# Untere Schranken für den Vergleich geometrischer Formen mit Hilfe von Referenzpunkten

Oliver Klein

5. Dezember 2003

## 1 Motivation

Gegeben seien zwei Polygone $A, B \subset \mathbb{R}^2$. Eine sehr natürliche Frage ist dann, wie ähnlich sich diese zwei Objekte sind.

Dabei muss man sich zuerst mit der Wahl eines Maßes auseinander setzen, bezüglich dessen die Ähnlichkeit bestimmt werden soll. In der Vergangenheit hat sich unter anderem die Hausdorff-Distanz $D_H(A, B)$ als ein gutes Maß erwiesen, mit welcher wir uns vorerst beschäftigen. Diese Distanz ist definiert als das kleinste $\varepsilon$, so dass zu jedem Punkt $a \in A$ ein Punkt $b \in B$ mit $d(a, b) \leq \varepsilon$ existiert und anders herum. Dabei sei mit $d(\cdot, \cdot)$ die euklidische Distanz gemeint.

Im Allgemeinen ist es aber nicht sinnvoll, die Hausdorff-Distanz der Polygone direkt zu berechnen, sondern stattdessen die optimale Distanz unter gewissen Transformationen zu betrachten, um die Unabhängigkeit der Distanz der Polygone von ihrer Position im Raum zu gewährleisten. Die Transformationen können dann z.B. die Menge aller Translationen, d.h. Verschiebungen, oder die Menge der sogenannten starren Bewegungen, d.h. Verschiebungen und Drehungen, sein. Unter Umständen werden sogar Verschiebungen, Drehungen und Skalierungen der Objekte zugelassen.

## 2 Stand der Technik

Seien nun $n, m$ die Anzahl der Ecken von $A$ bzw. $B$. In [1] stellen Alt, Behrends und Blömer einen Algorithmus vor, der, falls als Menge der Transformationen lediglich die Menge der Translationen in eine bestimmte Richtung betrachtet wird, die optimale Lösung in $O((nm)\log(nm)\log^*(nm))$ bestimmt. Für beliebige Translationen existiert ein Algorithmus von Agarwal, Sharir und Toledo [3] mit Laufzeit $O((nm)^2\log^3(nm))$. Weiterhin existiert für beliebige starre Bewegungen ein Algorithmus von Chew et al. [4], welcher das Problem in $O((nm)^3\log^2(nm))$ löst.

## 3 Approximation mit Hilfe von Referenzpunkten

Wie oben gesehen, sind einige Algorithmen bekannt, die das Problem exakt lösen. Die angegebenen Laufzeiten zeigen aber, dass die Algorithmen für praktische Anwendungen eher ungeeignet sind.

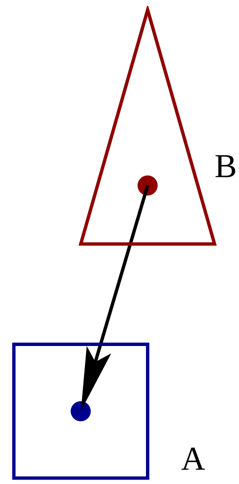
Um die Laufzeit zu senken, liegt es nahe, Approximationsalgorithmen zu betrachten. Ein Verfahren zur Konstruktion eines solchen Algorithmus basiert auf der Benutzung sogenannter Referenzpunkte kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Diese Punkte zeichnen sich dadurch aus, dass sie equivariant unter den betrachteten Transformationen sind und eine Lipschitz-Bedingung erfüllen, genauer:

**Definition 1** *Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Transformationen im $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{C}^d$ die Menge der kompakten Teilmengen. Eine Funktion $r : \mathcal{C}^d \to \mathbb{R}^d$ wird ein Referenzpunkt genannt, falls*

1. $\forall A, B \in \mathcal{C}^d \; \forall T \in \mathcal{T}$: $r(T(A)) = T(r(A))$
2. $\exists c \geq 0 \; \forall A, B \in \mathcal{C}^d : ||r(A) - r(B)|| \leq c \cdot D_H(A, B)$

