabständen wäre eine höchst gefährliche Sache. Im Bereich der Musik ist diese „Gefährlichkeit“ gewollt, sie dient, wie alles, was noch später behandelt wird, der Belebung und dieser zweimal eingefügte Halbtonabstand schafft Belebung, die eine einheitliche und ja oft eintönige „Rasterung“ mit immer gleichen Abständen nicht hervorbringen kann. Die Skalierung ist dem Auftrag der Musik nach eine bewegliche Ordnung, eine die Unterschiede einbezieht.



Auch die Natur rastert nicht, sie schafft Abstände entsprechend der von ihr verfolgten Nützlichkeit. So sieht man es am Beispiel des Buschwindröschens. So haben es schon die Musiktheoretiker der Antike gesehen und um das Jahr 1000 n. Chr. herum baute man wieder musiktheoretisch darauf auf

(Guido von Arezzo). Es gab im Mittelalter noch viele Varianten.

Aber wozu braucht man dann noch die „is“ Töne? Das Wort „chromatisch“ ist der Schlüssel für die Antwort. Es kommt aus dem griechischen Wort *chrómos*, was Farbe bedeutet. Die Diatonik in ihrer Eigenart ist die Grundordnung und die Chromatik ihre Ergänzung. Die „is“ Töne sind gewissermaßen die Überraschung, ein kleiner Sprung aus dem Gewohnten der Diatonik heraus, eine weitere Form der Belebung durch „Färbung“.

Geschichtlich gesehen war die reine Diatonik lange Zeit der alleinige Tonvorrat. Erst ab dem 16. Jahrhundert wurden mehr und mehr auch die „is“ Töne in die Tonfolge einbezogen. In Johann Sebastian Bach's „Chromatischer Fantasie“ sind die Köstlichkeiten der Vermischung der (dominant) diatonischen mit den hinzugefügten chromatischen Tönen dargestellt, eine Befreiung aus der damals als zu eng empfundenen Beschränkung der früheren Musik. Auf dieser Grundlage können wir nun die musikalischen Töne der diatonisch-chromatischen Tonwelt überblicken.

Töne und Stimmlagen im Überblick

Die Tabelle auf der nächsten Seite vermittelt einen Überblick über die nun festgelegten Töne und ihre Frequenzen sowie die Stimmlagen der Stimmen von Männern und Frauen. Aus Platzgründen ist nur der mittlere Ausschnitt des gesamten Tonraums ausgewiesen. Die erste Spalte weist die Schwingungswerte, die Frequenzen, aus. Die zweite den Anstieg der Frequenzen zwischen zwei Schwingungswerten. Diese sind nicht gleichmäßig, sondern folgen dem Verlauf einer Kurve. Während sie bei den tiefen Tönen noch gering sind, nehmen sie „weiter oben“ ganz bedeutend zu. Was bedeutet das? Es ist ja so, dass der Teiler immer den gleichen Wert hat, rechnerisch die 12. Wurzel aus 2, diese ja ziemlich komplizierte Formel brauchen wir nicht zu behandeln. Wichtig ist nur zu wissen, dass, wenn dieser Wert, nun als Vielfacher, auf jeder Stufe angewandt wird, er naturgemäß immer höhere Werte der Tonabstände ergibt. Wenn auch nur ein Wert (für C) festgelegt ist, können die Töne aller Töne mit dem Dreisatz errechnet werden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
880		52	A	A				
831		49	gis		S			
784		47	G	G				
740		44	fis					
698		42	F	F				
659		39	E	E		A		
622		37	dis					
587		35	D	D				
554		33	cis					
523	C 5	31	C	C				
494		29	H	H				
466		28	b					
440		26	A	A				
415		25	gis				T	
392	G	23	G	G				
370		22	fis					
349		21	F	F				
330		19	E	E				B
311		19	dis					
294		17	D	D				
277		17	cis					
262	C 4	15	C	C				
247		15	H	H				
233		14	b					
220		13	A	A				
208		12	gis					
196		12	G	G				
185		11	fis					
175	F	10	F	F				
165		10	E	E				
156		9	dis					
147		9	D	D				
139		8	cis					
131	C 3	8	C	C				
123		8	H					
117		6	b					
110		8	A	A				
104		6	gis					
98		6	G	G				
92		6	fis					
87		5	F	F				
82		5	E	E				
78		4	dis					

In der vierten Spalte sind die Namen aller Töne enthalten, die chromatische Tonleiter, und in der 5. die der diatonische Tonleiter entsprechend des tetrachordischen Aufbaus.

Die weiteren Spalten zeigen die Töne, die Frauen und Männer singen können. Da sieht man gleich, wie klug das alles abgestimmt ist. Frauen singen entweder Sopran (S) oder Alt (A), Männer Tenor (T) oder Bass (B). Die Sopran- und Tenorstimmen sind auf C 4 und C 3 verankert, das ist ihr tiefster Ton, die Alt- und Bassstimmen dazwischen mit ebenfalls gleichen Abständen zu den Grundtönen des Soprans und des Tenors. Praktisch, dass es Frauen und Männer gibt, nicht wahr?

Es sind dies die Chorstimmlagen. Die Chorsänger lernen sich in diese Tonräume einzustimmen. Wunderbar zu hören in den Chorpassagen der „Matthäus Passion“ von Johann Sebastian Bach oder im Oratorium „Die Schöpfung“ von Josef Haydn. Gesangsausbildung bewirkt, dass eine Sängerin und ein Sänger jeden der vorge-

stellten Töne (im jeweiligen Umfang ihrer Stimme) „aus dem Stehgreif“ singen (intonieren) können. Wir passen uns da an, Erfolg offen.

Damit alle Chormitglieder sich ein- und abstimmen können, lässt der Chorleiter, bevor es los geht, den sogenannten Kammerton erklingen. Der ist aber nicht ein C, sondern A 4 (= 440). Warum? A 4 liegt in der Mitte der So-

pranstimmlage und in der Mitte hört und singt es sich am leichtesten, wiederum praktisch gesehen, nicht wahr?

Die Stimmlagen der Instrumente

Auch die Grund- oder Ausgangstöne und Tonumfänge der Instrumente sind darauf abgestimmt. Die Violine z.B. fängt bei G 3 an und reicht hoch hinauf bis E 7. Auf das Wechselspiel zwischen Verfeinerung der Instrumente einerseits und der Erweiterung des Tonvorrats andererseits kann nur in Stichworten eingegangen werden. Schon in den Funden aus urzeitlichen Siedlungen hat man Instrumente gefunden, meistens Flöten. Und auch wir können mit Hilfe eines Bambusrohres in kurzer Zeit eine Querflöte bauen. Oder man klemmt einen Luftballon, der als Resonanzkasten dient, zwischen einen elastischen Stab und einer gespannten Schnur, die man an den Enden befestigt hat, schon hat man ein Monochord, ein „Einsaiter“ hergestellt. So ist es schon zu frühesten Zeiten gemacht worden. Der Besuch eines musikhistorischen Museums lohnt sich immer, da staunt man, was so alles erfunden wurde, um Töne zu erzeugen, Ziel war den Tonumfang zu erhöhen und die Spielbarkeit, die Grifftechnik, zu erleichtern.

Unschlagbar im Tonumfang sind die Tasteninstrumente, so das Klavier von A 0 bis C 8. Es umfasst alle 88 musikalischen Töne. Und daher ist es das wichtigste Arbeitsinstrument der Komponisten. Ludwig hatte drei Flügel und immer die neuesten erworben, die entwickelt worden waren. An der geschwungenen Form des Konzertflügels sieht man am Äußeren die immer kürzer werdenden Saiten von den tiefen zu den hohen Tönen und die Klaviatur vermittelt das Nebeneinander der Töne, wobei mit den weißen Tasten die diatonische Folge und mit den schwarzen die „is“ Folge angeschlagen werden.

Die anderen Musikinstrumente sind in ihrem Tonumfang begrenzter, sie werden daher in Familien unterschiedlicher Größe gebaut, so die Sopran-, Alt-, Tenor- und Bassblockflöte, wobei die Bassflöte immerhin fast ein Meter lang ist, so lang muss die Luftsäule in ihr sein, um die tiefen Tönen zu erzeugen. Andere Instrumente besitzen einen sehr umfangreichen Stimmumfang, so die Violine mit ihren vier Saiten auf G 3, D 4, A 4 und E 5 gestimmt. In die Tiefe gehen das Cello und der Contrabass. Eine sehr wichtige Familie sind die Bläser, als Holzbläser mit so wohlklingenden Mitgliedern der Querflöte, der Oboe, der Klarinette und des Fagotts. Und ja auch noch die Blechbläser, die können dunkle, warme „Waldstimmungen“ (Waldhorn) erzeugen,

aber auch die tiefsten Schläfer aufwecken (Trompete).

Andere Tonleitern

Die bisher betrachtete und genutzte Skala wird C-Dur genannt, weil C der Grundton ist, C bis C⁺¹ wird als Oktave ("achtttöning") bezeichnet. Die Oktave umfasst die 8 diatonischen Töne eines C-Tonabschnittes, wobei das C⁺¹ zugleich der Grundton der nächsten Oktave ist. Dur ist ein anderes Wort für die diese Anordnung, auch Diatonik genannt. Es ist nun so, dass jeder andere Ton auch Grundton sein kann, also D, E usw. bis H, auch die Halbtöne cis bis b. Die Tonräume verschieben sich dadurch um einen oder mehrere Töne nach oben wie nach unten. C-Diatonik bleibt die Grundform, wie man am besten am Klavier sieht, die anderen Tonarten sind Varianten zur Grundform C-Dur. Dieses Verschieben nennt man transponieren, die tetrachordische Folge der Ganz- und Halbtöne bleibt dabei immer erhalten. Und deshalb werden Halbtöne, die bei C-Dur „leiterfremd“ sind, „leitereigen“. Das sieht man in der Tabelle am fis, das in G-dur leitereigen ist und das F leiterfremd.

C	C	G	G
H	H	fis	fis
b		F	
A	A	E	E
gis		dis	
G	G	D	D
fis		cis	
F	F	C	C
E	E	H	H
dis		b	
D	D	A	A
cis		gis	
C	C	G	G

Wofür ist das wichtig? Es gibt verschiedene Gründe. Einmal um ein Musikstück so zu schreiben, dass es gut in eine Stimmlage passt. Eine Stimme hat, wie gesagt, ihre Mittellage, da singt es sich leicht, während die niedrigsten und die höchsten Töne Schwierigkeiten bereiten und sie klingen dann auch nicht so schön. Um dies zu vermeiden, es soll ja so schön wie möglich klingen, wird der bequemste Tonraum ausgewählt, bei Volksliedern meistens auf F oder G als Grundton.

1. Beginn	Sopran	Es-dur
2.	Sopran	B-dur
3.	2 Soprane	G-dur
4.	2 Soprane, 1 Tenor	C-dur
5.	2 Soprane	G-dur
6. Finale	3 Soprane, 5 Tenöre	Es-dur

Stimmlagen so weit wie möglich Mitte ist. Man hebt ja auch beim Sprechen die Stimmlage, wenn andere dazu kommen. Wie kunstvoll es da zu gehen kann, sieht man am Wechsel der Tonarten des zweiten Aktes der Oper „Figaros Hochzeit“, so in der Tabelle dargestellt. Wenn eine besonders lustige oder traurige Situation der Anlass ist, wird die Stimme gehoben oder gesenkt. Das Tonempfinden wird sehr angeregt, wenn das gesamte Musikstück oder Teile

Der zweite Grund ist der, dass in einer Oper z.B. zuerst zwei Frauen singen, dann kommt ein Tenor dazu und damit es wieder schön klingt, nimmt der Komponist einen Tonraum, der für beide

davon nicht in der gewohnten C-Tonlage erklingt, sondern der Stimmung, die musikalisch ausgedrückt wird, gemäß. Man kann somit ein Musikstück auch auf diese Weise färben, wie ja auch ein Maler die Farben rein oder getönt verwendet.

