Diskussionsbeiträge
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft
der Freien Universität Berlin

Nr. 14/2005

VOLKSWIRTSCHAFTLICHE REIHE

Die Stabilisierungsfunktion von Geldpolitik in der kurzen Frist

Alexander Mislin

ISBN 3-938369-13-2

Die Stabilisierungsfunktion von Geldpolitik in der kurzen Frist

Alexander Mislin, Freie Universität Berlin *

26. Juli 2005

Modelle der neu-keynesianischen Ökonomie geben eine Erklärung für die kurzfristige Nichtneutralität des Geldes. Als Erklärungsansatz dient hierbei die Annahme nominaler Rigiditäten auf dem Arbeits- und Gütermarkt.

Der vorliegende Beitrag zielt auf einen Vergleich zweier Modelle der neu-keynesianischen Literatur. Zum einen wird das Modell von Fisher (1977) analysiert, zum anderen das Modell von Calvo (1983). Beide Modelle beruhen auf der Annahme der zeitlich gestaffelten Preissetzung ("Staggered Pricing"). Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden ist, dass das Fisher-Modell von einer festen Fixierung der Preise auf dem Arbeitsmarkt, d.h. der Nominallöhne ausgeht, das Calvo-Modell hingegen von einer stochastischen Fixierung der Preise auf dem Gütermarkt.

Im folgenden wird - im anschließenden Abschnitt 2, 3 und 4 - das Modell von Fisher (1977) und Calvo (1983) formal und verbal analysiert. Dabei wird im Abschnitt 4.2 das Verfahren der Dynamischen Programmierung erläutert, um im Rahmen des Modells von Calvo (1983) eine dynamische Analyse durchführen zu können. Gegenstand des Abschnittes 5 ist ein Vergleich beider Modelle bezüglich der neu-keynesianischen Phillipskurve. Der Beitrag endet mit einer Zusammenfassung.

*Für hilfreichen Rat danke ich Herrn Dipl.-Math. Heiko Berninger.

1 Einführung

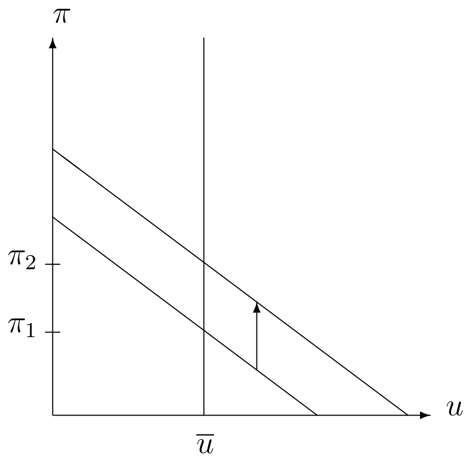
Wir werden im Rahmen der beiden Modelle grundsätzlich von rationalen Erwartungen der Marktteilnehmer, d.h. der privaten Wirtschaftssubjekte, ausgehen und unsere Ausführungen anhand der kurzfristigen Phillipskurve aufzeigen bzw. den kurzfristigen Trade Off zwischen Inflations-und Arbeitslosenrate selbiger ausnutzen; da es durchaus sinnvoll sein kann, die Inflationserwartungen kurzfristig als gegeben anzusehen.

Die Phillipskurve sieht in der keynesianischen Interpretation einen negativen Zusammenhang zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation. Es besteht also ein Trade Off zwischen selbigen Größen, so dass eine Ökonomie grundsätzlich ihr Gleichgewicht aus diesen Zuständen wählen kann:

- Zustände mit hoher Inflation und geringer Arbeitslosigkeit
- Zustände mit hoher Arbeitslosigkeit und geringer Inflation
- Alle erdenkbaren Zustände zwischen diesen beiden.

Nehmen wir jedoch die durch Milton Friedman (1968) ins Spiel gebrachte monetaristische Phillipskurven-Kritik zum Ansatzpunkt, dass also gerade kein mittel-bis langfristiger Trade Off besteht, weil die Ökonomie nicht auf Inflation an sich, sondern vornehmlich auf die Änderungsrate der Inflation reagiert, d.h. also die Phillipskurve wird sich mittelfristig verschieben; langfristig erhalten wir sogar eine Vertikale. Unsere Ökonomie wird sich auf die jeweilige Inflationsrate einstellen, so dass falls es zu einem Anstieg selbiger kommt, sich eine neue Phillipskurve herausbilden wird. Diese Phillipskurve und die darauffolgenden ordnen somit jedem Inflationsniveau ein höheres Niveau an Arbeitslosigkeit (gegenüber dem Ursprünglichen!) zu, bei weiter steigender Inflation.

Abbildung 1.1: Kurz-und langfristige Phillipskurve



Friedman (1968) und Phelps (1967) zufolge stellt sich langfristig das "natürliche" Niveau an Sucharbeitslosigkeit (und struktureller Arbeitslosigkeit) ein, d.h. eine natürliche Arbeitslosenquote, die unabhängig vom Zustand der Inflation ist.
Sargent und Wallace (1975) kamen zu dem Schluß, dass jede antizipierte Geldpolitik keinerlei reale Effekte haben kann.
Gehen wir nun von einer kurzfristigen Phillipskurve aus und machen uns besagten Trade Off zunutze (da kurzfristig die Inflationserwartungen als gegeben anzusehen sind), dann kann nach Lucas (1972) eine überraschende Änderung der Geldpolitik kurzfristig reale Effekte auslösen. Um das Konzept der rationalen Erwartungen in die Phillipskurvendiskussion zu vertiefen betrachten wir eine Lucas-Angebotsfunktion:

$$Y_t = \alpha + \beta(P_t -_{t-1} P_t) + u_t\,, \quad \beta > 0.$$

Dabei sind α und β konstante Parameter, Y_t gibt das Outputniveau an, P_t den logarithmierten Wert des Preisniveaus, ${}_{t-1}P_t = E_{t-1}P_t$ den Erwartungswert für das Preisniveau in t, der am Ende von $t-1$ gebildet wird und u_t einen Störterm, der einem Prozeß weißen Rauschens folgt.

Die zugrundeliegende Idee der traditionellen neuklassischen Phillipskurve ist die folgende: der markträumende Reallohn ist $\frac{W_t}{P_t} = \gamma$. Die Arbeitsanbieter setzen den Nominallohn W_t eine Periode im Voraus mit dem Ziel, γ zu realisieren, wobei sie allerdings eine Erwartung über das Preisniveau bilden müssen:

$$W_t = \gamma + E_{t-1}P_t.$$

Die Preisbildung erfolgt gemäß folgender Funktion (zur Vereinfachung sei im folgenden $\mu = 0$):

$$P_t = W_t(1 + \mu)$$

Der Aufschlag auf die Grenzkosten (Lohn) berücksichtigt die Marktmacht der Unternehmen. Bei vollkommenen Wettbewerb wäre der Preis gleich den Grenzkosten. Des Weiteren nehmen wir an, dass der Reallohn positiv vom Output Y_t abhängt (steigende reale Grenzkosten):

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{1}{\beta}Y_t.$$

Damit können wir die Preisgleichung formulieren:

$$\begin{aligned} P_t &= W_t && (1)\\ &= \gamma + E_{t-1}P_t && (2)\\ &= \frac{1}{\beta}Y_t + E_{t-1}P_t && (3) \end{aligned}$$

Um die neuklassische Phillipskurve in Abhängigkeit der Inflationsraten darzustellen definieren wir die (Log-) Inflationsrate:

$$\pi_t = P_t - P_{t-1}$$

Die Subtraktion von P_{t-1} von beiden Seiten der Preisgleichung (3) ergibt:

$$\begin{aligned} P_t - P_{t-1} &= \frac{1}{\beta}Y_t + E_{t-1}P_t - P_{t-1}\\ \pi_t &= E_{t-1}\pi_t + \frac{1}{\beta}Y_t \end{aligned}$$

Die neuklassische Phillipskurve gibt einen positiven Zusammenhang zwischen der Inflationsrate und dem Outputniveau an. Weil nominale Löhne eine Periode im Voraus bestimmt werden müssen, führt ein überraschender Preisanstieg zu geringeren Arbeitskosten, und damit zu höherem Output. Der

Output steigt daher in dem Erwartungsfehler der Inflationsrate, $\pi_t - E_{t-1}\pi_t$.

Es existiert ein positiver Zusammenhang zwischen Output und der über die (gestern gebildeten) Erwartungen hinausgehenden Inflation.
Falls die Geldpolitik von den Marktteilnehmern korrekt antizipiert wird gilt, bei rationalen Erwartungen:

$$_{t-1}P_t = E_{t-1}P_t = P_t.$$

Das erwartete Preisniveau ist gleich dem tatsächlichen Preisniveau. Damit stellt sich das natürliche Outputniveau α ein:

$$Y_t = \overline{Y} = \alpha.$$

Wenn nun nominale Lohnkontrakte für eine Periode ausgehandelt werden und die Geldmengenregel der Zentralbank sämtlichen Marktteilnehmern bekannt ist, so kann die Geldpolitik auf das Outputniveau stabilisierend wirken, wenn sie unerwartet bzw. wenn sie eine Überraschungsinflation durchführt, mit der die Marktteilnehmer nicht rechnen. Angesichts des Konzeptes der rationalen Erwartungen und dessen dass in jeder Periode neue Nominallohnkontrakte ausgehandelt werden die Marktteilnehmer ihre Inflationserwartungen entsprechend der Geldmengenregel anpassen, so dass auf Dauer die Geldpolitik keine Stabilisierungswirkung auf das Outputniveau hat. Diese vorhersagbaren Effekte werden in der Erwartungsbildung $_{t-1}P_t = E_{t-1}P_t$ sehr anschaulich zum Ausdruck gebracht.
Unter Ausnutzung des kurzfristigen Phillipskurven Trade Off's zwischen Inflations-und Arbeitslosenrate lässt eine aktive Geldpolitik zumindest kurzfristig eine Steigerung der Beschäftigung zu. Da wir allerdings von rationalen Erwartungen ausgehen, macht es nur Sinn in der kurzen Frist die Inflationserwartungen der Marktteilnehmer zu betrachten. Anschaulich ist klar, dass bei rationalen Erwartungen die Marktteilnehmer ihre Erwartungen zukunftsorientiert bilden. Hierbei beziehen sie für sie alle relevanten ökonomischen Aspekte mit in ihre Erwartungsbildung ein; z.B. bei Lohnverhandlungen zwischen Gewerkschaften und Arbeitgeberverbänden, bei denen die Inflationserwartung (die gerade eine entscheidende Auswirkung auf die Entwicklung des Realeinkommens hat) vom Wachstum des gesamtwirtschaftlichen Angebotes bzw. Nachfrage abhängt. Die Marktteilnehmer orientieren sich also an eine machbare Geldpolitik, im Sinne einer nach zugrundegelegten volkswirtschaftlichen Daten glaubwürdige Politik. Letztendlich wollen wir hier dieses Konzept zugrunde legen, so dass bezugnehmend zu unserem Beispiel sämtliche Marktteilnehmer sich auf Dauer nicht täuschen lassen.
Stanley Fisher (1977) sowie Taylor (1979, 1980) stellen ein Modell, unter

Zugrundelegung rationaler Erwartungen, vor, das dem von Sargent und Wallace (1975) ähnelt. Wenn alle Kontrakte in der Ökonomie für eine Periode geschlossen werden ergibt sich das Resultat von Sargent und Wallace (1975): jede Änderung der Geldmenge führt unmittelbar zu einer proportionalen Anpassung aller nominalen Preise und Löhne; auf die Realgrößen hat sie keinen Einfluß. Geld ist langfristig neutral. Wenn nun langfristige nominale Kontrakte ausgehandelt werden, die eine Nominallohnrigidität begründen, kann eine im voraus angekündigte, vollständig antizipierte Geldpolitik durchaus reale, wohlfahrtssteigernde Wirkungen haben; allerdings nur in der kurzen Frist.

