

# 5. Pseudoskalare Mesonen und Quarkmassen

Die spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie hat aufgrund des Goldstone-Theorems [109] ein masse- und spinloses Teilchen, das sogenannte Goldstone-Boson, zur Konsequenz. Ist die Symmetrie nur schwach gebrochen, so erhält das Teilchen eine kleine Masse. Somit entspricht die Brechung der chiralen Symmetrie der Existenz eines leichten Teilchens, des pseudoskalaren Mesons. Ein solches Teilchen wird in Form des  $\pi$ -Mesons tatsächlich beobachtet.

Nach der chiralen Störungstheorie ist das Quadrat der Masse des pseudoskalaren Mesons  $m_{\text{PS}}$ , sofern diese klein ist, proportional der Quarkmasse. Dies ermöglicht die Bestimmung der kritischen Kopplung  $\kappa_c$  und damit nach Gleichung (2.24) der Quarkmasse  $m_q$ . Wir werden in diesem Kapitel die Extrapolation der pseudoskalaren Masse in den chiralen Limes untersuchen. Da der Ansatz der chiralen Störungstheorie  $m_{\text{PS}}^2 \propto m_q$  in der Valenzquark-Approximation potentiell verletzt ist, werden wir eine weitere Definition der Quarkmasse auf dem Gitter einführen. Schließlich werden wir die Energie pseudoskalarer Mesonen mit Impuls untersuchen.

## 5.1. Masse des pseudoskalaren Mesons

Für das pseudoskalare Meson erhalten wir für alle Kopplungsparameter  $\beta$  und  $\kappa$  ein sehr gutes Signal. Das Verhältnis von Signal zu Rauschen ist für alle Zeitschichten im wesentlichen konstant. Die Qualität des Signals ist somit unabhängig vom (zeitlichen) Abstand zur Quelle.

Dies ist auch aufgrund folgender Überlegung [110] zu erwarten. Die Standardabweichung der fraglichen Observable  $\mathcal{O}$  kann als Maß für das Rauschen aufgefasst werden. Diese ist gegeben durch

$$N\sigma_t^2 = \overline{\mathcal{O}_t^2} - \overline{\mathcal{O}_t}^2. \quad (5.1)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist das Quadrat des Erwartungswerts unserer Observable und sollte für einen hadronischen Zustand wie  $\exp[-2am_{\text{H}}t]$

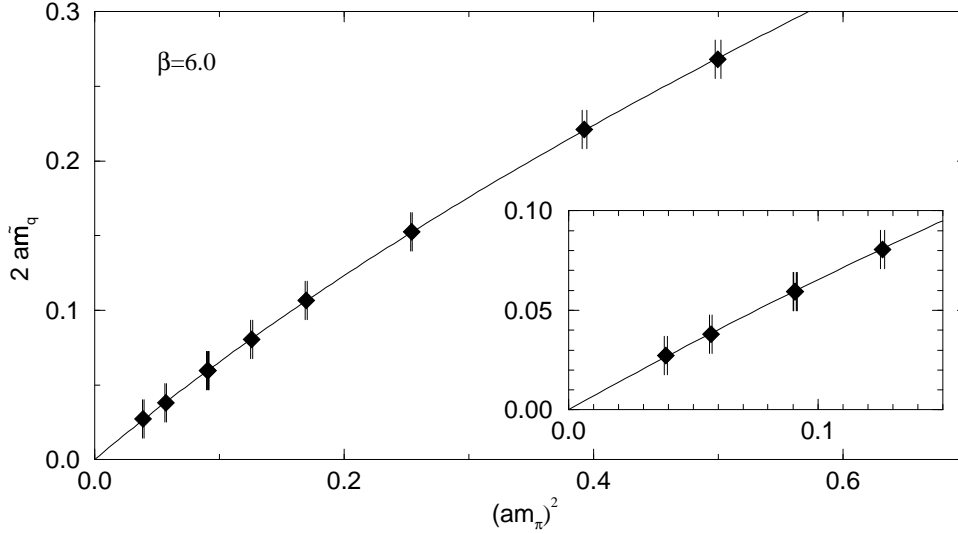


Abbildung 5.1.: Bestimmung von  $\kappa_c$  mit Hilfe der Masse des pseudoskalaren Mesons bei  $\beta = 6.0$ . Die Linie stammt von einem Fit an Gleichung (5.3).

abfallen. Der erste Term ist der Erwartungswert einer Kombination von vier Quarkfeldern. Dessen Verhalten wird im ungünstigsten Fall dominiert durch den leichtesten Zustand, der sich mit Hilfe von je zwei Quarks und Anti-Quarks bilden lässt. Dies wäre ein Zustand mit zwei pseudoskalaren Mesonen. Der erwartete Abfall wäre dann  $\propto \exp[-2am_{\text{PS}}t]$ . Als Abschätzung für das Verhältnis von Signal zu Rauschen erhalten wir somit

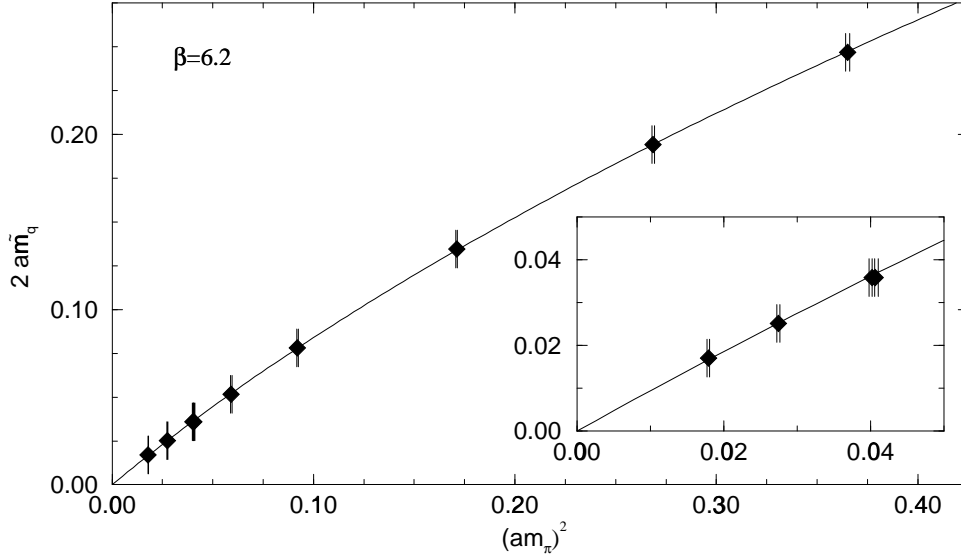
$$\frac{\overline{\mathcal{O}}_t}{\sigma_t} \propto e^{-(am_{\text{H}} - am_{\text{PS}})t}. \quad (5.2)$$

Für pseudoskalare Mesonen erwarten wir daher ein gleichbleibend gutes Signal. Für alle anderen Mesonen sollte das Rauschen mit  $t$  zunehmen. Dies ist in der Tat, was wir beobachten. Diese Überlegungen lassen sich auch auf die Baryonen übertragen, wobei zu berücksichtigen ist, dass hier jeweils drei Quarks und Anti-Quarks vorhanden sind.

Ein typisches Bild der effektiven Masse als Funktion der Zeit hatten wir bereits in Abbildung 3.3 gezeigt.