	Dur	Moll
G		
fis		
F	F	
E	E	
dis		
D	D	D
cis		
C	C	C
H		H
b		
A		A

Musiker sind nun mal phantasiereiche Leute, die immer noch etwas neues ausprobieren, wenn sie der Meinung sind, dass neben einer Hauptordnung noch andere hinzukommen sollten. "Moll" besagt, dass der erste Halbtonschritt nach dem ersten Ganzton angeordnet wird, statt nach dem zweiten, wie in der Tabelle zu sehen ist. Das allerwichtigste ist, dass man die C-Dur Leiter sich richtig gut erarbeitet hat. Das Weitere ergibt sich von selbst, wenn man auf ein Musikstück

stößt, das etwa in cis-moll geschrieben ist, so Ludwigs „Mondscheinsonate“, die uns in eine ganz sonderbar-verzückte Stimmung wegführt. Oder As-Dur in Ludwigs Klaviersonate opus 110, meine Lieblingssonate, die vorletzte seiner 32 Klaviersonaten. Welche Töne der chromatischen Tonleiter sind nun leitereigen und -fremd?

Und es gibt noch andere Tonarten, so die pentatonische, sie besteht nur aus fünf Tönen, z.B. C>>D>>E>>G>>A, nur Ganztonsprünge. Sie ist ganz ursprünglich, wie man an den Flöten der Urzeitmenschen nachgewiesen hat. Viele sehr schöne Kinderlieder sind pentatonisch, wie „Laterne, Laterne, Sonne, Mond und Sterne“. In bestimmten Momenten der Musik von Wolfgang Amadeus, die eine gelöste Stimmung beschreiben, wird die diatonische zur pentatonischen Musik und wenn es dann wieder erregter zugeht, wird die diatonische Folge benutzt und sogar noch chromatisch verfärbt. Der Wechsel der Tonart innerhalb eines Musikstücks oder des Tonraums, das alles sind Mittel der Belebung.

Die Welt der Musik ist nicht so wie eine Tanne, an der die Äste an einem Stamm aufgereiht sind, sondern wie eine Eiche oder eine Linde. Da wachsen nach einem Hauptstamm C-Dur die dicken Äste in alle Richtungen und diese Ableger teilen sich auch noch weiter auf. Das schafft naturgemäß Vielfalt für die Komponisten, aber auch Übersichtsprobleme für die, die Musik verstehen wollen. Daher bleiben wir auch bei den folgenden Erläuterungen auf der Haupttonart C-Dur.

Tondauer, Metrik, Rhythmik und Tempo

Bisher wurden allein die Tonhöhen betrachtet, nun kommt die Zeit hinzu. Die Töne und Stimmumfänge klappen wir nun nach der Tabellenmethode in die Senkrechte, und die Zeitachse in die Waagrechte. Geometrisch gesehen entsteht ein Rechteck, wobei die Zeilen die Tonhöhen und die Spalten die Zeitpunkte aufnehmen. Die kleine Tabelle macht dies deutlich. In ihr werden von unten links aus die aufsteigenden Töne, die Zeilen der Tabelle, übereinander angeordnet. Die Zeitschritte als Spalten der Tabelle verlaufen von links nach rechts. Die Zeitschritte sind eine ordinale Zahlenfolge, der erste, zweite usw. Zeitschritt vom Ausgangston aus entfernt.

E	X		
dis			
D			
cis			
C	X		
	1	2	3

Ein erster Ton wird gesetzt, C, danach ein zweiter D und danach ein dritter, E. Schon ist der Beginn einer Tonfolge gesetzt und jeder Ton im Verhältnis zum „zweidimensionalen“ Tonraum und in Beziehung zu den anderen Tönen bestimmt. Und so kann es bis zum Ende einer Melodie weitergehen, nach oben oder unten einerseits und nach rechts andererseits.

Auch der Fall, dass zwei Sänger gleichzeitig singen, der erste C und der zweite E, ist einfach darzustellen, wie durch X in der Tabelle angezeigt.

Ganze Note	1							
Halbe Noten	1/2				1/2			
Viertelnoten	1/4		1/4		1/4		1/4	
Achtelnoten	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
Punktierung	3/8			1/8	3/8			1/8

Über die Zeitschritte ist bisher nur gesagt worden, dass sie „fortlaufend“ sind. Das ist deutlich zu wenig, und

daher gilt es auch über sie das Wichtigste zu bemerken. Auch mit Blick auf die Zeit wird nicht gerastert, d. h. ein immer gleiches Andauern der Töne beibehalten. Ein Violinist kann einen Ton entweder „antupfen“ oder den Bogen kürzere oder längere Zeit „ziehen“. Das Beibehalten wie die Veränderung der Tondauer ist eine ganz wichtiges Mittel eine Melodie weiter zu gestalten, sie zu beleben. Der Pulsschlag ist der Ausgangspunkt der Festlegung der Zeitmaße. 60 Schläge pro Minute oder eine Sekunde ist das sehr gemächliche Grundmaß, eine Viertelnote genannt. Durch Vervielfachung enthält man die ganze Note 4 x 1/4 und die halbe Note 2 x 1/4. Die halbe Viertelnote ist die Achtelnote. „Punktierung“ bedeutet, dass innerhalb eines Taktes ein Ton um die Hälfte seiner Dauer verlängert wird und der nächste halbiert wird: also 1½ und ½, zusammen zwei Viertel.

Viele Komponisten geben an, wie schnell eine Viertelnote tatsächlich zu nehmen ist. Zum Beispiel nicht 60, sondern 70 oder gar 80 Schläge in der Minute oder noch mehr. Daraus ergibt sich das vom Komponisten gewünschte Tempo. Schnell = allegro, langsam = andante. Sie geben auch an, dass im Verlauf des Musikstücks der Grundschatz schneller oder langsamer gespielt werden soll. Beschleunigen oder verlangsamen ist wiederum etwas, was der Belebung dient. Wenn Cherubino (Beginn des zweiten Aktes „Figaros Hochzeit“) sich in seine Begeisterung hinein singt, dann wird er immer schneller, zum Ende ist er ziemlich erschöpft nach so viel Begeisterungstürmen, was die hübschen Frauen Susanne und Gräfin Almaviva angeht.

Fasst man mehrere Noten zusammen, dann erhält man den Takt. Vier Viertel bilden den geraden, drei Viertel bilden einen ungeraden Takt. Man zählt 1, 2, 3 und 4, neuer Takt, 1, 2, 3, 4 bzw. 1 2 3, 1 2 3. usw. Vier Vierteltakt wird 4/4 geschrieben wird, aber das hat nichts mit einem Bruch zu tun, sondern heißt nur, dass die normale Tondauer eine Viertelnote ist und dass davon vier auf einen Takt entfallen. Auch da gibt es viele Möglichkeiten, aber die Zusammenfassung von drei oder vier Viertelnoten als Taktgrundmaß sind die gebräuchlichsten. Auf der Einheit des Taktes, das ist die „Metrik“ eines Musikstücks, beruht die Unterteilung des Gesamtstückes in Abschnitte, dazu später mehr.

Rhythmus entsteht, wenn Noten betont werden, das heißt etwas kräftiger gespielt oder gesungen werden. Meistens wird der erste Ton eines Taktes betont, also im 3/4 Takt **1**, 2, 3, **1**, 2, 3, usw. Auch im 4/4 Takt wird der erste Ton betont und auch, aber nicht so stark, der dritte. Also **1**, 2, 3, 4; **1**, 2, 3, 4.

Wenn man Musik macht, dann muss man wirklich taktfest sein, so wie ein Tänzer. Lustigerweise wird berichtet, dass Ludwig nicht tanzen konnte (vermutlich nicht wollte), mir geht es genau so, das beruhigt mich ja regelrecht! Melodie, die Tonfolge, Tempo und Rhythmus und entsprechende Körperbewegung sind Geschwister, wie auch das Titelbild zeigt.

Verzierung war besonders in der Barockmusik sehr beliebt. Sie beruht darauf, dass ein Ton in mehrere kürzere aufgelöst wird, zum Beispiel wird getrillert oder eine Triole, 2 Viertel werden als drei, entsprechend kürzere Töne ausgeführt. Die Barockmusiker haben dieses Verzieren oft ziemlich übertrieben, es war halt ein eitles Zeitalter, wie man an der Kleidung der hohen Damen und Herren sieht. Ludwig war nicht eitel und deshalb hat er diese Unart nicht mitgemacht, seine Triller und Triolen sitzen an der musikalisch

folgerichtigen Stelle.

Da nun die Töne und Tonräume, die Stimmumfänge und ihre Einbindung in die Tonräume und die Tondauern sowie die Gliederung der Zeit durch Tempo, Takt und Rhythmus bekannt sind, hat man das Handwerkzeug zusammen und kann sich selbst an das Komponieren heranwagen. Es muss ja nicht gleich ein Meisterwerk entstehen! Einmal probieren sollte man es!

Komponieren

Jedermann kann ein Komponist sein, ganz spontan und nach dem ersten Einfall kann man ja feilen. Zunächst stellt man sich eine Situation vor. Sagen wir mal, nach längerer Kälte und Regenzeit ist endlich der Sommer angebrochen. Und ganz begeistert ruft man aus: „Tra-ri-ra, der Sommer, der ist da“. Oder man schlürft eine Tasse Kaffe und sagt sich „Hm, hm, hm, der schmeckt gut“. Johann Sebastian Bach hat sich da auch gefreut und eine "Kaffeeantate" komponiert. Und das Kinderlied C A F F E E gibt es, das ist ein musikalischer Spaß, denn C, A, F und E sind ja Töne aus der diatonischen Tonleiter. Auch mit Johann Sebastians Namen kann man spielen: B, A, C, H, und das ist auch oft zu Ehren des großen Tonmeisters gemacht worden. Aber bleiben wir beim Sommerbeginn. Darüber hat man sich schon immer gefreut und das folgende Gedicht aus alter Zeit, schon in Silben unterteilt, setzt die Freude in Worte. Für 30 Silben gilt es, Töne zu finden.

Tra > ri > ra > der > Som > mer > der > ist > da	9 Silben
Wir > geh > en > in' n > Gar > ten	6 Silben
woll' n > des > Som > mer's > war < ten	6 Silben
Ja > ja > ja > der > Som > mer > der > ist > da.	9 Silben

Wie kann man beginnen? Man schaut sich mal an, wie viel Möglichkeiten es gibt, wenn man für Tra > ri > ra mit den Tönen C (Grundton), E (mittlerer Ton) und G (oberer Ton) zu einem Anfang kommen will. Zwischen diesen Tönen liegen deutliche Abstände, es werden ja die Töne D und F übersprungen.

Aus der Tabelle sehen wir, welche 6 Tongruppierungen mit 3 Tönen ohne Wiederholung überhaupt möglich sind. Die Kombinatorik, ein besonders

schöner Zweig der Rechenkunst, schafft da viel Durchblick. Es geht ja aufwärts, man freut sich, der Puls schlägt höher, somit bietet sich entschieden die erste Variante an, kein Zweifel, die zweite mit ihrer Abwärtsfolge entspricht gerade nicht der Stimmung, wenn man sich freut. Damit ist schon ein Anfang gewonnen.

G			ra						
fis									
F				der					
E		ri			Som	mer			
dis									
D						der	ist		
cis									
C	Tra								da.