2 Einperiodische Kontrakte

Arbeitsverträge werden jede Periode geschlossen. Eine Periode hat eine Dauer von einem Jahr. Eine Grundannahme ist, den Nominallohn inderart zu wählen, so dass der Reallohn stabil über die Zeit betrachtet bleibt. Betrachte dazu folgende Gleichung:

$$_{t-1}W_t = \gamma +_{t-1} P_t. \tag{4}$$

Dabei gibt $_{t-1}P_t = E_{t-1}P_t$ den Erwartungswert für das Preisniveau in t an, der am Ende von $t-1$ gebildet wird.[1]

Betrachte nun eine aggregierte Angebotsfunktion, die negativ mit dem Reallohn korreliert ist.

$$Y_t^s = \alpha - (W_t - P_t) + u_t. \tag{5}$$

Dabei kennzeichnet α den natürlichen Output, der sich ergibt, wenn $P_t = W_t$ und keine Schocks auftreten. Setzen wir $\gamma = \alpha = 0$ und (4) in (5) ein, so ergibt sich folgende Lucas-Angebotsfunktion:

$$Y_t^s = P_t - E_{t-1}P_t + u_t. \tag{6}$$

Die Annahme $\alpha = 0$ bedarf einiger Erläuterung. Wenn nun $\alpha = 0$ angenommen wird bedeutet das, dass nach Gleichung (5) negative Outputniveaus möglich sind. Wenn wir aber Gleichung (5) als mark-up-Gleichung interpretieren, wobei der Zuschlag vom Outputniveau abhängt, so können wir das Problem negativer Outputniveaus lösen. Steigt das tatsächliche Preisniveau stärker als das erwartete, so kommt es zu Abweichungen gegenüber dem natürlichen Outputniveau. Die Lucas-Angebotsfunktion, Gleichung (6), gibt nun gerade diese Beziehung wieder.

[1] $E_{t-1}X_t =_{t-1} X_t$

Mit der Quantitätsgleichung als nachfrageseitige Betrachtung wird nun das Modell geschlossen:

$$Y_t = M_t - P_t - \nu_t. \tag{7}$$

Dabei gibt ν_t ein Störterm an, der z.B. technologische Schocks angibt, die in der Ökonomie auftreten. Beide Störterme, sowohl in der Lucas-Angebotsfunktion als auch in der Quantitätsgleichung, folgen einem autoregressiven Prozeß erster Ordnung, einem AR(1)-Prozeß.

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \varepsilon_t, \ \ |\rho_1| < 1 \tag{8}$$

$$\nu_t = \rho_2 \nu_{t-1} + \eta_t, \ \ |\rho_2| < 1 \tag{9}$$

Dabei sind η_t, ε_t white noise verteilt, d.h.

$$E(\varepsilon_t) = 0 \ \ \forall t$$

$$E(\eta_t) = 0 \ \ \forall t$$
$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \ \ \forall t$$
$$Var(\eta_t) = \sigma_\eta^2 \ \ \forall t$$
$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$$

Bevor wir mit der Analyse beginnen, fassen wir kurz die relevanten Modellgleichungen zusammen:

1. Die Lohnkontrakte
$$E_{t-1}(W_t) = E_{t-1}(P_t)$$

2. Der Output
$$Y_t^s = [P_t - E_{t-1}(P_t)] + u_t$$

3. Die Nachfrage
$$Y_t^d = M_t - P_t - \nu_t$$

Wir nehmen rationale Erwartungen an. Setze nun (6)=(7)[2]:

$$Y_t^s = Y_t^d$$

[2]Dabei berücksichtigen wir, dass $E_{t-1}({}_{t-1}P_t) =_{t-1} P_t$

$$
\begin{aligned}
P_t -_{t-1} P_t + u_t &= M_t - P_t - \nu_t && (10)\\
\Leftrightarrow 2P_t &= M_t +_{t-1} P_t - (u_t + \nu_t) && (11)\\
2E_{t-1}({}_{t-1}P_t) &=_{t-1} M_t +_{t-1} P_t -_{t-1} (u_t + \nu_t) && (12)\\
2_{t-1}P_t &=_{t-1} M_t +_{t-1} P_t -_{t-1} (u_t + \nu_t) && (13)\\
\Leftrightarrow_{t-1} P_t &=_{t-1} M_t -_{t-1} (u_t + \nu_t) && (14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t-1}P_t &=_{t-1} M_t -_{t-1} (u_t + \nu_t) && (15)\\
\Leftrightarrow_{t-1} (u_t + \nu_t) &=_{t-1} M_t -_{t-1} P_t && (16)\\
\Leftrightarrow \frac{{}_{t-1}(u_t + \nu_t)}{2} &= \frac{{}_{t-1}M_t}{2} - \frac{{}_{t-1}P_t}{2} && (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2P_t &= M_t +_{t-1} P_t - (u_t + \nu_t) && (18)\\
\Leftrightarrow P_t &= \frac{M_t}{2} + \frac{{}_{t-1}P_t}{2} - \frac{u_t + \nu_t}{2} && (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_t -_{t-1} P_t &= \underbrace{\frac{M_t}{2} - \frac{{}_{t-1}P_t}{2}} - \frac{u_t + \nu_t}{2} && (20)\\
&= \frac{{}_{t-1}(u_t + \nu_t)}{2} - \frac{u_t + \nu_t}{2} && (21)
\end{aligned}
$$

Die Zentralbank setzt ihre Geldmengenpolitik in Erwartung von Schocks. Betrachte dazu die Geldmengenregel:

$$
M_t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \nu_{t-i} \qquad (22)
$$

Die Zentralbank will Schocks, u_{t-i}, ν_{t-i}, kompensieren und wählt Reaktionskoeffizienten a_i, b_i. Die Schocks aus der vorangegangenen Periode u_{t-i}, ν_{t-i} können beobachtet werden, so dass die privaten Wirtschaftssubjekte das Geldangebot für die jeweils nächste Periode berechnen können. Es gilt daher:

$$
E_{t-1}(M_t) = M_t.
$$

Es liegen keine Erwartungsirrtümer vor, da die Schocks aus vergangenen Perioden bekannt sind.

Exkurs Beginn

$$
\begin{aligned}
{}_{t-1}u_t &= E_{t-1}u_t = \rho_1 u_{t-1} \\
{}_{t-1}\nu_t &= E_{t-1}\nu_t = \rho_2 u_{t-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t-1}u_t - u_t &= \rho_1 u_{t-1} - \rho_1 u_{t-1} - \varepsilon_t \\
&= -\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t-1}\nu_t - u_t &= \rho_2 \nu_{t-1} - \rho_2 \nu_{t-1} - \eta_t \\
&= -\eta_t
\end{aligned}
$$

Exkurs Ende

$$
\begin{aligned}
P_t -_{t-1} P_t &= \frac{{}_{t-1}(u_t + \nu_t)}{2} - \frac{u_t + \nu_t}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_t + \eta_t\Big)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Preisniveau und dem erwarteten ist für die Marktteilnehmer nicht vorhersehbar. Aufgrund des Konzeptes der rationalen Erwartungen sind die erwarteten Werte für ε und η gleich null. Die Geldpolitik hat somit keinen Einfluß, auch nicht kurzfristig, auf das reale Outputniveau einzuwirken.

$$
\begin{aligned}
Y_t^s &= -\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_t + \eta_t\Big) + u_t \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_t + \eta_t\Big) + \rho_1 u_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \frac{1}{2}\Big(\varepsilon_t - \eta_t\Big) + \rho_1 u_{t-1}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Anschaulich ist klar, dass die Reaktionskoeffizienten a_i und b_i der Zentralbank keinen Einfluß auf das Outputniveau haben. Die Geldpolitik hat im Fall der einperiodischen Kontrakte keinerlei reale Stabilisierungswirkung. Wenn die Nominallöhne jedes Jahr festgelegt werden, so können wir festhalten: Geldpolitik ist neutral.

3 Zweiperiodische Kontrakte

Fisher (1977) hat mit seinem Kontrakt-Modell demonstriert, dass keynesianische Aussagen selbst bei rationalen Erwartungen gültig bleiben. Er erklärt die nominale Imperfektion mithilfe der trägen Anpassung der Geldlöhne, die entsteht, weil Kontrakte Laufzeiten von mehreren Perioden haben. Um nun die Preisrigidität zu begründen betrachten wir Lohnkontrakte, die zwei Perioden andauern. Die Annahme, dass die Lohnkontrakte länger als eine Periode andauern ist durchaus plausibel, da Lohnverhandlungen zwischen Arbeitnehmern und Arbeitgebern Kosten in Form von Verhandlungen verursachen. Es werden Verträge über zwei Perioden geschlossen. Die Unternehmen schließen die Verträge am Ende der Periode t für $t+1$ und $t+2$ ab. Die Hälfte aller Kontrakte wird in jeder Periode erneuert. Auch hier soll aus Stabilisierungsgründen vornehmlich der Reallohn konstant gehalten werden, so dass gilt:

$$_{t-i}W_t =_{t-i} P_t, \quad i = 1, 2.$$

Die Idee des Modells ist sehr einfach: Nominallohnkontrakte, die über einen längeren Zeitraum geschlossen werden, begründen eine Nominallohnrigidität. Angebots-und Nachfrageschocks, die nun im Zeitraum des Lohnkontraktes auftreten können verursachen eine Änderung der tatsächlichen Inflationsrate von der erwarteten Inflationsrate, die bei den Lohnverhandlungen zugrunde lag. Die vertraglich fixierten Nominallöhne entsprechen nun nicht mehr den markträumenden Gleichgewichtspreisen; Ungleichgewichte sind die Folge.
Die langfristige Struktur der Nominallohnverträge erlaubt es nun der Zentralbank stabilisierend in den Wirtschaftsprozeß einzugreifen. Die Geldpolitik verfügt somit über einen Handlungsvorsprung gegenüber den privaten Wirtschaftssubjekten.
Im folgenden soll anhand eines Modells mit zweiperiodischen nichtindexierten Nominallohnkontrakten gezeigt werden, dass eine im voraus angekündigte Geldpolitik durchaus stabilisierend auf das Outputniveau Y_t wirken kann.