Da die Masse der Quarks und des Goldstone-Bosons an der gleichen Stelle verschwinden sollte, ist es möglich, mit Hilfe der pseudoskalaren Masse die kritische Kopplung  $\kappa_c$  zu bestimmen, bei der die Quarkmasse verschwindet.

Nach der chiralen Störungstheorie erwartet man – wobei wir Artefakte der Valenzquark-Approximation vorerst vernachlässigen –, dass das Quadrat der Masse des pseudoskalaren Mesons proportional der Summe der Quarkmassen ist. Für schwerere Massen ist zu erwarten, dass Terme höherer Ordnung


 Abbildung 5.2.: Wie Bild 5.1 für  $\beta = 6.2$ .

relevant werden. Da sich die Masse des pseudoskalaren Mesons  $m_{\text{PS}}$  bei Vertauschung der beiden Quarks  $m_{q_1}$  und  $m_{q_2}$  nicht ändern sollte, machen wir folgenden Ansatz:

$$a^2 m_{\text{PS}}^2 = b_1(a\tilde{m}_{q_1} + a\tilde{m}_{q_2}) + b_2(a\tilde{m}_{q_1} + a\tilde{m}_{q_2})^2 + d_2(a\tilde{m}_{q_1} - a\tilde{m}_{q_2})^2, \quad (5.3)$$

Mit  $\tilde{m}_q$  wird hier die aufgrund der  $O(a)$ -Verbesserung redefinierte Quarkmasse (siehe Abschnitt 2.8)

$$a\tilde{m}_q = (1 + b_m a m_q) a m_q \quad (5.4)$$

bezeichnet, wobei

$$a m_q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right) \quad (5.5)$$

ist.

Sint und Weisz [111] haben  $b_m$  störungstheoretisch bis zur ersten Schleife berechnet und fanden

$$b_m = -\frac{1}{2} - 0.07217(2) C_F g_0^2, \quad (5.6)$$

wobei für die Eichgruppe  $SU(N)$   $C_F = (N^2 - 1)/2N$  ist. Verwendet man tadpole-verbesserte Störungstheorie, dann ergibt eine Entwicklung in  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a)$  [107]

$$b_m^{\text{TI}} = -\frac{1}{2} - 1.210 \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a). \quad (5.7)$$

$\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu) = (g^{\overline{\text{MS}}}(\mu))^2/4\pi$  kann mit Hilfe der im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema störungstheoretisch bis zur vierten Ordnung bekannten  $\beta$ -Funktion [112] bestimmt werden.

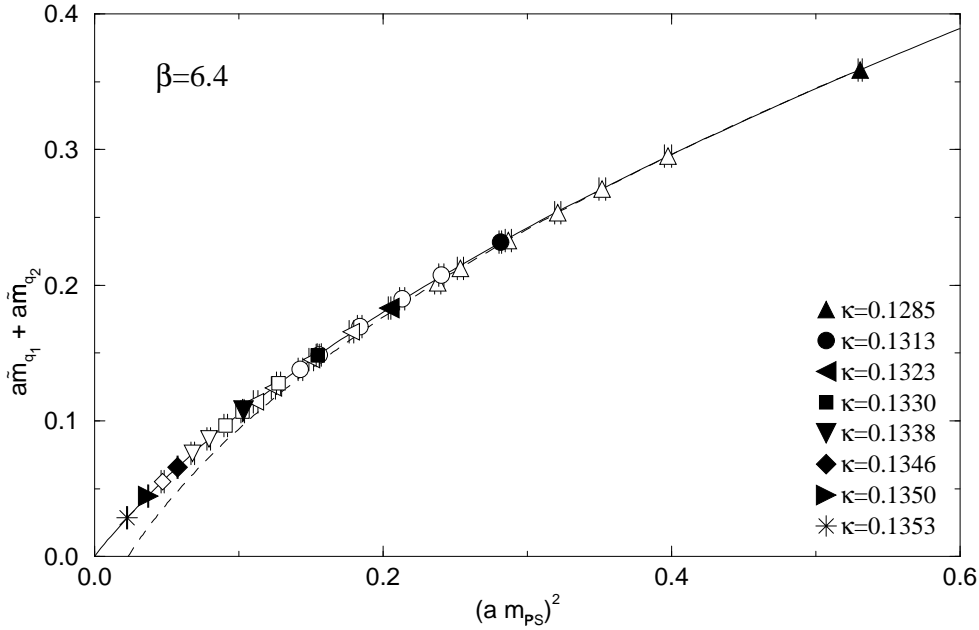


Abbildung 5.3.: Bestimmung von  $\kappa_c$  mit Hilfe der Masse des pseudoskalaren Mesons bei  $\beta = 6.4$ . Mit den in der Legende angegebenen Symbolen sind die Ergebnisse für  $\tilde{m}_{q_1} = \tilde{m}_{q_2}$  aufgetragen. Bei den zugehörigen offenen Symbolen ist  $\tilde{m}_{q_2}$  jeweils verschieden gewählt. Die durchgehende Linie ist das Ergebnis eines Fits an die Werte für entartete Quarkmassen, d.h.  $d_2 = 0$ . Die gestrichelte Linie stammt von einem Fit an den kompletten Datensatz mit  $d_2$  als freien Parameter. Gezeigt wird das Ergebnis, bei dem eine der Quarkmassen  $\kappa = 0.1285$  entspricht.

Dazu ist es erforderlich, dass  $\Lambda^{\overline{MS}}$  auf dem Gitter bekannt ist. Die ALPHA-Kollaboration hat hier den Wert  $\Lambda^{\overline{MS}} = 0.602(48)/r_0$  ermittelt [113]. Die Werte für  $\alpha_s^{\overline{MS}}(1/a)$ ,  $b_m$  und  $b_m^{\text{TI}}$  sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. Die Ergebnisse der tadpole-verbesserten Rechnung stimmen deutlich besser mit dem nicht-störungstheoretischen Ergebnis [114] überein. Außerdem fanden wir, dass die Abhängigkeit von  $(a m_{PS})^2$  von der so bestimmten Quarkmasse weniger Krümmung aufweist. Wir werden daher im folgenden  $b_m^{\text{TI}}$  verwenden.

Wir sind nun in der Lage, den in Gleichung (5.3) gegebenen Ansatz unseren Daten anzupassen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 auf der nächsten Seite aufgelistet und graphisch in den Abbildungen 5.1 bis 5.3 dargestellt. Für  $a m_{PS} \gtrsim 1$  ist zu erwarten, dass im Fitansatz höhere Potenzen in der Quarkmasse und Gitterartefakte relevant werden. Für  $a m_{PS} \simeq 0.7$  fanden wir, dass das Ergebnis für  $\kappa_c$  innerhalb der Fehler unabhängig vom Fitbereich ist.