Warum freut man sich? Weil „der Sommer (endlich) da ist“. Nach dem Ausruf, man steht jetzt auf G, folgt die Antwort, warum man sich freut, in der Tonfolge eine Rückkehr zum Ausgangston C. Und jetzt geht man an das Aufschreiben

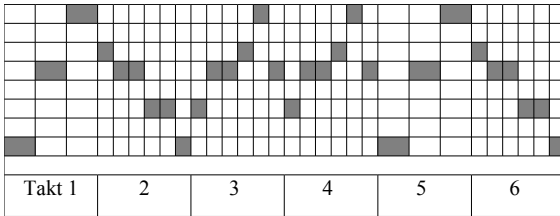
in die Tabelle des ausgewählten Tonraums C - G, in diesem Fall ist er $8 \times 9 = 72$ Felder groß. Auf dem hohen Ton stehen zu bleiben oder gar noch weiter zu steigen, das geht wohl nicht. Man kehrt also in einer Tonreihe zurück zum Ausgangspunkt. Die Bewegung ist auf- und dann abwärts gerichtet, der Inhalt ist bestimmt und der Kreis der ersten Zeile des Gedichts ist geschlossen. Das ist ganz wichtig: in der Musik geht es nicht nur um das Setzen einzelner Töne, sondern auch darum, den Anfang mit dem Ende der Melodie oder ihren Teilen in Verbindung zu bringen, wie das ja auch bei den Zeilen eines Gedichts der Fall ist. Einige Anforderungen wird man dabei beachten haben. So wird man Monotonie auf dem Weg von C nach G und zurück zu C vermeiden, so indem man die Töne F und D auch benutzt. Sprünge machen einerseits oder eine Tonhöhe wiederholen andererseits, beides trägt zur Belebung bei. Die Diatonik bringt ein Spannungselement hinein, der Halbtonabstand von E nach F oder die Tonhöhenunterschiede C - E und E - G.

G					Gar-	
Fis						
F				in 'n		
E		geh-	en			ten
Dis						
D	Wir					
Cis						
C						

Es folgt die nächste Zeile. Die erste Melodie einfach zu wiederholen, das geht nicht, weil für 6 Silben (statt 9 wie am Anfang) Töne zu finden sind. Und wenn es auch ginge, es wäre sehr langweilig. Das bedeutet, für diese beiden mittleren Zeilen des Gedichts brauchen wir eine neue Ton-

folge, die von D zu G ansteigt, um dann am Ende einen Zeitschritt abzufallen. Da es sich um die Mittelzeilen des Gedichts handelt und durchlaufend erörtert wird, was auf das Freuen folgt, was man nun tun will, kann diese Tonfolge wiederholt werden.

Und für die vierte Zeile des Gedichts lässt sich das Motiv für die erste wiederholen, nicht nur, weil es der Zahl der Silben nach passt, das wäre keine gute Begründung, sondern weil im Gedicht ja ebenfalls der Beginn wiederholt wird. Damit hat man eine erste Gesamtschau. Einem ersten Teil A mit zwei gegenläufigen Bewegungen A 1 und A 2 folgen die Teile B und B und schließlich A, somit ABBA, das ist das Satzgefüge, das sich aus den vier Zeilen des Gedichts (Strophe) ergibt.



Nun kommt noch die rhythmische Überprüfung hinzu. Da Tra-ri-ra Ausrufe sind, sollten sie länger sein als die fortlaufend erzählende Wendung „der Sommer,

der ist da“. Somit einerseits Viertel- und andererseits Achtelnoten. Die Schlussnote für „da“ sollte auch länger sein, daher setzen wir ein Ausrufezeichen, eine Fermate, d.h. einen länger als notiert dauernden Schluss. Alles beachtet, kommt man zu der Melodie, wie sie in der Tabelle als Bild zu sehen ist. Sie besteht aus 2 Elementen, eine Tonfolge und eine rhythmische Gliederung, die unterhalb durch die Taktstriche angedeutet ist, und diese beiden Gesichtspunkte, Tonfolge und Rhythmus, bilden das Wesentliche einer Melodie.

Die Tabelle zeigt die Auf- und Abwärtstonfolgen, die Töne, die kurz bzw. lang sind, die Abstände zwischen den Tonhöhesprüngen und damit die „Nachbarschaften“ der Töne, ferner der Abstand zwischen dem tiefsten und höchsten Ton und die Mittellagen.

Das sind weitere Bestandteile des Bauplans, es sind Anordnungen und wenn man das vergleicht mit der Arbeit eines Bibliothekars, der sich ein Regal gebaut hat und nun seine Bücher nach Gruppen hineinstellt, so sieht man den Kern der Dinge, es geht darum Proportionen herzustellen. Bei einem Architekten, einem Maler usw. ist es genau so, die Regeln des Dreisatzes oder der Proportion sind die Grundlage des Verstehens.

Es gilt, aus einer Grundlage, dem Tonmaterial, heraus Formen zu erfinden, die proportional gefügt sind und erlebnisreich sind. Und damit das musikalische Empfinden ansprechen.

Tonpaare und Melodien

Beim Betrachten eines Musikstücks geht man, um weiteres sich zu erarbeiten, am besten von „Tonpaaren“ aus. Kein Ton steht für sich allein, jeder bildet ein doppeltes Paar, mit dem Ton, der vor ihm erklang einerseits und dem, der nach ihm erklingen wird, andererseits. E, der zweite Ton der Tra-rira Melodie, folgt nach C und steht vor G. Es sind also zwei Tonpaare C - E und E - G. Es ist wie bei einer Kette, die Glieder greifen auf doppelte Weise ineinander. Und das letzte Glied der Kette, die „Schlussklausel“ knüpft an die „Eröffnungsklausel“ an. Die Zwischenglieder haben auch bestimmte Formen, so zum Beispiel die Wendepunkte, wenn eine Aufwärtsbewegung in eine Abwärtsbewegung übergeht. Und in der Musik, die freier oder ungebundener als andere Künste ist, kann man immer auch chromatisch färben. Oder die Zeit kürzen oder verlängern, was später noch weiter behandelt wird.

Die Eigenschaft eines Tonpaars ergibt sich aus dem Abstand (oder Intervall) der beteiligten Töne, oder ihrer Nachbarschaft. Nehmen wir das Tonpaar C - G. Auf der diatonischen Tonleiter liegen D, E und F zwischen C und G, oder zusammen gesehen **C** D E F **G**, somit drei Ganztonsprünge und ein Halbtonsprung, E F, zusammen somit 7 Halbtöne. Dieses Paar wird eine Quinte genannt, aber - wie man sieht - nicht, weil fünf Sprünge Abstand vorliegen, gesprungen wird ja nur viermal, sondern fünf Töne einbezogen sind. Nehmen wir jetzt das Tonpaar **H**¹ C D E **F**. Das ist auch eine Quinte, fünf Töne sind beteiligt, aber der Abstand ist geringer, weil nun zwei Halbtöne enthalten sind, der Abstand ist in diesem Fall 6 Halbtöne. Und es gibt auch den Fall des Abstandes mit 8 Halbtönen. Man sieht, hinter dem Begriff Quinte („fünftönig“) verbergen sich mehrere Formen, die „reine“ Quinte (7 Halbtöne), die „verminderte“ (6 Halbtöne) und die „erweiterte“ (8 Halbtöne).

Der Tetrachord bewirkt schon hin und wieder Verwirrung, das stimmt, aber es wäre Verarmung, wenn man diese Idee der antiken Denker, die nicht rationalistisch sondern lebenskundlich dachten, abschaffen wollte. Dass es so um 1900 herum gleichwohl geschah, die Diatonik als überholt bezeichnet wurde, ist ein anderes Thema. Ob sich das atonale, was bedeutet, dass auf den tetrachordische Aufbau verzichtet wird, nur noch die Chromatik gilt, gelohnt hat? In der sogenannten Populärmusik lebt die Diatonik unangefochten weiter.

Gehen wir jetzt vom Tonpaar C - C aus. Das ist eine Tonwiederholung, als Prime (die erste Form) bezeichnet. Eine Sekunde (die zweite Form) ist

das Tonpaar C - D, ein Schritt aufwärts und zwar ein Ganztonschritt (und daher eine „große“ Sekunde) oder wie bei E - F ein Halbtonschritt (und daher eine „kleine“ Sekunde). Eine Terz **C D E** hat auch zwei Varianten, hier vier Halbtöne, als D, E, F nur drei. Somit die „große“ und die „kleine“ Terz. Ebenso die Quarte **C D E F**. Die Quinte hatten wir schon und über die Sexte und Septime kommen wir schließlich zur altbekannten Oktave C - C⁺¹. Es gilt, immer mal nachschauen in der Tonleiter!

Wie gesagt die Töne, die wir als musikalische bezeichnen, sind eine Auswahl. Nimmt man die Tasten des heutigen Klaviers (oder dieses Wunderwerk eines Flügels) mit 88 Tasten (also machbaren Tönen), so beläuft sich die Zahl auf $88 \times 88 = 7.744$ Tonpaare. Aber das ist keine sinnvolle Zahl, denn kein Komponist wird auf einen ganz niedrigen Ton einen ganz hohen Ton folgen lassen und für einen Menschen, der singt, oder einem Instrument, das gespielt wird, stehen nur die Tonpaare des jeweiligen Stimmumfangs zur Verfügung. Auch ein Oktavsprung ist im Singen höchst ungewöhnlich, kommt jedoch schon ab und zu mal vor, so zum Beispiel in Ludwigs Ode „Die Himmel rühmen“. Ein Quintsprung wird vor allem dann eingesetzt, um in der Tonfolge ein Ausrufezeichen zu setzen. Eine Melodie verläuft somit üblicherweise in Tonwiederholungen (Primen), in Stufen (Sekunden) und in Terzen.

	C	D	E	F	G	A	H	C ⁺¹
C	C,C							
D		D,D						
E			E,E					
F				F,F				
G					G,G			
A						A,A		
H							H,H	
C ⁺¹								Okt.
Die aufsteigenden Sekund-, Quart- und Quintpaare sind grau abgesetzt. In der Diagonalen stehen die Primen. C - C ⁺¹ ist die Oktave								

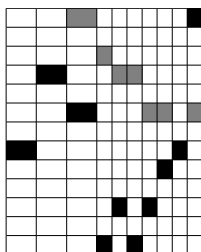
Wie viel Tonpaare gibt es nun innerhalb einer Oktave? Es sind im Fall der diatonischen Tonleiter $8 \times 8 = 64$. In der Diagonale von links oben nach rechts unten befinden sich die Paare

vom Typ C - C, die Primen. Dann folgen die Sekunden (Typ C - D), 7 mal aufwärts und 7 mal abwärts. Einige davon sind ganz- und einige halbtönig. Bei der Terz findet man 6, bei der Quarte 5, bei der Quinte 4, bei der Sexte 3 und der Septime 2 Möglichkeiten innerhalb einer Oktave. Es sind aber manchmal verminderte, reine usw. Das muss man auch noch bedenken.

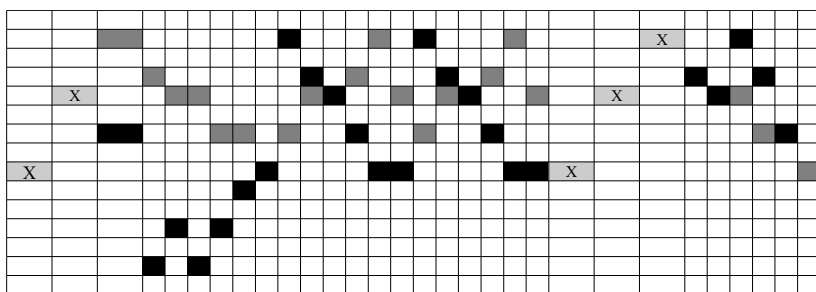
Um zu erproben, was uns das Wissen um die Tonpaare für das Verstehen von Musik bringt, werfen wir nun noch mal einen Blick auf die Tra-ri-ra - Melodie. Da ein Vergleich zum Nachdenken anregt, passt es sehr gut, dass

das Gedicht über den Sommeranfang mit einer anderen Melodie, die man in den Liederbüchern findet, vertont wurde.

