

1. Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) wird heute allgemein als die Theorie angesehen, die die starke Wechselwirkung beschreibt. Es handelt sich hierbei um eine Feldtheorie mit $SU(3)$ als Eichgruppe. Die Eichfelder, Gluonen genannt, vermitteln die Wechselwirkung zwischen den mit einer Farbladung versehenen fermionischen Bestandteilen der Theorie, den Quarks. Die Gluonen tragen selbst eine Farbladung und können somit mit sich selber wechselwirken.

Zur Entwicklung dieser Theorie führten zwei grundlegende Beobachtungen. Aus der Elektron-Nukleon-Streuung bei großem Impulstransfer q und großem Energietransfer ν war seit Ende der 60er Jahre bekannt [1], dass die Strukturfunktionen lediglich eine Funktion von q^2/ν waren (Bjorken-Skaleninvarianz). Ein solches Verhalten ist zu erwarten, wenn die Elektronen an nahezu freien Teilchen gestreut werden, die Partonen [2] genannt und später als Quarks identifiziert wurden. Dieses Phänomen zeigt sich nur für große Impulse. Die Wechselwirkung nimmt somit für kleine Abstände ab und die Theorie wird asymptotisch frei.

Anfang der 70er Jahre konnte nachgewiesen werden, dass nicht-Abelsche Eichtheorien die Eigenschaft asymptotischer Freiheit aufweisen können [3]. Durch den Nachweis der Renormierbarkeit derartiger Yang-Mills-Theorien [4], auch im masselosen Fall [5], war eine Basis für die Formulierung der QCD geschaffen [6, 7]. Durch die asymptotische Freiheit wird eine störungstheoretische Beschreibung von Prozessen mit großem Impulsübertrag möglich. Störungstheoretische Ergebnisse lieferten eine gute Beschreibung der experimentellen Resultate beispielsweise für die Verletzung der Bjorken-Skaleninvarianz bei der Elektron-Nukleon-Streuung, für die Elektron-Positron-Annihilation und andere Prozesse. Dies war eine wichtige Bestätigung der QCD.

Eine zweite Beobachtung ist bis heute sehr viel weniger gut verstanden: Teilchen mit einer Farbladung treten nie isoliert auf, sondern werden nur in gebundenen Zuständen beobachtet. Diese Einschließung von Farbladungen („confinement“) ist ein nicht-störungstheoretischer Effekt. Um Aussagen über die QCD im Bereich größerer Abstände zu erhalten, ist es somit notwendig, nicht-störungstheoretische Methoden einzusetzen. Dies war eines der Hauptmotive für die Einführung der Gittereichtheorie. So konnte im Rahmen einer Formulierung der QCD auf dem Gitter ein nicht-relativistisches stati-

ches Quarkpotential berechnet werden [8], welches für zunehmende Abstände linear wächst. Die Gittereichtheorie ermöglichte damit im statischen Fall ein Verständnis des Phänomens der Farbeinschließung.

In den letzten Jahren hat sich die Gittereichtheorie als ein wichtiges Instrument für die nicht-störungstheoretische Untersuchung der QCD erwiesen. Sie sieht eine Diskretisierung des Raum-Zeit-Kontinuums durch ein Gitter vor. Dieses Vorgehen kann man auch als eine Regularisierung im Sinne des Renormierungsprogramms auffassen. Der inverse Gitterabstand a^{-1} hat dabei die Rolle eines ultravioletten Abschneideparameters („cut-off“), durch den die Impulse auf Beträge kleiner π/a begrenzt werden. Im Kontinuumslimit $a \rightarrow 0$ wird dieser Cutoff nach unendlich verschoben.

Wichtiger noch sind die Möglichkeiten, die sich durch die Gittereichtheorie eröffnen, QCD auf Rechnern zu simulieren. Damit wurde es möglich, ab initio Rechnungen durchzuführen, mit denen Aussagen der QCD im niederenergetischen Bereich gewonnen werden konnten. Das Resultat sind unter anderem quantitative Aussagen über das Massenspektrum, Quarkmassen, Zerfallskonstanten und Strukturfunktionen. Untersuchungen der QCD auf dem Gitter können auch Aufschluss geben über Phänomene wie die Farbeinschließung, die Verletzung der chiralen Symmetrie oder die direkte CP-Verletzung.

Der Aufwand zur Auswertung des Pfadintegrals der QCD mit Hilfe des Rechners ist jedoch enorm. Erschwert wird die Auswertung dieser Integrale vor allem aufgrund der fermionischen Felder, die durch vollständig antikommutierende Variablen dargestellt werden. Simulationen der QCD wurden aus diesem Grund (bislang) überwiegend in der Valenzquark-Approximation durchgeführt, bei der fermionische Felder keine dynamischen Variablen sind und die Vakuumpolarisation somit vernachlässigt wird. Die Dimension der Integrale für die vierdimensionale QCD in der Valenzquark-Approximation ist jedoch trotz dieser Näherung hoch. Sie ist gegeben durch $8 \cdot 4 \cdot V$ und damit für ein Gitter mit einem Volumen $V = 32^3 \cdot 64$ bereits von der Größenordnung 10^8 . Für die Rechnungen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, muss über mehrere Jahre hinweg eine Rechenleistung von mehreren Dutzend Gigaflop/s eingesetzt werden.