Bei den Fits an die Ergebnisse für  $\beta = 6.0$  und  $6.2$  haben wir  $d_2 = 0$

$\beta$	$b_m$	$b_m^{\text{TI}}$	$b_m^{\text{NP}}$	$\overline{\alpha_s^{\text{MS}}}(1/a)$
6.0	-1.3660(2)	-0.740		0.197(6)
6.2	-1.3381(2)	-0.712	-0.62(3)	0.175(5)
6.4	-1.3119(2)	-0.692		0.159(4)

Tabelle 5.1.: Der Koeffizient  $b_m$  bei den von uns betrachteten Werten für  $\beta$ . Die störungstheoretischen Werte wurden mit Hilfe von Gleichung (5.6) und (5.7) berechnet. Das nicht-störungstheoretische Ergebnis stammt von de Divitiis und Petronzio [114]. Die Werte für  $\overline{\alpha_s^{\text{MS}}}(1/a)$ , die für die Berechnung von  $b_m^{\text{TI}}$  benötigt werden, wurden [115] entnommen.

gesetzt, weil wir hier nur Ergebnisse für entartete Quarkmassen haben. Für  $\beta = 6.4$  haben wir auch Ergebnisse für  $\tilde{m}_{q_1} \neq \tilde{m}_{q_2}$ , die uns eine Abschätzung des Parameters  $d_2$  erlauben. Wie aus den Ergebnissen in Tabelle 5.2 ersichtlich ist, sind die Ergebnisse für  $\kappa_c$ ,  $b_1$  und  $b_2$  eines Fits, bei dem ausschließlich die Resultate für entartete Quarkmassen berücksichtigt wurden, und eines Fits an den kompletten Datenbestand innerhalb der Fehler konsistent. Wir finden, dass  $d_2$  signifikant von Null verschieden und positiv ist. Dies führt dazu, dass die Masse des pseudoskalaren Mesons für konstantes  $a\tilde{m}_{q_1} + a\tilde{m}_{q_2}$  umso schwerer wird, je ungleicher die beiden Quarkmassen sind.

$\beta$	$\kappa_c$	$b_1$	$b_2$	$d_2$	Fitbereich	$\chi_{\text{pdf}}^2$
6.0	0.135304(10)	1.425(18)	1.613(75)	—	$\kappa \geq 0.130$	1.2
6.2	0.1358671(44)	1.0436(89)	1.746(40)	—	$\kappa \geq 0.131$	3.6
6.4	0.1358308(88)	0.7410(93)	2.053(27)	—	—	0.3
6.4	0.1358351(84)	0.7355(83)	2.064(24)	0.177(58)	—	0.2

Tabelle 5.2.: Ergebnisse der Anpassung unserer Daten an Gleichung (5.3). Die Zahlen in der untersten Zeile wurden mit Hilfe eines Fits bestimmt, bei dem die Ergebnisse für nicht-entartete Quarkmassen berücksichtigt wurden. Bei den übrigen Fits wurden ausschließlich Daten verwendet, für die  $\tilde{m}_{q_1} = \tilde{m}_{q_2}$  ist.

Allerdings handelt es sich hier um einen relativ kleinen Effekt. Für  $\tilde{m}_{q_2} = 0$  können wir  $d_2(a\tilde{m}_{q_1})^2/(am_{\text{PS}})^2$  als einen Maßstab für den Fehler ansehen, wenn wir die Unterschiede in den Quarkmassen vernachlässigen. Identifiziert man  $m_{\text{PS}}$  mit der Masse des pseudoskalaren K-Mesons (D-Mesons) und vernachlässigt die Masse des u-Quarks, d.h.  $a\tilde{m}_{q_2} = 0$ , so erhält man durch Lösung der Gleichung (5.3)

$m_{\text{PS}}$	$d_2(a\tilde{m}_{q_1})^2/(am_{\text{PS}})^2$
$m_K$	0.005
$m_D$	0.03

Verwenden wir somit ausschließlich Ergebnisse für entartete Quarkmassen ( $d_2 = 0$ ), so können wir von einem systematischen Fehler der Größenordnung 0.5% bei den K-Mesonen und 3% bei den D-Mesonen ausgehen.

Unberücksichtigt bei dem Ansatz in Gleichung (5.3) blieben die Effekte, die die chirale Störungstheorie für QCD in der Valenzquark-Approximation vorhersagt. Dort findet man den in Gleichung (4.2) gegebenen Zusammenhang zwischen der Masse des pseudoskalaren Mesons und der Quarkmasse, wobei der Parameter  $\delta$  unbekannt ist. Wir haben somit eine Unsicherheit bei der Bestimmung des kritischen Wertes des Kopplungsparameters  $\kappa$  mit Hilfe von  $m_{\text{PS}}$ . Wir werden daher im nächsten Abschnitt eine andere Definition von  $\kappa_c$  einführen.

## 5.2. Definition der Quarkmasse mit Hilfe von PCAC

Die nackte Quarkmasse kann alternativ mit Hilfe der PCAC-Relation

$$\partial_\mu A_\mu = 2mP \quad (5.8)$$

definiert werden, wobei  $A_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$  der Axialvektorstrom,  $P = \bar{\psi}\gamma_5\psi$  die pseudoskalare Dichte und  $m$  die Quarkmasse ist. Diese Relation wurde bereits für die Bestimmung von  $c_{\text{sw}}$  verwendet. Für einen geeigneten Operator  $\mathcal{O}$ , der nicht mit den Operatoren  $A_\mu$  und  $P$  überlappen darf, erwarten wir daher, dass

$$\langle\partial_4 A_{4,t}\mathcal{O}\rangle = 2a\hat{m}_q\langle P_t\mathcal{O}\rangle + O(a^2), \quad (5.9)$$

wobei  $A_{4,t} = \sum_{\vec{x}} A_{4,x}$  und  $P_t = \sum_{\vec{x}} P_x$  ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Axialvektorstrom  $O(a)$ -verbessert werden muss, d.h. es ist

$$A_4 \rightarrow A_4 + c_A a \partial_4 P \quad (5.10)$$

zu ersetzen, wobei für die Ableitung  $\partial_4$  der symmetrisierte Ableitungsoperator  $\frac{1}{2}(\Delta_4^f + \Delta_4^b)$  zu verwenden ist. Der Verbesserungskoeffizient  $c_A$  wurde von der ALPHA-Kollaboration nicht-störungstheoretisch bestimmt [41]:

$$c_A = -0.00756 g_0^2 \frac{1 - 0.748g_0^2}{1 - 0.977g_0^2}. \quad (5.11)$$

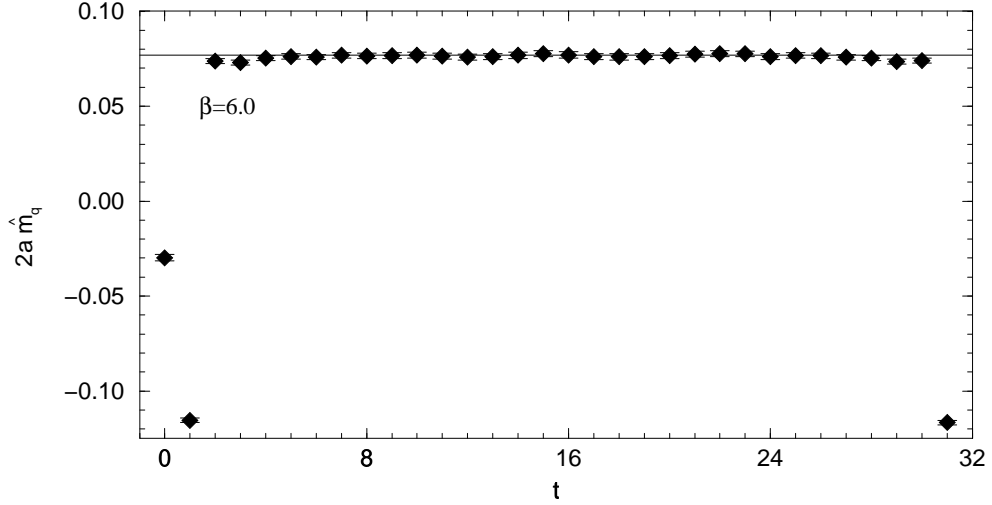


Abbildung 5.4.: PCAC Quarkmasse für  $\beta = 6.0$ ,  $\kappa = 0.1338$  auf einem  $16^3 \times 32$  Gitter. Die Linie zeigt das in Anhang A.3 aufgelistete Ergebnis für  $2a\hat{m}_q$ .