Tra - ri - ra “analytisch”



Mit dem Blick auf die Tonpaare und Tonfolgen hat man ein Mittel in der Hand eine Melodie zu untersuchen, ihren Bauplan zu erkennen. Schon die Einleitung ist ganz unterschiedlich. In unserem Lied (die grauen Kästchen, C und E sind gemeinsame Töne) geht es frisch und fröhlich in Terzen aufwärts, C - große Terz - E - kleine Terz - G, also eine Quinte. Dort angelangt folgt die Wende und in Sekundschrillen geht es zurück zum C. Auch die neue Melodie (die dunklen Kästchen) beginnt mit einer großen Terz, aber danach geht es eine Sekunde zurück (!) und dieser Umkehrung folgt ein Fall um eine Quinte und nach einem Hüpfen geht es aufwärts zum gemeinsamen C, und weiter zum G. Diese Melodie hat sich somit einen viel größeren Tonumfang „erobert“, nämlich eine Oktave statt wie bei uns „nur“ eine Quinte. Quint- und Oktavlieder sind unterschiedliche Formen, viele besonders anrührende Lieder bewegen sich in der Quintregion, so „Am Brunnen vor dem Tore“ von Franz Schubert, nur an einer (dramatischen) Stelle geht es über die Quint hinaus. Man kann somit nicht sagen, dass ein enger Tonraum weniger anspruchsvoll ist.



Die beiden Melodien in ihrem gesamten Umfang einer Strophe des Gedichts sieht man vergleichend in der Tabellengraphik. Da der vertikale Tonraum unterschiedlich ist, sind naturgemäß die „Sprungweiten“ enger oder weiter. So kann man bei einem Quintabstand nur Sekunden und Terzen, beim Oktavabstand auch Quart- und Quintabstände einsetzen. In den Wendepunk-

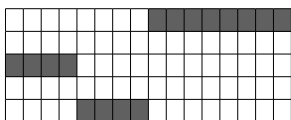
ten, in den Auf- und Abschwüngen sieht man die unterschiedlichen Details der Tonpaare und Gruppierungen in ihrer graphischen Umsetzung.

Komponieren durch „Aufspalten“ langer Noten

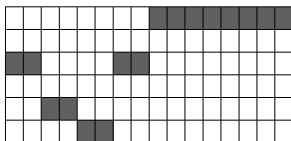
A und G diminuiert



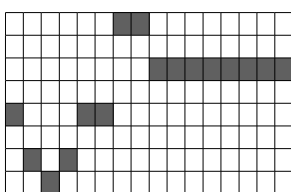
in 2 Halbtöne



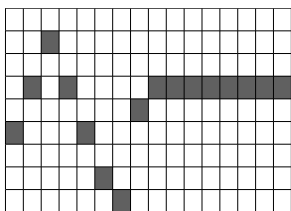
in 4 Viertel



in vier Achtel und 2 Viertel



In acht Achtel



Alles Komponieren ist Einfallskraft, aber nicht nur, sondern auch Wissen und Handwerk. Eine „Technik“, wie man der Einfallskraft nachhelfen kann, ist das Aufspalten langer Noten oder Diminuieren, um Melodien oder Teile von Melodien zu finden. Eine clevere Kompositionstechnik unter anderen wird jetzt beispielhaft vorgestellt.

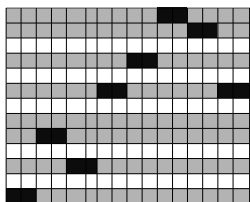
Nehmen wir zwei lange Noten, eine sehr lange G und eine gleich lange A. Man kann die erste Note immer weiter aufspalten, von der ganzen zur halben Notendauer, zum Viertel, zum Achtel und selbst zum Sechzehntel und die zweite Note „stehen lassen“ und diese Tondauern auch mischen. Man muss nur eins beachten: die Aufspaltung beginnt mit G und der letzte Ton der Aufspaltung verweist auf das A, ist ein hinführender oder Leitton. Das A ist der Zielton. Da eignen sich die Halbtöne ganz besonders, weil es von ihnen nur eine kurze Distanz zum ruhenden, langen Ton ist.

Ansonsten kann man von G nach oben wie nach unten abweichen, was um so mehr möglich ist, wenn die Tondauer sehr kurz ist. Entsprechend kann man mit Tonpaaren im Terz-, Quart- und Quintabstand verfahren. Es lohnt sich sehr, auf dem Papier und danach mit der Blockflöte das Aufspalten zu üben.

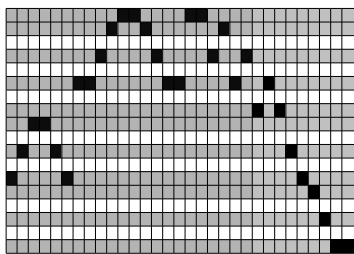
Und dabei kann man auch das Färben durch leiterfremde Töne studieren, wenn man in der C-Tonart unterwegs ist, die chromatischen is- Töne.

Diese Technik wurde als Teil einer Ars nova des Komponierens gesehen, die am Ende des Mittelalters Furore machte. Vor einem langen Ton, dem Ruhton, spaltet man nach Vergnügen auf und plötzlich hört man den Anfang von „Horch, wer kommt von draußen rein“. Wer ist es denn, das Feinsliebchen? Die Göttin Terpsichore natürlich!

Eine Frau und ein Mann haben etwas erörtert und waren sich gar nicht so einig, kommt ja vor. Rede und Widerrede, hin und her, da ist Spannung angesagt. Aber zum Ende der Debatte kommt ein Entschluss zustande: Wir gehen jetzt dorthin, wo der Dudelsack spielt (in die Schenke) und dort vertragen wir uns wieder, denn da spielt die Musik auf!



Wie hat Johann Sebastian diese zu einem guten Ende gekommene Geschichte in Töne gesetzt? Das können wir uns am Ende (im Finale) in seiner „Bauernkantate“ anhören. Sicher hat Johann Sebastian nicht diminuiert, ihm flogen die Melodien nur so zu. Wir machen mal so als ob. Zuerst hat er Viertel gesetzt und dann hat er diminuiert, in der Rhythmik zwei kurz - ein lang - zwei kurz - ein lang usw. (Die diatonischen Töne sind in grau).

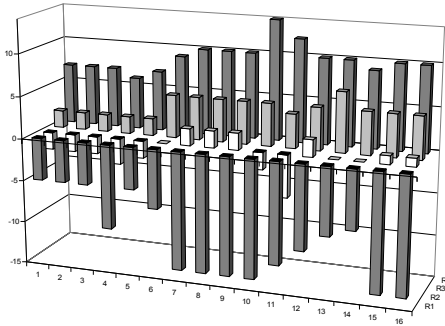


Und danach hat er sich überlegt: der erste Viertel wird in zwei Achtel auf gespaltet, das zweite Viertel bleibt stehen. Ein Rücklauf zum Grundton in Achteln. Danach ein deutlicher Anstieg, eine Quinte. Wie es weiter geht sieht man in der Tabelle. Es geht um die Erleichterung, weil das Streiten zu Ende gegangen ist, und um die Vorfreude. Das gestufte Steigern in die Höhe zu einem langen Ton, die Läufe dazwischen usw.: kurz gesagt, aus der trögen Vierteltonreihe ist eine hin- und mitreißende Melodie geworden.

Mehrstimmige Musik

Mehrstimmigkeit heißt, dass zwei oder mehr Stimmen gleichzeitig erklingen. Sie hat verschiedene Formen. Wenn eine Frau und die Kinder ein Weihnachtslied singen, dann singen sie dieselbe Melodie in der selben Stimmlage, Sopran. Im Ergebnis ist der Gesang des kleinen Chores lauter, naturgemäß auch klanglich gemischerter, denn jede Stimme hat ihre Eigenart. Unser orga-

nisch so empfindliches Ohr und unser Tonempfinden sind fähig, entweder den Gesang einheitlich zu hören oder sich auf eine der Stimmen auszurichten, diese herauszuhören. Wenn der Papa mit dazu kommt, der tiefer singt, entsteht bei gleicher Melodie schon eine veränderte Klangmischung. Wenn der Papa nun aber eine andere, mit der oberen Stimme gleichwohl verbundene Melodie singt, dann entsteht das, was mit Mehrstimmigkeit gemeint ist.



Eine Musik öffnet sich durch Mehrstimmigkeit, sie erhält Tiefe, und geometrisch ist das die Einführung einer dritten Dimension, wie beim Würfel. Wie stellt sich Mehrstimmigkeit im graphischen Bild dar? Dazu nehmen wir ein altes, vierstimmiges Musikstück zu Hilfe, das sehr schöne Lied „Belle qui

tiens ma vie“ (Du Schöne, ohne Dich kann ich nicht leben) von Thoinot Arbeau, vor mehr als 400 Jahren geschrieben und immer noch höchst lebendig. Im Internet sind zahlreiche Interpretationen enthalten. Das Lied ist frisch wie am ersten Tag. Die mittlere Ebene ist der C-Ton- und Zeitraum, und von diesem geht der Sopran, im Hintergrund des Bildes, aufwärts, die Bassstimme im Vordergrund abwärts, die beiden Mittelstimmen liegen dazwischen. Wie ist es möglich, dass die einstimmig gesungene Melodie des Lieds trotz der zusätzlichen Stimmen nicht verfremdet wird? Man hört, wenn die Sänger sehr gut eingestimmt sind, die Einzelstimmen nicht, man könnte sagen, durch Mehrstimmigkeit ist eine neue, höhere Einstimmigkeit mit viel Tiefe und noch mehr Reiz für uns entstanden. Dies mit wenigen Worten zu erklären - wenigstens das Wichtigste darüber - ist die nächste Aufgabe.

Die harmonischen Eigenschaften der Tonpaare und der Akkorde

Mit „melodisch“ meint man das zeitliche Nacheinander der Töne, mit „harmonisch“ das gleichzeitige Erklingen. Die Töne eines Paares sind beides: untereinander „benachbart“ und untereinander „verwandt“. „Benachbart“ hatten wir schon behandelt, zwischen den Sekunden, Terzen und Quinten besteht ein kleiner oder mittlerer Abstand in der Tonhöhe, entfernter sind schon

die Oktaven. Was heißt nun „verwandt“? Es heißt, dass Tonpaare unterschiedlich zusammen klingen, manchmal sehr harmonisch, sie bilden eine klangliche Einheit, sie sind wohlklingend, „konsonant“ und für andere gilt, sie sind dies weniger, ab einem gewissen Grad der Abweichung werden sie als „dissonant“ empfunden. Das kann man am besten selbst feststellen, wenn zwei Blockflötenspieler gleichzeitig ein C und ein G anstimmen, das klingt sehr einheitlich, und danach C und D oder gar C und cis, das klingt nun ziemlich „kratzig“.

Seltsam! Je näher die Töne eines Tonpaars benachbart sind, umso angespannter - weniger verwandt - sind sie in ihrem Zusammenklang. Eine umgekehrte Proportion, die uns aber nicht besonders auffällt oder stört, wenn die Töne in kleinen und großen Sekunden folgen, wie es in einer Melodie der Fall ist. Aber wenn sie gleichzeitig erklingen, dann ist der Klangunterschied sehr deutlich.