Betrachten wir nun die Modellanalyse: die Unternehmen werden in zwei Hälften aufgeteilt. Eine Hälfte produziert in der Periode t mit Arbeitskräften, deren Lohnkontrakte aus $t-1$ zugrundeliegen und die andere Hälfte mit Arbeitskräften, deren Lohnkontrakte aus $t-2$ zugrundeliegen. Es gibt einen Güterpreis P auf dem aggregierten Gütermarkt. Die aggregierte Güterangebotsfunktion ist gegeben durch folgende Gleichungen:

$$Y_t^s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(P_t -_{t-i} W_t) + u_t \tag{25}$$

$$Y_t^s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(P_t -_{t-i} P_t) + u_t. \tag{26}$$

Betrachten wir die relevanten Modellgleichungen für die zweiperiodischen Kontrakte:

1. Die Lohnkontrakte
$$E_{t-1}(W_t) = E_{t-1}(P_t)$$
$$E_{t-2}(W_t) = E_{t-2}(P_t)$$

2. Der Output
$$\begin{aligned} Y_t^s &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(P_t -_{t-i} P_t) + u_t \\ &= \frac{1}{2}(P_t -_{t-1} P_t + P_t -_{t-2} P_t) + u_t \\ &= P_t - \frac{1}{2}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t) + u_t \end{aligned}$$

3. Die Nachfrage
$$Y_t^d = M_t - P_t - \nu_t$$

Die Outputgleichung (2.) ist hierbei analog zur Lucas-Angebotsfunktion der einperiodischen Kontrakte zu interpretieren: der reale Output ist eine Differenz zwischen dem Preisniveau in t und dem erwarteten Durchschnitt der Preisniveaus in $t-1$ und $t-2$.

Um das gleichgewichtige Preisniveau zu bestimmen setzen wir aggregierte Angebots-und Nachfragefunktion gleich.

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(P_t -_{t-i} P_t) + u_t = M_t - P_t - \nu_t \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[P_t -_{t-1} P_t + P_t -_{t-2} P_t\right] + u_t = M_t - P_t - \nu_t \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow P_t - \frac{1}{2}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t) = M_t - P_t - (u_t + \nu_t) \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow 2P_t - \frac{1}{2}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t) = M_t - (u_t + \nu_t) \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow 2P_t = M_t + \frac{1}{2}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t) - (u_t + \nu_t) \tag{31}$$

Mit dem "Gesetz der iterierten Erwartungen" $E_{t-2}({}_{t-1}P_t) =_{t-2} P_t$ erhalten wir:

$$2E_{t-2}({}_{t-1}P_t) = E_{t-2}M_t + \frac{1}{2}\left[E_{t-2}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t)\right] - E_{t-2}(u_t + \nu_t) \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow 2_{t-2}P_t =_{t-2} M_t +_{t-2} P_t -_{t-2} (u_t + \nu_t) \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow_{t-2} P_t =_{t-2} M_t -_{t-2} (u_t + \nu_t) \tag{34}$$

Anwendung des Konzeptes der rationalen Erwartungen mit $E_{t-1}({}_{t-1}P_t) =_{t-1} P_t$ ergibt:

$$2E_{t-1}({}_{t-1}P_t) = E_{t-1}M_t + \frac{1}{2}\left[E_{t-1}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t)\right] - E_{t-1}(u_t + \nu_t) \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow 2_{t-1}P_t =_{t-1} M_t + \frac{1}{2}({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t) -_{t-1} (u_t + \nu_t) \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}{}_{t-1}P_t =_{t-1} M_t + \frac{1}{2}{}_{t-2}P_t -_{t-1} (u_t + \nu_t) \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}{}_{t-1}P_t =_{t-1} M_t + \frac{1}{2}\Big({}_{t-2}M_t -_{t-2} (u_t + \nu_t)\Big) -_{t-1} (u_t + \nu_t) \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow_{t-1} P_t = \frac{2}{3}{}_{t-1}M_t + \frac{1}{3}{}_{t-2}M_t - \frac{1}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) - \frac{2}{3}{}_{t-1}(u_t + \nu_t) \tag{39}$$

$$2P_t = M_t + \frac{1}{2}\underbrace{\left({}_{t-1}P_t +_{t-2} P_t\right)}_{\text{(34) und (39) einsetzen}} -(u_t + \nu_t) \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow 2P_t = M_t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}{}_{t-1}M_t + \frac{1}{3}{}_{t-2}M_t - \frac{1}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) - \frac{2}{3}{}_{t-1}(u_t + \nu_t) \\ +_{t-2}M_t -_{t-2} (u_t + \nu_t) \end{pmatrix} - (u_t + \nu_t) \tag{41}$$

Es gilt: ${}_{t-1}M_t = M_t$

$$2P_t = \frac{4}{3}M_t + \frac{2}{3}{}_{t-2}M_t - (u_t + \nu_t) - \frac{2}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) - \frac{1}{3}{}_{t-1}(u_t + \nu_t) \tag{42}$$

$$\Leftrightarrow P_t = \frac{2}{3}M_t + \frac{1}{3}{}_{t-2}M_t - \frac{1}{2}(u_t + \nu_t) - \frac{1}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) - \frac{1}{6}{}_{t-1}(u_t + \nu_t) \tag{43}$$

Um das Outputniveau zu berechnen setzen wir (43) in die Quantitätsgleichung ein:

$$Y_t = \frac{M_t -_{t-2} M_t}{3} + \frac{1}{6}{}_{t-1}(u_t + \nu_t) + \frac{1}{2}(u_t - \nu_t) + \frac{1}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) \tag{44}$$

Um das Outputniveau in Abhängigkeit der Schocks u_t und ν_t darzustellen betrachten wir nocheinmal die Geldmengenregel der Zentralbank:

$$
\begin{aligned}
{}_{t-2}M_t &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \nu_{t-i} && (45)\\
&= a_1 E_{t-2} u_{t-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i u_{t-i} + b_1 E_{t-2} \nu_{t-1} + \sum_{i=2}^{\infty} b_i \nu_{t-i} && (46)\\
&= a_1 \rho_1 u_{t-2} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i u_{t-i} + b_1 \rho_2 \nu_{t-2} + \sum_{i=2}^{\infty} b_i \nu_{t-i} && (47)
\end{aligned}
$$

Bilde nun die Differenz $M_t -_{t-2} M_t$ und setzte diese in (44) ein:

$$
\begin{aligned}
M_t -_{t-2} M_t &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \nu_{t-i} - a_1 \rho_1 u_{t-2} - \sum_{i=2}^{\infty} a_i u_{t-i} - b_1 \rho_2 \nu_{t-2} - \sum_{i=2}^{\infty} b_i \nu_{t-i} && (48)\\
&= a_1(u_{t-1} - \rho_1 u_{t-2}) + b_1(\nu_{t-1} - \rho_2 \nu_{t-2}) && (49)\\
&= a_1 \varepsilon_{t-1} + b_1 \eta_{t-1} && (50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \frac{1}{3}(a_1\varepsilon_{t-1} + b_1\eta_{t-1}) + \frac{1}{6}{}_{t-1}(u_t + \nu_t) + \frac{1}{2}(u_t - \nu_t) + \frac{1}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) \\
\Leftrightarrow Y_t &= \frac{1}{3}(a_1\varepsilon_{t-1} + b_1\eta_{t-1}) + \frac{1}{6}(\rho_1 u_{t-1} + \rho_2\nu_{t-1}) + \frac{1}{2}(\rho_1 u_{t-1} + \varepsilon_t - \rho_2\nu_{t-1} - \eta_t) \\
&\quad + \frac{1}{3}{}_{t-2}(u_t + \nu_t) \\
\Leftrightarrow Y_t &= \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t) + \frac{1}{2}(\rho_1 u_{t-1} - \rho_2\nu_{t-1}) + \frac{1}{3}(a_1\varepsilon_{t-1} + b_1\eta_{t-1}) + \frac{1}{6}(\rho_1 u_{t-1} + \rho_2\nu_{t-1}) \\
&\quad + \frac{1}{3}(\rho_1^2 u_{t-2} + \rho_2^2\nu_{t-2}) \\
\Leftrightarrow Y_t &= \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t) + \frac{1}{3}(a_1\varepsilon_{t-1} + b_1\eta_{t-1}) + \frac{1}{3}(\rho_1^2 u_{t-2} + \rho_2^2\nu_{t-2}) + \frac{2}{3}\rho_1 u_{t-1} - \frac{1}{3}\rho_2\nu_{t-1} \\
\Leftrightarrow Y_t &= \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t) + \frac{1}{3}(a_1\varepsilon_{t-1} + b_1\eta_{t-1}) + \frac{1}{3}(\rho_1^2 u_{t-2} + \rho_2^2\nu_{t-2}) + \frac{2}{3}(\rho_1^2 u_{t-2} + \rho_1\varepsilon_{t-1}) \\
&\quad - \frac{1}{3}(\rho_2^2\nu_{t-2} + \rho_2\eta_{t-1})
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir folgenden Ausdruck für das Outputniveau:

$$
Y_t = \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t) + \frac{1}{3}\left[\varepsilon_{t-1}(a_1 + 2\rho_1) + \eta_{t-1}(b_1 - \rho_2)\right] + \rho_1^2 u_{t-2}. \qquad (51)
$$

Anschaulich ist klar, dass bei vollkommener Information über die Reaktionskoeffizienten a_1 und b_1 die Zentralbank auf Angebots-bzw. Nachfrageschocks reagieren kann. Das Outputniveau setzt sich in der hier berechneten formalen Darstellung aus drei Summanden zusammen. Der erste Summand gibt gegenwärtige, zum Zeitpunkt t, Angebots-und Nachfrageschocks an. Die Zentralbank hat auf diese Schocks in der aktuellen Periode t keine, auf das Outputniveau stabilisierenden Einflußmöglichkeiten. Sie kann ausschließlich Schocks aus der vergangenen Periode $t-1$ über die Wahl der Reaktionskoeffizienten a_1 und b_1 ausgleichen (zweiter Summand). Lohnkontrakte, die über zwei Perioden abgeschlossen werden, bieten der Zentralbank im zweiten und letzten Jahr dieses Kontraktes genügend Spielraum um diverse Schocks auszugleichen. Die Geldpolitik reagiert auf Angebots-und Nachfrageschocks und wirkt auf das Preisniveau und damit auf den Reallohn, der das Outputniveau beeinflußt. Dabei kann sie stabilisierend auf Nachfrageschocks ν_t einwirken und die Outputschwankungen, die sich durch solche Schocks ergeben minimieren. Auf Angebotsschocks u_t kann die Geldpolitik nur durch eine akkomodierende Geldpolitik reagieren, da hier ein Trade Off zwischen der Stabilisierung des Preisniveauziels und des Outputziels besteht. Von der Modellierung einer adäquaten Zielfunktion, die beide Ziele: Preisniveau-und Outputniveauziel, wiedergibt, hängt es ab, wie die Geldbehörde ihre Geldpolitik ausrichtet. Der dritte Summand gibt eine um zwei Perioden verzögerte reale Störung an. Die Zentralbank ist nicht in der Lage, diese reale Störung auszugleichen, da bei den Lohnverhandlungen in Periode $t-2$ die reale Störung mitberücksichtigt wurde.