Für den Operator  $\mathcal{O}$  verwenden wir die in Zeitschicht  $t = 0$  gemittelte verschmierte pseudoskalare Dichte  $P_0^S = \sum_{\vec{x}} P_{\vec{x},0}^S$ .  $P_t$  und  $A_{4,t}$  müssen Punktoperatoren sein. Wir erhalten somit für  $0 \ll t \ll T$

$$2a\hat{m}_q = 2a\hat{m}_q^{(0)} + c_A 2a\hat{m}_q^{(1)} = \frac{a\partial_4 \langle A_{4,t} P_0 \rangle^{LS}}{\langle P_t P_0 \rangle^{LS}} + c_A \frac{a^2 \partial_4^2 \langle P_t P_0 \rangle^{LS}}{\langle P_t P_0 \rangle^{LS}}. \quad (5.12)$$

Für einige Parameterkombinationen ist  $\hat{m}_q$  als Funktion der Zeit in den Abbildungen 5.4, 5.5 und 5.6 dargestellt. Der Parameter  $\kappa$  wurde jeweils so gewählt, dass die Quarkmasse etwa der Masse des s-Quarks entspricht. Wie man den Abbildungen entnehmen kann, sind die statistischen Fehler bei der Bestimmung von  $\hat{m}_q$  sehr klein. Bereits für relativ kleine Zeiten  $t$  (bzw. kleine  $T - t$ ) wird ein konstantes Plateau erreicht. Durch einen Fit an einer Konstante haben wir  $2a\hat{m}_q^{(0)}$  und  $2a\hat{m}_q^{(1)}$  getrennt bestimmt. Die Ergebnisse sind im Anhang A.3 aufgelistet.

In den Abbildungen 5.7, 5.8 und 5.9 ist die PCAC Quarkmasse  $\hat{m}_q$  als Funktion von  $1/\kappa$  aufgetragen. Für die Bestimmung von  $\kappa_c$  machen wir nun folgenden Ansatz:

$$a\hat{m}_q = b_1 (1 + b_2 a m_q) a m_q, \quad (5.13)$$

wobei

$$a m_q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right)$$

ist. Die Resultate dieser Fits sind in Tabelle 5.3 dokumentiert.

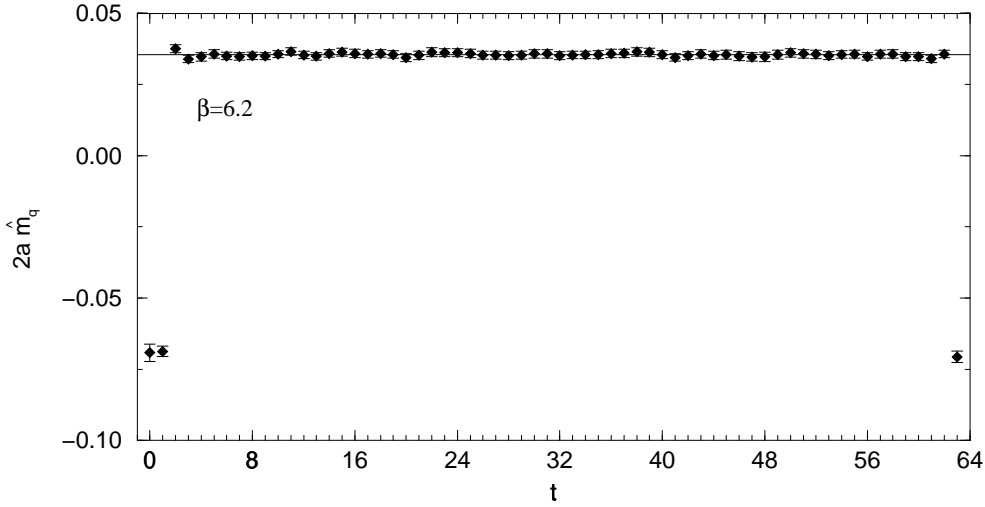


Abbildung 5.5.: Wie Abbildung 5.4, jedoch für  $\beta = 6.2$ ,  $\kappa = 0.1352$  und  $V = 32^3 \times 64$ .

$\beta$	$\kappa_c$	$b_1$	$b_2$	Fitbereich	$\chi^2/dof$
6.0	0.1352008(87)	1.006(11)	-0.32(10)	$\kappa \geq 0.1324$	1.4
6.2	0.1358030(26)	1.0871(79)	-0.50(15)	$\kappa \geq 0.1333$	1.1
6.4	0.1357443(10)	1.0809(14)	-0.176(10)	$\kappa \geq 0.1313$	1.0

Tabelle 5.3.: Ergebnisse der Anpassung der Ergebnisse für die PCAC Quarkmasse  $\hat{m}_q$  an Gleichung (5.13).

Für schwere Quarkmassen beschreibt dieser Ansatz unsere Daten bei  $\beta = 6.0$  und  $6.2$  jedoch schlecht, so dass wir, um unsere Daten im Bereich schwerer Quarkmassen interpolieren und in den Bereich der Masse des c-Quarks extrapolieren zu können, zusätzlich einen Fit mit dem linearen Ansatz

$$a\hat{m}_q = c_0 + c_1 \frac{1}{\kappa} \quad (5.14)$$

machen. Für (in Gittereinheiten) besonders schwere Quarkmassen weichen die Ergebnisse von diesem linearen Ansatz ab. Wir schreiben diesen Effekt den für schwere Quarkmassen zu erwartenden Diskretisierungsfehlern zu, da diese Abweichung für größere  $\beta$  und somit kleinere Gitterabstände  $a$  kleiner wird. Die jeweils schwerste Quarkmasse wurde daher bei diesen Fits nicht berücksichtigt. Die Ergebnisse dieser Fits sind in Tabelle 5.4 zusammengetragen.