Für mehrstimmige Musik ist die Beachtung dieser Verwandtschaften eine ganz entscheidende Voraussetzung. Ein Solospieler kann stundenlang auf seiner Flöte musizieren, wenn er die Läufe und die Zeiten hübsch gruppiert - diminuiert und die Rhythmik einhält - macht er gute Musik. Aber wenn nun zwei oder mehr Spieler gemeinsam auftreten, dann ist Abstimmung und Eintracht angesagt, eben Harmonie. Diese ist aber nicht ein immer währender Wohlklang, da würde man bald nicht mehrinhören, sondern das Wechselspiel konsonanter und dissonanter Tonpaare.

Zum Verständnis der harmonischen Verwandtschaften muss man noch einmal auf die Tabelle der Luftschwingungen sehen. Sie zeigt, dass Klangübereinstimmung dann entsteht, wenn zwischen den Frequenzen einfache Proportionen bestehen. Das ist ja eigentlich nicht überraschend. Wenn ich zwei gleichgroße Steine ins Wasser werfe, dann werden die dadurch ausgelösten Wellen sich nicht wild kräuseln, sondern gelassen vermischen. So entsprechend geht es auch in der Luft und vermittelt der Ausbreitung der bewegten Luft schließlich im Ohr und in unserem Empfindungsvermögen zu.

Im Fall des Tonpaars vom Typ C - C ist das Verhältnis der Töne 1 : 1, die Tonwiederholung. Im Fall der Oktave C - C⁺¹ 1 : 2, die Schwingungszahl ist doppelt so hoch. Die der Quinte C - G ist niedriger, die Schwingungszahl von C muss ich um 1,5 erhöhen um die von C zu erhalten. Das kann in ganze Zahlen umgewandelt werden, zunächst multipliziert man 1 : 1,5 mit 10 = 10 : 15, gekürzt durch 5 = 2 : 3. Mit Hilfe dieser Methode, eine

Proportion in ganzen Zahlen auszudrücken, kommt man schließlich zu einer eingängigen Messziffer dafür, dass die Schallwellen mehr oder weniger leicht sich vermischen (konsonant sind und von unserem Musikverständnis als leicht fassbar empfunden werden) oder dies weniger der Fall ist (unser Tonempfinden vor die Frage gestellt wird, wie dieses Tonpaar zu bewerten ist). In der Tabelle sind die weiteren Tonpaare in diesem Sinne dargestellt und die grau eingefärbten sind die Konsonanten, alle anderen sind dissonant. Zur Erinnerung: „Vermindert“ bedeutet, dass der Gesamtumfang der Halbtöne um einen Halbton geringer ist. So besteht die Quinte C - G aus 2 Ganztönen und einem Halbton, im Fall der Quinte H - F⁺¹ sind es dagegen 2 Halbtöne (H - C und E - F).

Tonpaar	Beispiel	Proportion	Halbtöne
Oktave Rein	C - C ⁺¹	1 : 2	12
Quinte Rein	C - G	2 : 3	8
vermindert	H - F ⁺¹		7
Quarte Rein	C - F	3 : 4	5
übermäßig	F - H		6
Terz groß	C - E	4 : 5	4
klein	E - G	5 : 6	3
Sekunde groß	C - D	8 : 9	2
klein	E - F	15 : 16	1
Prime	C - C	01:01:00	0

Man sieht wie die auf die Musik angewandte Rechenkunst Sachverhalte erklärt, aus dem Empfinden in den Nachweis der Gewissheit hebt. Die zunehmende Komplizierung des Rechenwerts ist ein Nachweis darauf, dass bei geringer werdendem Tonhöhenabstand der Paare das konsonantische in das dissonantische umschlägt. Zwei Schallwellen, die 2 : 1 auseinanderliegen, vermischen

sich viel einfacher als wenn die Proportion 8 : 9 ist.

Es stellt sich die Frage: wie löst die naturgegebene „physikalische“ Erzeugung der Töne die „psychologische“ Interpretation im Denkvermögen als Gleichklang und sogar als Zufriedenheit, das besagt ja das griechische Wort harmonia, aus? Der große Mathematiker Leonhard Euler, der - wie viele Denker so auch besonders prominent René Descartes - viel über die Musik nachgedacht hatte, sagt es so: „Die menschliche Seele hat ein besonderes Wohlgefallen an einfachen Verhältnissen, weil sie diese leichter auffassen und übersehen kann“. Und folgerichtig wird man sagen, innerhalb des Tonraums sind Tonpaare eingebettet, die diese Empfindung des Ruhenden, in sich Gesetzten, hervorbringen.

Wäre es somit nicht höchst angebracht, auf die diatonische Unterteilung zu verzichten und - wie in der pentatonischen und noch mehr in den nur

Ganzton- und Eineinhalbtonschritte zuzulassenden Tonleitern - gewissermaßen automatisch harmonisch ausgewogene Musikstücke zu verfassen? Die Antwort lautet: in diesem Nebeneinander von Konsonanz und Dissonanz ist ein „sowohl als auch“ zwischen Ruhe und Erregung angelegt, so ist es im Leben und so auch in der Musik. Und so erklärt sich auch die spannungsgeladene Harmonie der diatonischen Tonleitern: Gleichgewicht und Anspannung, Freude und Leid, somit die Höhen und Tiefen, die Wechselspiele, die auch unser persönliches Leben ausmachen, seien sie innerlich oder äußerlich verursacht. Kontrast belebt, Konsonanz beruhigt. Wenn Cherubino sein Begehren besingt, oder Graf Almaviva seinen Zorn, dann wäre es doch nicht angebracht konsonantisch, wohlgefällig, zu komponieren! Aber: wenn die Gräfin ihrem untreuen Gatten nach vielen Irrungen verzeiht, dann ja dann, dann jubeln alle und die Oper („Figaros Hochzeit“) ist zu Ende. Gemeint ist die Schlusszene *Perdono, perdono, ich verzeihe!*

Der Baukasten der Akkorde

An einem Tonpaar sind zwei Töne beteiligt, an einem Akkord (von *accordare* = zusammen klingen) mindestens drei. Das sind die Dreiklänge. Vierstimmige Akkorde entstehen, wenn Sopran, Alt, Tenor und Bass gemeinsam auftreten wie in dem Lied von Thoinot.

Die Akkorde als vertikale Tonfolgen, Töne, die zugleich erklingen, stehen gewissermaßen auf den Tönen der Tonleiter und dadurch sind sie auch unterschiedlich (die tetrachordische Auswirkungen). Wie könnte ein Dreiklang auf dem C aufbauend gestaltet sein? C, D und E? Also in Sekundabständen? Das geht aber nicht gut, weil zwei dissonante Tonpaare C - D und D - E zusammenkämen, ihre Dissonanz gewissermaßen noch schärfer hervortritt. Die Regel lautet daher: zwischen den Tonpaaren eines Akkords müssen größere Abstände bestehen, zumindest eine Terz, was heißt, der nächste diatonische Ton wird übersprungen. Somit C D E F G - die durchgestrichenen sind übersprungen - das geht und wir sind zufrieden, denn dieser C E G Dreiklang ist die Folge einer großen und einer kleinen Terz, die ja beide als harmonisch eingestuft sind, und der Gesamtumfang ist eine reine Quint, ein vollkommen harmonisches Tonpaar C - G somit. Diese Grundform, das Modell eines vollkommenen Akkords, ist in einem Oktavabstand noch zweimal angelegt, auf F und G. Baut man auf den sonstigen Tönen auf, dann erhält man dieses Modell nicht, es sind andere Dreiklänge. Man sieht die tetrachordische Ordnung

lässt keine Langweile aufkommen.

Dies ist das Allergrundsätzlichste, danach beginnt erst das Spiel mit den Akkorden. So kann der Abstand der Tonpaare vergrößert (gespreizt) werden, statt 3 werden 4 oder noch mehr Töne kombiniert, sie können umgekehrt werden, oder sie können durch Abweichungen vom Grundmodell (Alterationen genannt) „verfremdet“ werden. Das Instrument auf dem dies alles erprobt werden kann, ist das Klavier, das wichtigste „akkordische“ Musikinstrument, denn die beiden Hände mit jeweils fünf Fingern können die Akkorde unterschiedlichster Art greifen. Faszinierend ist es anzuschauen, wenn Konzertflügel und Spieler so zur Einheit werden. Die 32 Klaviersonaten Ludwigs sind mit das Wunderbarste der Musik.

Belle qui tiens ma vie - „analytisch“

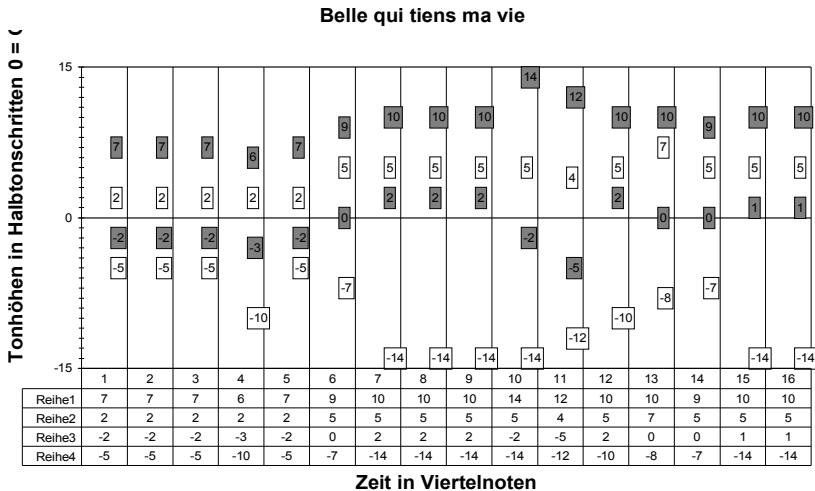
In einem vierstimmigen Chorsatz bestehen verschiedene Arten der Untersuchung. Die Verbindung Text zur Melodie. Vermag die Melodie den Inhalt, hier die Sehnsucht nach der Schönen, die aber unerlöst bleibt, weil sie nicht kommt, wiederzugeben? 7 Strophen mit je 4 Zeilen jammert der Unglückliche über sein grausames Los!

Die Aufgabe, das Gedicht in Tonsprache auszudrücken, übernimmt zunächst die Sopranstimme. Sie gibt die Melodie vor und daher heißt sie *cantus firmus*, der feste (feststehende, zu begleitende) Gesang. Ihr Tonraum ist in G 4 verankert und reicht von D 4 bis D 5, der niedrigste und der höchste Ton, eine Oktave somit. Sie beginnt mit Primen auf G, dann sinkt sie kurz auf das chromatische *fis*, um von dort aus auf G und danach in Terzen auf *b* aufzusteigen, dort zu verharren und schließlich den höchsten Ton, das D, zu erreichen. Von diesem wiederum verläuft die Tonfolge nach *b*, den Endton des Motivs mit seinen 4 Takten mit je 4 Viertel. Verharren und danach nur mäßig aufzusteigen, das ist doch ganz entsprechend dem Sehnsuchtsgefühl, das ja schon vorahnt, dass es nicht erfüllt werden wird. Getragen geht es zu, das Lied ist eine Pavane, ein langsamer Schreittanz.

Wie begleiten nun die anderen Stimmen? Da muss man auf die Geometrie ihrer Tonräume schauen, die durch den naturgegebenen Umfang der Sopran-, Alt-, Tenor- und Bassstimme begrenzt sind. Und zusätzlich auf die Regel, dass die Stimmen sich nicht kreuzen dürfen. D.h. keine Stimme geht über die darüber liegende hinaus und bleibt immer über der darunterliegenden. Das nennt man die homophone Kompositionsregel, im Gegensatz zur polypho-

nen, die später vorgestellt wird.