Die Lipschitz-Konstante $c$ wird hierbei als die Qualität des Referenzpunktes bezeichnet. Beispiele für Referenzpunkte sind der Schwerpunkt des Randes der konvexen Hülle und der Steiner-Punkt. Letzterer besitzt eine Qualität von $\frac{4}{\pi}$. Nach Ergebnissen in [2] ist diese Qualität optimal, d.h. es existiert kein Referenzpunkt mit einer besseren (d.h. niedrigeren) Qualität. Der Beweis hierzu beruht auf funktionalanalytischen Ergebnissen unter Benutzung des Auswahlaxioms und ist aus diesem Grunde nicht konstruktiv.

Falls nun als die Menge der zulässigen Transformationen lediglich die Menge der Translationen betrachtet wird, lässt sich mit Hilfe dieser Punkte ein Approximationsalgorithmus entwickeln. Dieser besteht in der Berechnung der Referenzpunkte $r(A)$ und $r(B)$ und dem anschließenden Verschieben von $B$ um den Vektor $t := r(A) - r(B)$, so dass die beiden Referenzpunkte übereinstimmmen.




Eine obere Schranke für diesen Algorithmus ist durch

$$D_H(A, B + t) \leq (1 + c) D_{H,Opt}(A, B)$$

gegeben, s. [2]. Dabei bezeichnet $c$ wiederum die Qualität des benutzten Referenzpunktes und $D_{H,Opt}(A, B)$ die minimale Hausdorff-Distanz, die unter Translation von $A$ und $B$ erreicht werden kann.

# 4 Problemstellung und Lösungsansatz

Die angegebene obere Schranke in Verbindung mit der optimalen Qualität des Steiner-Punktes von $\frac{4}{\pi}$ zeigt, dass sich zu einer gegebenen Menge von konvexen Polygonen $A_i \subset \mathbb{R}^2, i = 1, ..., n$, Translationsvektoren $t_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, ..., n$, finden lassen, so dass das Ungleichungssystem

$$\forall 1 \leq i < j \leq n : D_H(A_i + t_i, A_j + t_j) \leq (1 + \frac{4}{\pi}) D_{H,Opt}(A_i, A_j)$$

erfüllt ist.

In unserem Problem geht es nun darum, konvexe Polygone $A_i$ und ein möglichst kleines $\varepsilon > 0$ zu bestimmen, so dass das Ungleichungssystem

$$\forall 1 \leq i < j \leq n : D_H(A_i + t_i, A_j + t_j) \leq (1 + \frac{4}{\pi} - \varepsilon) D_{H,Opt}(A_i, A_j)$$

keine Lösung besitzt und es damit auch keinen Referenzpunkt geben kann, der einen Approximationsalgorithmus der Güte $(1 + \frac{4}{\pi} - \varepsilon)$ induziert. Zur Lösung des Ungleichungssystems müssen die optimale Hausdorff-Distanz zwischen je zwei Polygonen und die Translationsvektoren bestimmt werden. Beide Probleme lassen sich mit Hilfe der linearen Programmierung approximativ lösen:

Man setze $h_{ij} := (1 + \frac{4}{\pi} - \varepsilon) D_{H,Opt}(A_i, A_j)$. Zur Erfüllung der sich auf $A_i$ und $A_j$ beziehenden Ungleichung müssen die folgenden zwei Restriktionen erfüllt werden:

1. Alle Punkte von $A_j + t_j$ müssen innerhalb eines äußeren Rahmens $a_1, ..., a_l$ um $A_i + t_i$ liegen, welcher durch die Kanten von $A_i + t_i$ bestimmt wird, s. Abb. 1. ($l$ = Anzahl der Ecken von $A_i$)

2. Durch die Ecken von $A_i + t_i$ werden Kreisbögen $k_1, ..., k_l$ beschrieben, innerhalb derer alle Punkte von $A_j + t_j$ liegen müssen, s. Abb. 1.