Um die Outputschwankungen zu quantifizieren, berechnen wir die Varianz des Outputniveaus in Abhängigkeit der Reaktionskoeffizienten.

$$\begin{aligned}
Var(Y_t) &= E\left[(Y_t - E(Y_t))^2\right] \\
&= E\left[(Y_t^2 - 2Y_t E(Y_t) + E^2(Y_t)\right] \\
&= E(Y_t^2) - 2E^2(Y_t) + E^2(Y_t) \\
&= E(Y_t^2) - E^2(Y_t)
\end{aligned}$$

Berechne zunächst den Erwartungswert von Y_t:

$$\begin{aligned}
E(Y_t) &= E\Big(\frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t) + \frac{1}{3}\Big(\varepsilon_{t-1}(a_1 + 2\rho_1) + \eta_{t-1}(b_1 - \rho_2)\Big) + \rho_1^2 u_{t-2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(E(\varepsilon_t) - E(\eta_t)\Big) + \frac{1}{3}\Big(E(\varepsilon_{t-1})(a_1 + 2\rho_1) + E(\eta_{t-1})(b_1 - \rho_2)\Big) + \rho_1^2 E(u_{t-2}) \\
&= \rho_1^2 E(u_{t-2})
\end{aligned}$$

Berechne:

$$\begin{aligned}
E(u_{t-2}) &= E(\rho_1 u_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) \\
&= E\Big(\rho_1(\rho_1 u_{t-4} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_{t-2}\Big) \\
&= E\Big(\rho_1^2 u_{t-4} + \rho_1 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2}\Big) \\
&= ... \\
&= E\Big(\rho_1^j u_{t-j-2} + \rho_1^{j-1} \varepsilon_{t-j-1} + ... + \varepsilon_{t-2}\Big) \\
&= \underbrace{\lim_{j\to\infty} \rho_1^j E(u_{t-j-2})}_{=0} + E\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \rho_1^j \varepsilon_{t-j-2}\Big) \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \rho_1^j \underbrace{E(\varepsilon_{t-j-2})}_{=0}\Big) = 0
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von Y_t ist null, $E(Y_t) = 0$.

Berechne nun:

$$\begin{aligned}
Y_t^2 &= \frac{1}{4}(\varepsilon_t - \eta_t)^2 + \frac{1}{9}\Big(\varepsilon_{t-1}(a_1 + 2\rho_1) + \eta_{t-1}(b_1 - \rho_2)\Big)^2 + \rho_1^4 u_{t-2}^2 \\
&= \frac{1}{4}(\varepsilon_t^2 - 2\varepsilon_t\eta_t + \eta_t^2) + \frac{1}{9}\Big(\varepsilon_{t-1}^2(a_1^2 + 4a_1\rho_1 + 4\rho_1^2) + 2\varepsilon_{t-1}\eta_{t-1}(a_1 + 2\rho_1)(b_1 - \rho_2) \\
&\quad + \eta_{t-1}^2(b_1 - \rho_2)^2\Big) + \rho_1^4 u_{t-2}^2
\end{aligned}$$

Bilde nun den Erwartungswert von Y_t^2:

$$\begin{aligned}
E(Y_t^2) &= \frac{1}{4}\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\sigma_\eta^2 + \frac{1}{9}\Big(a_1^2 + 4a_1\rho_1 + 4\rho_1^2\Big)\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{9}\Big(b_1^2 - 2b_1\rho_2 + \rho_2^2\Big)\sigma_\eta^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho_1^2}\cdot\rho_1^4 \\
&= \sigma_\varepsilon^2\Big(\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\rho_1^2 + \frac{\rho_1^4}{1-\rho_1^2} + \frac{a_1(4\rho_1 + a_1)}{9}\Big) + \sigma_\eta^2\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\rho_2^2 - \frac{b_1}{9}(2\rho_2 - b_1)\Big)
\end{aligned}$$

Die Varianz von Y_t ist damit eine Funktion der beiden Reaktionskoeffizienten a_1 und b_1, $\sigma_Y^2 = \sigma_Y^2(a_1, b_1)$. Ferner ist ersichtlich, dass die Zentralbank, über die Wahl der Reaktionskoeffizienten, in der Lage ist die Varianz des Outputniveaus zu minimieren.

Um die Outputschwankungen bei gegebenen Angebots-und Nachfrageschocks zu minimieren, bilden wir die ersten partiellen Ableitungen der Varianzfunktion nach a_1 und b_1.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_Y^2}{\partial a_1} = \sigma_\varepsilon^2\cdot\frac{4\rho_1 + 2a_1}{9} = 0 \\
\Leftrightarrow a_1 = -2\rho_1
\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_Y^2}{\partial b_1} = -\frac{2\rho_2}{9} + 2b_1\frac{1}{9} = 0 \\
\Leftrightarrow b_1 = \rho_2
\end{gathered} \tag{53}$$

Die minimale Varianz des Outputs ergibt somit:

$$\sigma_Y^2 = \Big(\frac{1}{4} + \frac{\rho_1^4}{1-\rho_1^2}\Big)\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\sigma_\eta^2 \tag{54}$$

Betrachten wir nocheinmal die Gleichung des Outputniveaus:

$$Y_t = \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t) + \frac{1}{3}\left[\varepsilon_{t-1}(a_1 + 2\rho_1) + \eta_{t-1}(b_1 - \rho_2)\right] + \rho_1^2 u_{t-2}.$$

Dabei ist der Term $\varepsilon_{t-1}(a_1 + 2\rho_1) + \eta_{t-1}(b_1 - \rho_2)$ während der Periode $t-2$ den Marktteilnehmern vollkommen unbekannt. Die Zentralbank hat aber die Möglichkeit durch die Wahl der Reaktionskoeffizienten a_1 und b_1 die, in der Periode $t-2$, auftretenden Angebots- und Nachfrageschocks auszugleichen (Gleichungen (52),(53)).

Die Quintessenz des Fisher'schen Modells ist folgende: ist die Geldpolitik vorausschauend, so kann sie im Fall langfristiger Nominallohnkontrakte auf das reale Outputniveau stabilisierend eingreifen, trotz der Annahme rationaler Erwartungen sowie einer den Marktteilnehmern bekannten Geldmengenregel der Zentralbank. Dabei ist anzumerken, dass die Effizienz der Geldpolitik nicht auf Täuschungsmanöver oder eine Überraschungsinflation beruht.

4 Die Calvo-Kontrakte

Calvo (1983) hat mit seinem “Staggered constracts“ -Modell gezeigt, dass durch die Annahme einer stochastischen Fixierung der Güterpreise Geldpolitik in der kurzen Frist stabilisierend auf den Output Einfluß nehmen kann.

4.1 Ein Modell der gestaffelten Preise

Die Angebotsseite der betrachteten Ökonomie ist gegeben durch ein Kontinuum identischer Unternehmen. Jedes Unternehmen setzt seinen Preis in heimischer Währung und kann nur dann diesen Preis verändern, wenn es ein Zufallssignal erhält. Die Wahrscheinlichkeit ein Signal t Perioden in der Zukunft von heute zu erhalten und seinen Preis anzupassen ist unabhängig vom Erhalt des letzten Signals und gegeben durch die Dichte der Exponentialverteilung:

$$X \sim Ex(\delta)$$

$$f(t) = \begin{cases} \delta e^{-\delta t} & \text{für } \delta \geq 0 \\ 0 & \text{für } \delta < 0 \end{cases} .$$

Für jeden Zeitpunkt t hängt die noch verbleibende Dauer des Preises nicht von der bereits bis t verstichenen Dauer ab. Die mittelere “Lebensdauer“ des Güterpreises beträgt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty t f(t) dt = \int_0^\infty \delta t e^{-\delta t} dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \big[- t e^{-\delta t} \big]_0^k - \int_0^\infty -e^{-\delta t} dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \big[- t e^{-\delta t} \big]_0^k + \lim_{k\to\infty} \big[- \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \big]_0^k \\ &= \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun ein Unternehmen, dass seinen Preis unter perfekter Voraussicht zum Zeitpunkt t ändern kann. Dabei wird sich das Unternehmen bei seiner Preisentscheidung an den Preisentscheidungen der anderen Unternhemen, die am Markt agieren, orientieren sowie an der gesamtwirtschaftlichen Nachfrage. Eine formale Darstellung, die dieses berücksichtigt ist gegeben durch:

$$V_t = \delta \int_t^\infty [P_s + \beta E_s] e^{-\delta(s-t)} ds, \quad \beta > 0. \tag{55}$$

Hierbei gibt V_t den Logarithmus der Preisnotierung zum Zeitpunkt t an, P_S ist das Preisniveau zum Zeitpunkt s.[3]

$$V_t = -\delta \int_{\infty}^{t} [P_s + \beta E_s] e^{-\delta s} \cdot e^{\delta t} ds \tag{56}$$

$$= -\delta e^{\delta t} \int_{\infty}^{t} [P_s + \beta E_s] e^{-\delta s} ds \tag{57}$$

Die Preissetzung erfolgt nach folgendem Muster: eine Gruppe δ von Unternehmen erhält ein Preissignal und ändert daraufhin ihren Preis.
Die Differentiation von (57) nach der Zeit ergibt:[4]

$$\dot{V}_t = \big[-\delta e^{\delta t}\big]' \int_{\infty}^{t} [P_s + \beta E_s] e^{-\delta s} ds + (-\delta e^{\delta t}) \cdot \Big(\int_{\infty}^{t} [P_s + \beta E_s] e^{-\delta s} ds\Big)' \tag{58}$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}_t = -\delta^2 e^{\delta t} \cdot \int_{\infty}^{t} [P_s + \beta E_s] e^{-\delta s} ds - \delta e^{\delta t} \cdot (P_t + \beta E_t) e^{-\delta t} \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}_t = \delta \Big[\underbrace{(\delta \int_{t}^{\infty} [P_s + \beta E_s] e^{-\delta(s-t)} ds)}_{V_t} - P_t - \beta E_t \Big] \tag{60}$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}_t = \delta [V_t - P_t - \beta E_t] \tag{61}$$

$$P_t = \delta \int_{-\infty}^{t} V_s e^{-\delta(t-s)} ds \tag{62}$$

$$= \delta e^{-\delta t} \cdot \int_{-\infty}^{t} V_s e^{\delta s} ds. \tag{63}$$

Die Preisgleichung gibt uns den exakten Wert für P_t an, unter der Annahme das dass Preisänderungssignal stochastisch unabhängig unter den Unternehmen verteilt ist.