Sopran und Bass sind die Außenstimmen. Der Bass ist naturgemäß am weitesten von der Sopranstimme entfernt und weicht, wie man in der Abbildung sieht, auch am weitesten von ihr ab, nicht nur innerhalb des Tonraums, sondern auch in der gegenläufigen Bewegung der Tonfolge. Den Raum der zwischen Sopran und Bass „übrig“ bleibt, den füllen Alt und Tenor aus, auch diese ohne sich zu kreuzen, was dem Tonraum dieser Stimmlagen nach an sich möglich ist. Aber die Regel der Stimmtrennung wird strikt eingehalten. Und man sieht auch, dass Alt ganz eng, fast parallel, am Verlauf des Soprans bleibt. Der Tenor im Wesentlichen auch, aber mit Abweichungen, denn in der Mitte der Zeitfolge orientiert sich der Tenor in Richtung Bass.



Für die Detailuntersuchung greifen wir auf eine andere als die bisherige Methode zurück, wir argumentieren jetzt nicht mehr mit Hilfe der Notennamen, sondern in Abstandswerten in Halbtönen. Dazu legen wir einen Bezugswert fest, dieser ist 0 und wird auf C 4 verankert. Der Wert für F 4 ist somit + 5, für A 3 – 3. Diese Metrisierung in ganze Zahlen erlaubt die Tabellenkalkulation zu nutzen, wie auch ihre Diagrammfunktion. Nehmen wir jetzt den Akkord zum Zeitpunkt 1 und bauen wir ihn vom Grundton des Basses G 3 = 0 auf: der erste Schritt ist von G 3 nach b 3, 3 Halbtöne = eine kleine Terz, von

b 3 nach D 4 nun 4 Halbtonschritte eine große Terz und von D 4 nach G 4 entsprechend 5 Halbtöne eine reine Quarte. Man kann es so zusammenfassen: $0 + 3 + 4 + 5 = 12$. Jedes Tonpaar ist konsonant und somit dieser Akkord gleichfalls.

Dieser Akkord ist in eine enge Lage. Und schauen wir daher auf das Gefüge eines Akkords in weiter Lage beim 10. Zeitpunkt an. Auch dieser ist konsonantisch ausgeglichen. Die an die Graphik angefügte Wertetabelle erlaubt, das jeweilige akkordische Gefüge zu berechnen.

Die Harmonik mit ihren Akkorden ist nicht nur Begleitung, sondern sie setzt auch unterstützende Akzente an den Stellen, die im Gesamtfluss die Ankerpunkte sind. Am Beispiel sieht man, dass die Akkorde nicht im gleichen Abstand zum cantus firmus verlaufen, das wäre sehr langweilig. Die melodische Stimmführung bekommt durch die unterschiedliche Gestaltung der Akkorde Tiefe und Farbigkeit - und darum geht es ja.

Wie gestaltet ein Komponist dieses doppelte Spiel Melodik und Harmonik? Es ist viel Technik und noch mehr Einfallsreichtum. Die Technik ist die der Homophonie, kurz gesagt, die Stimmen kreuzen sich nicht. In der Polyphonie ist diese Regel aufgehoben, wie nun zu behandeln ist.

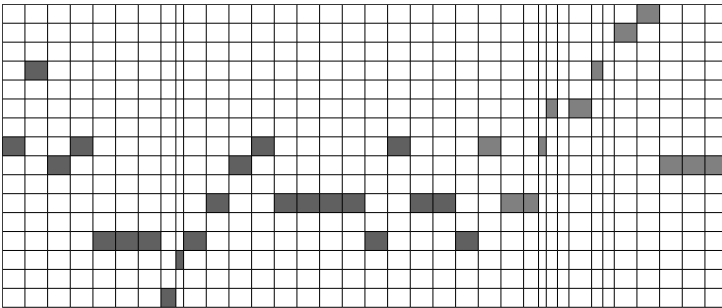
Ludwigs Tonkunst am Beispiel des Erzherzogtrios

Die aus vier Teilen (Sätzen) bestehende Triosonate mit den Instrumenten Violine, Cello und Klavier heißt Erzherzogtrio, weil die für den jüngsten Sohn des Kaisers Ferdinand, Rudolf, geschrieben wurde und diesem, der der letzte Schüler Ludwigs war, auch gewidmet war. Wie viele Mitglieder des in Wien versammelten Hochadels war Rudolf ein sehr guter Musikant.

Die Erstaufführung fand 1814 statt. Es war der letzte öffentliche Auftritt Ludwigs als Pianist. Um diese Zeit, er war erst etwas über 40 Jahre alt, war sein Gehör fast erloschen. Es gibt ein sehr anrührendes Zeitzeugendokument von Ludwig Spohr, selbst Komponist eines ganz wunderbaren Violinkonzerts. Danach spielte Ludwig am Flügel bei der Erstaufführung die leisen Stellen viel zu sanft, fast unhörbar, während er bei den kräftigen viel zu laut intonierte. Am besten hört man das Trio sich zunächst an, es gibt im Internet mehrere Aufnahmen, so zum Beispiel vom Museum „Beethoven-Haus“ in Bonn bereitgestellt. Auch die Partitur ist im Internet erhältlich. Man wird gleich sagen, das ist ein musikalisches Wunderwerk.

Nun ist in dieser Schrift nicht der Platz vorhanden, umfänglich in das Erz-

herzogtrio „hinein zu klettern“. Ich denke der Leser, die Leserin haben zwischenzeitlich den Beginn des Trios sich angehört. Das Motiv, das zuerst vom Klavier vorgetragen wird, zieht durch seinen Schwung den Hörer in das Musikstück hinein. Die ersten Töne B D A B F - lang kann man als Aufspaltung eines langen B vor einem stehen bleibenden langen F sehen. Danach folgen zwei Aufwärtsbewegungen, von einem unteren und einem mittleren Niveau und jeweils unterbrochen bzw. hingeführt zu dem nächsten Ruheton.



Die langen Ruhetöne sind die Pfeiler, die kurzen die Bögen, die den Raum zwischen den Pfeilern, die durch ihre Länge dem Musikempfinden Halt geben, überspannen. Dieses Bild einer Brückenkonstruktion ist - wie schon oft zu sehen war - in aller Musik das architektonische Gefüge, Anhalten einerseits und Bewegen andererseits, Aufsteigen einerseits, Zurückgehen andererseits.

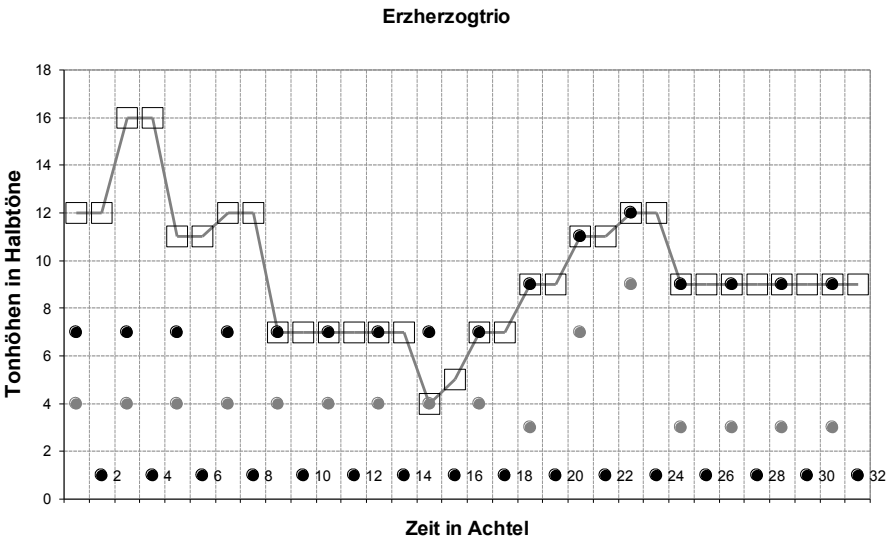
Bevor man sich die graphische Umsetzung der polyphonen Kompositionstechnik näher anschaut, muss man sich die unterschiedliche Art der Instrumente vergegenwärtigen. Violine und Cello sind singende Instrumente, die Viertelnote ist ihr Grundschatz, der Ton kann über mehrere Viertel angehalten werden, indem der Bogen gezogen wird, wie die Tondauer auch verkürzt werden kann, in dem die Saite nur „angetupft“ wird. Das Klavier ist dagegen ein pochendes Instrument, der Grundschatz ist das Achtel. Die Violine und das Cello sind einstimmig, während auf dem Klavier Akkorde angeschlagen werden, drei Tonhöhen mit den Fingern der rechten Hand und drei der linken Hand. Die Akkorde sind nach den harmonischen Gesetzen geschichtet, wobei sie einerseits „eng“ sein können, also nur Terzenschichtung, oder „weit“ mit entsprechend größeren Zwischenräumen. Aber auch chromatisch gefärbt, wie Ludwig es in der „Mondscheinsonate“ genutzt hat, um diese verzückende

Stimmung zu formen.

Insgesamt können im Trio somit 8 Stimmen zugleich erklingen, aber auch aussetzen, wenn eine andere Stimme prominent heraustreten soll. Alles das gibt der polyphonen Musik das klangliche Volumen und die Differenziertheit, die über den homophonen Chorsatz hinaus geht.

Während im Chorsatz das akkordische, aber nicht überlappende Nebeneinander der Stimmen erlebt wird, ist es in der Polyphonie das wechselseitige Ineinandergreifen der Stimmen. Das zeigt die nächste Abbildung. An dieser Stelle, der 14. bis 18. Takt, wird das Thema von der Violine vorgetragen, das Klavier ist hier begleitend, vom 1. bis 8. Takt war es das Klavier, Violine und Cello schwiegen zuerst, um sich ab dem 7. Takt schon einmal begleitend bemerkbar zu machen.

Um anschaulich zu bleiben, enthält die Abbildung nur 4 Stimmen, statt 8, die Violine und die Töne, die mit der rechten Hand auf dem Klavier angeschlagen werden. Es ist ganz richtig, die Tonfolge der Finger zunächst als eigene Stimme zu verstehen, gleichwohl sie akkordisch miteinander verknüpft sind.



Wie zu sehen ist, liegen die ersten Viertel der Violine über den Klavierstimmen, ausgeführt durch die rechte Hand, rechter Finger, mittlerer Finger

und linker Finger. Im ersten Ruheton vermischen sich Violine und die obere Stimme des Klaviers, die bis dahin eine Folge von Primen ausgeführt hat, wie auch die mittlere und die untere Stimmen im akkordisch-harmonischen Stufenaufbau. Am Ende des Ruhetons folgt die erste Aufwärtsbewegung. Und nun begleiten obere und mittlere Stimmen, die obere identisch mit der Violinstimme, den Verlauf, während die untere auf ihrer Tonhöhe stehen bleibt.

Schaut man sich einmal die Situation 12. bis 16. Achtel an. Das kleine Detail, der Übergang vom Ruheton zur Bewegung, ist markiert, was bedeutet, dass die Violine unter die obere Klavierstimme zur mittleren Stimme geht, und erst dann die Bewegung nach oben ansetzt. Die Stimmen kreuzen oder verkreuzen sich zu einer diese Schaltstelle der gesamten Tonfolge herausgehobenen Klangmischung. Kompositionstechnisch eine harmonische Variation, für uns die polyphonische Öffnung und Erregung, auch wenn wir sie nicht gleich bemerken. Gleiches gilt für die folgende Auswärtsbewegung, die dann - wie bei Johann Sebastians Lied - den Tonraum über die ersten vier Viertel hinaus erweitert, neue Möglichkeiten, Töne zu setzen, schafft.