Die renormierungsgruppenunabhängige (RGI) PCAC-Quarkmasse ist definiert durch

$$\hat{m}_q^{\text{RGI}} = \frac{1 + b_A am_q}{1 + b_P am_q} \Delta Z_M^S(\mu) Z_M^S(\mu) \hat{m}_q. \quad (5.15)$$



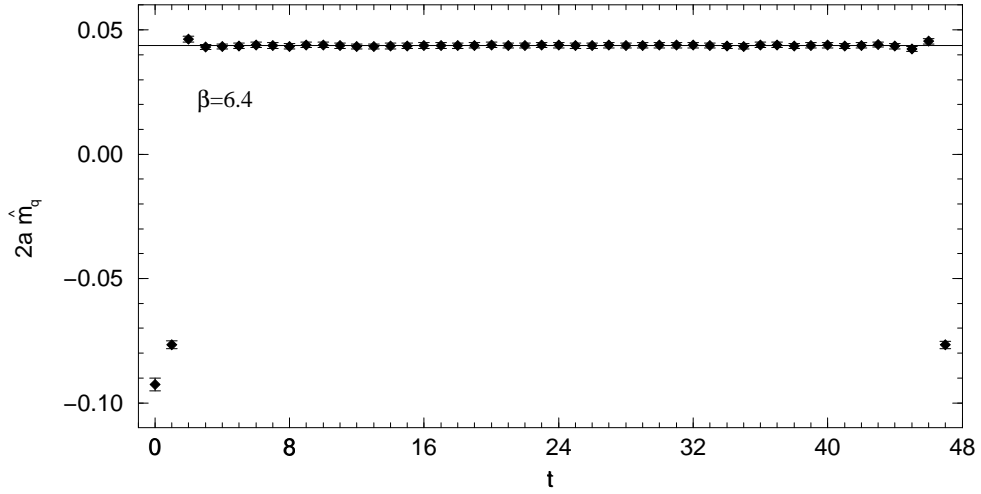


Abbildung 5.6.: Wie Abbildung 5.4, jedoch für  $\beta = 6.4$ ,  $\kappa = 0.1350$  und  $V = 32^3 \times 48$ .

$\beta$	$c_0$	$c_1$	Fitbereich	$\chi^2/dof$
6.0	-3.5764(35)	0.48368(46)	$0.1338 \geq \kappa \geq 0.1285$	1.0
6.2	-3.8191(23)	0.51883(31)	$0.1333 \geq \kappa \geq 0.1294$	2.0

Tabelle 5.4.: Ergebnisse der Anpassung unserer Ergebnisse für die PCAC Quarkmasse  $\hat{m}_q$  an Gleichung (5.14).

$Z_M^S(\mu)$  gibt den Renormierungsfaktor in einem vorgegebenen Schema  $S$  und bei einer Skala  $\mu$  an. Durch den Faktor  $\Delta Z_M^S(\mu)$  wird die Quarkmasse renormierungsgruppenunabhängig definiert. Das Produkt  $\Delta Z_M^S(\mu)Z_M^S(\mu)$  ist somit unabhängig von Renormierungsschema und Skala und damit nur noch eine Funktion der Eichfeldkopplung  $\beta$ . Es wurde von der ALPHA-Kollaboration [113] für  $6.0 \leq \beta \leq 6.5$  mit Hilfe des Schrödingerfunktional bestimmt. Sie fand

$$\Delta Z_M(\mu)Z_M(\mu) = 1.752 + 0.321(\beta - 6) - 0.220(\beta - 6)^2, \quad (5.16)$$

wobei der statistische Fehler in der Größenordnung 0.5% ist. Für die Koeffizienten  $b_A$  und  $b_P$ , die die Quarkmassenabhängigkeit des Renormierungskoeffizienten beschreiben, erhielten Sint und Weisz [111] durch störungstheoretische Rechnungen folgendes Ergebnis

$$b_A = 1 + 0.11414(4) C_F g_0^2 \quad (5.17)$$

$$b_P = 1 + 0.11484(2) C_F g_0^2. \quad (5.18)$$

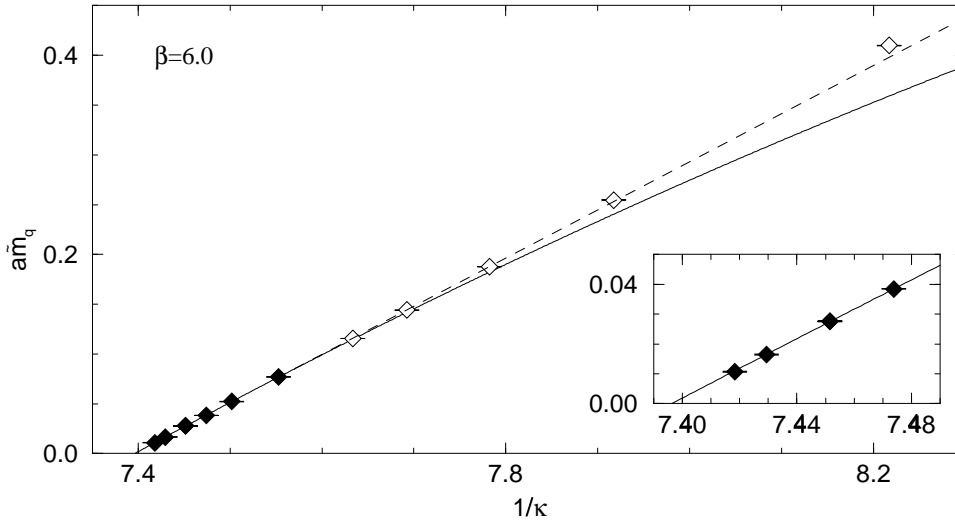


Abbildung 5.7.: Bestimmung von  $\kappa_c$  bei  $\beta = 6.0$  mit Hilfe der PCAC Quarkmasse. Die durchgezogene Linie stammt von einem Fit an Gleichung (5.13). Die mit offenen Symbolen dargestellten Daten blieben bei diesem Fit unberücksichtigt. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis eines Fits an Gleichung (5.14).

Das tadpole-verbesserte Resultat erhalten wir nun, nachdem wir  $g_0$  wiederum durch  $g^{\overline{\text{MS}}}(1/a)$  ersetzt haben,

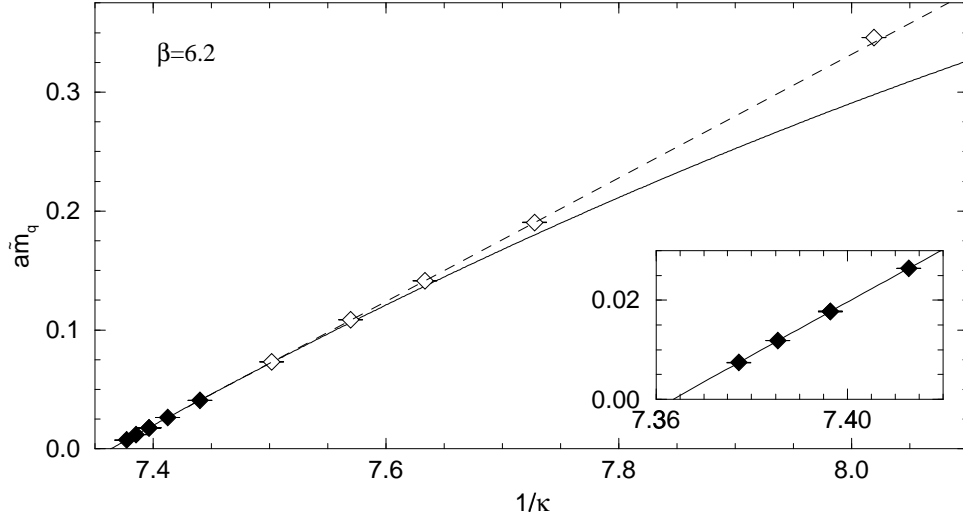
$$b_A^{\text{TI}} = 1 + 1.912 \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a), \quad (5.19)$$

$$b_P^{\text{TI}} = 1 + 1.924 \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(1/a). \quad (5.20)$$

De Divitiis und Petronzio [114] haben versucht, die Differenz  $b_A - b_P$  nicht-störungstheoretisch zu bestimmen. Sie fanden im Gegensatz zu den störungstheoretischen Ergebnissen einen positiven Wert. Allerdings bestätigt ihr Ergebnis, dass diese Differenz klein ist. Für kleine Quarkmassen ist daher der Faktor  $(1 + b_A am_q)/(1 + b_P am_q) \simeq 1$ . Wir werden im Folgenden wiederum die tadpole-verbesserten Ergebnisse verwenden.