---

[3]

$$\int_a^b f dx := -\int_b^a f dx \quad \text{für jedes } f \in R[a,b]$$

Eine Folgerung aus dem ersten Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung. Vgl. Heuser (1998).

[4] Ein Punkt über einer Variablen bedeutet die Ableitung der Variable nach der Zeit t.

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_t &= [\delta e^{-\delta t}]' \cdot \int_{-\infty}^{t} V_s e^{\delta s} ds + \delta e^{-\delta t} \cdot \Big[\int_{-\infty}^{t} V_s e^{\delta s} ds\Big]' && (64)\\
&= -\delta^2 e^{-\delta t} \cdot \int_{-\infty}^{t} V_s e^{\delta s} ds + \delta e^{-\delta t} V_t e^{\delta t} && (65)\\
&= \delta\big[V_t - \delta e^{-\delta t} \int_{-\infty}^{t} V_s e^{\delta s} ds\big] && (66)\\
&= \delta\big[V_t - \underbrace{\delta \int_{-\infty}^{t} V_s e^{-\delta(t-s)} ds}_{P_t}\,\big] && (67)\\
&= \delta[V_t - P_t] && (68)
\end{aligned}
$$

Die Inflationsrate ist durch die Veränderungsrate des Preisniveaus gegeben:

$$\Pi_t = \dot{P}_t.$$

Die Veränderungsrate der Inflation ist durch die zweite Ableitung des Preisniveaus nach der Zeit gegeben:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_t &= \ddot{P}_t = \delta[\dot{V}_t - \dot{P}_t] && (69)\\
&= \delta\big[\delta[V_t - P_t - \beta E_t] - \delta[V_t - P_t]\big] && (70)\\
&= \delta[-\delta\beta E_t] && (71)\\
&= -\underbrace{\delta^2\beta}_{b} E_t && (72)\\
&= -bE_t, \qquad b = \delta^2 \cdot \beta > 0. && (73)
\end{aligned}
$$

Die Änderungsrate der Inflation, d.h. die zweite Ableitung des Preisniveaus nach der Zeit t ist eine fallende Funktion der Outputlücke.

4.2 Ein allgemeines gesamtwirtschaftliches Gleichgewichtsmodell

Um die Nachfrageseite der Ökonomie zu modellieren greift Calvo (1983) auf eine Summe diskontierter Nutzenfunktionen vom Sydrauski-Typ zurück.[5] Der Nutzen hängt vom Konsum sowie von der realen Geldmenge ab.

Der repräsentative Haushalt maximiert den intertemporalen Nutzen:

$$\int_0^\infty [u(c_t) + v(m_t)]e^{-\rho t} dt. \tag{74}$$

Dabei steht $u(c_t)$ für den Konsumnutzen und $v(m_t)$ für den Nutzen aus der Haltung von Geld in Periode t. Außerdem nehmen wir an, dass beide Funktionen strikt konkav, streng monoton und diffenrenzierbar seien:

$$\begin{gathered} u'(c) > 0, \quad u''(c) < 0 \;\; \forall c \\ v'(m) > 0, \quad v''(m) < 0 \;\; \forall m. \\ \lim_{c \to 0} u'(c) \to \infty \\ \lim_{m \to 0} v'(m) \to \infty \end{gathered}$$

Mit

$$\frac{1}{e^\rho} \in (0,1)$$

ist der Diskontfaktor gegeben.

Die Budgetrestriktion ist gegeben durch:

$$\dot{m}_t = y_t - c_t - \pi_t m_t + \text{lump-sum subsidies at t} \tag{75}$$

Die Änderungsrate des Geldes ist gleich der Ersparnis der Haushalte. Die Budgetrestriktion setzt sich aus dem Einkommen y_t, den Subventionen, dem Konsum c_t sowie den Kosten aus der Haltung von Geld $\pi_t \cdot m_t$ zusammen.

Das repräsentative Individuum wird nun seine Nutzenfunktion (74) durch die Wahl optimaler Pfade für c und m unter der Budgetrestriktion (75) maximieren. Da wir ein zeitstetiges Modell mit unendlichem Zeithorizont betrachten, wenden wir die Methoden der Optimierung über die Zeit an, um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein Optimum anzugeben.[6]

[5] vgl. Brock (1974)
[6] vgl. Arrow und Kurz (1970) sowie Ljungqvist und Sargent (2000)

Wir betrachten ein Optimierungsproblem der Haushalte, die zu jedem Zeitpunkt ihren optimalen Konsumplan erstellen. Der Konsum c ist für den Haushalt eine Entscheidungs- bzw. Kontrollvariable. Annahmegemäß bestimmt die Zustandsvariable m und die Kontrollvariable c zu jedem Zeitpunkt den Zustand des Systems für den nächsten Zeitpunkt. Die gesamtwirtschaftliche Güternachfrage ist determiniert durch die reale Geldmenge (Zustandsvariable). Im Fall des zeitstetigen Modells betrachten wir die Veränderung der Zustandsvariablen über die Zeit als eine Funktion der Zustandsvariablen und der Konrollvariablen.

Der repräsentative Haushalt wird nun eine Wahl von Konsumnutzenfunktionen $u(c_t)$ erstellen, wobei die Werte der Kontrollvariable eine Funktion der Zeit t ist. Wenn nun eine Geldpolitik sowie der Anfangswert m_0 gegeben ist, so sind die Werte der Zustandsvariablen m_t $(0 < t < \infty)$ durch die Lösung der Differentialgleichung (75)

$$\dot{m}_t = y_t - c_t - \pi_t m_t + \text{lump-sum subsidies at t}$$

bestimmt.
An dieser Stelle ist es sinnvoll das Optimierungsproblem zusammenzufassen. In stetiger Zeit löst ein repräsentatives Haushalt das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
&\max \Upsilon(0) = \int_0^\infty [u(c_t) + v(m_t)]e^{-\rho t} dt \\
&\text{s.t. } \dot{m}(t) = y_t - c_t - \pi_t m_t + \text{lump-sum subsidies at t} \\
&m(0) = m_0 \\
&\lim_{t \to \infty} \lambda(t) m(t) = 0.
\end{aligned}$$

Die Variable c, die in jedem Zeitpunkt frei gewählt werden kann, stellt die Kontrollvariable dar. m hingegen, ist in jedem Zeitpunkt bestimmt und bildet eine Zustandsvariable. Der Zusammenhang zwischen Kontroll-und Zustandsvariable wird durch die Bewegungsgleichung (75) hergestellt. Im Zeitpunkt Null existiert eine Anfangsausstattung mit Geld m_0. Die letzte Nebenbedingung stellt die Transversalitätsbedingung dar.
Der Lagrangemultiplikator λ_t gibt den auf den Zeitpunkt 0 abdiskontierten marginalen Wert einer zusätzlichen Geldeinheit an.
Definiere:

$$p_t = e^{\rho t} \cdot \lambda_t.$$

Die Transversalitätsbedingung ist alternativ gegeben durch:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t)m(t) = 0.$$

Dieses Problem der dynamischen Optimierung in kontinuierlicher Zeit können wir lösen, indem wir die (undiskontierte) Hamilton-Funktion erklären als:[7]

$$H = H(c, m, t).$$

$$\begin{aligned} H &= u(c_t) + v(m_t) + \lambda_t \cdot \dot{m}_t \\ &= u(c_t) + v(m_t) + \lambda_t \cdot [y_t - c_t - \pi_t m_t + \text{lump-sum subsidies at t}] \end{aligned}$$

Die diskontierte Hamiltonfunktion ist gegeben durch:

$$e^{-\rho t} H = \{u(c_t) + v(m_t) + \lambda_t \cdot [y_t - c_t - \pi_t m_t + \text{lump-sum subsidies at t}]\} e^{-\rho t}.$$

Die notwendigen Bedingungen sind gegeben durch (76) und (80).

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = u'(c_t) - \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \lambda_t = u'(c_t) \tag{76}$$

Der Lagrange-Multiplikator ist gleich dem Grenznutzen des Konsums.

Die Ableitung der Hamiltonfunktion nach m_t ergibt:[8]

$$\frac{d[\lambda_t \cdot e^{-\rho t}]}{dt} = -\frac{\partial[e^{-\rho t} H]}{\partial m_t} \tag{77}$$

$$-\rho \cdot e^{-\rho t} \lambda_t + \dot{\lambda}_t e^{-\rho t} = -e^{\rho t}[v'(m_t) - \lambda_t \pi_t] \tag{78}$$

$$\Leftrightarrow -\rho \lambda_t + \dot{\lambda}_t = -v'(m_t) \lambda_t \pi_t \tag{79}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\lambda}_t = -v'(m_t) + \lambda_t(\pi_t + \rho) \tag{80}$$

[7] Die Hamilton-Funktion ist das Analogon zur Lagrange-Funktion in stetiger Zeit.

[8] Die Division der Gleichung (78) durch $e^{-\rho t}$ ergibt:

$$-\rho = \frac{-\rho e^{-\rho t}}{e^{-\rho t}}.$$

Dabei ist ρ als kurzfristiger Realzins zu interpretieren und entspricht im wesentlichen dem System der Diskontierungsfaktoren.

$$e^{-\rho t} = e^{-\int_0^t} \rho(u) du$$

$\dot{\lambda}_t$ gibt die instantane Änderung des Wertes der marginalen Geldeinheit an.

Die Bedingung erster Ordnung können wir umschreiben als:

$$v'(m_t) + \dot{\lambda}_t = \lambda_t \cdot (\pi_t + \rho) = \lambda_t \cdot i_t.$$

Der marginale Ertrag einer Geldeinheit zuzüglich der Wertänderung dieser Geldeinheit entspricht den Opportunitätskosten der Geldhaltung.

Die Punkte $x = (c, m)$ bilden den sogenannten Phasenraum des Systems. Die Lösungen der Hamilton-Gleichungen (76) und (80) sind Trajektorien $x(t) = \tau_t(x)$ mit $\tau_0(x) = x$. τ_t beschreibt die Dynamik als einen Fluß der Phasenraumpunkte.