Und ein weiteres Detail sollte nicht übersehen werden. Wie überwindet das Klavier seine Begrenzung auf das Achtel? Sieht man auf die untere Stimme, so erkennt man die Lösung. Sie markiert das zweite Achtel und schafft es somit, dass keine Lücke zwischen den aufeinanderfolgenden Akkorden wie auch im Verhältnis zu den Vierteln der Violinstimme entsteht.

Dies nur ein kleiner wie noch vereinfachter Ausschnitt aus der Sonate. Wie steht die Tonfolge des Themas nun im Gesamtzusammenhang des Werkes? Auch hierfür kann man das Brückenbild benutzen. Das Thema bildet die Pfeiler, auf denen die Bögen ruhen wie sie zur Wiederholung des Themas hinüber spannen.

Das Thema ist ein Gesang und somit für uns Zuhörer als wiedererkannte Tonfolge gegenwärtig, es verankert sich gewissermaßen „im Ohr“. Damit es auch tatsächlich sich in das Erinnern einnisten kann, tritt es zu Beginn des Satzes in kurzer Abstand wieder auf. In Zeit gemessen ist es so: nachdem das Klavier es vorgestellt hat, 1. bis 8. Takt, wird es in den Takten 14 - 22 von der Violine vorgetragen: Stimmwechsel also, was uns Zuhörer auf neue Weise fesselt. Weitere Belebungen werden folgen: das Cello darf nicht vergessen werden, es wartet schon darauf in seiner tieferen Stimmlage das Thema vorzutragen zu dürfen. Jedes Instrument ist in den Grenzen des Stimmumfangs in der Lage die Melodie in die Höhe oder Tiefe zu verschieben, dies mit der

Folge, dass die anderen Stimmen der Verschiebung folgen oder stehen bleiben, woraus sich Stimmkreuzungen ergeben. Das Thema kann variiert werden, in dem Maße, das es einerseits erkennbar bleibt, wie andererseits die Möglichkeiten, es chromatisch zu färben, ausgeschöpft werden. Dies sind nur wenige Beispiele, in welcher Weise das Zuhören gefesselt wird.

Aber wie steht es nun mit den Bögen, die zwischen dem Auftreten des Themas liegen? Nehmen wir an, dass das Klavier seine Aufgabe als *cantus firmus* gerade erfüllt hat, die Violine wartet schon, diese Rolle zu übernehmen. Die kompositorische Arbeit besteht nun darin, das Ende des Klavierparts zu markieren wie die Tür für die Violine zu öffnen. Diese kürzeren (zu Beginn des Musikwerkes) im Verlauf länger werdende Bögen sind keineswegs die leichtere Aufgabenstellung, denn sie werden nicht wiederholt, sie müssen immer auf andere Weise den Spannungsbogen aufrecht erhalten, die Vorfreude auf das nächste Erklingen des Themas steigern.

Im Detail sieht es so aus: Zu Beginn des ersten Satzes trägt das Klavier das Thema ohne Begleitung vor, Takte 1 bis 8. Von Takt 7 bis 13 bereiten sich Violine und Cello auf ihren großen Einsatz vor. Die Aufgabe des Klaviers besteht nach dem 8. Takt darin, das Ende des Themas zu markieren, sowie danach in die Rolle als begleitende Stimme überzugehen. Dazu setzt es nach dem Schlussakkord des Themas einen Takt aus, es schweigt (was auch ein wichtiges Element der Polyphonie ist) und Violine und Cello treten nun deutlicher auf, ja auch solo, soweit das Klavier schweigt. Und im darauffolgenden Takt 10 setzt das Klavier noch einmal einen „Krafteffekt“, das heißt einen Akkord, der weit gespannt ist und auch fest angeschlagen wird. Dieses Tonfolge wird nach einem nochmaligen Schweigen in den Takten 11 und 13 wiederholt. Man kann es mit dem Klopfen an der Tür vergleichen, die Tür öffnet sich und nun übernehmen Violine und Cello in geschwisterlicher Eintracht den Stab und werden dabei von den Klavierstimmen unterstützt.

Es wäre nun viel zu erläutern, wie dieses Wechselspiel in immer neuen Formen, aber nie mit Brüchen, fortgesetzt wird bis etwa zur Hälfte des ersten Satzes. Danach öffnet sich die Tonfolge für das zweite Thema.

Das sind nur unzureichende Hinweise auf das Trio, ihr Zweck war die homophone und polyphone Kompositionstechnik zu erläutern. Das Trio ist ein Wunderwerk. Hohe Kunstfertigkeit, hoher Einfallsreichtum, hohes Einfühlungsvermögen in die Empfänglichkeit der Zuhörer und vor allem lebenslanges Bemühen um die Göttin Terpsichore waren die Voraussetzungen dafür.

(In seinen jungen Jahren hätte Ludwig dieses Trio noch nicht schaffen können) Und schließlich viel Arbeit. Monate gingen vorüber, bevor er zufrieden war. Sich auf den Weg aufzumachen, diese Musik Takt für Takt analytisch zu erschließen, ist eine mehr als lohnende Herausforderung.

Damit ist das Programm dieser Schrift eigentlich "abgearbeitet". Es folgen noch 2 Nachträge, zunächst wird die Notenschrift erläutert.

Die Notenschrift

Musik wird geschrieben, nur so kann sie immer wieder gespielt werden. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, z.B. durch Buchstaben oder Zahlen (siehe das Deckblatt dieser Schrift). Die rund 40 Musikwerke der Antike, die zum Beispiel auf Grabstelen eingraviert wurden und so erhalten geblieben sind, sind mit Buchstaben niedergeschrieben. Für die Gitarre zum Beispiel sind es Buchstaben für die Griffe mit denen die Akkorde ausgeführt werden. So um 1000 n. Chr. ist die heutige Notenschrift entwickelt worden (Guido von Arezzo.) Und um 1600 herum ist sie so, wie man sie heute vorfindet, ausgebildet und verbindlich geworden.

In dieser Form wird ein Musikstück im Liederbuch oder in einer Partitur vorgestellt. Sie weicht von der in dieser Schrift benutzten „Tabellenmethode“ schon ab, jedoch weniger als man zunächst vermutet. Auch die Notenschrift ist eine Tabelle, wenn auch mit erheblichen Besonderheiten, wie man aus dem Beispiel, dem Thema aus „Die Forelle“ von Franz Schubert, sehen kann. Ihr Zweck besteht darin, Musik auf einen Blick lesbar zu machen einerseits und dies möglichst platzsparend andererseits. Sie vermittelt die Informationen, die der Musiker im Moment der Ausführung benötigt. Sie ist daher nicht „analytisch“, ein metrisches Abbild der Tonfolge nach tatsächlicher Höhe und Dauer, sondern "pragmatisch" für die ausführenden Musiker verfasst.



Die metrische Unterteilung sind die Takte (somit entsprechend die Spalten), die in ihnen enthaltenen Noten unterschiedlicher Dauer sind durch ihre Form unterschieden. Eine Viertelnote (1) durch den ausgefüllten Notenkopf und den Notenhals, im Fall einer Achtelnote (2) wird noch ein Fähnchen angefügt. Wenn die nächste Note den gleichen Zeitwert hat werden sie zusam-

mengezogen. Der Kopf der halben Note (3) wird nicht geschwärzt, bei der ganzen Note entfällt der Hals (hier aber nicht vorhanden). Die $1\frac{1}{2}$ Dauern (4) werden durch einen angefügten Punkt markiert, entsprechend sagt man „punktiert“.

Die Tonhöhen werden in ein Zeilenschema eingefügt, das fünf Linien umfasst. Wiederum mit dem Ziel der Platzersparnis sind die Töne sowohl in den Zwischenräumen als auch auf den Linien platziert. Zwei Linien und ein Zwischenraum schafft Raum für 3 Töne, eine Terz somit. Auf fünf Zeilenstriche mit vier Zwischenräumen passen somit 9 Tonhöhen. Es werden nur die diatonischen Töne eingetragen, also C, D, E usw.

Und wo bleiben die Halbtöne? Sie werden durch Zeichen neben den diatonischen Tönen geschrieben, somit Cis als C#, dis als D# usw. Auf diese Weise ist die chromatische Leiter ebenfalls eingebunden. Und dadurch passen auf die 5 Zeilenstriche und Zwischenräume $9 \times 2 = 18 - 2 = 16$, denn von E nach F und von H nach C+1 sind ja nur Halbtonabstände. Mit fünf Zeilenstriche kann man somit mehr als eine Oktave abdecken. Hinzu kommt, dass man unter dieses Schema noch Hilfszeilen setzt, zwei bis vier, und dasselbe darüber, so hat man den gesamten Tonraum einer Singstimme oder eines Instruments in diesem 5-Linien-Raum erfasst.

Nun muss man noch festlegen, wo der Tonraum, der eine Sing- oder Instrumentenstimme abzudecken vermag, im gesamten Tonraum verankert wird. Das macht man mit Schlüsseln, die Verankerungspunkte. Zwei sind die bekanntesten: Der Violinschlüssel - wie oben - besagt, dass die zweite Linie von unten der G 4 Ton aufnimmt, daher G-Schlüssel genannt. Der Tonraum, der damit verankert ist, ist der der Sopranstimme. So sieht man es am Beispiel des Liedes von Franz Schubert.

Der F 3 oder Bassschlüssel ist das Liniensystem für die tiefen Stimmen. F 3 wird auf der 4. Linie notiert. Jede Stimme hat ihr Liniensystem gemäß ihrem Stimmumfang: für die Violine der G - Schlüssel, für das Cello der F - Schlüssel. Und für die Klavierstimme mit ihrem weiten Tonraum braucht man beide, G - Schlüssel für die Töne, die man mit der rechten Hand greift, und den F - Schlüssel für die linke Hand. Schön, das Ganze, vor allem platzsparend.

Wie gesagt, die Notenschrift ist für den praktischen Zweck der Ausführung gedacht. Man sieht aber ihre Nachteile, wenn es darum geht, zu untersuchen, wie die Töne im Raum der Tonhöhen und der Zeitschritte gesetzt wur-

den. Das überblickt man erst, wenn die Töne in der chromatischen Skala angeordnet werden und die Tonlängen in unterschiedlichen Spaltenbreiten. Wenn so vorgegangen wird, unterstützt die Abbildung das Verständnis der Kompositionstechnik - und darum ging es in dieser Schrift.

Ludwig van Beethoven

Ludwigs Berühmtheit beruht darauf, dass er die Möglichkeiten der polyphonen Kompositionstechnik erprobte und in unvergleichlich schöne Werke formte. Und seine Erfindungskraft war unerschöpflich, wie seine Arbeitsenergie. Darüber gibt es viele Anekdoten und man kann sich leicht vorstellen, dass so eine Tasse Kaffee ihn eher weiter trieb als ihn genüsslich Abstand nehmen ließ. In seinem Alterswerk, der Hammerklaviersonate (solo Klavier) vor allem, ging er so weit, dass er selbst sein verwöhntes Wiener Publikum verwirrte, und noch mehr die Musiker, die gar nicht in der Lage waren, diese Werke aufzuführen zu können. Erst Jahrzehnte später wagte sich Franz Liszt daran, die Hammerklaviersonate aufzuführen.



