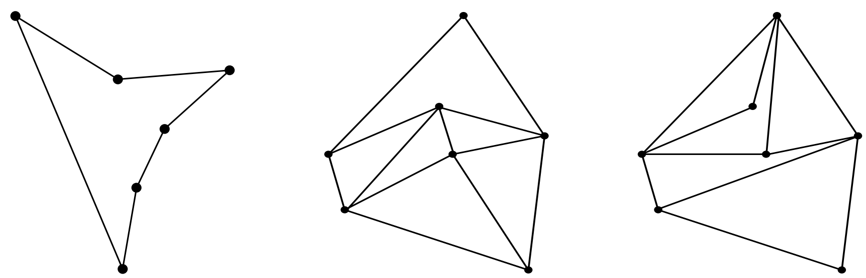
Über die Extrempunkte des PPT Polytopes

André Schulz

14. Oktober 2003

1 Problembeschreibung

Ein Pseudodreieck ist ein Polygon mit 3 konvexen Punkten (Abbildung 1a). Alle anderen Punkte liegen auf einem konkaven Bogen zwischen zwei Eckpunkten. Wenn eine gegebene Menge von n Punkten $P = \{p_1 \ldots, p_n\}$ im $\mathbb{R}^2$ durch Pseudodreiecke vollständig überdeckt wird, so dass sich keine zwei Kanten schneiden, spricht man von einer Pseudotriangulierung (Abbildung 1b). Es existieren viele Algorithmen die auf solchen Triangulierungen arbeiten (zum Beispiel für Belechtungsprobleme [PV96]).



(a) (b) (c)

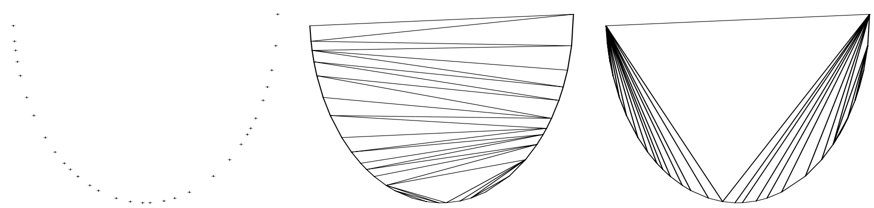
Abbildung 1: Ein Pseudodreieck (a), eine Pseudotriangulierung einer Punktmenge (b) und eine gespitzte Pseudotriangulierung der gleichen Punktmenge (c).

Die gespitzten Pseudotriangulieren sind eine Unterklasse der Pseudotriangulieringen. Alle Punkte einer solchen Triangulierung müssen gespitzt sein. Das heisst, jeder Punkt muss einen Winkel besitzen der grösser als 180° ist (Abbildung 1c). Fasst man gespitzte Pseudotriangulierungen als Gelenksysteme auf, haben diese die Eigenschaft, dass sie minimal starr sind. Dadurch eignen sie sich als Werkzeuge, um zum Beispiel Entfaltungen von Gelenksystemen zu Untersuchen [Rot02]. Andererseits kann man die Starrheit auch benutzen, um die gespitzen Pseudotriangulierungen an sich zu untersuchen. Es lassen sich auf diese Weise eine Reihe von interessanter Eigenschaften nachweisen.

2 Stand der Forschung

Im Zusammenhang mit Pseudotriangulierungen sind in der letzten Zeit eine Reihe von Veröffentlichungen erschienen. Die Aspekte sind dabei vielschichtig und beschäftigen sich unter anderem mit Reziproken Pseudotriangulierungen [DBS+03] und der Entfaltung von Gelenksystemen [Rot02].