Die Gleichung (76) wird nun nach der Zeit t differenziert und in die Gleichung (80) eingesetzt.

$$\dot{\lambda}_t = \dot{c} \cdot u''(c_t)$$

$$\dot{c} \cdot u''(c_t) = -v'(m_t) + \underbrace{u'(c_t)}_{\lambda_t}(\pi_t + \rho)$$

$$\Leftrightarrow \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}\left[\frac{v'(m)}{u'(c)} - \rho - \pi\right]$$

Im stationären Gleichgewicht gilt $\dot{c} = 0$, so dass die Grenzrate der Substitution zwischen Konsum und Geld

$$\frac{v'(m)}{u'(c)} = \rho + \pi = i$$

als impliziter, nominaler Zinssatz zu interpretieren ist.[9]

Nun werden die Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Märkte näher spezifiziert. Im Gleichgewicht gilt für das Outputniveau:

$$\text{Markträumung: } y = c + g.$$

Dabei gibt g die Staatsausgaben wieder.
Im Gleichgewicht gilt für den Geldmarkt folgende Beziehung:

$$\dot{m} = (\mu - \pi) \cdot m. \tag{81}$$

[9]Zeitindizes werden in den nachfolgenden Betrachtungen zur Vereinfachung weggelassen.

Dabei gibt μ die Wachstumsrate der Geldmenge an.

Um die Wachtumsrate der Inflationsrate anzugeben, definieren wir noch die Outputlücke E:

$$E = y - \bar{y}.$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= -bE && (82)\\ &= -b(c + \bar{g} - \bar{y}) && (83)\\ &= b(\bar{y} - c - \bar{g}) && (84) \end{aligned}$$

Fassen wir nocheinmal die Gleichungen der Veränderungsraten der Größen (c, m, π) zusammen:

1.
$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}\left[\frac{v'(m)}{u'(c)} - \rho - \pi\right] \quad (85)$$

2.
$$\dot{m} = (\mu - \pi) \cdot m. \quad (86)$$

3.
$$\dot{\Pi} = b(\bar{y} - c - \bar{g}) \quad (87)$$

Im folgenden werden zwei Annahmen getroffen, um den Anpassungspfad der drei Variablen zum langfristig stabilen Gleichgewicht sicherzustellen.

1) Falls $\rho + \bar{\mu} = i > 0$ so existiert ein einziges stationäres Gleichgewicht, mit:[10]
$$\pi = \bar{\mu}, \;\; c + \bar{g} = \bar{y}, \;\; \rho + \bar{\mu} = \frac{v'(m)}{u'(\bar{y} - g)}$$

2) Die Wahl von m als geldpolitische Instrumentvariable führt dazu, dass die anderen beiden Größen c, π jederzeit auf ihre gleichgewichtigen Werte “springen“ können.

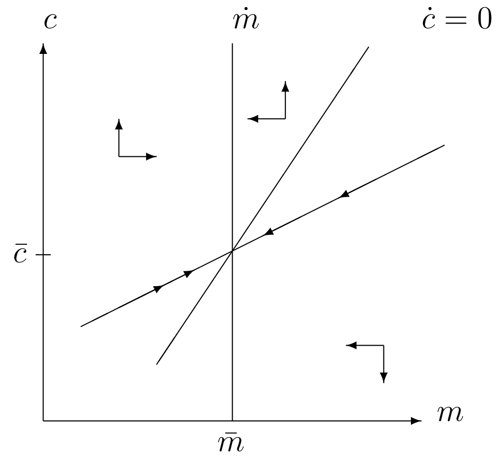
$$\pi = \pi^*(\bar{m}), \qquad c = c^*(m)$$

[10]Die Annahme besagt lediglich, dass der Nominalzins stets positiv ist. Der reale Ertrag aus der Geldhaltung darf nicht größer sein als der reale Ertrag aus der Wertpapierhaltung. Andernfalls könnten die Marktteilnehmer unendliche Gewinne realisieren, indem sie zusätzlich Geld hielten und diese Geldhaltung über die Ausgabe von Wertpapieren finanzierten.

Die Funktion verlaufen monoton steigend, d.h. für den Fall $m > \bar{m}$ gilt:

$$\pi^*(m) > \bar{\mu} = \pi^*(\bar{m})$$

Abbildung 4.1: Sattelpfad der gleichgewichtigen Werte (c, m)



Für das Anpassungsverhalten von c gilt wegen (85)

$$\frac{d\dot{c}}{dm} = -\frac{v''}{u''} < 0 \tag{88}$$

und damit offenbar falls

$$m \text{ oberhalb } \quad \dot{c} = 0 \Rightarrow \dot{c} < 0 \Rightarrow c \downarrow \tag{89}$$
$$m \text{ unterhalb } \quad \dot{c} = 0 \Rightarrow \dot{c} > 0 \Rightarrow c \uparrow \tag{90}$$

Für das Anpassungsverhalten von m gilt wegen (86)

$$\frac{d\dot{m}}{dc} = 0. \tag{91}$$

Das System ist entlang dem Sattelpfad, dargestellt durch den Pfeilpfad, stabil, d.h. es existiert genau eine Trajektorie im Phasenraum, die zum (einzigen) Gleichgewicht führt.

Geldpolitik hat einen kurzfristig stabilisierenden Einfluß auf den Output. Betrachten wir folgenden Fall einer Überschußsituation auf dem Gütermarkt, d.h. die Kapazitäten sind unausgelastet, gegeben durch $m < \bar{m}$. Die Änderungsrate des Konsums $\dot{c}$ ist positiv für den Fall $m < \bar{m}$, d.h. in dieser Ausgangssituation ist der Realzins höher als im langfristig stabilen Gleichgewicht mit $y = \bar{y}$. Eine expansive Geldpolitik kann nun stabilisierend auf den Output y wirken und somit das System ins langfristige Gleichgewicht bringen. Die optimale first-best-Lösung erhalten wir, wenn wir $i = \rho + \mu = 0$ setzen und somit $\mu = -\rho$ erhalten. Daraus folgt auch der optimale Nutzen aus der Haltung von Geld, $v'(m) = 0$.

4.3 Stabilitätsprüfung

Das System (85)-(87) ist stabil, wenn die Matrix A eine negative Wurzel und zwei Wurzeln mit positivem Realteil aufweist.[11]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial m} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial \Pi} \\ \frac{\partial \dot{m}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{m}}{\partial m} & \frac{\partial \dot{m}}{\partial \Pi} \\ \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial c} & \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial m} & \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial \Pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + \bar{\mu} & -\frac{v''}{u''} & \frac{u'}{u''} \\ 0 & 0 & -\bar{m} \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung für A ist

$$\Omega(\theta) \equiv \mid A - \theta I \mid = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 - \theta^3 \tag{92}$$

mit

$$a_0 = -b\bar{m}\frac{v''}{u''} \tag{93}$$

$$a_1 = -b\frac{u'}{u''} \tag{94}$$

$$a_2 = \rho + \bar{\mu} \tag{95}$$

[11] Vgl. Gantmacher (1956)

Da wir stets annehmen, dass $\rho + \bar{\mu} > 0$ ist somit $a_2 > 0$. Aufgrund der strikten Konkavität der Nutzenfunktionen $u(\cdot), v(\cdot)$ ist somit $v''(\cdot) < 0$ und $u''(\cdot) < 0$, daraus folgt $a_0 < 0$.

Ferner gilt:

$$\lim_{\theta \to +\infty} \Omega(\theta) = -\infty \tag{96}$$

$$\lim_{\theta \to -\infty} \Omega(\theta) = +\infty. \tag{97}$$

Es existiert somit eine negative Wurzel θ_1 der Matrix A. Durch Fakturierung von θ_1 aus $\Omega(\theta)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Omega(\theta) &= (\theta - \theta_1)\big[a_1 + \theta_1 a_2 - \theta_1^2 + (a_2 - \theta_1)\theta - \theta^2\big] && (98)\\
&= a_1\theta + \theta\theta_1 a_2 - \theta\theta_1^2 + (a_2 - \theta_1)\theta^2 - \theta^3 - a_1\theta_1 - \theta_1^2 a_2 + \theta_1^3 && (99)\\
&- (a_2 - \theta_1)\theta\theta_1 + \theta^2\theta_1 && (100)\\
&= a_1(\theta - \theta_1) + a_2(\theta^2 - \theta_1^2) - (\theta^3 - \theta_1^3). && (101)
\end{aligned}$$

Die Bedingung für die Ermittlung der charakteristischen Wurzeln ist die charakterisitsche Gleichung $\Omega(\theta) = 0$ zu setzen.

$$\Omega(\theta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta - \theta_1 = 0 \;\vee\; a_1 + \theta_1 a_2 - \theta_1^2 + (a_2 - \theta_1)\theta - \theta^2 = 0$$

Der erste Fall ist trivial ($\theta = \theta_1$), so dass wir uns der Lösung des zweiten Falls, der quadratischen Gleichung widmen.

$$\theta^2 - (a_2 - \theta_1)\theta - a_1 + \theta_1 a_2 + \theta_1^2 = 0$$

$$\theta = \frac{a_2 - \theta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_2 - \theta_1)^2}{4} - \theta_1^2 + \theta_1 a_2 + a_1}$$

$$= \frac{a_2 - \theta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_2 - \theta_1)^2}{4} + \frac{4(a_1 + \theta_1 a_2 - \theta_1^2)}{4}}$$

$$= \frac{-(a_2 - \theta_1) \pm \sqrt{(a_2 - \theta_1)^2 + 4(a_1 + \theta_1 a_2 - \theta_1^2)}}{-2}$$

Nun genügt noch der Beweis, dass die anderen beiden charakteristischen Wurzeln θ_2, θ_3 positive Realteile haben, das ist gewährleistet, wenn

$$a_1 + \theta_1 a_2 - \theta_1^2 < 0.$$

Beweis:

Annahmegemäß gilt: $a_0 < 0$ sowie $a_2 > 0$ und $\theta_1 < 0$ mit $\Omega(\theta_1) = 0$.

Nehmen wir nun an, dass $a_1 + \theta_1 a_2 - \theta_1^2 = 0$, also obige Behauptung gilt nicht.

$$\Omega(\theta_1) = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_1^2 - \theta_1^3$$

Setze nun $a_1 = \theta_1 a_2 - \theta_1^2$, daraus folgt

$$\Omega(\theta_1) = a_0 + \theta_1\big(\theta_1^2 - \theta_1 a_2\big) + a_2\theta_1^2 - \theta_1^3 \tag{102}$$

$$\Omega(\theta_1) = a_0 < 0 \quad \text{Widerspruch zur Annahme: } \Omega(\theta_1) = 0. \tag{103}$$

q.e.d.

5 Die neu-keynesianische Phillipskurve

Die beiden vorgestellten Modelle, Fisher (1977) und Calvo (1983), zeigten, dass nominale Rigiditäten eine Erklärungsgrundlage für die kurzfristige Nichtneutralität der Geldpolitik bieten.