### 5.3. Singularitäten im chiralen Limes

Wir können nun mit Hilfe der renormierten Quarkmasse  $\hat{m}_q^{\text{RGI}}$  die Existenz von Artefakten der Valenzquark-Approximation überprüfen. Nach Gleichung (4.2) sollte das Verhältnis des Quadrats der pseudoskalaren Masse  $m_{\text{PS}}$  und der Quarkmasse  $\hat{m}_q^{\text{RGI}}$  für kleine Quarkmassen divergieren. Unsere Ergebnisse sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Tatsächlich finden wir ein deutlich verändertes Verhalten für kleine Quarkmassen.


 Abbildung 5.8.: Wie Abbildung 5.7, jedoch bei  $\beta = 6.2$ .

$\beta$	$b_A$	$b_A^{\text{TI}}$	$b_P$	$b_P^{\text{TI}}$	$b_A^{\text{NP}} - b_P^{\text{NP}}$
6.0	1.15219(5)	1.377	1.15312(2)	1.379	
6.2	1.14728(5)	1.335	1.14818(3)	1.337	0.15(2)
6.4	1.14268(5)	1.304	1.14355(3)	1.306	

Tabelle 5.5.: Die Koeffizienten  $b_A$  und  $b_P$  bei den von uns verwendeten Werten für  $\beta$ . Die störungstheoretischen sowie die tadpoleverbesserten Werte wurden mit Hilfe der Gleichungen (5.17) bis (5.20) berechnet. Die verwendeten Werte für  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}$  sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Das nicht-störungstheoretische Ergebnis für  $b_A - b_P$  wurde [114] entnommen.

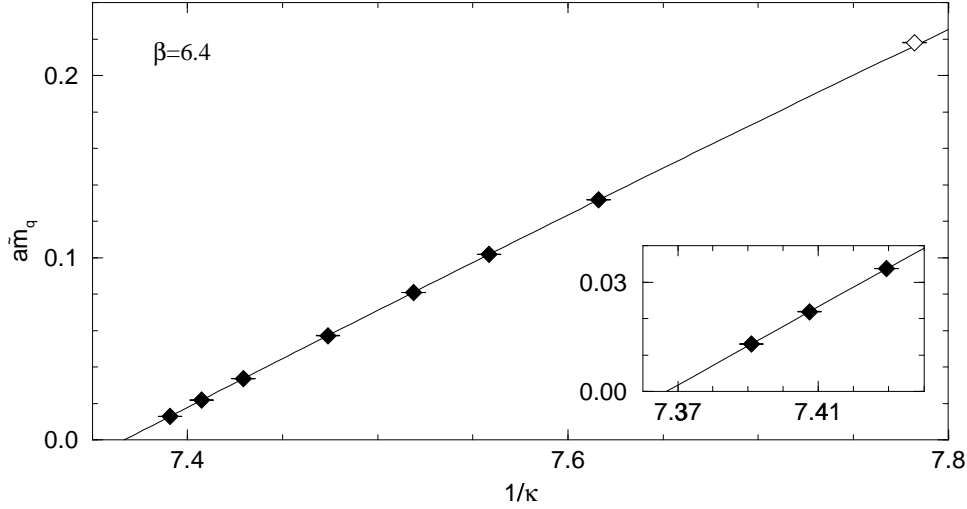
Für eine quantitative Aussage haben wir unseren kompletten Datensatz an folgenden Ansatz angepasst:

$$\frac{am_{PS}^2}{\hat{m}_q^{\text{RGI}}} = C_\beta \frac{(a\hat{m}_q^{\text{RGI}})^{-\frac{\delta}{1+\delta}} + A_{1,\beta} a\hat{m}_q^{\text{RGI}} + A_{2,\beta} (a\hat{m}_q^{\text{RGI}})^2}{1 + B_{1,\beta} a\hat{m}_q^{\text{RGI}}} \quad (5.21)$$

Für kleine Quarkmassen entspricht dieser Ansatz der Gleichung (4.2). Für  $\hat{m}_q^{\text{RGI}} \rightarrow \infty$  ist er so gewählt, dass es dem bei großen Quarkmassen aufgrund von Diskretisierungsfehlern erwarteten linearen Verhalten entspricht. Bei diesem Ansatz machen wir die Annahme, dass  $\delta$  unabhängig vom Gitterabstand  $a$  ist. Die Ergebnisse dieses Fits sind in Tabelle 5.6 aufgelistet.

Das Ergebnis

$$\delta = 0.15(2) \quad (5.22)$$


 Abbildung 5.9.: Wie Abbildung 5.7, jedoch bei  $\beta = 6.4$ .

$\beta$	6.0	6.2	6.4
$A_1$	5.6(1)	7.2(1)	5.0(1)
$A_2$	-0.81(8)	-0.2(1)	-3.3(5)
$B_1$	2.15(6)	2.28(7)	0.17(2)
$C$	1.193(9)	0.752(6)	0.545(5)
$\delta$	0.15(2)		
$\chi_{\text{pdf}}^2$	0.4		

 Tabelle 5.6.: Bestimmung von  $\delta$ . Die Zahlen stammen von einem Fit an Gleichung (5.21).

ist in guter Übereinstimmung mit dem aufgrund phänomenologischer Daten erwarteten Wert. Er ist innerhalb des Fehlers auch konsistent mit den Resultaten der CP-PACS-Kollaboration. Diese Kollaboration hat mit großer Statistik QCD in der Valenzquark-Approximation mit Wilson-Fermionen simuliert. Sie fand  $\delta = 0.10(2)$  [116]. Eine Arbeitsgruppe am FNAL [117, 118] hat mit Hilfe der von ihr entwickelten „modified quenched approximation“ (siehe S. 53) durch Simulationen bei  $\beta = 5.7$  einen etwas kleineren Wert von  $\delta = 0.080(15)$  erhalten.