Man kann beobachten, dass Gespitzte Pseudotraingulierungen, wenn sie als Gelenksysteme interpretiert werden, eine expansive Bewegung beschreiben, sobald eine äussere Kante von ihnen entfernt wird. Untersucht man diese Zusammenhänge weiter, kommt man zu einer Beschreibung aller möglichen gespitzten Pseudotriangulierungen einer Punktmenge als Ecken eines Polytopes [RSS01]. Zwischen den Ecken des Polytopes und den Pseudotriangulierungen besteht eine eins zu eins Beziehung. Das Polytop (in Zukunft PPT Polytop) bietet sich also an, die gespitzten Pseudotriangulierungen zu untersuchen. Wie bereits erwähnt, liefern expansive Bewegungen die Grundlage des PPT Polytops. Dafür wird jeder Punkt p_i mit einem Geschwindigkeitsvektor v_i assoziiert. Das Polytop befindet sich demnach im $\mathbb{R}^{2n}$ hat jedoch selbst eine Dimension von $2n-3$.



(a) (b) (c)

Abbildung 2: Eine zufällige Punktmenge auf dem Halbkreis (a) und ihr minimaler (b) und der maximaler (c) Punkt des PPT Polytops

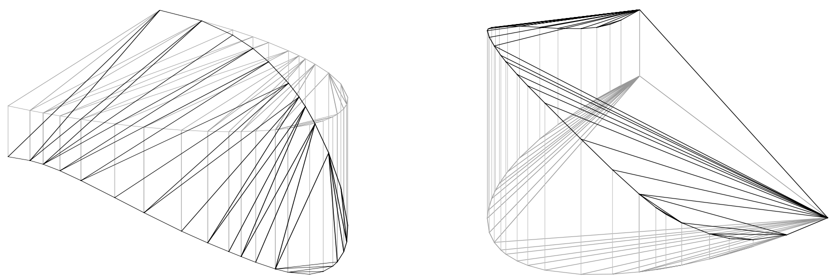
Die Existenz eines Polytops, welches die Menge der Pseudotriangulierungen beschreibt, wirft die Frage auf, ob man bestimmte Pseudotriangulierungen als Extrempunkte dieses Polytopes darstellen kann. Dies hätte den Vorteil, dass solche Pseudotriangulierungen schnell zu berechnen sind. Als kannonische Zielfunktion bietet sich $\sum_{i \leq n} \langle p_i, v_i \rangle$ an. Minimert man diese Funktion, minimieren sich auch die Entfernungen zwischen den Punkten bei der durch die v_i's beschriebene expansive Bewegung (Abbildung 2). Analog gilt dies für das Maximum dieser Zielfunktion. Es ist bislang noch nicht geklärt, welche geometrische Bedeutung diese Extrempunkte des PPT Polytops besitzen.

3 Eigene Ergebnisse

Um die Extrempunkte des PPT Polytopes zu untersuchen, benutzte ich die Dualität von Linearen Programmen. So wurde eine neue Beschreibung dieser Punkte gewonnen. Im Gegensatz zu den primalen Problem (welches Aussagen über die Geschwindigkeitsvektoren trifft) definiert sich das duale Programm über Stresse im Gelenksystem. Solche Stresse sind für den Gleichgewichtsfall gut erforscht. Die Beschreibungen der Extrempunkte stellen jedoch keinen Gleichgewichtsfall dar. Doch durch geeignete Manipulation der Punktmenge kann man ein solches Gleichgewicht erzeugen. Hierzu muss ein neuer Punkt im Mittelpunkt der Punktmenge eingefügt werden.

An Hand von dieser Beschreibung habe ich nun verschiedene Untersuchungen vorgenommen. Dabei lag die Konzentration auf zwei Spezialfälle. Im ersten Fall wurden Punktmengen mit 4 Punkten untersucht, im zweiten Fall konvexe

Punktmengen. Für den 4 Punkte Spezialfall, konnte man die Stresse über ein einfaches Gleichungssystem allgemein berechnen. Aus den Zulässigkeitsbedingungen des dualen Programms ergaben sich gewisse Forderungen, welche die Extrempunkte erfüllen müssen. Untersucht man diese genauer erkennt man, dass der Minimalpunkt das Produnkt der Flächen der Pseudotriangulierungen maximiert und der Maximalpunkt dieses Produkt minimert. Das gilt sowohl für den konvexen als auch für den nicht-konvexen Fall. Der Minimalpunkt des PPT Polytops erzeugt demnach eine gleichmässige Pseudotriangulierung.