Nun geht es um einen Vergleich beider Modellansätze bezüglich der Inflationsdynamik. Dabei werden wir uns im Fall der festen Fixierung der Nominallöhne, die bei Fisher (1977), als auch bei Taylor auf maximal zwei Perioden fixiert ist, vorrangig auf das Modell von Taylor (1979, 1980) konzentrieren.[12]

1) Das Modell von Taylor (1979, 1980)

   Ähnlich wie bei Fisher (1977) werden bei Taylor (1979, 1980) die Nominallöhne $W(i)$ auf zwei Perioden fixiert. Dabei wird die Gesamtmenge aller Unternehmen in zwei Hälften aufgeteilt, wobei jede Periode eine Preissetzung der jeweiligen Hälfte aller Unternehmen stattfindet. Nehmen wir an $i \in [0, 0.5)$, so wird der Nominallohn $W(i)$ in den Perioden $t, t+2, t+4, ...$ gesetzt. Entsprechend wird für $i \in [0.5, 1]$ verfahren, so dass $W(i)$ in den Perioden $t+1, t+3, t+5, ...$ gesetzt wird.

   Die Nominalen Arbeitskosten des repräsentativen Unternehmens betragen:

$$w_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1}).$$

   Dabei ist x_t bzw. x_{t-1} der Nominallohn der von den Arbeitnehmern eine Periode im Voraus gebildet wird.
   Die Preisbildung erfolgt analog zur Herleitung der neuklassischen Phillipskurve, d.h. die Unternehmen setzen einen konstanten Aufschlag auf die Grenzkosten:

$$p_t = w_t(1 + \mu).$$

   Der erwartete Reallohn der Arbeitsanbieter ist gegeben durch folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{w_t^e}{p_t} &= \frac{1}{2}[(x_t - p_t) + (x_t - E_t p_{t+1})]\\ &= x_t - \frac{1}{2}(p_t + E_t p_{t+1}).\end{aligned}$$

[12] Für weitergehende Darstellungen siehe Walsh (2003).

Des Weiteren nehmen wir an, dass der Reallohn positiv vom Output abhängt:

$$\frac{w_t^e}{p_t} = \frac{1}{\beta} y_t$$
$$x_t - \frac{1}{2}(p_t + E_t p_{t+1}) = \frac{1}{\beta} y_t$$
$$\Leftrightarrow x_t = \frac{1}{2}(p_t + E_t p_{t+1}) + \frac{1}{\beta} y_t$$

Aus der Preisgleichung folgt:

$$p_t = w_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1}) \tag{104}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{2}(p_t + E_t p_{t+1}) + \frac{1}{\beta} y_t\Big) + \Big(\frac{1}{2}(p_{t-1} + E_{t-1} p_t) + \frac{1}{\beta} y_{t-1}\Big)\Big] \tag{105}$$
$$p_t = \frac{1}{2} p_{t-1} + \frac{1}{2} E_t p_{t+1} + \frac{1}{\beta}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\eta_t \tag{106}$$

Dabei ist $\eta_t = E_{t-1} p_t - p_t$ ein Erwartungsfehler. Das Preisniveau (106) hängt folglich von seiner eigenen Vergangenheit und erwarteten Zukunft ab.

Die erwartete Inflationsrate ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$E_t \pi_{t+1} = E_t(p_{t+1} - p_t) = E_t p_{t+1} - p_t$$
$$\Rightarrow E_t p_{t+1} = E_t \pi_{t+1} + p_t$$

$$p_t = \frac{1}{2} p_{t-1} + \frac{1}{2} E_t p_{t+1} + \frac{1}{\beta}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\eta_t$$
$$p_t - p_{t-1} = -\frac{1}{2} p_{t-1} + [\frac{1}{2} E_t p_{t+1}] + \frac{1}{\beta}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\eta_t$$
$$\pi_t = -\frac{1}{2} p_{t-1} + [\frac{1}{2} E_t \pi_{t+1} + \frac{1}{2} p_t] + \frac{1}{\beta}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\eta_t$$
$$\pi_t = \frac{1}{2}\pi_t + \frac{1}{2} E_t \pi_{t+1} + \frac{1}{\beta}(y_t + y_{t-1}) + \frac{1}{2}\eta_t$$

Die Neukeynesianische Phillipskurve ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\pi_t = E_t\pi_{t+1} + \frac{2}{\beta}(y_t + y_{t-1}) + \eta_t. \tag{107}$$

Anschaulich ist klar, dass vergangene Inflationraten $E_{t-1}\pi_t$, wie im Fall der neu-klassischen Phillipskurve, keine Rolle spielen. Die für morgen erwartete Inflation beeinflußt die heutige Inflation. Der Inflationsbildungsprozeß ist also vorausschauend.

2) Das Modell von Calvo (1983)

Die Herleitung der neu-keynesianischen Phillipskurve unter Berücksichtigung des Modells von Calvo (1983) orientiert sich an der Darstellung von Rotemberg (1987). Die gestaffelte Preissetzung wird durch ein Zufallssignal ausgelöst. Mit der Wahrscheinlichkeit δ wählt das Unternehmen seinen gewinnmaximalen Preis, und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \delta$ muß es seinen bisherigen Preis unverändert lassen. Das repräsentative Unternehmen wählt seinen optimalen Preis so, dass die quadratische Verlustfunktion minimiert wird.

$$\min \Psi_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} (p_{t+j} - p^*_{t+j})^2 \tag{108}$$

Die quadratische Verlustfunktion hängt von der Differenz des tatsächlich gewählten Preisniveaus p sowie vom optimalen Preisniveau p^* ab, dass bei völliger Abwesenheit von Restriktionen sowie Friktionen vorliegt. Im Fall völlig flexibler Preise wird das Unternhemen in jeder Periode $p = p^*$ wählen. Nun ist in der Periode $t + j$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit der Preis derselbe wie in der Periode t, und zwar mit $(1 - \delta)^j$. Damit wird das Entscheidungsverhalten des Unternehmens deutlich, es wählt seinen Preis p_t - unter Berücksichtigung der Überlegung, dass in zukünftigen Perioden der Preis fix bleibt.

$$\min \Psi_t = (p_t - p^*_t)^2 + (1 - \delta)E_t(p_t - p^*_{t+1})^2 + ... \tag{109}$$

$$= E_t \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \delta)^j (p_t - p^*_{t+j})^2 \tag{110}$$

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial p_t} = 2(p_t - p_t^*) + 2(1-\delta)E_t(p_t - p_{t+1}^*) + ... = 0 \tag{111}$$
$$\Leftrightarrow p_t + (1-\delta)p_t + ... = p_t^* + (1-\delta)E_t p_{t+1}^* + ... \tag{112}$$
$$\Leftrightarrow p_t \sum_{j=0}^{\infty}(1-\delta)^j = \sum_{j=0}^{\infty}(1-\delta)^j E_t p_{t+j}^* \tag{113}$$
$$\Leftrightarrow p_t = \delta \sum_{j=0}^{\infty}(1-\delta)^j E_t p_{t+j}^* \tag{114}$$

Der optimal gewählte Preis in der Periode t berücksichtigt die optimalen Zielpreise p_{t+j}^* der gesamten Zukunft mit ein, da für das Unternehmen nicht sicher ist, ob es seinen Preis in zukünftigen Perioden wird anpassen können.

$$p_t = \delta \sum_{j=0}^{\infty}(1-\delta)^j E_t p_{t+j}^* \tag{115}$$
$$= \delta[E_t p_t^* + (1-\delta)E_t p_{t+1}^* + (1-\delta)^2 E_t p_{t+2}^* + ...] \tag{116}$$

$$E_t p_{t+1} = \delta[E_t p_{t+1}^* + (1-\delta)E_t p_{t+2}^* + (1-\delta)^2 E_t p_{t+3}^* + ...] \tag{117}$$

$$p_t - (1-\delta)E_t p_{t+1} = \delta[E_t p_t^*] \tag{118}$$
$$\Leftrightarrow p_t = (1-\delta)E_t p_{t+1} + \delta E_t p_t^* \tag{119}$$

Der Zielpreis p^* hängt vom aggregierten Preisniveau sowie vom Output ab.

$$p_t^* = p_t^{agr.} + \frac{1}{\beta} y_t$$

Das aggregierte Preisniveau ist nun eine Gewichtung aus dem gewählten Preis bei Anpassung p_t und dem Preis bei Nichtanpassung $p_{t-1}^{agr.}$.

$$p_t^{agr.} = (1-\delta)p_{t-1}^{agr.} + \delta p_t \tag{120}$$

Um die Entwicklung des Preisniveaus zu formulieren datieren wir (120) eine Periode vor und wenden dann den Erwartungswertoperator auf diese Gleichung an.

$$
\begin{aligned}
E_t p_{t+1}^{agr.} &= E_t \delta p_{t+1} + (1-\delta) p_t^{agr.} && (121)\\
\Leftrightarrow E_t \delta p_{t+1} &= E_t p_{t+1}^{agr.} - (1-\delta) p_t^{agr.} && (122)\\
\Leftrightarrow E_t \delta p_{t+1} &= E_t p_{t+1}^{agr.} + p_t^{agr.} - p_t^{agr.} - (1-\delta) p_t^{agr.} && (123)\\
\Leftrightarrow E_t \delta p_{t+1} &= E_t \pi_{t+1} + \delta p_t^{agr.} && (124)\\
\Leftrightarrow E_t p_{t+1} &= \frac{1}{\delta} E_t \pi_{t+1} + p_t^{agr.} && (125)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_t &= (1-\delta)[E_t p_{t+1}] + \delta[p_t^*] && (126)\\
&= (1-\delta)\left[\frac{1}{\delta} E_t \pi_{t+1} + p_t^{agr.}\right] + \delta\left[p_t^{agr.} + \frac{1}{\beta} y_t\right] && (127)\\
&= \frac{1-\delta}{\delta} E_t \pi_{t+1} + p_t^{agr.} + \delta \frac{1}{\beta} y_t && (128)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_t^{agr.} &= \delta p_t + (1-\delta) p_{t-1}^{agr.} && (129)\\
&= \delta \underbrace{\left[\frac{1-\delta}{\delta} E_t \pi_{t+1} + p_t^{agr.} + \delta \frac{1}{\beta} y_t\right]}_{p_t} + (1-\delta) p_{t-1}^{agr.} && (130)\\
&= (1-\delta) E_t \pi_{t+1} + \delta p_t^{agr.} + \delta^2 \frac{1}{\beta} y_t + (1-\delta) p_{t-1}^{agr.} && (131)\\
& && (132)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_t^{agr.} - p_{t-1}^{agr.} &= (1-\delta) E_t \pi_{t+1} + \delta p_t^{agr.} + \delta^2 \frac{1}{\beta} y_t - \delta p_{t-1}^{agr.} && (133)\\
\Leftrightarrow \pi_t &= (1-\delta) E_t \pi_{t+1} + \delta \pi_t + \delta^2 \frac{1}{\beta} y_t && (134)\\
\Leftrightarrow (1-\delta)\pi_t &= (1-\delta) E_t \pi_{t+1} + \delta^2 \frac{1}{\beta} y_t && (135)\\
\Leftrightarrow \pi_t &= E_t \pi_{t+1} + \underbrace{\frac{\delta^2}{1-\delta}}_{\theta'} \frac{1}{\beta} y_t && (136)\\
\Leftrightarrow \pi_t &= E_t \pi_{t+1} + \theta' \frac{1}{\beta} y_t && (137)
\end{aligned}
$$