## 5.4. Quarkmassen

Wie der Abbildung 5.10 zu entnehmen ist, zeigt das Verhältnis  $(am_{\text{PS}})^2/\hat{m}_{\text{q}}^{\text{RGI}}$  im Bereich  $0.4 < r_0\hat{m}_{\text{q}}^{\text{RGI}} < 2$  (dies entspricht etwa 150 bis 800 MeV) ein in guter Näherung lineares Verhalten. Da die Abweichung von diesem linearen

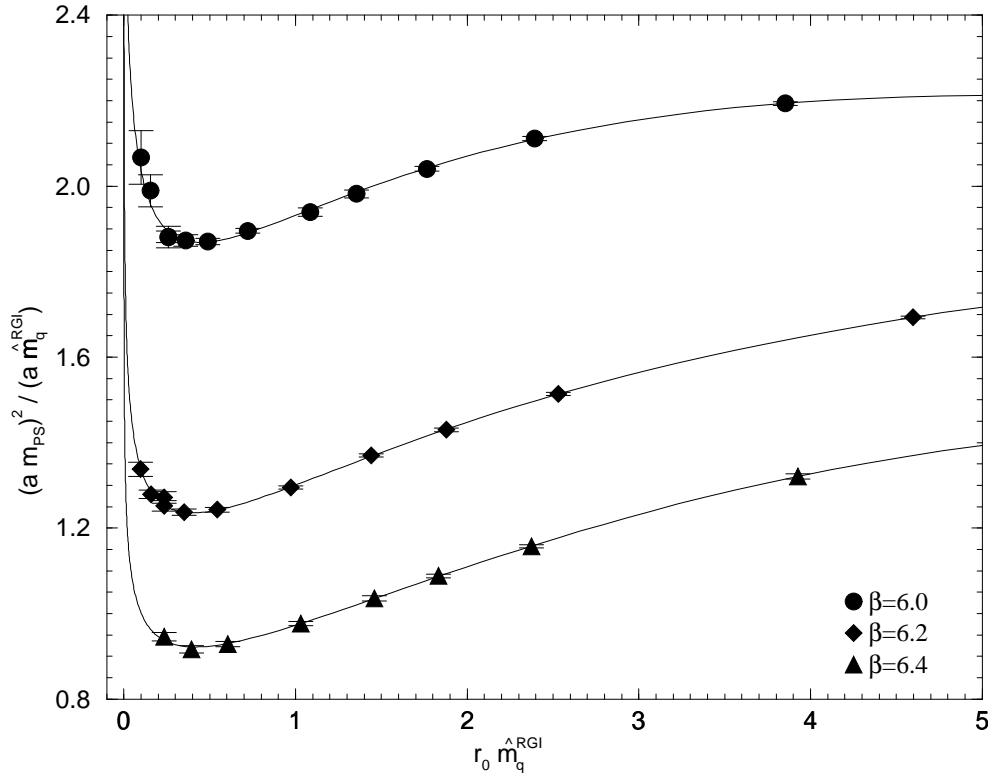


Abbildung 5.10.: Das Verhältnis vom Quadrat der pseudoskalaren Masse und der renormierten Quarkmasse  $am_{\text{PS}}^2/\hat{m}_q^{\text{RGI}}$  als Funktion von  $\hat{m}_q^{\text{RGI}}$ . Die durchgezogenen Kurven stammen von einem Fit an den in Gleichung (5.21) gegebenen Ansatz.

Verhalten für kleine Quarkmassen mit den Ansätzen der chiralen Störungstheorie gut übereinstimmt, können wir davon ausgehen, dass dies vor allem als Artefakt der Valenzquark-Approximation zu werten ist. Für Aussagen über Quarkmassen im chiralen Limes ist es daher sinnvoller, die Ergebnisse für leichte Quarkmassen zu verwerfen und linear in den chiralen Limes zu extrapolieren.

Die Ergebnisse dieses Ansatzes wurden von der QCDSF-Kollaboration in [115, 119] publiziert. Wir zitieren an dieser Stelle nur die Ergebnisse für die leichten Quarkmassen bei einer Skala von  $\mu = 2 \text{ GeV}$  im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema:

$$\begin{aligned} m_{\text{strange}}^{\overline{\text{MS}}}(\mu = 2 \text{ GeV}) &= 105(4) \text{ MeV} \\ m_{\text{up,down}}^{\overline{\text{MS}}}(\mu = 2 \text{ GeV}) &= 4.4(2) \text{ MeV.} \end{aligned} \tag{5.23}$$

## 5.5. Energie-Impuls-Beziehung für das pseudoskalare Meson

Eine Untersuchung der Energie pseudoskalarer Mesonen mit Impuls erlaubt uns, zu überprüfen, inwiefern die relativistische Energie-Impulsbeziehung

$$E_{\vec{p}}^2 = m_{\text{PS}}^2 + |\vec{p}|^2 \quad (5.24)$$

in Abhängigkeit von Quarkmasse und Gitterabstand realisiert ist.

Wir haben die Energie  $aE_{\vec{p}}$  für die jeweiligen Impulse separat bestimmt. Anschließend haben wir die Ergebnisse in Klassen von Impulsen zusammengefasst, die sich nur durch Rotation um das Vielfache von  $\pi/2$  um eine der räumlichen Achsen auf dem Gitter unterscheiden. Wir fanden keine statistisch signifikanten Unterschiede zwischen den Ergebnissen innerhalb einer Impulsklasse. Wir geben daher in Anhang A.2.3 nur die gemittelten Resultate.

Ein Teil dieser Ergebnisse ist in den Abbildungen 5.11 bis 5.15 graphisch dargestellt. Die gestrichelten Linien sind nicht das Resultat eines Fits, sondern zeigen das Ergebnis, welches man aufgrund der relativistischen Energie-Impuls-Relation erwarten würde. Für  $\beta = 6.0$  (Abb. 5.11) und 6.2 (Abb. 5.13) zeigen sich signifikante Abweichungen von dieser Linie bei schweren Quarkmassen. Die Unterschiede sind umso kleiner, je kleiner der Gitterabstand ist. Für  $\beta = 6.4$  (Abb. 5.15) sehen wir im Bereich schwerer Quarkmassen keine Abweichung mehr.

Wir schreiben diesen Effekt daher Diskretisierungsfehlern für schwere Quarks zu. Für Impulse, die bezogen auf die Masse klein sind, verhält sich das Meson approximativ nicht-relativistisch, so dass

$$aE_{\vec{p}} \simeq am + \frac{(a|\vec{p}|)^2}{2am_{\text{kin}}} + \dots \quad (5.25)$$

ist. Wie sich im freien Fall zeigen lässt [120], ist aufgrund von Gitterartefakten für schwere Quarks  $m \neq m_{\text{kin}}$ . Tatsächlich finden wir für schwere Quarkmassen bei  $\beta = 6.0$  und 6.2 eine gute Übereinstimmung mit diesem Ansatz. Ein Fit mit  $m_{\text{kin}}$  als freien Parameter ergibt die in Tabelle 5.7 angegebenen Resultate.

$\beta$	$\kappa$	$am_{\text{PS}}$	$am_{\text{kin}}$
6.0	0.12170	1.2546(12)	1.58(13)
6.0	0.12630	0.9704(11)	1.17(11)
6.0	0.12850	0.8189(11)	0.99(10)
6.2	0.12470	1.02837(89)	1.164(99)
6.2	0.12940	0.72175(89)	0.787(82)
6.4	0.12850	0.72859(91)	0.775(69)

Tabelle 5.7.: Kinetische Masse pseudoskalarer Mesonen mit schweren Quarks.  $am_{\text{kin}}$  wurde durch Fit an Ansatz (5.25) bestimmt. Zum besseren Vergleich sind außerdem die Ergebnisse für  $am_{\text{PS}}$  angegeben.