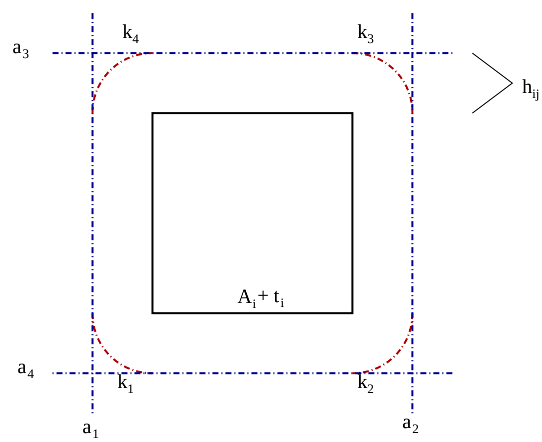



Abbildung 1: Restriktionen gegeben durch $A_i + t_i$

Diese Restriktionen lassen sich nun durch folgende Schritte in lineare Ungleichungen übersetzen:

1. Die Ungleichungen werden durch um $h_{ij}$ nach außen verschobene Halbräume bestimmt, die durch die Kanten von $A_i + t_i$ gegeben werden.

2. Die Kreisbögen lassen sich durch äußere Ungleichungen (Tangenten) an diese approximieren, s. Abb. 2.

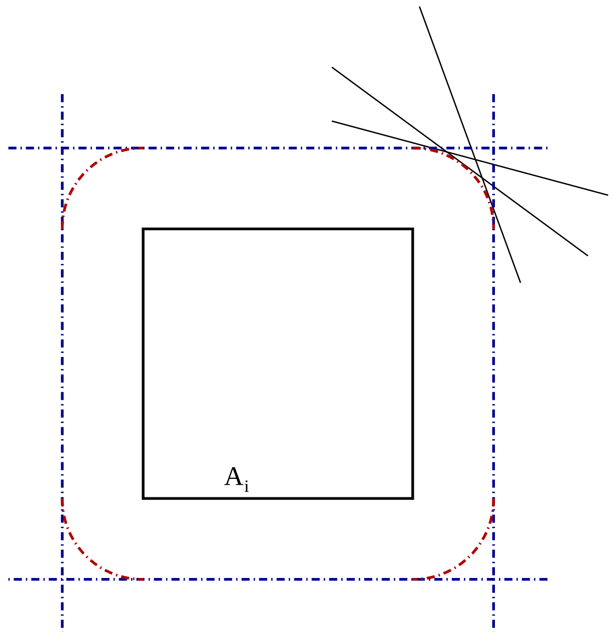



Abbildung 2: Approx. der Kreisbögen

# 5 Offene Probleme

Offen bisher ist die Verallgemeinerung des Verfahrens auf andere Distanzen, wie z.B. die Fläche der symmetrischen Differenz. Ebenfalls offen ist noch die Betrachtung nicht-notwendig konvexer Polygone und allgemeinerer Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. In beiden Fällen lässt sich das oben beschriebene Ungleichungssystem nicht so einfach durch lineare Ungleichungen approximieren.

# Literatur


[1] H. Alt, B. Behrends, J. Blömer: 'Approximate matching of polygonal shapes', Proceedings 7th Annual Symposium on Computational Geometry, 1991, 186-193

[2] O. Aichholzer, H. Alt, G. Rote: 'Matching Shapes with a Reference Point', in International Journal of Computational Geometry and Applications, Volume 7, pages 349-363, August 1997

[3] P. J. Agarwal, M. Sharir, S. Toledo: 'Applications of parametric searching in geometric optimization', Proc. 3rd ADM-SIAM Sympos. Discrete Algorithm, 1992, 72-82

[4] P. P. Chew, M. T. Goodrich, D. P. Huttenlocher, K. Kedem, J. M. Kleinberg, D. Kravets: 'Geometric pattern matching under Euclidian motion', Proc. 5th Canadian Conference on Computational Geometry, 1993, 151-156