Die Inflation in der Periode t hängt von der für morgen erwarteten Inflationsrate sowie vom Output in t ab. Der Einfluß des Output auf die Inflationsrate in der Periode t, ausgedrückt durch den Koeffizienten θ' hängt von der Geschwindigkeit δ ab, mit der die Güterpreise im Zeitablauf angepasst werden. Ein Anstieg von δ, d.h. die Wahrscheinlichkeit nimmt zu, dass ein Unternehmen seinen gewinnmaximalen Preis wählen kann, geht mit einem Anstieg von θ' einher. Ein häufiges Justieren bzw. Anpassen von Preisen geht mit Schwankungen des Output einher, d.h. gegenwärtige Nachfragezustände beeinflußen die aktuelle Inflation. Im Taylor-Modell hingegen ist die Fixierung der Preise auf maximal zwei Perioden vorgegeben, so dass die Preisrigidität weniger ausgeprägt ist als beim Calvo-Modell. Ein Beispiel soll diesen Zusammenhang verdeutlichen: betrachten wir eine erwartete "Lebensdauer" der Preise im Calvo-Modell von zwei Perioden, ausgedrückt durch den exogen gegebenen Wert $\delta = \frac{1}{2}$. Sowohl im Taylor-Modell als auch im Calvo-Modell beträgt nun die durchschnittliche Häufigkeit der Preisanpassungen einhalb, bzw. die durchschnittliche "Lebensdauer" der Preise zwei Perioden. Allerdings sind nunmal in der Realität Preise um mehr als zwei Perioden fixiert, das berücksichtigt Calvo (1983), indem die Unternehmen bei ihrer Preiswahl alle zukünftigen optimalen Zielpreise miteinkalkulieren, so dass bei einem endlichen Zeithorizont von 4 Perioden die Wahrscheinlichkeit $(1-\delta)^4 = 0.0625$ beträgt, dass der Preis in der Periode t zukünftig nicht mehr angepasst werden kann. Die erwartete "Lebensdauer" der Preise wird im Calvo-Modell durch eine Exponentialverteilung wiedergegeben. Dabei zeigt sich, dass die Randverteilung Preise beinhaltet, die eine erwartete "Lebensdauer" von mehreren Perioden umfasst. Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\delta x}, \quad x \geq 0.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Preise länger als 4 Perioden fixiert sind beträgt somit:

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - F(4) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 4}) \\ &= e^{-2} \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

6 Zusammenfassung

Betrachtet wurden zwei Ansätze der neu-keynesianischen Literatur, die auf jeweils unterschiedlicher Art und Weise die Nichtneutralität der Geldpolitik und damit die Stabilisierungsfunktion auf den Output in der kurzen Frist zeigen.
Begonnen wurde mit dem Modell von Fisher (1977), dass über die Fixierung der Nominallöhne eine Rigidität begründet und somit der Geldpolitik einen Handlungsspielraum eröffnet. Eine wichtige Annahme hierbei ist, die Zugrundelegung rationaler Erwartungen der Marktteilnehmer. Zum besseren Verständnis wurden hierbei zwei Kontraktarten vorgestellt, einmal der Fall einperiodischer Nominallohnkontrakte, d.h. Nominallöhne werden jede Periode neu ausgehandelt, zum anderen der Fall zweiperiodischer Kontrakte, d.h. Nominallöhne haben eine Laufzeit von zwei Perioden, wobei jede Periode eine Hälfte der Nominallöhne neu ausgehandelt werden. Die Analyse zeigt dass Geldpolitik im ersten Fall keine Auswikrungen auf den Output hat. Geldpolitik ist hier kurzfristig neutral, da die Marktteilnehmer die Politik der Geldbehörde antipieren und jede Periode in ihre Analyse einbeziehen.
Im zweiten Fall kann die Geldbehörde im Fall von Nachfrageschocks stabilisierend auf den Output einwirken, auf Angebotsschocks hingegen kann sie nur durch eine akkomodierende Geldpolitik reagieren.

Das zweite Modell beschäftigt sich mit der stochstischen Fixierung der Güterpreise von Calvo (1983). Die Unternehmen wählen einen Preis und setzen diesen fest, bis sie ein Zufallssignal, dass aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, einer Exponentialverteilung, generiert wird, erhalten und ihren Preis ändern. Die gestaffelte Preissetzung folgt dem beschriebenen Muster: ein Anteil der Unternehmen δ erhält ein Signal und wird daraufhin seinen gewinnmaximalen Preis wählen, während ein Teil der Unternehmen $1-\delta$ ihren Preis unverändert lässt.

Die Angebotsseite der Ökonomie wird über eine modifizierte Phillipskurve modelliert. Die Änderungsrate der Inflation ist eine negative Funktion der Outputlücke. Es wird also eine inverse Phillipskurve "höherer Ordnung" unterstellt. Die Nachfrageseite wird über eine Nutzenmaximierung eines repräsentativen Haushalts modelliert. Dabei wird eine Nutzenfunktion vom Sidrauski-Brock Typ gewählt deren Nutzen positiv vom Konsum sowie der realen Geldmenge abhängt. Der repräsentative Haushalt wählt seinen Plan durch Wahl von c und m unter perfekter Voraussicht.

Eine anschließende Stabilitätsprüfung ergab, dass Geldpolitik im Fall unausgelasteter Kapazitäten stabilisierend auf den Output einwirken kann.

Beide Modelle sind geeignet, um die kurzfristige Nichtneutralität der Geldpolitik zu belegen. Einmal - im Modell von Fisher (1977)- wird primär auf den Fall exogener Schocks, vor allem Nachfrageschocks abgestellt. Im Fall der Calvo-Kontrakte wird primär von einer rezessiven Situtation unausgelasteter Kapazitäten ausgegangen. Ein zweiter wesentlicher Unterschied ist die Fixierung der Preise, bei Fisher (1977) eine feste Fixierung der Nominallöhne, und zwar maximal zwei Perioden lang. Die durchschnittliche Geschwindigkeit der Nominallohnänderungen in der Ökonomie beträgt 1/2, die Hälfte aller Nominallohnkontrakte wird jede Periode neu ausgehandelt, dabei beschränkt sich die Kontraktdauer auf zwei Perioden. Bei Calvo (1983) wird von Nominallohnkontrakten abgesehen und eine stochastische Fixierung der Güterpreise gewählt. Die "Lebensdauer" der Güterpreise hängt von der exogen gegebenen Wahrscheinlichkeit δ ab. Für $\delta = \frac{1}{2}$ beträgt die erwartete "Lebensdauer" der Güterpreise zwei Perioden. Die Güterpreise werden, wie im Fall der Nominallöhne bei Fisher (1977) alle zwei Perioden neu gewählt. Die Persistenz der Preisrigiditäten ist bei Fisher (1977) weniger ausgeprägt als bei Calvo (1983). Häufig sind Preise, Nominallohn-und auch Güterpreise, für mehr als zwei Perioden fixiert. Wenn nun $\delta^4 = 0.0625$, dann sind alle Preise länger als vier Perioden fixiert.

7 Literaturverzeichnis

Arrow, K.J. and M. Kurz, (1970), Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy (The Johns Hopkins PressBaltimore, MD).

Brock, W.A. (1974), Money and growth. The case of long-run perfect foresight, in: International Economic Review 20, Feb., S. 83-103.

Calvo, Guillermo, (1983), Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework, in: Journal of Monetary Economics, S. 383-398.

Fisher, Stanley (1977), Long-Term Contracts, Expectations, and the Optimal Money Supply Rule, in: Journal of Political Economy, S. 191-206.

Friedman, Milton (1968), The Role of Monetary Policy, in: Amercan Economic Review 58, no. 1, S. 1-17.

Heuser H. (1998), Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 12. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart.

Ljungqvist, L. and Sargent, T. (2000), Recursive Macroeconomic Theory, Kap.2, MIT Press.

Lucas, Robert E. (1972), Expectations and the Neutrality of Money, in: Journal of Economy Theory, S. 103-124.

Phelps, Edmund S. (1967), Phillips Curves, Expectations of Inflation, and Optimal Unemployment Over Time, in: Economia 34, no. 135, S. 254-281.

Rotemberg, J.J. (1987),“New Keynesian Microfoundations“, in S. Fisher (ed.), NBER Macroeconomics Annual 1987, Cambridge, MA: MIT Press, S. 69-104.

Sargent, Thomas J., and Wallace, Neil (1975), Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule, in: Journal of Political Economy 83, no.2, S. 241-254.

Taylor, J.B. (1979), Staggered Wage Setting in a Macro Model, in: American Economic Review, 69 (2), S. 108-113.

Taylor, J.B. (1980), Aggregate Dynamics and Staggered Contracts, in: Journal of Political Economy 80, S. 1-17.

Walsh, Carl E. (2003), Monetary Theory and Policy, 2nd ed., chapter 5.

Diskussionsbeiträge
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft
der Freien Universität Berlin

2005

2005/1 CORNEO, Giacomo
Media Capture in a Democracy : the Role of Wealth Concentration
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/2 KOULOVATIANOS, Christos / Carsten SCHRÖDER / Ulrich SCHMIDT
Welfare-Dependent Household Economies of Scale: Further Evidence
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/3 CORNEO, Giacomo
Steuern die Steuern Unternehmensentscheidungen? 20 S.
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/4 RIESE, Hajo
Otmar Issing und die chinesische Frage – Zu seinem Ausflug in die Wechselkurspolitik
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/5 BERGER, Helge / Volker NITSCH
Zooming Out: The Trade Effect of the EURO in Historical Perspective
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/6 JOCHIMSEN, Beate / Robert NUSCHELER
The Political Economy of the German Länder Deficits
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/7 BITZER, Jürgen / Monika KEREKES
Does Foreign Direct Investment Transfer Technology Across Borders?
A Reexamination. 19 S.
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/8 KONRAD, Kai A.
Silent Interests and All-Pay Auctions
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/9 NITSCH, Volker
Currency Union Entries and Trade
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/10 HUGHES HALLETT, Andrew
Are Independent Central Banks as Tough as They Pretend? 11 S.
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/11 KOULOVATIANOS, Christos / Carsten SCHRÖDER / Ulrich SCHMIDT
Non-market time and household well-being
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/12 NITSCH, Manfred / Jens GIERSDORF
Biotreibstoffe in Brasilien. 22 S.
Volkswirtschaftliche Reihe

2005/13 Lateinamerika als Passion. Ökonomie zwischen den Kulturen.
Ein Interview mit MANFRED NITSCH. 14 S.
Volkswirtschaftliche Reihe