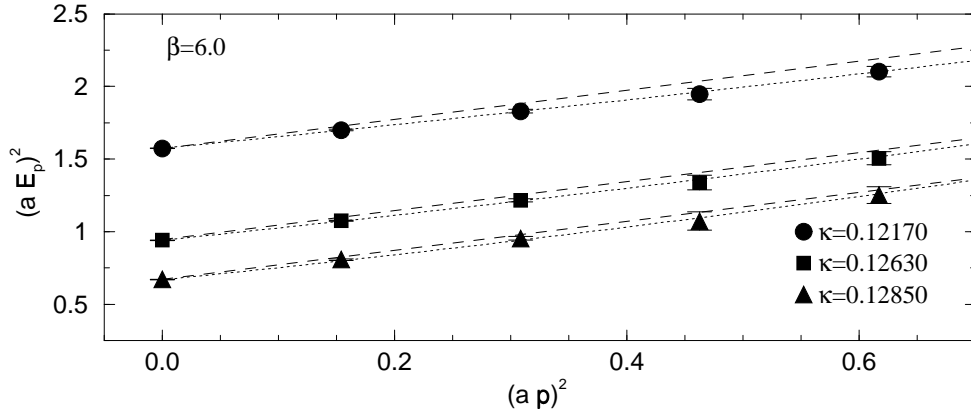


Abbildung 5.11.: Quadrat der Energie in Abhängigkeit vom Quadrat des Impulses bei  $\beta = 6.0$  für schwere Quarkmassen. Die gestrichelten Linien entsprechen  $(aE_{\vec{p}})^2 = (am_{\text{PS}})^2 + (a|\vec{p}|)^2$ . Die gepunkteten Linien stammen von einem Fit mit dem Ansatz in Gleichung (5.25).

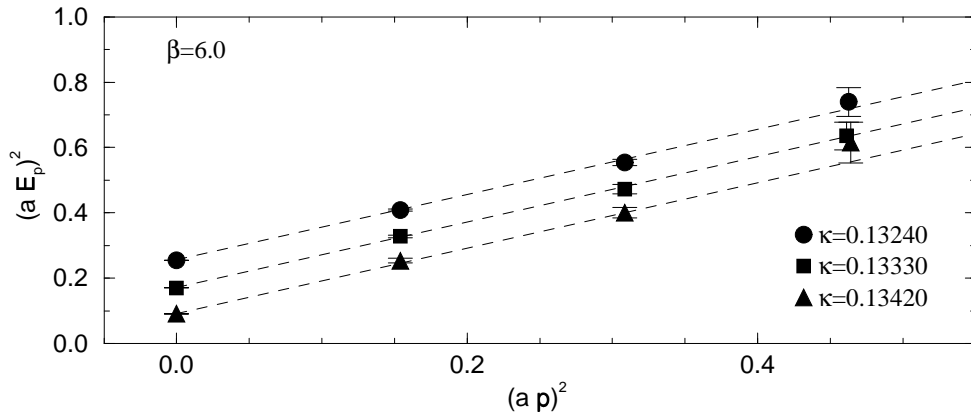


Abbildung 5.12.: Wie Abbildung 5.11, jedoch mit den Ergebnissen für mittelschwere Quarkmassen bei  $\beta = 6.0$ .

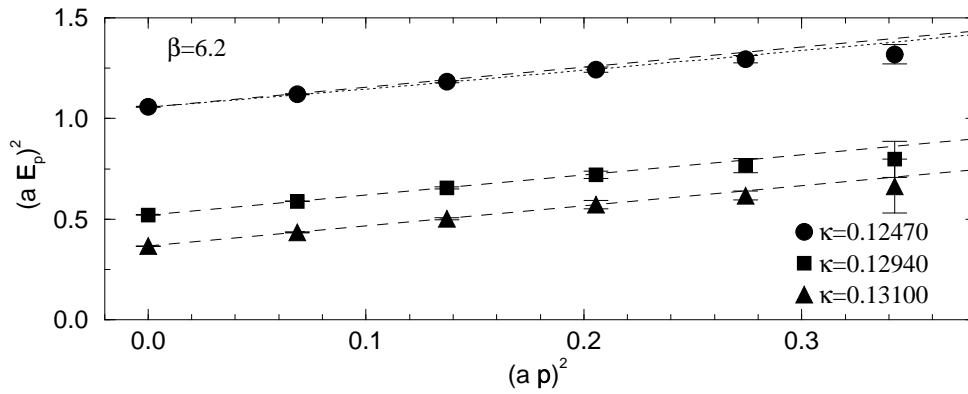


Abbildung 5.13.: Wie Abbildung 5.11, jedoch mit den Ergebnissen für schwere Quarkmassen bei  $\beta = 6.2$ .

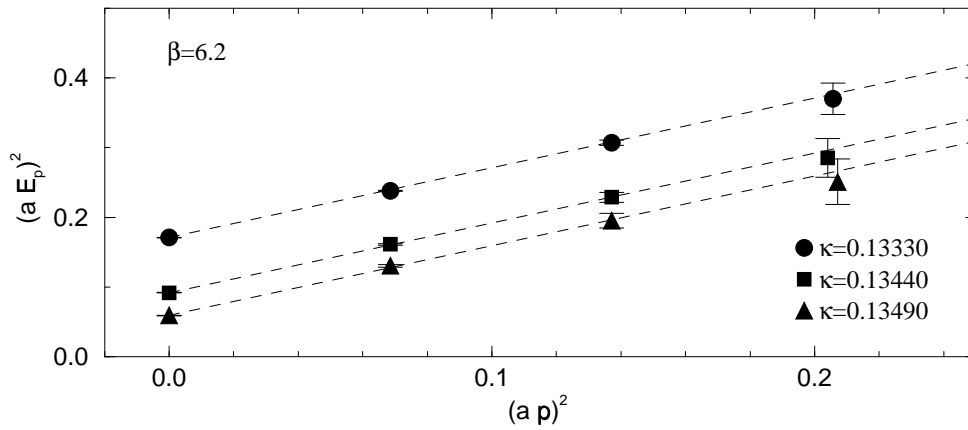


Abbildung 5.14.: Wie Abbildung 5.11, jedoch mit den Ergebnissen für mittelschwere Quarkmassen bei  $\beta = 6.2$ .

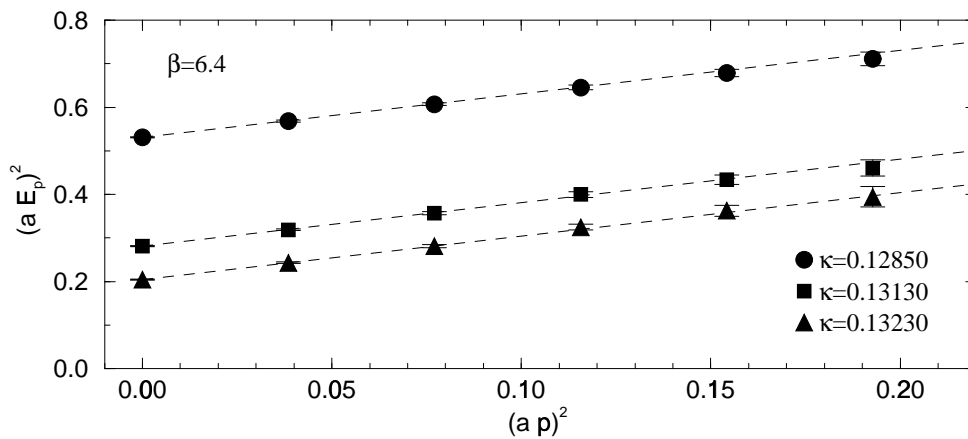


Abbildung 5.15.: Wie Abbildung 5.11, jedoch mit den Ergebnissen für schwere Quarkmassen bei  $\beta = 6.4$ .