Ein kurzer Blick auf Ludwigs Lebenslauf und Werk so wie die Zeit darf nicht fehlen. War er wirklich so pedantisch, dass er immer gleich in Aufregung geriet, wenn nicht genau 66 Bohnen für den Kaffee verwendet worden waren? In Ludwigs Haushalt ging es sehr chaotisch zu. Er gehörte zu den Menschen für die die 24 Stunden eines Tages nicht ausreichen, um auch noch die Alltagsanforderungen zu bewältigen. Über seine Lebensgewohnheiten weiß man sehr viel, weil er schon in seinen jungen Jahren sehr bekannt war und somit das Interesse (wohl auch die Neugierde) an seiner Persönlichkeit auf sich zog. Er war, wie man heute sagen würde, ein Star, und wenn heute in manchen Schriften jemand über sein „unordentliches Verhalten“ die Nase rümpft, dann ist das schon ziemlich lächerlich in Anbetracht dessen, was er bewirkt hat. Oder was Hobbypsychologen ihm so alles andichten.

Ich kann mir sehr gut vorstellen, dass er da manchmal sehr zornig werden konnte, wenn er aus der gedanklichen Versenkung wieder auftauchte, eine Pause sich erhoffte, und es mal wieder nicht klappte mit dem Kaffee. Jedenfalls scheinen die Personen, die er angestellt hatte, seine gedankliche Abwesenheit, dieses Leben in der Musik, leidlich ausgenutzt zu haben. Nanette

schaute immer wieder vorbei und verhinderte das allerschlimmste.

Ludwig war in seinen musikalischen Auftrag „Pedant“, d.h. das Beste wollend, da gleicht er seinem philosophischen „Pedant“ und Zeitgenossen in Königsberg, Immanuel Kant, der auch nicht locker ließ, wenn ihm eine Aufgabe oder Sachverhalt als nicht „klar und deutlich“ (so hatten es die antiken Denker verlangt) durchdacht erschien.

Keine große Musik ist „genialisch“ entstanden, so nach dem Motto, dass die Noten nur so aus der Feder flossen. Von vielen Werken Ludwigs weiß man, dass sie ihn über Wochen und Monate beschäftigten und dass er oft noch Stunden vor der Erstaufführung Änderungen anbrachte (was die Musiker verständlicherweise aufbrachte). Und wenn die Musiker es nicht schafften seinen Werken zu folgen, dann wurde er schon heftig. Das Besondere an seinen Werken war, dass sie herausfordernd waren, an der Grenze dessen verliefen, was Musiker und auch die Zuhörer bewältigen konnten. Auch die "Kreutzer-sonate" ist nach einem Musiker benannt, der sie aber nie aufgeführt hat, weil sie ihm zu schwer ausführbar schien.

Hinzu kommt, dass Ludwig in einer Zeit lebte, die in jeder Beziehung aufregend war, das färbte naturgemäß auf alle Lebensbereiche ab. In seine Lebenszeit (1770 - 1827) fallen die bedeutendsten Ereignisse: 1789 der Ausbruch der französischen Revolution, und als Folge davon der Kriegsherr Napoleon, der alles in Europa nach seinem Gutdünken durch ständige Kriege durcheinander wirbelte, erst 1813 gelang es, ihn endgültig außer Gefecht zu setzen.

Was in der Dichtkunst und der Philosophie, in den Naturwissenschaften geschaffen wurde, war nicht nur eine Zusammenfassung und Weiterentwicklung schon vorhandener Gedanken und Erkenntnisse, sondern ging weit über diese hinaus. Im Revolutionsjahr 1789 hatte Antoine de Lavoisier die erste Tabelle der chemischen Elemente veröffentlicht, 23 waren damals bekannt, heute sind es mehr als Hundert. Antoine wurde im Schreckensregiment zum Tode verurteilt und hingerichtet, man sieht, es waren auch höchst gefährliche Zeiten.

Auf Johann Sebastian Bach und Georg Friedrich Händel, die alles, was an vorhandenem musikalischem Ausdrucksvermögen ihnen bekannt war, zu ganz neuen Formen verbanden, folgten Josef Haydn, Wolfgang Amadeus Mozart, Ludwig van Beethoven und Franz Schubert, die jeder in ihrer persönlichen Eigenart noch weiter gingen und daraus weitere unvergängliche

Werke schufen. Eine ganz ungewöhnliche Zeit.

Wie alle Musiker jener Zeit ist auch Ludwig, geboren 1770 in Bonn, in einer Musikerfamilie aufgewachsen. Der Großvater kam aus Flandern zum kurkölnischen Hoforchester in Bonn. Ludwigs Vater war dort als Sänger tätig. Im kurkölnischen Hoforchester wirkte Christian Gottlieb Neefe, der Ludwig zuerst mit den Techniken des Komponierens vertraut machte. Mit 12 Jahren war Ludwig als Musiker schon so gewandt, dass er seinen Lehrer als Organist im Kirchendienst vertreten konnte.

Im Alter von 16 Jahren schickte ihn der Kurfürst, der Kaisersohn Maximilian Franz, der als kleiner Junge mit dem kleinen Wolfgang Amadeus auf dem Schoß der Kaiserin Maria Theresia gesessen hatte, sicher auch ein Hinstörchen, nach Wien, zu Mozart. Leider weiß man nichts über die Zusammenkunft der beiden Weltgenies. 1792 war das Jahr der endgültigen Übersiedlung nach Wien, Ludwig wurde Schüler von Josef Haydn.

Die Kaiserstadt Wien war damals schon eine sehr besondere Welt, der Kaiser, der kaiserliche Hof, die hochadligen Familien, die alle untereinander verwandt waren, waren mehr an Kunst, Theater und vor allem an Musik, interessiert als an der Politik. Viele von ihnen waren ausgezeichnete Musikanten oder wollten es werden. Geschult durch Haydns und Mozarts musikalische Wunderwelt wollten sie nicht in die Tradition zurückfallen, sondern noch mehr Steigerung und musikalische Erregung erfahren, und Ludwig war das erhoffte Genie, das dieses konnte.

Zuerst war er der gefeierte Klaviervirtuose und auch Komponist, ab 1800 in etwa war es dann umgekehrt. In diesem ersten Jahrzehnt nach der Jahrhundertwende, in seiner mittleren Schaffenszeit, entstanden seine größten Kompositionen, die kammermusikalischen Werke, d.h. die Stücke für Klavier allein oder mit einem oder mehreren weiteren Instrumenten und die Streichquartette, wie ja auch die Symphonien. Die 9. Symphonie ist ein später Nachkömmling.

Um 1808 herum war nicht mehr zu verbergen, dass er zunehmend tauber geworden war. Welche Tragik gerade für einen Menschen, der Werke für das Hören und Tonempfinden geschaffen hat. Die Besucher konnten sich nur noch schriftlich an ihn wenden, die sogenannten Konversationshefte sind erhalten, wie auch rund 2.000 Briefe (von geschätzten 20.000!).

Wenn Mozarts und Ludwigs Musik verglichen werden, dann wird die persönliche Eigenart der beiden erkennbar, die musische und die expressive Va-

riante der Polyphonie. Und sicher spielten nicht nur die persönliche Dimension, sondern auch die äußeren Umstände in das Musikverständnis hinein. Die alte Welt war zu Mozarts Zeit noch geschlossen, zu Beethovens Lebenszeit war dies anders, sie war zerbrechlich geworden.

Sein Geburtshaus in Bonn ist heute eine ganz wunderbare Gedenkstätte. Es geht nicht darum vor einem Trichter als Hörrohr als solchem zu stehen, auch nicht darum, ergriffen zu sein, dass es einst Ludwig gehörte, es geht darum, dass wir an die Welt der Musik erinnert werden, die anmutig und erhaben sein kann und sich an beidem erfreut. Es stimmt schon, er konnte manchmal wütend sein und sehr heftig. Auf dem Bonner Münsterplatz wurde ein Denkmal errichtet, da schaut er so grimmig drein, wie sich der Bildhauer ein Genie vorstellte. Das ist natürlich ein ganz falsches Bild von ihm. Er hat ja ein glückliches Leben geführt, sein Talent und sein Wissen angewendet und das ist es doch, was ein Leben reich macht.

Ars magna

Es mag für eine Leserin, einen Leser ein kuriose Idee sein, die Welt der Alltagsverrichtungen mit der hohen Kunst der Musik so zu vermischen, wie es in dieser Schrift getan wurde, vielleicht sogar eine empörende. Natürlich ist es so, dass wir die Welten trennen. Und in pragmatischer Hinsicht wird man weder im Haushalten der Alltagsverrichtungen einerseits und dem Hören der Musik andererseits nicht „rechnen“. De facto geschieht dies jedoch, nur wir merken es nicht, weil unser Denkvermögen die Arbeit in Nanosekundschnelle ausführt. Was ist nun das Gemeinsame? Es ist, dass es sich um Gefüge handelt, deren Elemente in einem proportionalen Zusammenhang stehen. Und diesen Zusammenhang zu entdecken ist auch das Wesen und die Aufgabe der Rechenkunst, der *Ars magna*, wie es vor Hunderten Jahren Raimundus Lullus sagte.

Es war ja auch schon in der Antike so gesehen worden. Pythagoras hat seine Proportionslehre entwickelt, als er sich mit diesem Zusammenhang zwischen einem rechtwinkligen Dreieck und der Seitenproportion 3 : 4 : 5 beschäftigte. Über ihn weiß man nur durch seine Schüler, jedenfalls hat er am Monochord ermittelt, wie die musikalischen Töne, die sich auf einer gestrichenen Saite bilden lassen, durch auf proportionale Erwägungen beruhende Auswahl bestimmen lassen.

Damit war der „Stoff“ festgelegt und alles was folgte war immer weiter

fortschreitende „Stoffbelebung“ - in der Alltagswelt und umso mehr in den Künsten. Welche Höhen in der Musik dabei erklommen werden konnten, das auf möglichst einfache Weise zu zeigen, war das musikalische Anliegen dieser Schrift.

Literatur

Autorengemeinschaft: Kleine Enzyklopädie Mathematik. Leipzig 1968.

Autorengemeinschaft: Instruments de musique espagnols. Katalog einer Ausstellung zum Europäischen Jahr der Musik, Brüssel 1985.

(Aus diesem sehr schönen Werk ist die Abbildung des Titelblattes entnommen.)

Caeyers, Jan: Beethoven - der einsame Revolutionär. München 2013.

Derenbach, Rolf: Elemente, Mengen und Relationen in der raumwissenschaftlichen Anwendung, Berlin 1971.

Derenbach, Rolf: Weltkenntnis und Lebensklugheit - wie es uns Immanuel Kant empfiehlt. Quintessenzen und Nachgedanken aus der „Anthropologie in pragmatischer Hinsicht“. Berlin 2013.

Görke, Lilly: Mengen, Relationen und Funktionen. Frankfurt a.M. und Zürich 1970.

Helmholtz, Herrman von: Die Lehre von den Tonempfindungen. Berlin 1863 (Nachdruck 1981).

Johnen, Kurt: Allgemeine Musiklehre. Stuttgart 2010.

Michels, Ulrich: dtv-Atlas zur Musik Band I Systematischer Teil, München 1977.

Moser, Hans Joachim: Allgemeine Musiklehre. Berlin 1968.

Nestler, Gerhard: Geschichte der Musik. Gütersloh, o.J.

Wolf, Erich: Die Musikausbildung. Band I Allgemeine Musiklehre und II Harmonielehre. Wiesbaden 1972.

Sehr zu empfehlen, weil sehr anschaulich (Volltext bei google-books)

Koch, Heinrich Christoph: Versuch einer allgemeinen Musik- und Kompositionslehre. Gotha 1782.

Marx, Adolph Bernhardt: Allgemeine Musiklehre. Und: Lehre von der musikalischen Komposition. Und: Ludwig van Beethoven. Berlin um 1830.