Bei der Simulation der QCD auf dem Gitter können die Quarkmassen innerhalb eines großen Bereichs frei variiert werden. Um Aussagen über Observablen bei physikalischen Massen zu erhalten, bedarf es zur Fixierung jeder einzelnen Quarkmasse eines experimentellen Wertes. Allerdings können im Rahmen der heutigen Möglichkeiten keine Simulationen bei so kleinen Quarkmassen durchgeführt werden, die denen des u- und d-Quarks entsprechen. Da letztere in guter Näherung als masselos angesehen werden können, ist es daher notwendig, die Ergebnisse, die bei schwereren Quarkmassen gewonnen wurden, in den masselosen Limes (chiralen Limes) zu extrapolieren. Eine zuverlässige Extrapolation ist nur möglich, wenn genaue Ergebnisse für eine ausreichende

Anzahl von Quarkmassen vorhanden sind. Für kleine Quarkmassen sind durch die chirale Störungstheorie Informationen über die funktionale Abhängigkeit der Observablen von der Quarkmasse gegeben. Diese können jedoch nur dann angewendet werden, wenn es gelingt, diese Observablen bei Quarkmassen zu bestimmen, die klein genug sind, damit ein Vergleich mit den Aussagen der chiralen Störungstheorie möglich wird.

Um Simulationen möglichst nahe am Kontinuumslimites durchzuführen, müssen entweder der Gitterabstand a ausreichend klein gewählt oder die Diskretisierungsfehler auf andere Art reduziert werden. Der Gitterabstand ist kein unabhängiger Parameter, sondern ist über die Callan-Symanzik β -Funktion mit der Eichfeldkopplung verknüpft.¹ Dies hat zur Konsequenz, dass der Rechenzeitaufwand bei Verkleinerung des Gitterabstandes stärker wächst, als man naiv erwarten würde. So ist in der Valenzquark-Approximation der Rechenzeitbedarf proportional a^{-5} , bei Simulationen mit dynamischen Fermionen sogar $a^{-6.5}$ [9]. Formulierungen der QCD auf dem Gitter, die einen kleineren Diskretisierungsfehler aufweisen, kommt daher eine große Bedeutung zu. Ein Programm zur systematischen Eliminierung von Diskretisierungsfehlern, welches auch in dieser Arbeit Anwendung findet, geht auf Symanzik [10, 11] zurück. Da diese Fehler in Abhängigkeit von der betrachteten Observable groß sein können, besteht jedoch weiterhin die Notwendigkeit, in den Kontinuumslimites zu extrapolieren.

1.1. Ziele und Fragestellungen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die QCD auf dem Gitter mit Wilson-Fermionen in der Valenzquark-Approximation untersucht, deren Diskretisierungsfehler nicht-störungstheoretisch verbessert worden waren. Ziel war es, die Massen und Zerfallskonstanten von Hadronen, die aus leichten Quarks aufgebaut sind, im Kontinuumslimites zu bestimmen.

Zu untersuchen war dabei insbesondere das Problem der chiralen Extrapolation. Voraussetzung dafür war ein sorgfältiges quantitatives Studium der fraglichen Observablen in Abhängigkeit von den Quarkmassen, das vor allem auch auf den Bereich leichter Quarkmassen zu erstrecken war.

Ferner war es Ziel dieser Arbeit zu verifizieren, dass im Rahmen des Verbesserungsprogramms von Symanzik die Diskretisierungsfehler für hadronische Observablen wie etwa Massen auf Terme $O(a^2)$ reduziert werden können. Eine Bestätigung des Erfolgs dieses Programms im Rahmen der Valenzquark-Approximation ist eine wichtige Voraussetzung für dessen Anwendung bei der

¹ Während der Gitterabstand a in der Valenzquark-Approximation nur eine Funktion der Eichfeldkopplung ist, hängt dieser in der QCD mit dynamischen Fermionen zusätzlich von der Quarkmasse ab.

Simulation der QCD mit dynamischen Fermionen.

Mit den so gewonnenen quantitativen Ergebnissen wird ein Vergleich mit den experimentellen Befunden möglich. Unter der Voraussetzung, dass andere Fehlerquellen kontrollierbar sind, ergibt sich daraus eine Abschätzung der Zulässigkeit der Valenzquark-Approximation.

1.2. Übersicht

Nach einer Einführung in die QCD auf dem Gitter in Kapitel 2 werden wir in Kapitel 3 die Realisierung der Simulationen darstellen. Die einzelnen Fehlerquellen bei der Bestimmung hadronischer Observablen auf dem Gitter werden in Kapitel 4 detailliert diskutiert. Die Analyse der Simulationsergebnisse und die Bestimmung von Massen und Zerfallskonstanten werden in den Kapiteln 5 bis 9 präsentiert. So werden in Kapitel 5 die Ergebnisse für die Massen pseudoskalarer Mesonen und die Quarkmassen dargestellt, wobei insbesondere auf die Verifizierung von Artefakten der Valenzquark-Approximation eingegangen wird. Außerdem wird untersucht, wie sich die Massen verhalten, wenn die Quarkmassen nicht-entartet sind. Das Kapitel 6 beschäftigt sich mit den Vektormesonen und dem Problem der chiralen Extrapolation. In diesem Kapitel werden auch die Ergebnisse für die Kontinuumsextrapolation verschiedener Vektormesonen vorgestellt. Das skalare, das Axialvektor- und das Tensor meson werden in Kapitel 7 behandelt. Die Ergebnisse für die Zerfallskonstanten verschiedener Mesonen sind in Kapitel 8 zusammengefasst. Schließlich werden im Kapitel 9 die Ergebnisse für die Masse des Nukleons sowie der Σ - und Ξ -Baryonen diskutiert. Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln werden auch hier die Resultate der Gittertheorie mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Schließlich folgt eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf die zukünftigen Herausforderungen in diesem Forschungsgebiet.