(a) (b)

Abbildung 3: Das geliftete Minimum (a) bzw. Maximum (b) aus Abbildung 2

Für den konvexen Fall, kann man nicht die Stresse allgemein ausrechnen, denn das Gleichungssystem ist zu gross. Bereits für 5 Punkte erhält man eine Lösung, die keine Anschaulichkeit bietet. Da wir jedoch Stresse im Gleichgewicht betrachten, ist es moglich die Punkte in den $\mathbb{R}^3$ zu liften. Die Technik, die hierzu benutzt wird unter anderem in [Whi82] beschrieben. Betrachtet man die Vorzeichen der Stresse etwas genauer, wird man feststellen, dass die Extrempunkte die obere bzw. untere knovexe Hülle des gelifteten Polytops beschreiben. Diese interessante Eigenschaft ermöglicht es, die Extrempunkte des PPT Polytopes besser zu verstehen. Unglücklicher Weise besitzt die Höhe des Liftings eine unintuitive Form, so dass bislang nach keine weitere Geometrische Bedeutung gezeigt wurde. Man kann jedoch erkennen, dass auch hier der minimale Punkt eine möglichst ausgeglichene Flächenzerteilung unterstützt.

4 Ziele

Die primären Ziele meiner weiteren Arbeit orientieren sich vorerst an Fragestellungen zu den Extrempunkten des PPT Polytops. Insbesondere suche ich nach einer besseren Beschreibung des Liftings der Punktmenge, welche eine sehr exakte geometrische Beschreibung der Extrempunkte für den knovexen Fall mit sich bringen würde. Des weiteren sind bei den bisherigen Untersuchungen folgende Fragen aufgeworfen worden:

- Gibt es ein Lifting für den allgemeinen Fall ?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Minimalen und Maximalen Punkt?
- Kleinere lokale Änderungen der Punktmenge scheinen globale Veränderungen der Extrempunkte zu bewirken. Ist dies immer so?

- In wie weit kann man von einer ausgeglichenen Aufteilung durch Pseudoreiecke für den minimalen Punkt des PPT Polytops sprechen (formal)?

In der nächsten Zeit versuche ich einige dieser Fragestellungen zu untersuchen, denn dies wird mit Sicherheit zum Verständnis der Extrempunkte des PPT Polytopes beitragen.

Längerfristig sollten auch weitere Problem von gespitzen Pseudotriangulierungen untersucht werden. Hier liegt der Fokus auf ihren Entsprechungen im $\mathbb{R}^3$.

Literatur

[DBS+03] D.Orden, B.Servatius, H. Servatius, W. Whiteley, G. Rote, F. Santos, and I. Streinu. Non-crossing frameworks with non-crossing reciprocals, 2003.

[PV96] Michel Pocchiola and Gert Vegter. Pseudo-triangulations: Theory and applications. In *Proceedings of the Twelfth Annual Symposium On Computational Geometry (ISG '96)*, pages 291–300, New York, May 1996. ACM Press.

[Rot02] Günter Rote. Pseudotriangulations, polytopes, and how to expand linkages. In *Proceedings of the Eighteenth Annual Symposium on Computational Geometry (SCG-02)*, pages 133–134, New York, June 5–7 2002. ACM Press.

[RSS01] G. Rote, F. Santos, and I. Streinu. Expansive motions and the polytope of pointed pseudo-triangulations, 2001.

[Whi82] Walter Whiteley. Motion and Stresses of Projected Polyhedra. *Structural Topology*, 7:13–38, 1982.